



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Continuidad de Operadores Promedio en Espacios de
Morrey-Campanato

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Francisco Jesús Soufflé Ramos

Directora de Tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, Septiembre de 2014

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	v
1. EL ESPACIO BMO	1
1.1. Funciones con oscilación media acotada	1
1.2. Desigualdad de John-Nirenberg	13
2. PROMEDIO DE HARDY-LITTLEWOOD CON PESO	19
2.1. Acotamiento del operador	19
3. CONMUTADOR DEL OPERADOR DE HARDY CON PESO	29
3.1. Definición y estimaciones previas	30
3.2. Acotamiento del conmutador	34
4. ESPACIOS DE MORREY	45
4.1. Definición de $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y acotamiento de U_ψ en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	45
4.2. Acotamiento del conmutador U_ψ^b en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	52
5. OPERADOR GENERALIZADO DE HARDY CON PESO	61
5.1. Definición y estimaciones previas	61
5.2. Acotamiento en $L^p(\omega)$ y en $BMO(\omega)$	67
CONCLUSIONES	73
APÉNDICES	75
BIBLIOGRAFÍA	83

INTRODUCCIÓN

Es bien sabido que los operadores promedio juegan un papel muy importante en Análisis Armónico. Por ejemplo, el operador maximal de Hardy-Littlewood controla algunos tipos de operadores en Análisis, tal es el caso de las integrales singulares de Calderón-Zygmund.

En 1920, Hardy inspirado en la desigualdad discreta

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{m=1}^{\infty} a_m^p,$$

donde $a_m \geq 0$, $p > 1$, demostró la siguiente desigualdad

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^1 f^p(x) dx,$$

donde $1 < p < \infty$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $f \geq 0$ y la constante $\left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ es la mejor posible (esta desigualdad la probaremos en el Capítulo 2).

En 1984, Carton-Lebrun y Fosset introdujeron en [3] el operador de Hardy con peso

$$U_{\psi} f(x) = \int_0^1 f(tx) \psi(t) dt,$$

$x \in \mathbb{R}^n$, donde $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ es una función medible.

En 2001, Xiao probó en [27] que el operador U_{ψ} es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

$$\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt < \infty.$$

Fu, Liu y Lu en 2009 estudiaron el acotamiento del conmutador formado por U_ψ y $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, a saber

$$U_\psi^b f = bU_\psi - U_\psi(bf),$$

demostrando en [9] que U_ψ^b es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

$$\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log \frac{2}{t} dt < \infty.$$

En 2010, Fu y Lu obtuvieron en [10] que si $1 < q < \infty$, $-\frac{1}{q} \leq \lambda \leq 0$ y $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, entonces U_ψ es acotado en los espacios de Morrey $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

$$\int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt < \infty.$$

Posteriormente, otros autores han obtenido también resultados de continuidad para algunas generalizaciones del operador de Hardy en espacios de Morrey-Campanato, a saber, en los llamados espacios de funciones de λ -oscilación central media acotada. En esta dirección, podemos mencionar el trabajo de Fu, Lu y Yuan en [11].

El objetivo de esta tesis es presentar algunos de los resultados mencionados anteriormente, así como también generalizaciones de éstos imponiendo ciertos pesos adecuados a los espacios funcionales en consideración.

Los prerrequisitos para este trabajo son que el lector esté familiarizado con los elementos básicos de Teoría de la Medida, el Análisis Funcional y algunas nociones básicas del Análisis de Fourier.

La notación que emplearemos en este trabajo es estándar. Con frecuencia utilizaremos la misma letra C para denotar a una constante que podría estar variando renglón tras renglón.

En el Capítulo 1 estudiaremos el espacio de funciones con oscilación media acotada en \mathbb{R}^n denotado por $BMO(\mathbb{R}^n)$, veremos que este espacio es un buen sustituto

de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en lo relativo al acotamiento de algunas integrales singulares. Usando la descomposición de Calderón-Zygmund probaremos algunas propiedades notables del espacio $BMO(\mathbb{R}^n)$ como la Desigualdad de John-Nirenberg que establece que la función de distribución en cada cubo de \mathbb{R}^n de los elementos en este espacio tiene un decaimiento exponencial.

En el Capítulo 2 estudiaremos el operador promedio de Hardy-Littlewood y demostraremos que bajo ciertas condiciones sobre el peso tendremos que este operador es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y en $BMO(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq \infty$; asimismo, determinaremos la norma del operador en dichos espacios.

En el Capítulo 3 consideraremos conmutadores de operadores promedio de Hardy-Littlewood con peso con elementos de $BMO(\mathbb{R}^n)$ y demostraremos que estos conmutadores son acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 < p < \infty$.

En el Capítulo 4 estudiaremos los espacios de Morrey $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ los cuales constituyen una generalización natural de los espacios $L^q(\mathbb{R}^n)$, demostraremos que estos espacios son de Banach y probaremos que el operador promedio de Hardy-Littlewood con peso actúa continuamente en éstos. Además, encontraremos condiciones necesarias y suficientes en el peso para asegurar el acotamiento del conmutador en los espacios $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

En el Capítulo 5 abordaremos una generalización del operador de Hardy con peso y caracterizaremos aquