

Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Producción de muones por aniquilación electrón-positrón a energías ultrarelativistas

Hedwin Aaron Encinas Acosta

Tesis presentada a la Universidad de Sonora
para la obtención del Título de
Licenciado en Física

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Índice general

1. Marco teorico	3
1.1. Sección eficaz	3
1.2. Ecuación de Dirac	5
1.2.1. Ecuación de Klein-Gordon	6
1.2.2. Ecuación de Dirac	8
1.2.3. Densidad y corriente de probabilidad	14
1.2.4. Forma covariante de la ecuación de Dirac	16
1.2.5. Soluciones a la particula libre	18
1.2.6. Autoestados de la helicidad	22
1.3. Regla dorada de Fermi	27
1.3.1. Densidad de estados	35
1.4. Flujo invariante de Lorentz	38
1.4.1. Marco de referencia del centro de masa	41

2. Teoría de perturbación de segundo y primer orden	44
2.1. Perturbaciones dependientes del tiempo	45
2.2. Electrodinámica cuántica	48
3. Aniquilación electrón-positrón	52
3.1. Aniquilación electron-positron	53
3.2. Amplitudes de la helicidad	54
3.3. Corrientes de probabilidad	57
3.4. Sección eficaz para el proceso de aniquilación electrón- positrón	60
3.5. Técnicas de traza	61
3.5.1. Relación de completez	62
3.5.2. Formalismo	63
3.6. Elementos de matriz	67
3.7. Aniquilación de electrón-positrón revisitado	69
4. Resultados	72
Apéndices	79
Bibliografía	87

Índice de figuras

1.1. La figura (a) muestra una una partícula incidente de tipo a (blanca) atravesando una región que contiene partículas del tipo b (negras). La figura (b) muestra una vista transversal de la región por donde pasa la partícula incidente en un tiempo δt , indicando la sección transversal de cada partícula la cual es mayor que su área aparente.	4
1.2. Grafica de la función ((1.66)) donde $T = 1$	31
1.3. Espacio fase no-relativista: (a) la función de onda de una partícula confinada a una caja de lado a , de tal manera satisfaga la condición de periodicidad en la frontera; (b) el número de estados disponibles en un intervalo $p \rightarrow p + dp$	36
2.1. Posibles ordenaciones en el tiempo para el proceso $a + b \rightarrow c + d$	45
2.2. Diagrama de Feynman para el proceso de dispersión ($e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$)	49
3.1. Diagrama de Feynman de orden más bajo (LO), para el proceso ($e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$)	53
3.2. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ proceso de aniquilación	55

4.1. En la gráfica (a) podemos ver la distribución de $\cos \theta$ respecto a la sección transversal diferencial para un proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ con una energía en el centro de masa de $E_{mc} = 346\text{MeV}$. En la figura (b) se observa la sección transversal para el mismo proceso avaluado en energías de 10-40 Gev	73
4.2. Comparación de las predicciones según la QED para la sección transversal con datos experimentales para el proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	75

Introducción

El objetivo de este trabajo es calcular la sección eficaz para el proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ a energías ultra-relativistas, esto es en el rango de energías $\sqrt{s} = 10 - 40$, donde $\sqrt{s} = (E_{e^+} + E_{e^-})$ se utiliza para denotar la energía en el centro de masa. Realizando una comparación del rango de energías en el que se está trabajando con las masas de las partículas, masa del electrón es $m_e \approx 0,5MeV$ y la masa del muon es $m_\mu \approx 105MeV$, es fácil ver que la energía en la que se trabaja es mucho mas grande que las masas de estas partículas, $E \gg m$, esto implica que $E \approx P$, donde P es la suma de momentos de estas partículas, por lo que podemos tomar el límite $m \rightarrow 0$, esto implica que estas partículas se mueven a velocidades similares a la de la luz, por ello a este limite se le conoce como límite ultra-relativista.

Como se mencionó anteriormente, el objetivo principal de este trabajo es calcular la sección transversal para el proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Esto se realiza utilizando dos métodos diferentes, para el primer método utilizamos la aproximación ultra-relativista, este método nos permite entender de una forma más clara la física detrás de este proceso, sin embargo, ya que esta es solo una aproximación, es necesario calcular la sección eficaz total para ver si esta aproximación es buen. Es aquí donde se utiliza un segundo método algebraico, este método nos da la forma completa de la sección eficaz, pero hace uso más de la matemática que de la física involucrada en el problema. Para finalizar se utilizan datos experimentales y se comparan con los cálculos realizados. Para estudiar la sección eficaz para el proceso en cuestión es necesario definir esta cantidad, de esta forma tendremos una idea de los conceptos físicos y matemáticos que necesitaremos. Por ejemplo, en el párrafo anterior se mencionó que las energías a las que se estudiará el proceso en

cuestión son energías ultra-relativistas, esto nos dice que trataremos con partículas que viajan a velocidades cercanas a las de la luz, de aquí podemos concluir que una teoría relativista para la mecánica cuántica es necesaria, para abordar este tipo de problemas. Esto se trata en el primer capítulo de este trabajo, en el cual se concluye que la ecuación de Dirac es la que proporciona los mejores resultados para estudiar fermiones, partículas con spin fraccionario, como los electrones, positrones, muones y anti-muones.

Capítulo 1

Marco teorico

1.1. Sección eficaz

Para definir la sección eficaz, empezamos por tomar en cuenta el flujo de partículas con un estado inicial dado, donde el flujo se define como el número de partículas que cruzan una unidad de área por unidad de tiempo. Imaginemos un haz de partículas de tipo a , con flujo ϕ_a cruzando una región del espacio que contiene una cantidad n_b de partículas del tipo b por unidad de volumen. La tasa de interacción por partícula, que se denotara como r_b , es proporcional al flujo de partículas de tipo a , por lo que podemos escribir r_b como

$$r_b = \sigma \phi_a \tag{1.1}$$

la parte más importante de la ecuación (1.1) es la cantidad σ , que está dada en unidades de área y se define como la sección eficaz de interacción. Podemos pensar en la sección eficaz como el área física de interacción de cada partícula, esto es cierto en la mecánica clásica, sin embargo, en el contexto de la mecánica cuántica, la sección eficaz proporciona una probabilidad de que las partículas interactúen.

La definición de sección eficaz se ilustra en la figura (1.1(a)) como una partícula a viajando a una

velocidad v_a en una región definida por el área A , que contiene una cantidad n_b de partículas del tipo b por unidad de volumen, estas partículas a su vez tienen una velocidad v_b en la dirección opuesta a v_a . En un tiempo δt las partículas a cruzan una región que contiene $\delta N = n_b(v_a + v_b)A\delta t$ partículas del tipo b .

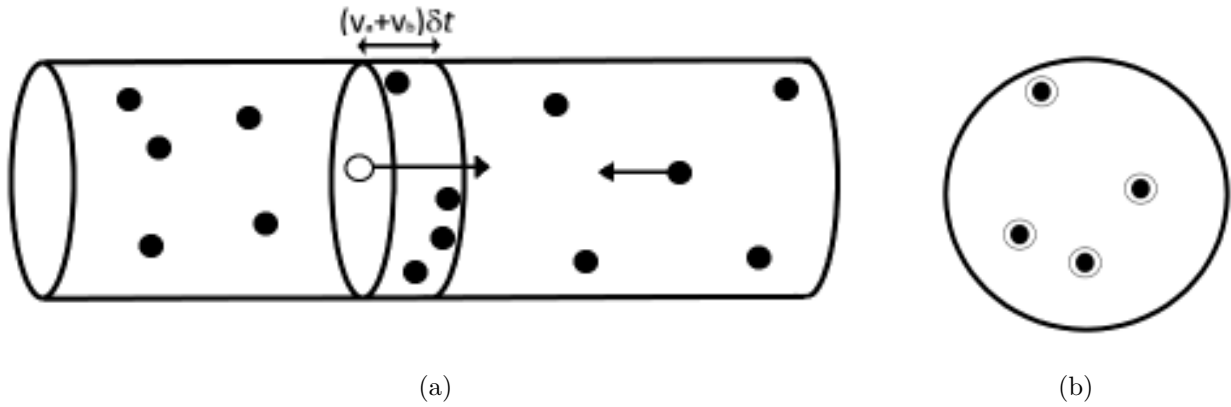


Figura 1.1: La figura (a) muestra una partícula incidente de tipo a (blanca) atravesando una región que contiene partículas del tipo b (negras). La figura (b) muestra una vista transversal de la región por donde pasa la partícula incidente en un tiempo δt , indicando la sección transversal de cada partícula la cual es mayor que su área aparente.

La probabilidad de interacción se puede obtener al dividir el área efectiva de la sección eficaz de las δN partículas, entre el área A . Esto se puede ver como la probabilidad de que las partículas incidentes pasen por alguna de las regiones de área σ alrededor de las partículas δN , esta área se ilustra en la figura (b). La probabilidad de interacción δP se puede escribir como

$$\delta P = \frac{\delta N \phi}{A} = \frac{n_b(v_a + v_b)A\sigma\delta t}{A} = n_b v \sigma \delta t$$

donde $v = v_a + v_b$. De esta forma la tasa de interacción para cada partícula de tipo a será

$$r_a = \frac{dP}{dt} = n_b v \sigma.$$

Para un haz de partículas de tipo a , con un número de densidad de n_a , confinadas a un volumen

V , la tasa de interacción total es:

$$rate = r_a n_a V = (n_b v \sigma) n_a V.$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$rate = (n_a v)(n_b V)\sigma = \phi N_b \sigma \quad (1.2)$$

Así, la tasa de transición total es

$$rate = \text{flujo} \times \text{número de partículas objetivo} \times \text{sección transversal},$$

Esto coincide con (1.1). Así, la sección transversal para un proceso se define como

$$\sigma = \frac{\text{número de interacción por unidad de tiempo por partículas objetivo}}{\text{flujo incidente}}.$$

Es necesario notar que el flujo ϕ toma en cuenta el movimiento relativo de las partículas.

Con esto queda claro que hay dos cantidades principales que nos interesa calcular, la tasa de transición de estados, y el flujo de partículas. De la mecánica cuántica hay una expresión que nos dá la tasa de transición entre estados, esta expresión es llamada la Regla Dorada de Fermi. El flujo de partículas lo obtendremos como resultado de utilizar esta regla en el Capítulo (1.3) . Por ahora, comencemos por definir una teoría relativista para la mecánica cuántica.

1.2. Ecuación de Dirac

Antes de pasar a estudiar la ecuación de Dirac, veamos porque utilizaremos esta ecuación. Para esto se dará una breve introducción a la ecuación de Klein-Gordon y porque esta ecuación no nos es útil para este trabajo.

1.2.1. Ecuación de Klein-Gordon

Para darle un seguimiento apropiado a este trabajo, se comenzará con una breve introducción a la ecuación de Klein-Gordon, ya que el primer intento de formar una teoría relativista para la mecánica cuántica fue basado en esta ecuación. Los requerimientos para formular una teoría relativista de la mecánica cuántica es que, la ecuación de onda asociada se invariante ante transformaciones de Lorentz, tomemos como ejemplo la ecuación de Schrödinger. Esta ecuación tiene derivadas de primer orden en el tiempo y derivadas de segundo orden en el espacio, debido a la diferente dependencia respecto al espacio y el tiempo, esta no es invariante ante transformaciones de Lorentz, por lo cual no proporciona una descripción adecuada a partículas relativistas. Otro requerimiento es que dicha ecuación respete la relación de energía de Einstein, comencemos contrayendo la ecuación de Klein-Gordon con esta relación:

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.3)$$

Si tomamos a E y P como operadores

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \hat{P} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.4)$$

actuando sobre una función de onda ψ , obtenemos

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi - m^2 c^4 \psi \quad (1.5)$$

Esta es la ecuación de Klein-Gordon para la cuántica relativista, la cual tiene derivadas de segundo orden en ambos términos, espacial y temporal, por lo que esta es invariante de Lorentz. Para demostrar esto reescribimos (1.5) en su forma invariante

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m \frac{c^4}{\hbar^2}) \psi = 0 \quad (1.6)$$

donde

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

es el producto escalar invariante de Lorentz de dos cuatro-vectores. La ecuación de Klein-Gordon tiene la siguiente solución

$$\psi(X, t) = N e^{i(PX - Et)}$$

Donde N es la constante de normalización. Al sustituir esto en obtenemos

$$E^2 \psi(X, t) = P^2 c^2 \psi(X, t) + m^2 c^4 \psi(X, t)$$

con esto podemos ver que la solución cumple con la relación de energía de Einstein donde la energía de la partícula es

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

Es aquí donde encontramos un problema, podemos ver que existen soluciones con energías negativas, las cuales no sabemos cómo interpretar, y a diferencia de la mecánica clásica, donde estas soluciones se pueden ignorar, en la mecánica cuántica todas las soluciones posibles se deben de tomar en cuenta para obtener un conjunto completo de estados, por lo que no podemos ignorar dichas soluciones. Otro problema surge con la densidad de probabilidad, veamos. Tomando la diferencia $\psi^* \times (1.5) - \psi \times (1.5)^*$, usando $*$ para referirnos al conjugado de esas ecuaciones, tenemos

$$\hbar^2 \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \hbar^2 \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = \psi^* (\hbar^2 c^2 \nabla^2 - m^2 c^4 \psi) - \psi (\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi^* - m^2 c^4 \psi^*)$$

tilizando la regla de la cadena

$$\hbar^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = \hbar^2 c^2 \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*).$$

Comparando con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

obtenemos la densidad de probabilidad y la corriente de probabilidad

$$\rho = i \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad J = -i(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (1.7)$$

Donde el factor de i se incluye para asegurar que la densidad de probabilidad es real. Substituyendo la solución a la ecuación de Klein-Gordon en la densidad de probabilidad obtenemos

$$\rho = 2|N|E$$

La dependencia de la densidad de probabilidad en la energía implica que existen densidades de probabilidades negativas, esto en su momento fue un problema, por lo cual se buscó una nueva ecuación para describir la mecánica cuántica relativista. El resultado fue la ecuación de Dirac y es lo que se estudiara en la siguiente sección.

1.2.2. Ecuación de Dirac

Ya que se ha dado una explicación de porque la ecuación de Klein-Gordon no es útil en este trabajo, empecemos por derivar la ecuación de Dirac. La ecuación de Dirac fue la respuesta a los problemas que presenta la ecuación de Klein-Gordon, esta ecuación también proporciona una descripción natural del spin intrínseco y los momentos magnéticos de las partículas con spin fraccionario, también conocidas como fermiones.

Comencemos por imponer que la ecuación de Dirac cumpla con tres condiciones

- La densidad de probabilidad para la ecuación de continuidad debe de ser de la forma

$$\rho(x) = \psi^* \psi \quad (1.8)$$

para asegurar que esta sea positiva, además debe ser constante en el tiempo.

- Debe cumplir con la relación energía-momento ((1.3)) para la partícula libre relativista
- Debe existir una forma covariante, es decir, debe de existir una forma invariante ante transformaciones de Lorentz.

Ya conocemos una ecuación que cumple con el primer punto, la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (1.9)$$

Se propone que la ecuación de Dirac tenga la misma forma, es decir, que tenga derivadas de primer orden temporales y espaciales . Por esta razón, se propone un hamiltoniano de la forma

$$\hat{H} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 \right]. \quad (1.10)$$

Sustituyendo (1.10) en (1.9) se obtiene la ecuación de Dirac

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \psi. \quad (1.11)$$

El punto de atención aquí son los coeficientes $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$, sospechamos que estos coeficientes no son números escalares y por esta razón se denotan con el símbolo \wedge . Para encontrar la naturaleza de $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$ debemos tomar en cuenta que las soluciones a (1.11) deben satisfacer la relación de energía-momento de Einstein.

Para que la ecuación de Dirac cumpla con la relación de energía-momento ψ , debe satisfacer la

ecuación de Klein-Gordon

$$-i\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4) \psi. \quad (1.12)$$

ya que como se mostró anteriormente, esta ecuación cumple con esta condición. Para esto debemos obtener la segunda derivada de la ecuación de Dirac, en los términos espaciales y de tiempo. Primero proponemos que el hamiltoniano en la ecuación de Klein-Gordon sea el cuadrado de un hamiltoniano anterior, este hamiltoniano es de la forma

$$H = \left(\frac{c\hbar}{i} \hat{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \quad (1.13)$$

donde $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$ son coeficientes de la ecuación Dirac y el índice $i = 1, 2, 3$. Obtenemos el cuadrado del hamiltoniano

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{c\hbar}{i} \hat{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \left(\frac{c\hbar}{i} \hat{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \\ &= -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j} \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\hbar m_0 c^3}{i} \left(\sum_i \hat{\alpha}_i \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \hat{\beta} \hat{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4. \end{aligned}$$

La primer sumatoria se puede escribir como

$$-\hbar^2 c^2 \sum_{i,j} \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j} \frac{\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

el factor de $1/2$ se agrega para evitar la suma doble sobre el mismo índice. En la segunda sumatoria, podemos renombrar los términos $\hat{\beta} \hat{\alpha}_{i,j}$, para poder agruparlos:

$$\frac{\hbar m_0 c^3}{i} \left(\sum_i \hat{\alpha}_i \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \hat{\beta} \hat{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\hbar m_0 c^3}{i} \sum_i \left(\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Así H^2 es de la forma

$$H^2 = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j} \frac{\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\hbar m_0 c^3}{i} \sum_i \left(\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4 \quad (1.14)$$

sustituyendo este hamiltoniano en la ecuación de Dirac (1.11) obtenemos

$$-i\hbar\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(-\hbar^2c^2 \sum_{i,j}^3 \frac{\hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j\hat{\alpha}_i}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\hbar m_0c^3}{i} \sum_i^3 \left(\hat{\alpha}_i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_i \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4 \right) \psi \quad (1.15)$$

Comparando (1.15) con (1.12) podemos ver que para satisfacer la ecuación de Klein-Gordon, los siguientes requisitos son necesarios para $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j\hat{\alpha}_i &= 2\delta_{ij}\mathbb{1} \\ \hat{\alpha}_i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_i &= 0 \\ \hat{\alpha}^2 = \hat{\beta}^2 &= \mathbb{1} \end{aligned} \quad (1.16)$$

la única forma que $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$ puedan cumplir con estas condiciones, es solo si estas son matrices.

De vuelta a la ecuación de Dirac, podemos decir que si $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son matrices, entonces ψ no es un número escalar, sino un vector columna

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x,t) \\ \psi_2(x,t) \\ \vdots \\ \psi_N(x,t) \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

De la relación $\hat{\alpha}^2 = \hat{\beta}^2 = \mathbb{1}$ podemos concluir que los valores propios son ± 1 . Esto se puede demostrar como sigue: sea F una autofunción de $\hat{\alpha}_i$ tenemos

$$\hat{\alpha}_i F = \lambda F$$

donde λ es un valor propio, aplicando α_i de nuevo

$$\hat{\alpha}_i^2 F = \lambda^2 F = \mathbb{1}F$$

de aquí podemos concluir que $\lambda = \pm 1$.

También podemos demostrar que la traza de estas matrices es 0, utilizando la relación $\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i = 0$ se obtiene

$$\hat{\alpha}_i \hat{\beta} = -\hat{\beta} \hat{\alpha}_i \quad (1.18)$$

y utilizando la propiedad cíclica de la traza $Tr(BCA) = Tr(ABC)$, tenemos que traza de $\hat{\alpha}_i$

$$Tr(\hat{\alpha}_i) = Tr(\hat{\alpha}_i \hat{\beta}^2) = Tr(\hat{\beta} \hat{\alpha}_i \hat{\beta}),$$

ahora de (1.18) lo anterior puede ser reescrito como

$$Tr(\hat{\alpha}_i) = Tr(-\hat{\alpha}_i),$$

esto sólo puede ser verdad si la traza es 0. Ya que la traza de las matrices $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$ es igual a la suma de sus de sus valores propios, es decir es igual a 0, esto solo puede ser si las matrices son de dimensiones iguales $N \times N$. Por último, para que el hamiltoniano permanezca Hermitiano, las matrices tienen que ser Hermitianas también, esto es

$$\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i^\dagger$$

$$\hat{\beta}_i = \hat{\beta}_i^\dagger,$$

con las relaciones que se han establecido con las matrices, podemos introducir una forma explícita para las matrices y se escoge la representación de Dirac-Pauli, basadas en las matrices de spin de Pauli

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

donde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Aquí σ_i son las matrices de Pauli y I son las matrices identidad 2×2 , por lo que $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son matrices 4×4 . Esto implica que las soluciones a la ecuación de Dirac (1.17), tienen 4 componentes, además por su relación con las matrices de spin de Pauli se les conoce como biespinores o espinores de Dirac. Vale la pena mencionar que las predicciones físicas que se obtengan de la ecuación de Dirac no dependerán de la representación específica que se utilice. La física de la ecuación de Dirac depende del álgebra satisfecho por las matrices $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$. Por lo tanto, cualquier forma explícita que satisfaga las relaciones (1.16), son una forma válida para las matrices.

Demostremos que la condición $\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$ se cumple, primero calculemos el término $\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j$

$$\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_j \end{pmatrix}$$

para $\hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i$ tenemos

$$\hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \sigma_j \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_j \sigma_i \end{pmatrix}$$

Así

$$\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i \end{pmatrix}$$

Calculemos el producto resultante para las matrices σ_1 y σ_2

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad y \quad \sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

De estos podemos ver que $\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_1 = 0$. Ahora para $\hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_2$

$$\sigma_2 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_2 = 2\mathbb{1}.$$

Haciendo lo mismo para las combinaciones de matrices restantes obtenemos el mismo resultado; 0 para matrices diferentes y 2 $\mathbb{1}$ cuando las matrices Pauli son iguales, por lo tanto se cumple la condición.

1.2.3. Densidad y corriente de probabilidad

Veamos si la ecuación de Dirac cumple con el primer punto que impusimos sobre esta, que exista una densidad de probabilidad positiva. Antes de continuar, introducimos las unidades naturales en la física de partículas. Para esto se elige

$$\hbar = c = 1 \tag{1.21}$$

Esto nos permite expresar cantidades como tiempo, energía, longitud y área en términos de una sola cantidad, esto es, en GeV (gigaelectronvoltios). Además, tiene la ventaja de simplificar expresiones algebraicas ya que no hay necesidad de cargar con potencias de \hbar y c . Esto simplifica la ecuación de Dirac

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-i \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} m_0 \right] \psi. \tag{1.22}$$

Para encontrar la densidad de probabilidad y la corriente de probabilidad, debemos introducir la forma general de la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.23}$$

donde j es la corriente de probabilidad y ρ es la densidad de probabilidad. Para calcular la ecuación

de continuidad para la ecuación de Dirac necesitamos el conjugado Hermitiano de (1.22) que es

$$-i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} = \left[i \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta}m_0 \right] \psi^\dagger \quad (1.24)$$

el conjugado Hermitiano ψ^\dagger reemplaza el complejo conjugado ψ^* porque ψ es un espinor de 4 componentes. Dado que $\hat{\alpha}^\dagger = \hat{\alpha}$, las matrices permanecen igual. El procedimiento es el mismo utilizado para la ecuación de Schrödinger. Multiplicando (1.22) por ψ^\dagger desde la izquierda y (1.24) por ψ por la derecha. Finalmente sumamos (1.22) y (1.24) y dividimos por i , para obtener

$$\begin{aligned} \psi^\dagger \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} \psi &= \psi^\dagger \left[-\hat{\alpha}_1 \frac{\partial\psi}{\partial x^1} - \hat{\alpha}_2 \frac{\partial\psi}{\partial x^2} - \hat{\alpha}_3 \frac{\partial\psi}{\partial x^3} + \hat{\beta}m_0 \right] \\ &+ \left[-\hat{\alpha}_1 \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^1} - \hat{\alpha}_2 \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^2} - \hat{\alpha}_3 \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^3} - \hat{\beta}m_0 \right] \psi. \end{aligned}$$

Los términos con masa se cancelan, de aquí es fácil ver que la derivada de un producto se aplica en cada lado de la igualdad, esto es

$$\frac{\partial\psi^\dagger\psi}{\partial t} = -\frac{\partial\psi^\dagger\hat{\alpha}_i\psi}{\partial x^i} \quad (1.25)$$

Comparando (1.25) y (1.23) podemos ver que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\psi^\dagger\psi}{\partial t} \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot j = \frac{\partial\psi^\dagger\hat{\alpha}_i\psi}{\partial x^i} = \nabla \cdot \psi^\dagger\hat{\alpha}_i\psi \quad (1.27)$$

por lo tanto

$$\rho = \psi^\dagger\psi \quad (1.28)$$

$$j = \psi^\dagger\hat{\alpha}_i\psi \quad (1.29)$$

En términos de los componentes de los espinores de Dirac la densidad de probabilidad es

$$\psi^\dagger\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

como podemos ver, la densidad de probabilidad es positiva, esto cumple con la primera condición que se le impuso a la ecuación de Dirac. Esto elimina el problema de densidades de probabilidad negativas que se tenía con la ecuación de Klein-Gordon.

1.2.4. Forma covariante de la ecuación de Dirac

Antes de encontrar una solución a la ecuación de Dirac para la partícula libre, pasemos a probar la última condición que impusimos sobre la ecuación de Dirac, esta es, que exista una forma covariante de (1.22). Utilizar la forma covariante de (1.22) conducirá a algunas identidades que simplificarán algunos de los cálculos en este trabajo, pero la razón más importante, es porque la forma covariante es invariante de Lorentz.

Para esto multiplicamos el lado izquierdo de (1.22) por $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_1\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_2\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_3\frac{\partial\psi}{\partial x^3} - \hat{\beta}^2m_0\psi = 0 \quad (1.30)$$

Llamaremos γ al producto entre las matrices $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$

$$\gamma^0 \equiv \hat{\beta} \quad \gamma^k \equiv \hat{\beta}\hat{\alpha}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.31)$$

Donde $k = 1, 2, 3$. Etiquetando a las 4 matrices γ con el índice μ y utilizando la definición de la cuatro-derivada covariante

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

podemos reescribir (1.30) de una forma más compacta

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0. \quad (1.32)$$

Por supuesto, las propiedades de las matrices γ se pueden obtener de (1.16), principalmente $\hat{\beta}^2 = \hat{\alpha}^2 = \mathbb{1}$ y $\hat{\beta}\hat{\alpha} = -\hat{\alpha}\hat{\beta}$. Así obtenemos las siguientes relaciones para las matrices γ

$$(\gamma^0)^2 = \hat{\beta}^2 = \mathbb{1}$$

$$(\gamma^k)^2 = \hat{\beta}\hat{\alpha}_i\hat{\beta}\hat{\alpha}_i = -\hat{\alpha}_i\hat{\beta}\hat{\beta}\hat{\alpha}_i = \mathbb{1}$$

$$\gamma^\nu \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^\nu \quad \mu \neq \nu.$$

Las expresiones anteriores se pueden expresar como una relación de anticommutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (1.33)$$

Ahora vemos si las matrices γ son Hermitianas

$$(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$$

$$(\gamma^k)^\dagger = (\beta\alpha_k)^\dagger = \alpha_k^\dagger \beta^\dagger = \alpha_k \beta = -\beta\alpha_k = -\gamma^k$$

podemos ver que el γ^k es anti-Hermitiano

Corriente covariante

Se encontró la forma de la corriente de probabilidad en (1.27) y de aquí se puede ver que depende explícitamente de las matrices $\hat{\alpha}_i$. Así podemos reescribir la corriente de probabilidad en términos

de las matrices γ

$$j = \psi^\dagger \hat{\beta}^2 \hat{\alpha}_k \psi$$

sabemos que $\gamma^0 = \hat{\beta}^2$ y $\gamma^k = \hat{\beta} \hat{\alpha}_k$. Así introducimos la cuatri-corriente

$$j^\mu = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \psi. \quad (1.34)$$

Introduciendo el espinor adjunto $\bar{\psi}$, definido como

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi^*)^T \gamma^0 \\ &= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*) \end{aligned}$$

con esto podemos reescribir (1.34) como sigue

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.35)$$

donde $\mu = 0, 1, 2, 3$

1.2.5. Soluciones a la partícula libre

Las soluciones a la partícula libre para la ecuación de Dirac son funciones de onda plana de la siguiente forma

$$\psi = u(E, p) e^{i(p \cdot x - Et)} \quad (1.36)$$

donde $u(E, p)$ se denominan los espinores de Dirac. La forma de estos espinores son las siguientes: para las partículas tenemos

$$\psi_i = u_i(E, p) e^{i(p \cdot x - Et)} \quad i=1,2$$

$$u_1(E, p) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2(E, p) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Y para las antipartículas

$$\psi_i = v_i(E, p) e^{-i(p \cdot x - Et)} \quad i = 1, 2$$

$$v_1 = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Donde N es una constante de normalización. Al sustituir estas soluciones en la ecuación de Dirac, recuperamos la relación de energía momento de Einstein

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}.$$

Es importante mencionar que existen soluciones a la ecuación de Dirac las cuales dan como resultado estados con energías negativas, esto es

$$E = -\sqrt{p^2 + m^2}$$

sin embargo, estas no son de interés en este trabajo. El cálculo detallado de estas soluciones, al igual que las soluciones (1.37) y (1.38) se encuentran en el Apéndice A.

Encontremos la constante de normalización para el espinor ψ_1 de la definición de densidad de probabilidad

$$\rho = \psi^\dagger \psi = (\psi^*)^T \psi = u_1^\dagger u_1$$

T es para denotar la traspuesta del espinor. Esto explícitamente es

$$u_1^\dagger u_1 = |N|^2 \left(1 + \frac{p_x^2}{(E+m)^2} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{(E+m)^2} \right) = |N|^2 \frac{2E}{E+m}$$

Normalizando a $2E$ partículas por unidad de volumen se obtiene

$$N = \sqrt{E+m}.$$

El mismo resultado se encuentra para el resto de los espinores u y v .

Existen varias interpretaciones a las soluciones de la ecuación de Dirac, para este trabajo se tomará la siguiente: Los espinores de Dirac son soluciones que describen fermiones, partículas con spin semi entero, para los cuales u_1 y u_2 , son espinores que corresponden a partículas con masa y carga eléctrica, mientras que los espinores v_1 y v_2 , son los espinores para las antipartículas, las cuales tienen las mismas propiedades que sus contrapartes, la única excepción es que estas tienen carga eléctrica opuesta.

Sin embargo, ¿Por qué tenemos 4 soluciones en lugar de dos?, esto tiene que ver con el nombre que reciben estas soluciones, espinores, este nombre se debe a que cada espinor describe los posibles estados de spin de la partícula que describen, recordemos que para fermiones, como electrones, muones y sus antipartículas, los posibles estados de spin a los que estos tienen acceso son dos $\pm 1/2$, entonces se necesitan dos espinores para las partículas, donde cada uno es uno de los posibles estados de spin, y dos para las antipartículas. En la siguiente sección esto se ilustra utilizando un ejemplo.

Spin

Estudiamos la relación que tiene los espinores de Dirac con el spin. Para esto introducimos el operador de spin

$$\hat{S} \equiv \frac{1}{2}\hat{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Tomemos una particular que se mueve en la dirección z , esto es $p_x = 0$, $p_y = 0$ y $p_z = \pm p$, sustituyendo esto en (1.37) y (1.38)

$$u_1(E, p) = N_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\pm p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2(E, p) = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\mp p}{E+m} \end{pmatrix} \quad v_1 = N \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mp p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = N \begin{pmatrix} \frac{\pm p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El operador de spin para una partícula que se mueve solo en la dirección z es

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando \hat{S}_z a u_1 y u_2

$$\hat{S}_z \frac{1}{2} u_1(E, 0, 0, \pm p) = \frac{1}{2} u_1(E, 0, 0, \pm p),$$

$$\hat{S}_z \frac{1}{2} u_2(E, 0, 0, \pm p) = -\frac{1}{2} u_2(E, 0, 0, \pm p).$$

Para antipartículas, el operador de spin esta dado por $\hat{S}_z^{(v)} = -\hat{S}_z$, por lo tanto

$$\hat{S}_z^{(v)} \frac{1}{2} v_1(E, 0, 0, \pm p) = -\hat{S}_z \frac{1}{2} v_1(E, 0, 0, \pm p) = \frac{1}{2} v_1(E, 0, 0, \pm p),$$

$$\hat{S}_z^{(v)} v_2(E, 0, 0, \pm p) = -\hat{S}_z v_2(E, 0, 0, \pm p) = -\frac{1}{2} v_2(E, 0, 0, \pm p).$$

Es fácil ver que para las partículas con momento $P = (0, 0, 0, \pm p)$, los espinores u_1 y v_1 representan las partículas con spin $1/2$, mientras que los espinores u_2 y v_2 representan las partículas con spin $-1/2$. En otras palabras, los espinores de Dirac llevan ese nombre ya que contienen la información del spin. Sin embargo esto es solo fácil de ver para partículas que viajan en la dirección z , para partículas con más componentes en su momento, esta relación no es tan clara.

Además, el operador de spin no conmuta con el hamiltoniano de la ecuación de Dirac, esto quiere decir que el spin no es una cantidad que se conserva en el tiempo y por lo tanto no se puede formar una base común en la que los espinores sean autoestados del operador de spin y del hamiltoniano de la ecuación de Dirac. Debido a que la sección eficaz se estudiara en términos de los estados de spin, es necesario poder describir esta cantidad en términos de cantidades que se conserven y que sus autoestados correspondan a los autoestados de la ecuación de Dirac, por lo tanto, las soluciones a la partícula libre introducidas previamente no nos servirán en este trabajo. Es por eso que introducimos una nueva cantidad en términos del spin, la helicidad, en la siguiente sección se explica esta cantidad y se calculan los autoestados de helicidad para los espinores.

1.2.6. Autoestados de la helicidad

En los capítulos que siguen, la sección eficaz para el proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ se estudiara en términos de los estados de spin, recordemos que, en la mecánica cuántica, conocer todos los estados posibles es necesarios para poder estudiar un sistema. Para proceder, vamos a trabajar con los autoestados de la helicidad para la partícula libre. Primero definimos el concepto de helicidad, como la proyección del spin sobre la dirección de movimiento de la partícula en cuestión, el operador de helicidad correspondiente se define como

$$\hat{h} = \frac{\hat{S} \cdot \hat{p}}{p} = \frac{\hat{\Sigma} \cdot \hat{p}}{2p} \quad (1.40)$$

donde \hat{p} es el operador de momento y $\hat{\Sigma}$ es

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Para partículas con spin semi entero, fermiones, los posibles valores del spin medido en cualquier eje son $\pm 1/2$. De la misma manera, los posibles valores propios del operador de helicidad son $\pm 1/2$. Estos posibles estados de helicidad son nombrados *derechos* (\uparrow) cuando el spin apunta en la dirección de movimiento *izquierdos* (\downarrow) de lo contrario. Debido a que la helicidad es una proyección del spin en la dirección de movimiento, siempre se podrá encontrar una transformación que invierta el sentido de movimiento y por ende modifique el valor de la helicidad, por lo que la helicidad no es una cantidad invariante ante transformaciones de Lorentz. Otra propiedad del operador de helicidad es que éste conmuta con el hamiltoniano de la ecuación de Dirac, esto significa que dado un marco de referencia, la helicidad es invariante ante el tiempo y lo más importante, podemos formar una base común en la que los autoestados de helicidad son también autoestados del Hamiltoniano de la ecuación de Dirac. Para calcular los autoestados de helicidad que satisfagan el hamiltoniano de la partícula libre para la ecuación de Dirac así como para el operador de helicidad, los autoestados también deben satisfacer la ecuación de valor propio

$$\hat{h}u = \lambda u \quad (1.41)$$

desarrollando esta expresión y definiendo los espinores u como un vector columna de dos componentes

$$\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

tenemos

$$\frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones

$$(\sigma \cdot \hat{p})u_A = 2p\lambda u_A \quad (1.43)$$

$$(\sigma \cdot \hat{p})u_B = 2p\lambda u_B. \quad (1.44)$$

Para obtener los valores propios, multiplicamos (1.43) por $(\sigma \cdot \hat{p})$

$$(\sigma \cdot \hat{p})^2 u_A = 2p\lambda(\sigma \cdot \hat{p})u_A = 4p^2\lambda^2 u_A$$

donde

$$(\sigma \cdot \hat{p}) = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

con esto podemos calcular $(\sigma \cdot \hat{p})^2$

$$(\sigma \cdot \hat{p})^2 = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 & 0 \\ 0 & p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \end{pmatrix} = p^2$$

por lo tanto, (1.43) se convierte en

$$p^2 u_A = 4p^2 \lambda^2 u_A \quad (1.45)$$

de aquí tenemos que hay dos posibles valores propios $\lambda = \pm 1/2$. Ahora que conocemos los valores propios podemos proceder a calcular los estados propios, utilizando (1.44) y la relación

$$u_B = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_A$$

esta relación se obtiene al sustituir (1.42) en (1.36) y sustituir está en la ecuación de Dirac. Así terminamos con

$$u_B = \frac{1}{E + m} (\sigma \cdot \hat{p})u_A$$

$$u_B = \frac{2p\lambda}{E + m} u_A. \quad (1.46)$$

Antes de continuar vamos a expresar el momento en coordenadas polares esféricas, esto se hace con el fin de que las ecuaciones (1.43) y (1.44) se puedan resolver fácilmente, por lo tanto, el momento es

$$p = (p \sin \theta \cos \phi, p \sin \theta \sin \phi, p \cos \theta)$$

con esto y recordando que $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$, reescribimos el operador de helicidad

$$\frac{1}{2p} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ahora definiendo u_A como

$$u_A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dividiendo entre p y utilizando u_a obtenemos

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

de esto se obtiene

$$a \cos \theta + b \sin \theta e^{-i\phi} = 2\lambda a$$

de aquí obtenemos la relación

$$\frac{b}{a} = \frac{2\lambda - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\phi}. \quad (1.47)$$

Usando $\lambda = 1/2$ y las identidades trigonométricas

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

podemos reescribir (1.47) como

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} e^{i\phi} \\ \frac{b}{a} &= \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} e^{i\phi} \end{aligned} \quad (1.48)$$

con esto ahora conocemos los valores de a y b

$$\begin{aligned} a &= \cos \frac{\theta}{2} \\ b &= \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{aligned}$$

usando ésto y la relación (1.46), podemos obtener el estado derecho de helicidad, denotado u_{\uparrow}

$$u_{\uparrow} = N \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{p}{E+m} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{p}{E+m} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

donde la constante de normalización $N = \sqrt{E + m}$, normalizada a $2E$ partículas por unidad de volumen. Haciendo lo mismo pero ahora para $\lambda = -1/2$ obtenemos el estado izquierda u_{\downarrow}

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ \frac{p}{E+m} c \\ \frac{p}{E+m} se^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad u_{\downarrow} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ \frac{p}{E+m} s \\ \frac{-p}{E+m} ce^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

donde $s = \sin \frac{\theta}{2}$ y $c = \cos \frac{\theta}{2}$. Los Estados correspondientes para las antipartículas se calculan de la misma manera, pero dado que el operador de helicidad depende explícitamente del momento,

para una antipartícula se toma como el momento físico negativo, así, para $h = 1/2$ tenemos

$$\hat{h}v_{\downarrow} = -1/2v_{\downarrow}$$

de aquí, los dos estados de helicidad correspondientes a una antipartícula son

$$v_{\uparrow} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m}s \\ \frac{-p}{E+m}ce^{i\phi} \\ -s \\ ce^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad v_{\downarrow} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m}c \\ \frac{p}{E+m}se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

En el límite ultra-relativista, donde $E \gg m$ (1.50) Los términos de masa de (1.51) $m \rightarrow 0$ y $E = p$, así (1.51) se puede aproximar como

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad u_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ s \\ -ce^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad v_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} s \\ -ce^{i\phi} \\ -s \\ ce^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad v_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Con esto hemos obtenido las herramientas necesarias para trabajar con partículas libres. Sin embargo, esta no es la única herramienta que necesitaremos para encontrar la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, es por eso que en el siguiente capítulo derivaremos otra herramienta fundamental para estudiar dicho proceso, la regla dorada de Fermi.

1.3. Regla dorada de Fermi

El objetivo principal de este trabajo es calcular la sección transversal de un proceso de aniquilación. Hemos introducido la ecuación de Dirac y derivado lo que necesitamos de ella, principalmente los autoestados de helicidad, pero estos no son suficientes, se necesita otra herramienta, aquí es donde

encaja la regla de oro de Fermi. La regla de oro de Fermi nos permite calcular la tasa de transición entre estados, que a su vez nos permitirá calcular la sección transversal de dispersión. Esto se deriva de la mecánica cuántica no relativista comenzando con $\phi_k(x, t)$, que es una solución normalizada a la ecuación de Schrödinger para el hamiltoniano independiente del tiempo, esto significa que

$$\hat{H}_0\phi_k = E_k\phi_k(x, t) \quad y \quad \langle \phi_j | \phi_k \rangle = \delta_{jk}.$$

Introduciendo el hamiltoniano de interacción $\hat{H}'(x, t)$, que puede inducir una transición entre estados, con el cual la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\hat{H}_0 + \hat{H}']\psi \quad (1.53)$$

donde ψ puede expresarse en términos de un conjunto completo de estados del hamiltoniano no perturbado

$$\psi(x, t) = \sum_k c_k(t)\phi_k e^{-iE_k t} \quad (1.54)$$

$c_k(t)$ es el coeficiente dependiente del tiempo que permite transiciones entre estados. Sustituyendo (1.54) en (1.53) obtenemos la siguiente ecuación diferencial para el coeficiente $c(t)_k$

$$i\sum_k \left(\frac{\partial c_k}{\partial t} \phi_k(x, t) e^{-iE_k t} - iE_k c_k \phi_k(x, t) e^{-iE_k t} \right) = \sum_k c_k \hat{H}_0 \phi_k(x, t) e^{-iE_k t} + \sum_k \hat{H}' c_k \phi_k(x, t) e^{-iE_k t}. \quad (1.55)$$

Sabemos que $\hat{H}_0\phi_k(x, t)_k = E_k\phi_k(x, t)_k$, por lo que podemos eliminar el segundo término en el lado izquierdo y el primer término en el lado derecho, y por lo tanto (1.55) se convierte en

$$i\sum_k \frac{\partial c_k}{\partial t} \phi_k(x, t) e^{-iE_k t} = \sum_k \hat{H}' c_k \phi_k(x, t) e^{-iE_k t}. \quad (1.56)$$

Ahora para una aproximación de primer orden tomamos las siguientes condiciones, para un tiempo $t=0$, el estado inicial de la función de onda es $|i\rangle = \phi_i$, y el coeficiente es $c_k(0) = \delta_{ik}$. Si conside-

ramos el hamiltoniano perturbativo suficientemente pequeño, que en estos casos es constante para cualquier tiempo $t > 0$, tenemos que para todos los tiempos $c_i(t) \approx 1$ y ya que cualquier $k \neq i$ representa otro estado, tenemos $c_{k \neq i} \approx 0$. Con esto obtenemos

$$i \sum_k \frac{dc_k}{dt} \phi_k e^{-iE_k t} \approx \hat{H}' \phi_i e^{-iE_i t}. \quad (1.57)$$

Para obtener la ecuación diferencial correspondiente que nos dará el coeficiente $c_f(t)$, que en este caso corresponde a una transición a un estado final $|f\rangle = \phi_f$, tomamos el producto interior del lado izquierdo y del derecha de (1.57) con el estado final para obtener

$$i \sum_k \frac{dc_k}{dt} \phi_f^* \phi_k e^{-iE_k t} \approx \phi_f^* \hat{H}' \phi_i e^{-iE_i t} \quad (1.58)$$

Dado que ϕ_f es independiente del tiempo, no se ve afectada por la derivada respecto al tiempo. Integrando ambos lados de (1.58) en un cierto volumen V

$$i \sum_k \frac{dc_k}{dt} e^{-iE_k t} \int_V \phi_f^* \phi_k d^3x = e^{-iE_i t} \int_V \phi_f^* \hat{H}' \phi_i d^3x \quad (1.59)$$

recordando que $\langle \phi_f | \phi_k \rangle = \delta_{fk}$, tenemos $k = f$ y así

$$\frac{dc_f}{dt} = -i \langle \phi_f | \hat{H}' | \phi_i \rangle e^{i(E_f - E_i)t} \quad (1.60)$$

gracias al delta de Kronecker, sólo un término en la sumatoria sobrevive. Definiendo los elementos de la matriz de transición como

$$T_{fi} = \langle \phi_f | \hat{H}' | \phi_i \rangle. \quad (1.61)$$

Ahora para calcular la amplitud para una transición a un estado $|f\rangle$ en el tiempo $t = T$, integramos ambos lados de (1.60)

$$c_f(T) = -i \int_0^T T_{fi} e^{i(E_f - E_i)t} dt \quad (1.62)$$

puesto que T_{fi} es independiente del tiempo, podemos sacar el termino de la integral

$$c_f(T) = -iT_{fi} \int_0^T e^{i(E_f - E_i)t} dt. \quad (1.63)$$

La probabilidad de una transición a un estado $|f\rangle$ se define como

$$P_{if} = c_f(T)c_f^*(T) = |T_{fi}|^2 \int_0^T \int_0^T e^{i(E_f - E_i)t} e^{-i(E_f - E_i)t'} dt dt' \quad (1.64)$$

con estos podemos definir la tasa de transición de un estado inicial $|i\rangle$ a un único estado final $|f\rangle$ como

$$d\Gamma_{if} = \frac{P_{if}}{T} = \frac{1}{T} |T_{fi}|^2 \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} e^{-i(E_f - E_i)t'} dt dt'. \quad (1.65)$$

El límite se obtiene haciendo el cambio $t \rightarrow t + T/2$ y $t' \rightarrow t' + T/2$. Para el límite superior t tenemos

$$t + T/2 = T$$

$$t = T/2$$

y para el límite inferior tenemos

$$t + T/2 = 0$$

$$t = -T/2$$

lo mismo es válido para t' . Integrando tenemos

$$\begin{aligned} d\Gamma_{if} &= |T_{fi}| \frac{1}{T(E_f - E_i)^2} (e^{i(E_f - E_i)T/2} - e^{-i(E_f - E_i)T/2}) (e^{-i(E_f - E_i)T/2} - e^{i(E_f - E_i)T/2}) \\ &= |T_{fi}| \frac{1}{T(E_f - E_i)^2} (2 - e^{i(E_f - E_i)T} - e^{-i(E_f - E_i)T}) \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Euler obtenemos

$$d\Gamma_{if} = |T_{fi}| \frac{2}{T(E_f - E_i)^2} [1 - \cos(T(E_f - E_i))]$$

finalmente, utilizando la identidad trigonométrica

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

tenemos que la solución a la integral (1.65) es

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \quad x = \frac{T(E_f - E_i)}{2}. \quad (1.66)$$

En la figura (1.2) se muestra una gráfica de esta función

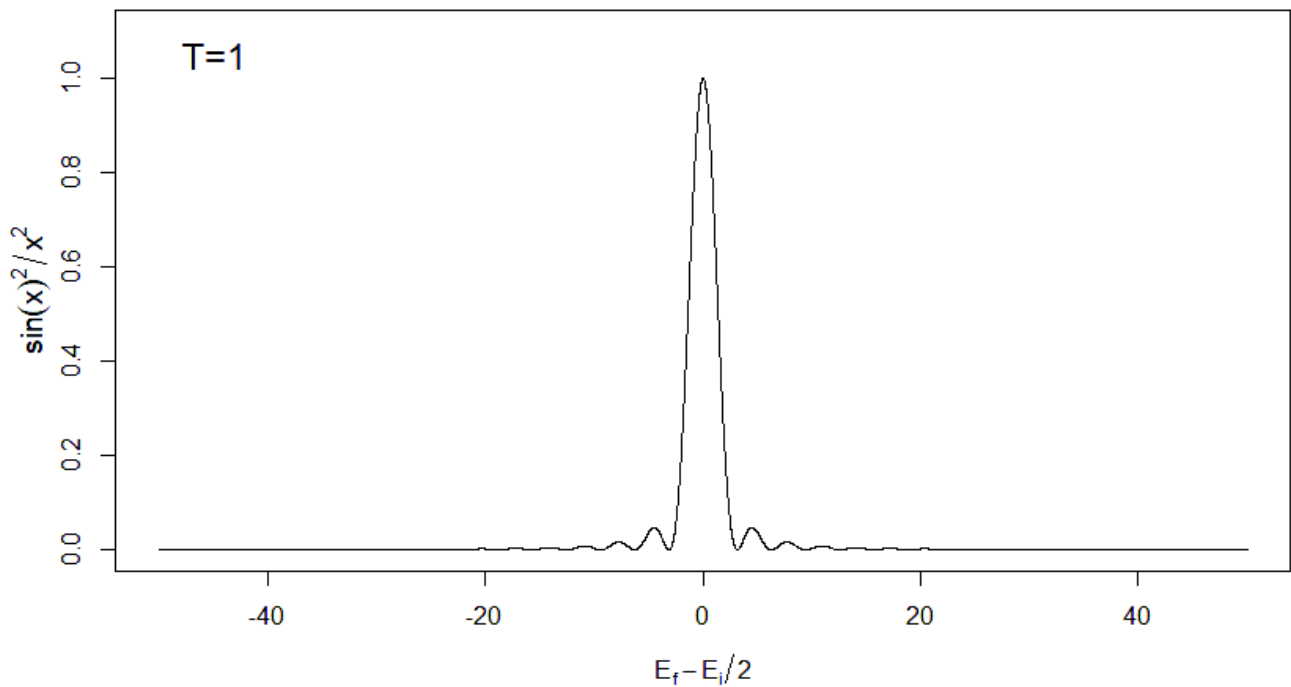


Figura 1.2: Gráfica de la función (1.66) donde $T = 1$

De aquí podemos ver que la tasa de transición sólo es relevante para los casos donde $E_f \approx E_i$. Dado que (1.66) es una función estrecha, (1.65) se puede reescribir como

$$d\Gamma_{if} = |T_{fi}|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} e^{-i(E_f - E_i)t'} dt dt' \right] \quad (1.67)$$

usando la definición de la función Delta de Dirac y tomando la transformada de Fourier de $\delta(x - a)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) \frac{1}{2\pi} e^{-ik(x-a)} dk = 1$$

$$2\pi\delta(x - a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)} dk. \quad (1.68)$$

Con estos podemos sustituir la integral sobre dt' con $2\pi\delta(E_f - E_i)$, por lo que obtenemos

$$d\Gamma_{if} = 2\pi |T_{fi}|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i) dt \right]. \quad (1.69)$$

Si el estado final accesible corresponde a un continuo de estados finales, de tal forma que para $E_f \rightarrow E_f + dE_f$ existan dn estados disponibles, entonces tendremos que la tasa de transición estará dada por

$$\Gamma_{if} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i) dt \right] dE_f \quad (1.70)$$

la función Delta implica que $E_f = E_i$, por lo que la exponencial es igual a 1 y la integral sobre dt es igual a 1 también, así que terminamos con

$$\Gamma_{if} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) dE_f \quad (1.71)$$

la función Delta todavía está en efecto ya que la integral es sobre dE_f . Otra vez, utilizando la

definición de Delta la tasa de transición total es

$$\Gamma_{if} = 2\pi |T_{fi}|^2 \left| \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i}. \quad (1.72)$$

El término $\left| \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i}$ se conoce como la densidad de estado, y se denotan como

$$\rho(E_i) = \left| \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i}.$$

Finalmente, la regla de oro de Fermi para la tasa de transición total es

$$\Gamma_{if} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i). \quad (1.73)$$

De manera alternativa, la densidad de estado se puede escribir como una integral sobre todos los estados finales, utilizando la delta de Dirac para imponer conservación de energía

$$\left| \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i} = \int \frac{dn}{dE} \delta(E_i - E) dE,$$

dándonos la forma alternativa de la regla dorada de Fermi

$$\Gamma_{if} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E) dn. \quad (1.74)$$

Hasta ahora sólo hemos obtenido una aproximación a primer orden de la tasa de transición total, esto es muy útil, pero no para lo que queremos hacer en este trabajo. Lo que necesitamos es una aproximación de segundo orden, ya que una aproximación a segundo grado corresponde a un cambio de estado debido a un estado intermedio, que es lo que se busca estudiar en este trabajo. Para esto reemplazamos $c_{k \neq i}$ en (1.56) con el resultado obtenido para $c_f(T)$ en (1.63) y de nuevo,

tomamos $c_i = 1$. Explícitamente esto es

$$i \sum_k \frac{\partial c_k}{\partial t} \phi_k e^{-iE_k t} \approx \hat{H}' \phi_i e^{-iE_i t} + (-i) \sum_{k \neq i} \hat{H}' \phi_k e^{i(E_f - E_k)t} \int_0^t T_{ki} e^{i(E_k - E_i)t'} dt' \quad (1.75)$$

donde la exponencial $e^{i(E_f - E_k)t}$ aparece debido al estado intermedio ϕ_k . Tomando el producto interior con ϕ_f y recordando que $T_{ki} = \langle \phi_k | \hat{H}' | \phi_i \rangle$ obtenemos

$$\frac{dc_f}{dt} \approx -i \langle \phi_f | \hat{H}' | \phi_i \rangle e^{i(E_k - E_i)t} + (-i)^2 \sum_{k \neq i} \langle \phi_f | \hat{H}' | \phi_k \rangle e^{i(E_f - E_k)t} \int_0^t \langle \phi_k | \hat{H}' | \phi_i \rangle e^{i(E_k - E_i)t'} dt'. \quad (1.76)$$

Puesto que la perturbación no está presente en el tiempo $t = 0$ y es constante para cualquier momento $t > 0$, la integral en (1.76) es

$$\int_0^t \langle \phi_k | \hat{H}' | \phi_i \rangle e^{i(E_k - E_i)t'} dt' = \frac{\langle \phi_k | \hat{H}' | \phi_i \rangle}{i(E_k - E_i)} e^{i(E_k - E_i)t} \quad (1.77)$$

reemplazando esto en (1.76)

$$\frac{dc_f}{dt} \approx -i \left[\langle \phi_f | \hat{H}' | \phi_i \rangle + \sum_{k \neq i} \frac{\langle \phi_f | \hat{H}' | \phi_k \rangle \langle \phi_k | \hat{H}' | \phi_i \rangle}{(E_k - E_i)} \right] e^{(E_f - E_k)t} e^{(E_k - E_i)t} \quad (1.78)$$

. Finalmente se obtiene

$$\frac{dc_f}{dt} \approx -i \left[\langle \phi_f | \hat{H}' | \phi_i \rangle + \sum_{k \neq i} \frac{\langle \phi_f | \hat{H}' | \phi_k \rangle \langle \phi_k | \hat{H}' | \phi_i \rangle}{(E_k - E_i)} \right] e^{(E_f - E_i)t}. \quad (1.79)$$

Podemos ver que, para una aproximación de segundo orden, el elemento de la matriz de transición es dado por

$$T_{if} = \langle \phi_f | \hat{H}' | \phi_i \rangle + \sum_{k \neq i} \frac{\langle \phi_f | \hat{H}' | \phi_k \rangle \langle \phi_k | \hat{H}' | \phi_i \rangle}{(E_k - E_i)} \quad (1.80)$$

1.3.1. Densidad de estados

Es posible obtener el número de estados dn disponibles haciendo uso del espacio fase. Para esto recordemos la condición de periodicidad en la frontera, donde, dada una ecuación de onda plana de la forma

$$\psi(x, t) = Ae^{i(p \cdot x - Et)},$$

donde A es la constante de normalización, podemos normalizar la función de onda plana a una partícula por volumen cuadrado de lado a . Utilizando la expresión no-relativista de la densidad de probabilidad, al normalizar, tenemos

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \psi^* \psi dx dy dz = 1.$$

Esto implica que la constante de normalización A es igual a

$$A^2 = 1/a^3 = 1/V,$$

donde V es el volumen de la caja. Esta normalización implica que

$$\psi(x + a, y, z) = \psi(x, y, z),$$

en otras palabras, se satisface la condición de periodicidad en la frontera. Esto implica que los componentes del momento están cuantizados

$$(p_x, p_y, p_z) = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{a},$$

donde n_x , n_y y n_z son números enteros. Esto restringe a los estados de momento a ser discretos como se muestra en la figura (1.3)(a). De esta forma cada espacio de momento ocupa un volumen

$$d^3\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 = \frac{(2\pi)^3}{V}$$

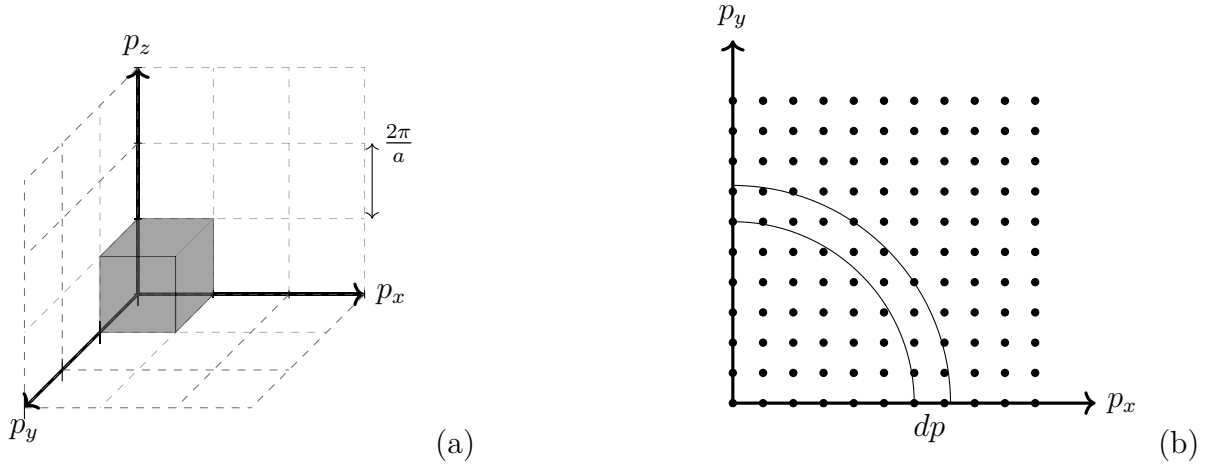


Figura 1.3: Espacio fase no-relativista: (a) la función de onda de una partícula confinada a una caja de lado a , de tal manera satisfaga la condición de periodicidad en la frontera; (b) el número de estados disponibles en un intervalo $p \rightarrow p + dp$.

Como podemos observar en la figura (1.3)(b) el número de estados dn disponibles en el rango $p \rightarrow p + dp$, es igual al volumen del cascaron esférico del espacio de momentos, en el momento p y grosor dp dividido por el volumen promedio que ocupa un estado, así tenemos

$$dn = 4\pi p^2 dp \times \frac{V}{(2\pi)^3},$$

por lo tanto

$$\frac{dn}{dp} = \frac{4\pi p^2}{(2\pi)^3} V.$$

Expresando la densidad de estado de la regla dorada de Fermi como

$$\rho(E) = \frac{dn}{dp} \left| \frac{dp}{dE} \right|$$

Así la densidad de estados corresponde a un numero de estados de momento accesibles a una partícula dado un estado inicial.

Debido al factor de V que aparece en la normalización de la ecuación de onda que se muestra en el cuadrado de los elementos de la matriz de transición T_{fi} , la expresión dn/dp para el espacio fase no dependerá del volumen. Ya que el volumen no aparece en el resultado final, podemos normalizar a una partícula por unidad de volumen simplificando los cálculos. En este caso, el numero de estados accesibles para una partícula asociada con un volumen infinitesimal en el espacio fase d^3p_i será

$$dn_i = \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}.$$

Para la transición de un estado inicial a un estado final que consiste de N partículas, tendremos $N - 1$ estados de momento independientes, ya que siempre podremos saber el estado final de una partícula por conservación del momento. De esta forma, el numero de estado independientes para un estado final de N partículas es

$$dn = \prod_{i=1}^{N-1} dn_i = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}.$$

Esto se puede escribir de una forma que incluya el volumen del espacio fase de la N -ésima partícula d^3p_N , además utilizando la delta de Dirac tridimensional para imponer conservación de momento, tenemos

$$dn = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \delta^3 \left(p_q - \sum_{i=1}^N p_i \right) d^3p_N, \quad (1.81)$$

donde p_q es el momento correspondiente al estado inicial. Así, la forma general no-relativista para el espacio fase de N cuerpos es

$$dn = (2\pi)^3 \prod_{i=1}^N \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \delta^3 \left(p_q - \sum_{i=1}^N p_i \right). \quad (1.82)$$

Utilizando (1.82) podemos escribir una forma más general de la regla dorada de Fermi

$$\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 \int |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E) \delta^3 \left(p_q - \sum_{i=1}^N p_i \right) \prod_{i=1}^N \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \quad (1.83)$$

Esta es la forma que utilizaremos de aquí en adelante.

1.4. Flujo invariante de Lorentz

Para calcular la sección transversal para un proceso de aniquilación, necesitamos la forma invariante de Lorentz de la regla de oro de Fermi y la expresión invariante de Lorentz apropiada para el flujo de partículas. Tomemos el proceso de aniquilación $a + b \rightarrow 1 + 2$, observado en el marco de reposo donde la partícula a tiene una velocidad v_a y la partícula b una velocidad v_b , retomando esto de la formulación de la sección transversal que se dio al principio de este trabajo.

La tasa de interacción en el volumen V está dada por

$$rate = \phi_a n_b V \sigma = (v_a + v_b) n_a n_b \sigma V \quad (1.84)$$

donde n_a y n_b son la densidad de las partículas a y b respectivamente y ϕ_a es el flujo de partículas de tipo a que pasa a través de un plano moviéndose a velocidad v_b

$$\phi_a = n_a (v_a + v_b).$$

Normalizamos la función de onda a una partícula en una caja de volumen V , tenemos que la densidad $n_a = n_b = 1/V$. Así, la tasa de interacción es

$$\Gamma_{fi} = \frac{(v_a + v_b) \sigma}{V} \quad (1.85)$$

con esto la sección transversal de interacción es

$$\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{(v_a + v_b)} \quad (1.86)$$

podemos ver que en la ecuación (1.86) el volumen no está incluido, esto es porque el término para el volumen será cancelado cuando normalicemos la función de onda en el espacio fase por lo que es más fácil considerar una partícula por unidad de volumen. Sabemos que Γ_{fi} es la regla de oro de Fermi y esta dada por

$$\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 \int |T_{fi}|^2 \delta(E_a + E_b - E_1 - E_2) \delta^3(P_a + P_b - P_1 - P_2) \frac{d^3 P_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \quad (1.87)$$

(1.86) se convierte

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{(v_a + v_b)} \int |T_{fi}|^2 \delta(E_a + E_b - E_1 - E_2) \delta^3(P_a + P_b - P_1 - P_2) \frac{d^3 P_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3}. \quad (1.88)$$

Podemos escribir T_{fi} en términos de los elementos de matriz \mathcal{M}_{fi} invariantes de Lorentz. Esto se hace normalizando la función de onda $\psi' = A\psi$, donde A es una constante de normalización, utilizando una normalización apropiada que sea invariante de Lorentz, en este caso $2E$ partículas por volumen

$$\int_V \psi'^* \psi' d^3 x = 2E$$

esto significa que

$$\psi' = (2E)^{1/2} \psi$$

usando esto para los elementos invariantes de Lorentz de la matriz de transición

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi'_1, \psi'_2, \dots | H' | \psi'_a, \psi'_b, \dots \rangle = (2E_1 2E_2 \dots 2E_a 2E_b)^{1/2} \langle \psi_1, \psi_2, \dots | H' | \psi_a, \psi_b, \dots \rangle.$$

De la regla de oro sabemos que

$$T_{fi} = \langle \psi_1, \psi, \dots | H' | \psi_a, \psi_b, \dots \rangle$$

y con esto podemos relacionar los elementos de matriz invariantes de Lorentz a los elementos de la matriz de transición

$$T_{fi} = \frac{\mathcal{M}_{fi}}{(2E_1 2E_2 \dots, 2E_a 2E_b)^{1/2}} \quad (1.89)$$

Usando esto en (1.88), podemos reescribirla como

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{4E_a E_b (v_a + v_b)} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(E_a + E_b - E_1 - E_2) \delta^3(P_a + P_b - P_1 - P_2) \frac{d^3 P_1}{2E_1} \frac{d^3 P_2}{2E_2} \quad (1.90)$$

esta es la forma invariante de Lorentz de la sección transversal de interacción. De (1.90) se deriva un cantidad muy importante, el flujo de Invariante Lorentz $F = 4E_a E_b (v_a + v_b)$. Para probar que esta cantidad es invariante de Lorentz, podemos comenzar reescribiendo el flujo en términos del momento de las partículas

$$F = 4E_a E_b \left(\frac{P_a}{E_a} + \frac{P_b}{E_b} \right) = 4(E_b P_a + E_a P_b)$$

$$F^2 = 16(E_a^2 P_b^2 + E_b^2 P_a^2 + 2E_a^2 E_b^2 P_a^2 P_b^2). \quad (1.91)$$

Si consideramos el caso donde la velocidad de las partículas incidentes es colineal

$$(P_a \cdot P_b)^2 = (E_a E_b + P_a P_b)^2 = E_a^2 E_b^2 + P_a^2 P_b^2 + 2E_a^2 E_b^2 P_a^2 P_b^2 \quad (1.92)$$

ahora despejando $2E_a^2 E_b^2 P_a^2 P_b^2$ de (1.92) y usándolo en (1.91) tenemos

$$F^2 = 16((P_a \cdot P_b)^2 + E_a^2 P_b^2 + E_b^2 P_a^2 - E_a^2 E_b^2 - P_a^2 P_b^2)$$

$$F^2 = 16((P_a \cdot P_b)^2 - (E_a^2 - P_a^2)(E_b^2 - P_b^2)) \quad (1.93)$$

Por último, utilizando la expresión de la energía relativista obtenemos

$$F = 4((P_a \cdot P_b)^2 - m_a^2 m_b^2)^{1/2}. \quad (1.94)$$

Ya que (1.94) está escrita en términos del cuatro-momento, podemos ver que es invariante de Lorentz y puesto que la integral adentro (1.90) es invariante de Lorentz, la sección transversal es invariante de Lorentz. Esto quiere decir que esta depende de la naturaleza de la interacción y no del tamaño del haz. Esto es muy importante pues se puede comparar un experimento con las mismas partículas, pero con haces de diferentes tamaños y obtener el mismo resultado.

1.4.1. Marco de referencia del centro de masa

Como se demostró anteriormente, la sección transversal es invariante de Lorentz, por lo que podemos tomar cualquier marco de referencia y trabajar desde allí. Para un proceso como $a + b \rightarrow 1 + 2$ elegiremos el marco más conveniente, este es, el marco de centro de masa. Esto significa que $P_a = -P_b = P_i^*$ y $P_1 = -P_2 = P_f^*$ y el centro de masa de energía será $\sqrt{s} = (E_a^* + E_b^*)$, con esto, el factor de flujo invariante de Lorentz es

$$F = 4E_a^* E_b^* (v_a + v_b) = 4E_a^* E_b^* \left(\frac{P_i^*}{E_a^*} + \frac{P_i^*}{E_b^*} \right) = 4p_i^* (E_b^* + E_a^*) = 4P_i^* \sqrt{s}$$

usando esto y el hecho de que $P_a + P_b = 0$ tenemos que la sección transversal (1.90)

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{4P_i^* \sqrt{s}} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2) \delta^3(P_1 + P_2) \frac{d^3 P_1}{2E_1} \frac{d^3 P_2}{2E_2}. \quad (1.95)$$

El término $\delta^3(P_1 + P_2)$ significa que $P_1 = -P_2$, como se indicó anteriormente, con esto, la integral

sobre d^3P_2 desaparece, por lo tanto

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{4P_i^* \sqrt{s}} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{1}{4E_1 E_2} \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2) d^3P_1 \quad (1.96)$$

haciendo un cambio a las coordenadas polares esféricas

$$d^3P_1 = P_1^2 dP_1 \sin(\theta) d\theta d\phi = P_1^2 dP_1 d\Omega$$

y escribiendo los términos de energía dentro del delta de Dirac, como $E_2^2 = (m_2^2 + P_1^2)$ tenemos

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{4P_i^* \sqrt{s}} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{P_1^2}{4E_1 E_2} \delta(\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + P_1^2} - \sqrt{m_2^2 + P_1^2}) dP_1 d\Omega. \quad (1.97)$$

Para resolver esta integral usaremos las propiedades de la función delta de Dirac, para esto la ecuación (1.97) se escribirá de la forma

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{4P_i^* \sqrt{s}} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 g(P_1) \delta(f(P_1)) dP_1 d\Omega \quad (1.98)$$

donde

$$g(P_1) = \frac{P_1^2}{4E_1 E_2} \quad (1.99)$$

y

$$f(P_1) = \sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + P_1^2} - \sqrt{m_2^2 + P_1^2}. \quad (1.100)$$

La función delta de Dirac impone la conservación de energía y solo es cero cuando $P_1 = P_f^*$, donde P_f^* es una solución de $f(P_f^*) = 0$. Usando las propiedades de la delta de Dirac, tenemos que la integral sobre dP_1 in (1.98) es

$$\int |\mathcal{M}_{fi}|^2 g(P_1) \delta(f(P_1)) dP_1 d\Omega = |\mathcal{M}_{fi}|^2 g(P_f^*) \left| \frac{df}{dP_1} \right|_{P_f^*}^{-1} \quad (1.101)$$

para calcular df/dP_1 usamos (1.100)

$$\left| \frac{df}{dP_1} \right| = \frac{P_1}{(m_1^2 + P_1^2)^{1/2}} + \frac{P_1}{(m_2^2 + P_1^2)^{1/2}} = P_1 \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right)$$

con esto (1.101) se convierte en

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 g(P_f^*) \left| \frac{df}{dP_1} \right|_{P_f^*}^{-1} = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{P_f^{*2}}{4E_1 E_2} \left(\frac{E_1 E_2}{P_f^* E_1 + E_2} \right) = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{P_f^*}{4\sqrt{s}}$$

y tenemos

$$\sigma = \frac{1}{16\pi^2 P_i^* \sqrt{s}} \cdot \frac{P_f^*}{4\sqrt{s}} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Omega.$$

Finalmente, la sección transversal para cualquier proceso de $a + b \rightarrow c + d$ es

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{P_f^*}{P_i^*} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Omega^* \quad (1.102)$$

el * en el elemento de ángulo sólido es para enfatizar que se refiere al marco del centro de masa.

En el caso mas simple en el que el marco de referencia del laboratorio corresponde al marco del centro de masa, la forma diferencial de (1.102) será simplemente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{P_f^*}{P_i^*} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (1.103)$$

Con esto, lo único que nos queda por encontrar son los elementos de matriz invariantes de Lorentz para encontrar la sección eficaz de interacción para el proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Capítulo 2

Teoría de perturbación de segundo y primer orden

Como ya sabemos, en la mecánica cuántica la tasa de transición está dada por la regla dorada de Fermi $\Gamma_{fi} = 2\pi T_{fi}^2 \rho(E_f)$, donde T_{fi} es la matriz de transición dada por la expansión de perturbaciones

$$T_{fi} = \langle f|V|i\rangle + \sum_{j \neq i} \frac{\langle f|V|j\rangle \langle j|V|i\rangle}{(E_i - E_j)} \quad (2.1)$$

Estos dos primeros términos de la expansión se pueden entender como la dispersión de una partícula por un potencial V y la dispersión de una partícula debido a un estado intermedio J , respectivamente.

El concepto de dispersión debido a un potencial es un concepto incompleto, por ejemplo, una partícula dispersada por un potencial generado por otra partícula implica una transferencia de momento, sin la necesidad de que estas partículas entren en contacto. Además, esto sugiere que existe una interacción a distancia instantánea, violando el principio de causalidad de la relatividad especial.

Hoy se sabe que las interacciones entre partículas están mediadas por el intercambio de partículas de interacción, por lo que el momento se intercambia mediante esta partícula, y es esto lo que utilizaremos de aquí en adelante, es por eso que solo se tomara en cuenta el segundo termino de (2.1).

2.1. Perturbaciones dependientes del tiempo

Los procesos de interacción por intercambio de partículas se pueden tratar con teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. Tomemos en cuenta el proceso $a + b \rightarrow c + d$, existen dos posibles formas en las que podemos ordenar este proceso en el tiempo, como se muestre en la siguiente figura

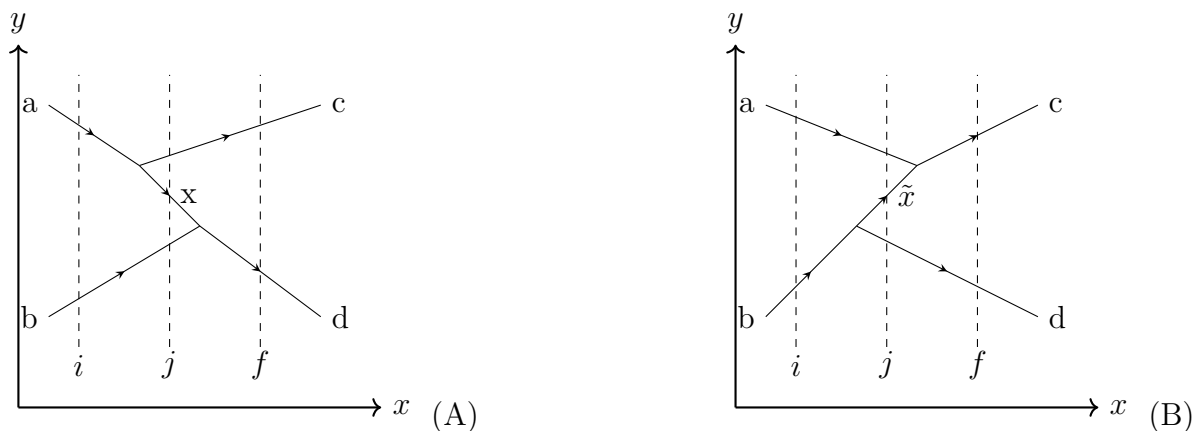


Figura 2.1: Posibles ordenaciones en el tiempo para el proceso $a + b \rightarrow c + d$.

Estudiando el proceso (A), podemos interpretarlo como si la partícula a emitiera una partícula x , y después esta fuera absorbida por la partícula b . En este caso, el estado inicial $|i\rangle$ corresponde a las partículas $a + b$, el estado intermedio $|j\rangle$ a $c + b + X$ y el estado final $|f\rangle$ a $c + d$, con esto tenemos que la matriz de transmisión está dada por

$$T_{fi}^{ab} = \frac{\langle f|V|j\rangle \langle j|V|i\rangle}{(E_i - E_j)} = \frac{\langle d|V|X + b\rangle \langle c + X|V|a\rangle}{(E_a + E_b) - (E_c + E_X + E_b)}. \quad (2.2)$$

Agregamos los índices ab para referirnos al proceso (A). La interacción en los vértices están definido por las elemento de matriz no-invariantes $M_{ji} = \langle c + X|V|a \rangle$ y $M_{fj} = \langle d|V|X + b \rangle$. De la ecuación (1.89) sabemos que

$$M_{ji} = \mathcal{M}_{ji} \prod_k (2E_k)^{-1/2},$$

donde el índice k corre sobre todas las partículas involucradas, así tendremos que

$$M_{ji} = \langle c + X|V|a \rangle = \frac{\mathcal{M}_{a \rightarrow c+X}}{(2E_a 2E_c 2E_x)^{1/2}},$$

donde $\mathcal{M}_{a \rightarrow c+X}$ son los elementos de matriz invariantes de Lorentz (IL), para la interacción $a \rightarrow c + X$. Debido al requerimiento, que el elemento de matriz sea invariante de Lorentz, su estructura matemática es muy limitada. Por simplicidad asumiremos la forma más simple de acoplamiento IL para el elemento de matriz, un escalar, por lo que para este caso $\mathcal{M}_{a \rightarrow c+X} = g_a$, con esto tenemos

$$M_{ji} = \frac{g_a}{(2E_a 2E_c 2E_x)^{1/2}}.$$

Donde la magnitud de g_a es una medida de la fuerza de la interacción escalar. De igual manera tenemos para M_{fj}

$$M_{fj} = \langle d|V|X + b \rangle = \frac{g_b}{(2E_b 2E_d 2E_x)^{1/2}}.$$

Con esto podemos escribir el segundo termino en la expansión de perturbaciones

$$\begin{aligned} T_{fi}^{ab} &= \frac{\langle d|V|X + b \rangle \langle c + X|V|a \rangle}{(E_a + E_b) - (E_c + E_x + E_b)} \\ &= \frac{1}{2E_x} \frac{1}{(2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2}} \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c - E_x)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como ya se vio anteriormente, los elementos de matriz IL están relacionados con la matriz de transición de la forma

$$\mathcal{M}_{fi}^{ab} = (2E_1 2E_2 \dots 2E_a 2E_b)^{1/2} T_{fi}^{ab},$$

lo que nos permite los elementos de matriz IL como

$$\mathcal{M}_{fi}^{ab} = \frac{1}{2E_X} \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c - E_X)}. \quad (2.4)$$

Estudiando el segundo caso (*B*), podemos verlo como si la partícula *b* emitiera una partícula \tilde{X} , con las mismas propiedades de *X* pero con carga opuesta, esto, para que se conserve la carga eléctrica, esta vez la partícula *a* absorbe a \tilde{X} . Siguiendo el mismo procedimiento que para el caso (*A*) llegamos a que el elemento de matriz IL esta dado por

$$\mathcal{M}_{fi}^{ba} = \frac{1}{2E_X} \frac{g_a g_b}{(E_b - E_d - E_X)}. \quad (2.5)$$

Para obtener la amplitud total para el proceso $a + b \rightarrow c + d$ es necesario tomar en cuenta todos los posibles estados, en este caso, todos los posibles procesos ordenados en el tiempo, así

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \mathcal{M}_{fi}^{ab} + \mathcal{M}_{fi}^{ba} \\ &= \frac{g_a g_b}{2E_X} \left(\frac{1}{(E_a - E_c - E_X)} + \frac{1}{(E_b - E_d - E_X)} \right), \end{aligned}$$

utilizando la conservación de la energía tenemos que $E_b - E_d = E_c - E_a$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \frac{g_a g_b}{2E_X} \left(\frac{1}{(E_a - E_c - E_X)} - \frac{1}{(E_a - E_c + E_X)} \right) \\ &= \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Utilizando la relación de energía-momento de Einstein tenemos que $E_X = p_X^2 + m_X^2$. Ya que el momento se conserva en cada uno de los vértices de la interacción, tenemos que para el proceso *A*) $p_X = (p_a - p_c)$, para el caso *B*) $p_{\tilde{X}} = -(p_a - p_c)$. Ya que la única diferencia que existe entre *X*

y \tilde{X} es la carga, tenemos que la energía de estas partículas esta dada por

$$E_X^2 = p_X^2 + m_X^2 = (p_a - p_c)^2 + m_X^2,$$

utilizando esto en (2.6) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - (p_a - p_c)^2 - m_X^2} \\ &= \frac{g_a g_b}{(p_a - p_c)^2 - m_X^2}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde p_a y p_c son los cuatro momentos de las partículas a y c . Reescribiendo el cuatro momento de la partícula X como $q = (p_a - p_c)$, nos permite escribir (2.7)

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{q^2 - m_X^2}. \quad (2.8)$$

El termino

$$\frac{1}{q^2 - m_X^2}$$

Se conoce como el propagador de la partícula de interacción, esto y los índices de la fuerza de interacción g_a y g_b se estudian más a fondo en la siguiente sección.

2.2. Electrodinámica cuántica

Para la electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en ingles), el elemento de matriz (LI) para una interacción escalar, consiste en tres partes, la fuerza de las partículas que interactúan en cada vértice, $\langle \psi_1 | V | \psi_2 \rangle$ y $\langle \psi_3 | V | \psi_4 \rangle$, y el propagador de partículas virtual de interacción con masa m_d

$$\mathcal{M} = \langle \psi_1 | V | \psi_2 \rangle \frac{1}{q^2 - m_d^2} \langle \psi_3 | V | \psi_4 \rangle \quad (2.9)$$

para obtener la forma del elemento de matriz tomemos como ejemplo el proceso de dispersión $e^-e^- \rightarrow \mu^-\mu^-$, figura(2.2), necesitamos la expresión correspondiente del vértice de interacción $\langle \psi_1|V|\psi_2\rangle$ y $\langle \psi_3|V|\psi_4\rangle$ para la QED. Debido a que todos los estados se deben de tomar en cuenta, la polarización del fotón tambien se debe tener en cuenta, por lo que el campo de fotones A_μ se puede escribir en términos de ondas planas y cuatro vectores ε^λ para un estado de polarización λ

$$A_\mu = \varepsilon_\mu^\lambda e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)}.$$

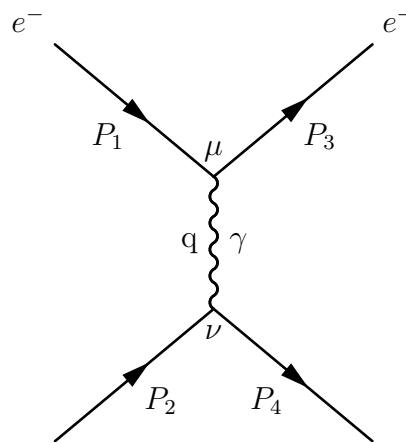


Figura 2.2: Diagrama de Feynman para el proceso de dispersión ($e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$)

Para cualquier fotón real, la polarización del cuatro vector es siempre transversal a la dirección del movimiento, por lo que, por ejemplo, un fotón que se mueve en la dirección z tiene dos vectores de polarización

$$\varepsilon^{(1)} = (0, 1, 0, 0), \varepsilon^{(2)} = (0, 0, 1, 0).$$

La interacción fundamental entre fermiones con carga q en un cuatro-potencial $A_\mu = (\phi, A)$ donde ϕ y A don los potenciales escalares y vectoriales respectivamente, que se obtiene al sustituir

$$\partial_\nu \rightarrow \partial_\nu + iqA_\mu$$

donde $A_\mu = (\phi, -A)$, $\partial_\nu = (\partial/\partial t, \nabla)$ y q es la carga eléctrica. Usando esto en la ecuación de Dirac

para la partícula libre tenemos

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + iq\gamma^\mu A_\mu + im)\psi = 0 \quad (2.10)$$

Para obtener el operador de la energía potencial deseado (V), primero obtenemos el Hamiltoniano.

Para esto multiplicamos (2.10) por $i\gamma^0$, obtenemos

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\gamma^0\gamma.\nabla\psi - q\gamma^0\gamma^\mu A_\mu\psi - m\gamma^0\psi = 0 \quad (2.11)$$

reescribiendo (2.11)

$$(-i\gamma^0\gamma.\nabla + q\gamma^0\gamma^\mu A_\mu + m\gamma^0)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

así, el hamiltoniano es

$$H = (-i\gamma^0\gamma.\nabla + m\gamma^0) + q\gamma^0\gamma^\mu A_\mu$$

los términos entre paréntesis corresponden al Hamiltoniano para la partícula libre, por lo tanto, el operador de la energía potencial es

$$V_D = q\gamma^0\gamma^\mu A_\mu. \quad (2.12)$$

Con esto estamos listos para calcular los elementos de matriz para la interacción fundamental de QED. Siguiendo el ejemplo propuesto al principio, $e^-e^- \rightarrow \mu^-\mu^-$, y usando los espinores de Dirac correspondientes para cada vértice tenemos

$$\mathcal{M} = \langle\psi(P_3)|V|\psi(P_1)\rangle \frac{1}{q^2 - m_d^2} \langle\psi(P_4)|V|\psi(P_2)\rangle$$

para el fotón $m_d = 0$ así tenemos que para el vértice μ de la figura (2.2)

$$\mathcal{M} = \langle\psi(P_3)|V|\psi(P_1)\rangle \frac{1}{q^2} \langle\psi(P_4)|V|\psi(P_2)\rangle \quad (2.13)$$

desarrollando la expresión $\langle \psi(P_3)|V|\psi(P_1)\rangle$

$$\begin{aligned}\langle \psi(P_3)|V|\psi(P_1)\rangle &= u(P_3)^\dagger Q_e e \gamma^0 \gamma^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda)} u(P_1) \\ \langle \psi(P_3)|V|\psi(P_1)\rangle &= Q_e e u(P_3)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda)} u(P_1)\end{aligned}\quad (2.14)$$

podemos escribir esto en termino de los espinores adjuntos \bar{u} definidos como

$$u(P_3)^\dagger \gamma^0 = \bar{u}(P_3)$$

por lo tanto, (2.14) se convierte en

$$\langle \psi(P_3)|V|\psi(P_1)\rangle = \bar{u}(P_3) Q_e e \gamma^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda)} u(P_1).$$

Donde $Q_e e$ es la carga del electrón, e es la magnitud de la carga y $Q_e = -1$. Haciendo lo mismo para $\langle \psi(P_4)|V|\psi(P_2)\rangle$ y teniendo en cuenta las diferentes polarizaciones del fotón, la ecuación (2.9) toma la forma

$$\mathcal{M} = \sum_\lambda [\bar{u}(P_3) Q_e e \gamma^\mu u(P_1)] \varepsilon_\mu^\lambda \frac{1}{q^2} \varepsilon_\nu^{\lambda*} [\bar{u}(P_2) Q_\mu e \gamma^\mu u(P_2)] \quad (2.15)$$

La suma sobre la polarización de un fotón virtual se puede tomar como

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu^\lambda \varepsilon^{\lambda*}_\nu = -g_{\mu\nu}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico. Así, la forma final del elemento matriz es

$$\mathcal{M} = [\bar{u}(P_3) Q_e e \gamma^\mu u(P_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}(P_2) Q_\mu e \gamma^\mu u(P_2)]. \quad (2.16)$$

Esto es cierto para cualquier interacción QED que involucre a estas partículas, en otras palabras, el elemento de matriz que se muestra aquí es cierto para un proceso de aniquilación.

Capítulo 3

Aniquilación electrón-positrón

Para obtener la sección transversal completa o la tasa de transición, debemos considerar todos los diagramas de Feynman posibles para el proceso ($e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$), ya que estos representan las diferentes formas en las que este proceso puede ocurrir. Los diagramas conocidos como el diagrama de Feynman de orden más bajo (LO), son los que solo tienen dos vértices de interacción, cada uno de los cuales contribuye con un factor de $ie\gamma^\mu$ al elemento de matriz (3.1), o lo que es equivalente $|\mathcal{M}|^2 \propto \alpha^2$ donde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, es la constante de estructura fina. En general cada vértice contribuirá con un factor de α al elemento de matriz. Todos los demás diagramas de Feynman posibles con más de dos vértices de interacción se conocen como diagramas de orden siguiente (NLO), por lo que para diagramas con 4 vértices tendremos que $|\mathcal{M}|^2 \propto \alpha^4$.

Dado que todos los demás NLO son suprimidos por un factor de α en relación con el LO, entonces $|\mathcal{M}|$ converge rápidamente con al término dominante, LO, lo que significa que podemos ignorar los otros términos de NLO

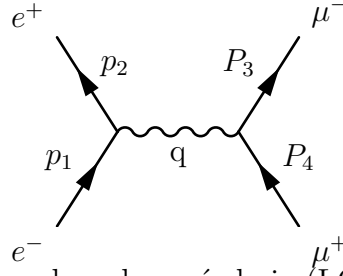


Figura 3.1: Diagrama de Feynman de orden más bajo (LO), para el proceso $(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$

3.1. Aniquilación electron-positron

Como se mostró anteriormente, el elemento de matriz correspondiente a la interacción QED es

$$\mathcal{M} = \frac{-e^2}{q^2} g_{\mu\nu} [\bar{v}(P_2)\gamma^\mu u(P_1)][\bar{u}(P_3)\gamma^\nu v(P_4)] \quad (3.1)$$

recordando que los cuatro-vectores para las corrientes de probabilidad del electrón y el muón son

$$j_e^\mu = \bar{v}(P_2)\gamma^\mu u(P_1)$$

$$j_\mu^\nu = \bar{u}(P_3)\gamma^\nu v(P_4)$$

podemos reducir la ecuación (3.1) a la forma compacta

$$\mathcal{M} = \frac{-e^2}{q^2} g_{\mu\nu} j_e^\mu \cdot j_\mu^\nu. \quad (3.2)$$

El cuatro-momento del fotón virtual viene dado por la conservación de la energía, $q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$, por lo tanto $q^2 = (p_1 + p_2)^2 = s$, donde s es el centro de masa al cuadrado correspondiente a la energía. Por lo tanto, (3.2) se puede reescribir como

$$\mathcal{M} = \frac{-e^2}{s} j_e^\mu \cdot j_\mu^\nu. \quad (3.3)$$

El elemento de matriz debe tener en cuenta los estados de spin de las partículas que interactúan ($e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$). Dado que cada partícula puede estar en uno de los dos estados de helicidad

(\uparrow (*derecha*), \downarrow (*izquierda*)), hay cuatro estados iniciales posibles y cuatro estados finales posibles, lo que da un total de dieciséis configuraciones posibles de helicidad ortogonales y cada uno debe ser tomado en cuenta para obtener la sección transversal total. Por ejemplo, para un caso particular en el que el electrón y el positrón tienen una helicidad derecha y derecha, la sección transversal viene dada por la suma de los cuatro términos posibles de $|\mathcal{M}|^2$:

$$\sum |\mathcal{M}_{RR}|^2 = \sum |\mathcal{M}_{RR \rightarrow RR}|^2 + |\mathcal{M}_{RR \rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{RR \rightarrow RL}|^2 + |\mathcal{M}_{RR \rightarrow LL}|^2 \quad (3.4)$$

esto debe hacerse para cada configuración inicial de helicidad.

Con la ecuación (3.4), el elemento de matriz promediado de espín cuadrado se define como

$$\langle |\mathcal{M}_{ij}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.5)$$

esto significa que hay dieciséis elementos de matriz que deben calcularse. Para esto, primero se deben calcular las amplitudes de helicidad.

3.2. Amplitudes de la helicidad

En el límite ultra-relativista donde las masas de las partículas se pueden ignorar, $\sqrt{s} \gg m_\mu$, el vector de cuatro-momento para cada partícula, como se muestra en la figura (3.2) se puede escribir como

$$P_1 = (E, 0, 0, E) \quad (3.6)$$

$$P_2 = (E, 0, 0, -E) \quad (3.7)$$

$$P_3 = (E, E \sin \theta, 0, E \cos(\theta)) \quad (3.8)$$

$$P_4 = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos(\theta)) \quad (3.9)$$

donde, por conveniencia, el eje z es paralelo a la dirección de movimiento de los electrones y el marco de referencia está en el centro de masa.

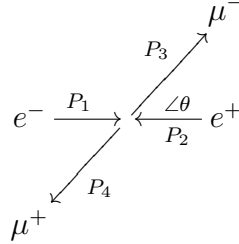


Figura 3.2: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ proceso de aniquilación

En el límite ultra-relativista, los estados propios de helicidad se pueden aproximar como

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{bmatrix}, u_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ s \\ -ce^{i\phi} \end{bmatrix}, v_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} s \\ -ce^{i\phi} \\ -s \\ ce^{i\phi} \end{bmatrix}, v_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Donde $c = \cos \frac{\theta}{2}$ y $s = \sin \frac{\theta}{2}$. Utilizando las ecuaciones (3.6) - (3.9) en (3.10), primero para e^- y e^+ . Para e^- $\theta = 0$ y se tomara el ángulo $\phi = 0$ ya que e^- se mueve la dirección z positiva

$$u_{\uparrow}(P_1) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_{\downarrow}(P_1) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

ahora para e^+ $\theta = \pi$ y $\phi = \pi$, los espinores correspondientes son

$$v_{\uparrow}(P_2) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{\downarrow}(P_2) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

para simplificar, en el caso de μ^+ y μ^- los ángulos azimutales son $\phi = \pi$ $\phi = 0$ respectivamente.

Los espines correspondientes para μ^- son

$$u_{\uparrow}(P_3) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{bmatrix}, u_{\downarrow}(P_3) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

para μ^+ c y s se deben volver a escribir de la siguiente manera

$$c = \cos \frac{\pi - \theta}{2} = \sin \frac{\theta}{2}$$

$$s = \sin \frac{\pi - \theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

así, los espinores son

$$v_{\uparrow}(P_4) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{bmatrix}, v_{\downarrow}(P_4) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} s \\ -c \\ s \\ -c \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

A partir de esto, lo que sigue es calcular los cuatro-vectores para las corrientes de probabilidad correspondientes, haciendo uso de las propiedades de las matrices γ .

3.3. Corrientes de probabilidad

Para obtener la ecuación (3.3) debemos calcular los posibles cuatro-vectores para las corrientes de probabilidad correspondientes a los estados de helicidad. Para eso usaremos la representación de Dirac-Pauli de las matrices γ , que establece que para cualquier par de spinores ψ y Φ la relación $\bar{\psi}\gamma^\mu\Phi \equiv \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\Phi$

$$\bar{\psi}\gamma^0\Phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\Phi \quad (3.15)$$

sabemos que el producto $\gamma^0\gamma^0$ es igual a la matriz de identidad $\mathbb{1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la ecuación (3.15) es la suma entre el producto de los componentes de ψ y Φ

$$\psi^\dagger\gamma^0\Phi = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^0\Phi = \psi_1^*\Phi_1 + \psi_2^*\Phi_2 + \psi_3^*\Phi_3 + \psi_4^*\Phi_4. \quad (3.16)$$

Para la relacion

$$\bar{\psi}\gamma^1\Phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^1\Phi$$

de nuevo el producto $\gamma^0\gamma^1$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo $\gamma^0\gamma^1$

$$\begin{bmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \\ \psi_3^* \\ \psi_4^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix}$$

lo que resulta en

$$\psi^\dagger \gamma^1 \Phi = \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^1 \Phi = \psi_1^* \Phi_4 + \psi_2^* \Phi_3 + \psi_3^* \Phi_2 + \psi_4^* \Phi_1 \quad (3.17)$$

siguiendo los mismos pasos para γ^2 y γ^3 , obtenemos

$$\psi^\dagger \gamma^2 \Phi = \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2 \Phi = -i(\psi_1^* \Phi_4 - \psi_2^* \Phi_3 + \psi_3^* \Phi_2 - \psi_4^* \Phi_1) \quad (3.18)$$

$$\psi^\dagger \gamma^3 \Phi = \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^3 \Phi = \psi_1^* \Phi_3 - \psi_2^* \Phi_4 + \psi_3^* \Phi_1 - \psi_4^* \Phi_2. \quad (3.19)$$

Utilizando estas relaciones, es relativamente fácil calcular las corrientes de probabilidad para el estado inicial y final de cada configuración de helicidad. Comenzando con las componentes de la corriente de probabilidad para los electrones

$$j_{e,RR}^0 = \bar{v}(P_2) \uparrow \gamma^0 u(P_1) \uparrow = v(P_2)^\dagger \uparrow \gamma^0 \gamma^0 u(P_1) \uparrow$$

sustituyendo $\bar{v}(P_2) \uparrow$ y $u(P_1) \uparrow$

$$j_{e,RR}^0 = E \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

para $j_{e,RR}^1$

$$j_{e,RR}^1 = \bar{v}(P_2) \uparrow \gamma^0 u(P_1) \uparrow = v(P_2)^\dagger \uparrow \gamma^0 \gamma^1 u(P_1) \uparrow.$$

Utilizando la relación (3.17)

$$j_{eRR}^1 = (1)(0) + (0)(1) + (-1)(0) + (0)(1) = 0$$

ahora para el resto de componentes j_{eRR}

$$j_{eRR}^2 = 0$$

$$j_{eRR}^3 = 0$$

así

$$j_{e,RR} = (0, 0, 0, 0) \tag{3.20}$$

siguiendo los mismos pasos, el resto de las corrientes de probabilidad correspondientes a los posibles estados iniciales de helicidad son

$$j_{eLL} = (0, 0, 0, 0)$$

$$j_{eRL} = 2E(0, -1, -i, 0)$$

$$j_{eLR} = 2E(0, -1, i, 0).$$

De manera similar podemos calcular las corrientes de probabilidad para los muones correspondientes al estado final, así obtenemos

$$j_{\mu,RR} = (0, 0, 0, 0)$$

$$j_{\mu,LL} = (0, 0, 0, 0)$$

$$j_{\mu,LR} = 2E(0, -\cos(\theta), -i, \sin(\theta))$$

$$j_{\mu,RL} = 2E(0, -\cos(\theta), i, \sin(\theta)).$$

3.4. Sección eficaz para el proceso de aniquilación electrón-positrón

Una vez que hemos obtenido las corrientes de probabilidad de cada estado posible, nos quedan solo 4 procesos posibles de aniquilación de las dieciséis iniciales. A partir de la ecuación (3.3) podemos calcular los elementos de la matriz, comenzando con $\mathcal{M}_{RL \rightarrow RL}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{RL \rightarrow RL} &= \frac{e^2}{s} [2E(0, -1, -i, 0)] \cdot [2E(0, -\cos(\theta), i, \sin(\theta))] \\ \mathcal{M}_{RL \rightarrow RL} &= e^2(1 + \cos(\theta)), \end{aligned} \quad (3.21)$$

haciendo lo mismo para los otros 3 elementos de matriz restantes obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{RL \rightarrow RL}|^2 &= |\mathcal{M}_{LR \rightarrow LR}|^2 = e^4(1 + \cos(\theta))^2 \\ |\mathcal{M}_{RL \rightarrow LR}|^2 &= |\mathcal{M}_{LR \rightarrow RL}|^2 = e^4(1 - \cos(\theta))^2 \end{aligned}$$

así, la ecuación (3.5) se puede escribir

$$\langle |\mathcal{M}_{ij}|^2 \rangle = \frac{1}{4} |\mathcal{M}_{RL \rightarrow RL}|^2 + |\mathcal{M}_{RL \rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{LR \rightarrow RL}|^2 + |\mathcal{M}_{LR \rightarrow LR}|^2 \quad (3.22)$$

sustituyendo el correspondiente \mathcal{M}_{ij}

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{ij}|^2 \rangle &= \frac{e^2}{4} [2(1 + \cos(\theta))^2 + 2(1 - \cos(\theta))^2] \\ \langle |\mathcal{M}_{ij}|^2 \rangle &= e^4(1 + \cos^2(\theta)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sustituyendo (3.23) en (1.103) obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{P_f^*}{P_i^*} e^4 (1 + \cos^2(\theta)) \quad (3.24)$$

donde $p_i^* = p_f^* = E$ y tomando en cuenta que $\alpha = e^2/(4\pi)$ terminamos con

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta). \quad (3.25)$$

Finalmente integrando respecto al ángulo sólido, para obtener la sección transversal, recordando que $d\Omega^* = 2\pi d \cos \theta$ conseguimos la sección transversal

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (3.26)$$

Con esto hemos obtenido la sección eficaz para el proceso $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$, sin embargo, esto se hizo tomando la aproximación ultra-relativista. Para ver que tan precisa es esta aproximación, necesitamos calcular la forma exacta de la sección eficaz. Esto se realiza en la siguiente sección utilizando un método diferente al que se utilizó anteriormente.

3.5. Técnicas de traza

El resultado calculado anteriormente solo es útil cuando se ignoran las masas de los fermiones, es decir, $E \gg m$. Para calcular la forma completa de la sección transversal, el método anterior es una opción, pero esto significa que las 16 combinaciones de spin posibles deben calcularse en lugar de las 4 calculadas previamente y esto es muy complicado de hacer en la a mano, por lo que para esto, un enfoque analítico dará mejores resultados con los cálculos. Para esto, las relaciones de completitud para los espinores de Dirac y la traza de matrices serán lo que usemos.

3.5.1. Relación de completez

La relación de completez para los espinores de Dirac nos permite sumar los estados de espín de las partículas de estado inicial y final y se define como

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p)\bar{u}_s(p) \quad (3.27)$$

aquí la suma es sobre dos estados de espín ortogonales. La suma se realizará utilizando la base de helicidad para simplificar, pero se pueden usar los espinores u_1 y u_2 . Así, tenemos

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p)\bar{u}_s(p) = \sum_s \begin{bmatrix} \sqrt{P \cdot \sigma} \phi^s \\ \sqrt{P \cdot \bar{\sigma}} \phi^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{P \cdot \bar{\sigma}} \phi^{s\dagger} & , \sqrt{P \cdot \sigma} \phi^{s\dagger} \end{bmatrix}$$

donde

$$\phi^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \phi^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y usando el hecho de que

$$\sum_{s=1}^2 \phi^s \phi^{s\dagger} = \mathbb{1}$$

donde $\mathbb{1}$ es la matriz de identidad. Terminamos con

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p)\bar{u}_s(p) = \begin{bmatrix} \sqrt{P \cdot \sigma} \sqrt{P \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{P \cdot \sigma} \sqrt{P \cdot \sigma} \\ \sqrt{P \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{P \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{P \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{P \cdot \sigma} \end{bmatrix}$$

Aplicando la identidad

$$(P \cdot \sigma)(P \cdot \bar{\sigma}) = P^2 = m^2$$

resulta en

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p)\bar{u}_s(p) = \begin{bmatrix} m & P \cdot \sigma \\ P \cdot \bar{\sigma} & m \end{bmatrix}$$

finalmente, esto puede ser escrito como

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \gamma^\mu \cdot P + m \mathbb{1} = \not{p} + m \quad (3.28)$$

donde $\not{p} = \gamma^\mu P$. Del mismo modo

$$\sum_{s=1}^2 v_s(p) \bar{v}_s(p) = \not{p} + m \quad (3.29)$$

3.5.2. Formalismo

Para calcular la sección transversal total, se debe calcular la expresión de $|\mathcal{M}^2|$, para esto necesitamos el conjugado complejo de \mathcal{M} . Para los espinores de Dirac de la forma $\bar{v}\gamma^\mu u$ el complejo conjugado se puede calcular fácilmente usando $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ y $(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^\dagger = (v^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 v = u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu v = \bar{u} \gamma^\mu v$$

Con esto \mathcal{M}^\dagger se convierte en

$$\mathcal{M}^\dagger = -\frac{e^2}{q^2} [\bar{u}(P_2) \gamma_\mu v(P_1)] [\bar{v}(P_3) \gamma_\nu u(P_4)]. \quad (3.30)$$

Ya que los componentes de la corriente son simplemente números, el orden en que se escriben no importa, por lo que $|\mathcal{M}|^2$ se puede expresar como

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} [\bar{v}(P_2) \gamma^\mu u(P_1)] [\bar{u}(P_2) \gamma^\nu v(P_1)] [\bar{u}(P_3) \gamma^\mu v(P_4)] [\bar{v}(P_3) \gamma^\nu u(P_4)] \quad (3.31)$$

Y ya que el elemento matricial promediado de espines al cuadrado es

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2$$

$$= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{s,r} [\bar{v}^r(P_2)\gamma^\mu u^s(P_1)][\bar{u}^s(P_2)\gamma^\nu v^r(P_1)] \sum_{s',r'} [\bar{u}^{s'}(P_3)\gamma_\mu v(P_4)^{r'}][\bar{v}^{s'}(P_3)\gamma_\nu u^{r'}(P_4)] \quad (3.32)$$

donde s, s', r y r' son los índices de los dos estados de spin posibles. Tomando la primera parte de (3.32) que involucra el primer estado e^- y e^+ y denotándolo como el tensor $\mathcal{L}_{(e)}^{\mu\nu}$, además de escribir la multiplicación de matrices en forma de índice, tenemos

$$\mathcal{L}_{(e)}^{\mu\nu} = \sum_{s,r=1}^2 [\bar{v}_j^r(P_2)\gamma_{ji}^\mu u_i^s(P_1)][\bar{u}_n^s(P_2)\gamma_{nm}^\nu v_m^r(P_1)] \quad (3.33)$$

como todas las cantidades en (3.33) son solo números, podemos reescribir (3.33) de la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{(e)}^{\mu\nu} = \left[\sum_{r=1}^2 v_m^r(P_1)\bar{v}_j^r(P_2) \right] \left[\sum_{s=1}^2 [u_i^s(P_1)\bar{u}_n^s(P_2)] \right] \gamma_{ji}^\mu \gamma_{nm}^\nu \quad (3.34)$$

utilizando la relación completés en (3.34) terminamos con

$$\mathcal{L}_{(e)}^{\mu\nu} = (\not{p}_2 - m_e)_{mj} (\not{p}_2 + m_e)_{in} \gamma_{ji}^\mu \gamma_{nm}^\nu. \quad (3.35)$$

De la ecuación (3.28) sabemos que todos los elementos en $(\not{p}+m)$ son una matriz 4×4 . Rescribiendo (3.35) en forma de multiplicación de matrices para expresarla de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(e)}^{\mu\nu} &= (\not{p}_2 - m_e)_{mj} \gamma_{ji}^\mu (\not{p}_1 + m_e)_{in} \gamma_{nm}^\nu \\ &= [(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu]_{mm} \\ &= Tr([(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu]). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como podemos ver, la ecuación (3.35) se puede simplificar como la traza de los productos de sus matrices, una para cada combinación de los índices μ y ν . Para obtener el tensor $\mathcal{L}_{\mu\nu}^{(\mu)}$ seguimos el

procedimiento para que podamos escribir $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{spin} \mathcal{L}_{(e)}^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mu\nu}^{(\mu)} \\ &= \frac{e^4}{4q^4} Tr([\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu] Tr([\not{p}_3 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Los elementos de la matriz de spin promedio se han reducido al cálculo de las trazas de sus elementos, sin embargo, dado que tenemos que calcular dieciséis trazas, esto no es una mejora con respecto a lo que comenzamos. Afortunadamente, podemos hacer uso de algunos teoremas de la traza y propiedades de las matrices gamma para simplificar las cosas. Vamos a empezar con algunas propiedades de la traza.

$$Tr(A + B) \equiv Tr(A) + Tr(B) \quad (3.38)$$

Otra de las propiedades de la traza es que no se modifica al cambiar el orden de sus elementos

$$Tr(AB...YZ) \equiv Tr(ZAB...Y). \quad (3.39)$$

Para las matrices gamma, conocemos la relación anticomutación (1.33)

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \quad (3.40)$$

tomando el traza de (3.40)

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) + Tr(\gamma^\nu\gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu}Tr(\mathbb{1})$$

usando la propiedad cíclica de la traza $Tr(\gamma^\nu\gamma^\mu) = Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu)$ tenemos

$$2Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 2g^{\mu\nu}Tr(\mathbb{1})$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}. \quad (3.41)$$

Otro teorema útil indica que la traza de cualquier número impar de matrices γ es cero al insertar

$$\gamma^5\gamma^5 = \mathbb{1}$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = Tr(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho)$$

usando las propiedades de ciclicidad de la traza

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^5)$$

tomando en cuenta que $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = -Tr(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho).$$

El signo menos está ahí debido a la matriz γ^5 que conmuta con las otras tres matrices, cada vez que agregando un factor de -1. Finalmente

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = -Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho)$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = 0 \quad (3.42)$$

haciendo lo mismo con cualquier número impar de matrices gamma, muestra que el resultado es 0.

Finalmente, la traza de cuatro matrices gamma se calcula utilizando la relación anticonmutación (3.40), que se puede escribir como $\gamma^\mu\gamma^\mu = 2g^{\mu\mu} - \gamma^\nu\gamma^\mu$, usando esta identidad repetidamente obtenemos

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma &= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\
&= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \\
&= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \\
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Tomando la traza de ambos lados de (3.43) y usando la relación de ciclicidad

$$2Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 2g^{\mu\nu} Tr(\gamma^\rho \gamma^\sigma) - 2g^{\mu\rho} Tr(\gamma^\nu \gamma^\sigma) + 2g^{\mu\sigma} Tr(\gamma^\nu \gamma^\rho)$$

using (3.41) gives

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \tag{3.44}$$

3.6. Elementos de matriz

Ahora que tenemos lo que necesitamos, la matriz promediada de spin se puede simplificar. En el límite donde se pueden ignorar las masas del electrón, $m_e = 0$, la matriz promediada de spin al cuadrado es

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{4q^4} Tr((\not{p}_2) \gamma^\mu (\not{p}_1) \gamma^\nu) Tr([(\not{p}_3 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma_\nu]). \tag{3.45}$$

Usando la relación de completitud, la primera traza en (3.45) se puede evaluar escribiendo $\not{p}_1 = \gamma^\sigma P_{1\sigma}$

$$\not{p}_2 = \gamma^\rho P_{2\rho}$$

$$\begin{aligned}
Tr((\not{p}_2) \gamma^\mu (\not{p}_1) \gamma^\nu) &= P_{1\sigma} P_{2\rho} Tr(\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu) \\
&= 4P_{1\sigma} P_{2\rho} (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma})
\end{aligned}$$

$$= 4P_2^\mu P_1^\nu - 4g^{\mu\nu}(P_1 \cdot P_2) + 4P_2^\nu P_1^\mu.$$

Para la segunda traza, debemos recordar que la traza de un número impar de γ -matrices es cero y que $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$, con esto, la traza se convierte

$$Tr([\not{p}_3 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma_\nu] = Tr(\not{p}_3\gamma_\mu \not{p}_4\gamma_\nu) - m_\mu^2 Tr(\gamma_{m\mu}\gamma_{n\mu}) \quad (3.46)$$

$$= 4P_{3\mu}P_{4\nu} - 4g_{\mu\nu}(P_3 \cdot P_4) + 4P_{3\nu}P_{4\mu} - 4m_\mu^2 g_{\mu\nu} \quad (3.47)$$

poniendo esto de nuevo en (3.45) tenemos

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 16 \frac{e^4}{4q^4} [P_2^\mu P_1^\nu - g^{\mu\nu}(P_1 \cdot P_2) + P_2^\nu P_1^\mu] \times [P_{3\mu}P_{4\nu} - g_{\mu\nu}(P_3 \cdot P_4) + P_{3\nu}P_{4\mu} - m_\mu^2 g_{\mu\nu}]. \quad (3.48)$$

Usando las siguientes expresiones, la ecuación (3.48) se puede simplificar

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$$

$$P_2^\mu P_1^\nu g_{\mu\nu} = (P_1 \cdot P_2)$$

$$P_2^\mu P_1^\nu P_{3\mu}P_{4\nu} = (P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot P_4)$$

así, (3.48) se convierte en

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 4 \frac{e^4}{q^4} [(P_1 \cdot P_4)(P_2 \cdot P_3) - (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) + (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4)$$

$$- (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) + 4(P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) - (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4)$$

$$+ (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4) - (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot P_4) + (P_1 \cdot P_4)(P_2 \cdot P_3)$$

$$-m_\mu^2(P_1 \cdot P_2) + 4m_\mu^2(P_1 \cdot P_2) - m_\mu^2(P_1 \cdot P_2)]$$

simplificando

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 4 \frac{e^4}{q^4} [2(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4) + 2(P_1 \cdot P_4)(P_2 \cdot P_3) + 2m_\mu^2(P_1 \cdot P_2)]. \quad (3.49)$$

Tomando el límite donde se puede ignorar la masa de los electrones, el cuatro-momento cuadrado del fotón virtual es

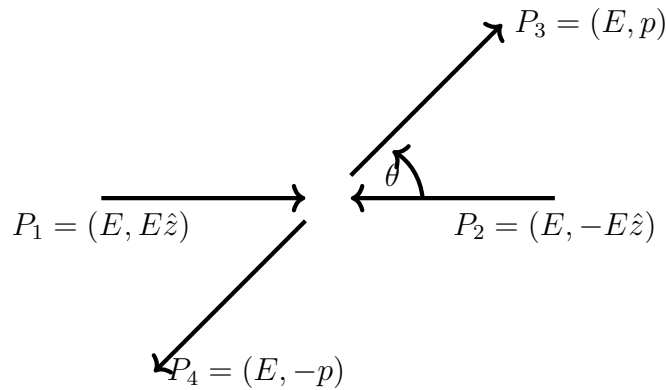
$$q^4 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2(P_1 \cdot P_2)^2 \approx 2(P_1 \cdot P_2)$$

finalmente

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2 \frac{e^4}{(P_1 \cdot P_2)^2} [(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4) + (P_1 \cdot P_4)(P_2 \cdot P_3) + m_\mu^2(P_1 \cdot P_2)]. \quad (3.50)$$

3.7. Aniquilación de electrón-positrón revisitado

Ahora que hemos simplificado (3.50), es fácil ponerlo en términos de E y θ . De nuevo, tomando el proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, tomamos el marco de referencia más sencillo, el centro de masa, como se muestra en la siguiente figura



donde $p = (p_x, p_y, p_z)$. Los productos de cuatro-vectores que necesitaremos son:

$$P_1 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_4 = E^2(1 - |p| \cos \theta)$$

$$P_1 \cdot P_4 = P_2 \cdot P_3 = E^2(1 + |p| \cos \theta)$$

$$P_1 \cdot P_2 = 2E^2$$

$$|p| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}.$$

Usando esto, (3.50) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 2 \frac{e^4}{4E^4} [E^4(1 - |p| \cos \theta)^2 + E^4(1 + |p| \cos \theta)^2 + 2E^2 m_\mu^2] \\ &= \frac{e^4}{2E^4} \left[E^4(2 - 2 \frac{|p|^2}{E^2} \cos^2 \theta) + 2E^2 m_\mu^2 \right] \\ \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= e^4 \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

sustituyendo esto en la forma diferencial de (1.102) obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{e^4}{64\pi^2 s} \frac{P_f^*}{P_i^*} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (3.52)$$

donde s es la energía del centro de masa y

$$P_f^* = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$$

$$P_i^* = E.$$

Recordando además, que la constante de estructura fina, en unidades naturales, se puede escribir

como $\alpha = e^2/4\pi$, podemos reescribir (3.52) como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (3.53)$$

integrando respecto al ángulo sólido y recordado que $d\Omega = 2\pi d \cos \theta$ tenemos

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\pi\alpha^2}{4E_{cm}} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \int_{-1}^1 d \cos \theta \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \\ \sigma_{tot} &= \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2} \sqrt{1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2}\right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Tomando el limite-ultrarelativista, donde $E \gg m_\mu$, es decir, donde

$$1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} \approx 1$$

Obtenemos las ecuaciones (3.25) y (3.26)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*}_{E \gg m_\mu} \rightarrow \frac{\alpha^2}{4E_{cm}} (1 + \cos^2 \theta)$$

$$\sigma_{tot E \gg m_\mu} \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2}.$$

Capítulo 4

Resultados

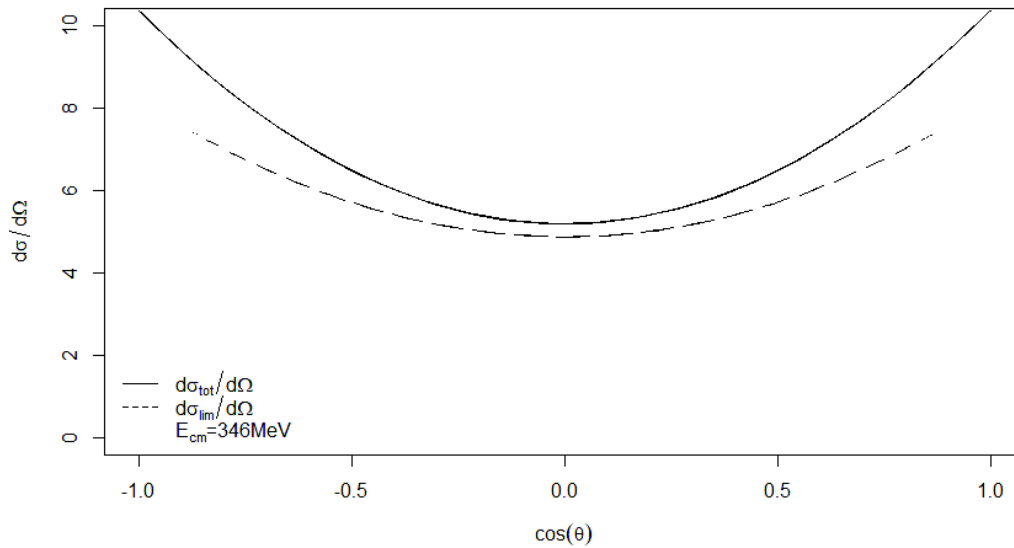
Una vez que se obtuvieron las ecuaciones para la sección transversal podemos observar el comportamiento de dichas curvas. Para esto graficaremos las aproximaciones en el límite-ultrarelativista

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}}(1 + \cos^2 \theta) \quad \sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2}$$

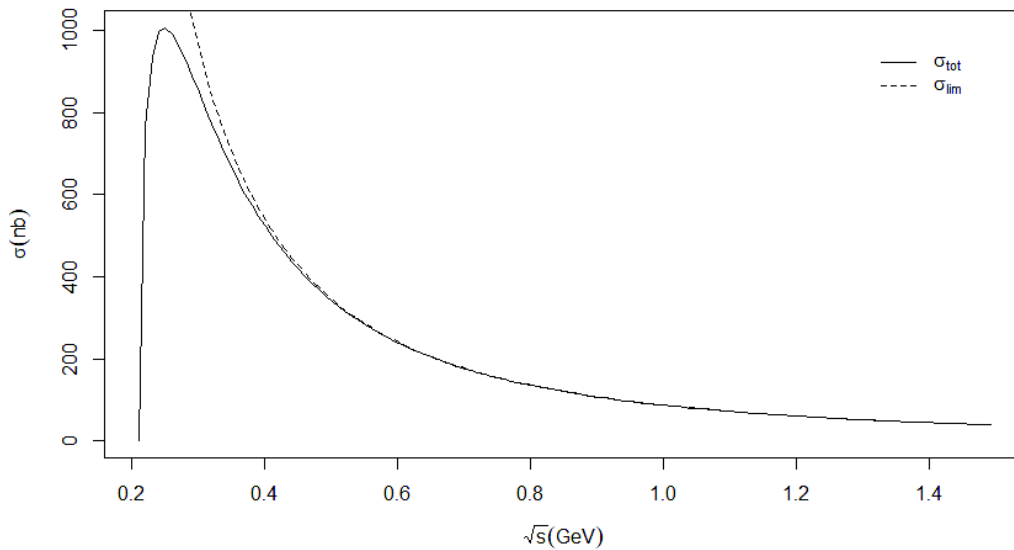
ecuaciones (3.25) y (3.26) respectivamente, y se compararan con las ecuaciones para la sección transversal total

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad \sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2} \sqrt{1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)$$

ecuaciones (3.53) y (3.54), para el proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Así, tenemos



(a)



(b)

Figura 4.1: En la gráfica (a) podemos ver la distribución de $\cos\theta$ respecto a la sección transversal diferencial para un proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ con una energía en el centro de masa de $E_{mc} = 346\text{MeV}$. En la figura (b) se observa la sección transversal para el mismo proceso avaluado en energías de 10-40 GeV

Como se puede observar, en el caso de la sección transversal (σ), las predicciones para el límite-

ultrarelativista empiezan a divergir para energías bajas tendiendo a infinito, mientras que la sección transversal total $\sigma_{tot} = 0$ cuando la energía $E = 2m_\mu$. Esta energía corresponde a la energía mínima para que el proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ se pueda llevar a cabo, en otras palabras, la energía inicial de las partículas iniciales e^+e^- deben de tener por lo menos la energía de las masas de los muones producidos para que dicho proceso pueda ocurrir.

En el caso de la sección transversal diferencial las predicciones del limite-ultrarelativista comienza a fallar a bajas energías.

Estos cálculos son los resultados de las predicciones a primer orden para la QED. Para ver que tan precisa es esta aproximación, comparamos con mediciones realizadas en el laboratorio. Se eligieron tres experimentos de las colaboraciones: JADE, con energía en el centro de masa de $E_{cm} = 34,4$ GeV, Mark-J con energía $E_{cm} = 34,6$ GeV y TASSO con energía $E_{cm} = 34,5$ GeV del colisionador de altas energía e^+e^- PETRA en el laboratorio DESY. En estos experimentos se mide la sección transversal total y diferencial, entre otros parámetros no relevantes para este trabajo, para el proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ con el fin de comparar los resultados con las correcciones agregadas por la inclusión de la interacción electrodébil en dicho proceso. En otras palabras, se toma en cuenta la interacción electromagnética, la cual es el enfoque de este trabajo. A continuación, se muestran los resultados utilizando las ecuaciones (3.25) y (3.26)

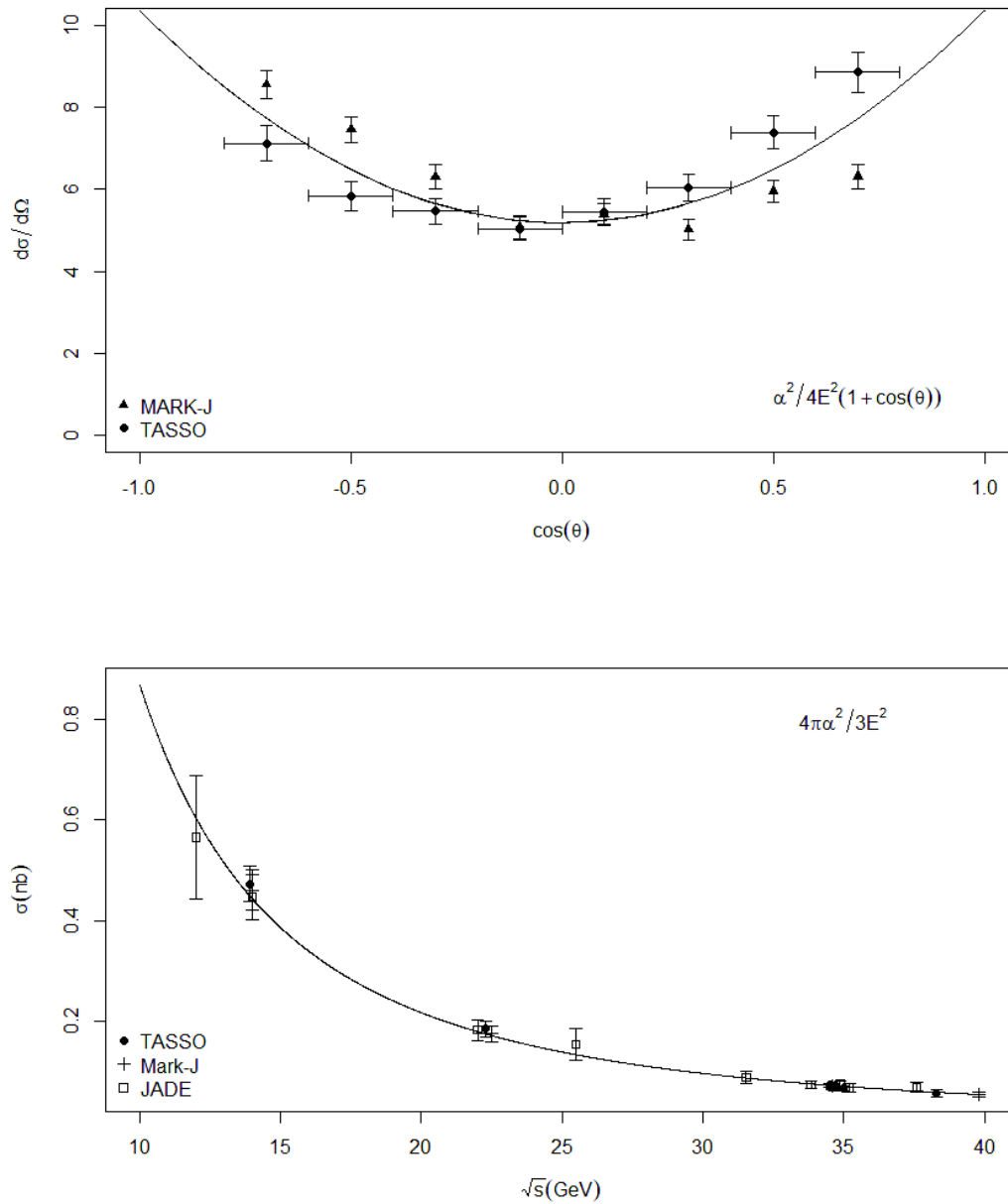


Figura 4.2: Comparación de las predicciones según la QED para la sección transversal con datos experimentales para el proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

La razón por la que se utiliza la aproximación en el límite-ultrarelativista es porque la masa de las partículas, muón y electrón, son irrelevantes en este caso. La masa del electrón es de $m_e = 0,510998\text{MeV}$ y la del muon es igual a $m_\mu = 105,6583\text{MeV}$, ambas masas son tres ordenes de magnitud menores que las las energías a las que se realizaron los experimentos, por lo que se

cumple $E_{cm} \gg m$ y puede ser ignorada la contribución realizadas por las masas de las partículas en los cálculos sin afectar el resultado.

En el caso de la sección transversal diferencial las predicciones del límite-ultrarelativista comienza a fallar a bajas energías. La energía que se utilizo en este caso fue arbitraria, mientras no se cumpliera $E \gg m_\mu$, ya que a altas energías las predicciones de (3.25) y (3.53) son muy aproximadas.

Conclusiones

Como observamos en los capítulos anteriores, pudimos derivar la sección eficaz con dos métodos diferentes. El primero nos permite entender más el proceso físico que se está estudiando, ya que nos aprovechamos de la conservación del spin para reducir los cálculos a solo 4 posibles estados iniciales; con 4 posibles estados finales. Sin embargo, esto nos da como resultado una aproximación que solo es válida cuando la energía cinética de las partículas es mucho mayor que la masa de estas, como se puede apreciar en las ecuaciones (3.25) y (3.26), por lo tanto a bajas energías no es válida.

El segundo método es analítico y hace uso de la traza de las matrices para llegar un resultado que sea útil a cualquier rango de energía como se puede ver en las ecuaciones (3.53) y (3.54) en el límite ultra-relativista da como resultado las ecuaciones (3.25) y (3.26). Sin embargo, este es un tratamiento puramente matemático por lo que se pierde el sentido físico del problema.

Los datos muestran qué tan útil es la aproximación ultra-relativista a altas energías.

En la figura (4.1) (b) podemos ver que la aproximación para la sección eficaz es prácticamente exacta, por lo que es más que suficiente para este problema. Esto es confirmado por los datos experimentales utilizados que muestran que esta aproximación cae dentro de los errores de medición de estos.

Para la sección eficaz diferencial, (4.1) (a), se puede observar que para valores de $\cos(\theta)$ cercanos a 1 y -1, es decir para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, la aproximación no es muy buena, sin embargo, para ángulos alrededor de $\theta = \pi/2$ la aproximación es muy parecida. Esto nos muestra que la ecuación (3.25)

es una buena aproximación para muones dispersados con un ángulo $\theta \approx \pi/2$.

Apéndices

Solución a la partícula libre

Ya que tenemos la forma covariante de (1.22) estamos listos para calcular la solución para la partícula libre. Para ello buscamos una solución de onda plana a la partícula libre de la forma

$$\psi = u(E, p)e^{i(p \cdot x - Et)} \quad (1)$$

donde $u(E, p)$ se denomina espinores de Dirac. Sustituyendo (1) en (1.32) obtenemos

$$E\gamma^0 u(E, p) - p_x u(E, p)\gamma^1 - p_y u(E, p)\gamma^2 - p_z u(E, p)\gamma^3 - \mathbb{1}m_0 u(E, p) = 0 \quad (2)$$

donde (2) está en términos de los valores propios E y $p_{x,y,z}$. Ahora escribiendo (2) en su forma matricial, obtenemos

$$\left[E \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p \cdot \sigma \\ -p \cdot \sigma & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \right] u = 0 \quad (3)$$

de esto obtenemos

$$\begin{pmatrix} E - m & -p \cdot \sigma \\ p \cdot \sigma & -E - m \end{pmatrix} u = 0 \quad (4)$$

desarrollando el término $p \cdot \sigma$

$$\begin{aligned} p \cdot \sigma &= p_x \sigma_x + p_y \sigma_y + p_z \sigma_z = p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Expresando u como un vector columna de dos componentes

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

(4) se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} E - m & -p \cdot \sigma \\ p \cdot \sigma & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

de esto obtenemos las siguientes ecuaciones acopladas

$$(E - m)u_A - p \cdot \sigma u_B = 0 \quad (7)$$

$$p \cdot \sigma u_A - (E + m)u_B = 0. \quad (8)$$

De (5) y (7) podemos expresar u_A y u_B

$$u_A = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_B \quad (9)$$

$$u_B = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_A. \quad (10)$$

El espinor u tiene cuatro soluciones u_1, u_2, u_3, u_4 . Las primeras dos soluciones pueden ser obtenidas al sustituir las dos opciones ortogonales más sencillas para u_A

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

utilizando (10) podemos calcular el primer conjunto de soluciones utilizando la forma explícita elegida para u_a

$$u_B = \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$u_B = \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad (13)$$

y así u_1 y u_2

$$u_1(E, p) = N_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$u_2(E, p) = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad (15)$$

siguiendo el mismo procedimiento para u_3 y u_4 , esta vez eligiendo

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

obtenemos las dos últimas soluciones

$$u_3(E, p) = N_3 \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$u_4(E, p) = N_4 \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Así la solución completa para (1.32) es

$$\psi_i = u_i(E, p)e^{i(p \cdot x - Et)} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (19)$$

donde u_i

$$u_1(E, p) = N_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2(E, p) = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_3(E, p) = N_3 \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_4(E, p) = N_4 \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los espinores u_1 y u_2 se recupera la relación de energía-momento de Einstein y se

obtiene

$$E = + \left| \sqrt{p^2 + m^2} \right| \quad (20)$$

de la misma forma para u_3 y u_4 se obtienen soluciones de energías negativas

$$E = - \left| \sqrt{p^2 + m^2} \right|. \quad (21)$$

Interpretación a las energías negativas

Existen dos interpretaciones principales a los resultados de la ecuación de Dirac. La primera es la interpretación del mar de Dirac y la segunda la interpretación de Feynman-Stückelberg. A continuación, se dará una breve explicación de ambas.

El mar de Dirac

Como podemos ver, las soluciones de energías negativas plantea un problema, pues no hay una interpretación física para energías negativas y estas no se puede descartar. Dirac propone la siguiente interpretación: el vacío corresponde a estados donde se ocupan todos los estados de energía negativa, esta interpretación se denomina el Mar de Dirac. En esta interpretación, el principio de la exclusión de Pauli previene que los electrones con estados de energía positivos ocupen el mismo estado cuántico que los estados negativos de energía.

Un fotón con energía suficiente, puede mover un electrón de un estado de energía negativo, por ejemplo, a un estado positivo de la energía. Éstos dejarían un agujero en el vacío, con un estado de energía positivo y cargado positivo. De esta manera, los agujeros corresponden a antipartículas con estados positivos energías y carga positiva.

Sin embargo esta interpretación tiene sus problemas, por ejemplo, el vacío tendrá energía negativa infinita y antipartículas que corresponden a los bosones, no se explican por el principio de exclusión de Pauli.

La interpretación de Feynman-Stückelberg

La interpretación moderna de los Estados negativos de la energía es proporcionada por Feynman y Stückelberg. Esta interpretación dice que las soluciones de energía negativas se interpretan como partículas con energías negativas que se propagan hacia atrás en el tiempo. Estas partículas con soluciones de energías negativas corresponden a antipartículas con estados de energía positivos, pero con carga opuesta, que se propagan hacia adelante en el tiempo. Esto suena un poco confuso, pero utilizando la primera parte de esta interpretación que dice $E \rightarrow -E$ y $t \rightarrow -t$ y reemplazándolo en la parte de la función de onda dependiente del tiempo de la ecuación (1)

$$e^{-i(-E)(-t)} = e^{-iEt}.$$

El lado de la izquierda corresponde a la primera parte de la interpretación y el lado derecho a la segunda parte de la declaración, que hace estos dos matemáticamente equivalentes.

Los espinores de las antipartículas

En esta sección, se calcularán los espinores para las antipartículas u_3 y u_4 siguiendo la interpretación de Feynman-Stückelberg. Vale la pena mencionar que no hay problema con la utilización de la u_3 y u_4 para realizar el cálculo, pero tendremos que tomar en cuenta que la energía en estos espinores es la negativa de la energía física ya que estos espinores se propagan hacia atrás en el tiempo, también el momento será el negativo al del momento físico. Para escribir u_3 y u_4 en términos de la energía física positiva escribimos el momento y la energía con un signo negativo, así tenemos

$$e^{i((-p) \cdot x - (-E)(t))} = e^{-i(p \cdot x - Et)}. \quad (22)$$

Definiendo v_1 y v_2 como

$$v_1(E, p) = u_3(-E, -p)$$

$$v_2(E, p) = u_3(-E, -p)$$

podemos reescribir (1) como

$$\psi = v(E, p)e^{-i(p \cdot x - Et)} \quad (23)$$

ahora sustituyendo esto en (1.32), obtenemos

$$(-E\gamma^0 + p_x\gamma^1 + p_y\gamma^2 + p_z\gamma^3 - \mathbb{1}m_0)v = 0 \quad (24)$$

siguiendo el mismo procedimiento que antes, obtenemos las ecuaciones acopladas

$$v_a = \frac{\sigma \cdot p}{E + m} v_b \quad (25)$$

$$v_b = \frac{\sigma \cdot p}{E - m} v_a \quad (26)$$

de nuevo, utilizando la misma forma ortogonal para los vectores columna v_a y v_b como antes, obtenemos las siguientes soluciones

$$v_1 = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \end{pmatrix}, \quad v_4 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Aquí v_1 y v_2 tienen energía

$$E = \left| \sqrt{p^2 + m^2} \right|$$

y v_3, v_4

$$E = -\sqrt{p^2 + m^2}$$

Puesto que es más fácil trabajar con la energía física positiva, trabajaremos con los espinores asociados con estas energías, es decir, u_1, u_2, v_1 y v_2 . Así, tenemos que para partículas

$$\psi_i = u_i(E, p)e^{i(p \cdot x - Et)}$$

$$u_1(E, p) = N_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2(E, p) = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad (28)$$

y para las antipartículas tenemos

$$\psi = v(E, p)e^{-i(p \cdot x - Et)}$$

$$v_1 = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

(28) y (29) se conoce como la solución de dos partículas.

Bibliografía

- [1] Mark Thomson. (2013). Modern Particle Physics, Chapter 6: Electron-positron annihilation (128-158). United Kingdom: Cambridge University Press

- [2] W. Greiner.(2000). Relativistic Quantum Mechanics-Wave Function, Chapter 2: A wave equation for spin $\frac{1}{2}$ particles: the Dirac equation. (99-126). Third Edition.

- [3] W. Bartel *et al.* [JADE Collaboration], Z. Phys. C **26**, 507 (1985). doi:10.1007/BF01551792

- [4] W. Braunschweig *et al.* [TASSO Collaboration], Z. Phys. C **40**, 163 (1988) Erratum: [Z. Phys. C **42**, 348 (1989)]. doi:10.1007/BF01555879

- [5] B. Adeva *et al.* [Mark-J Collaboration], Phys. Rev. Lett. **55**, 665 (1985). doi:10.1103/PhysRevLett.55.665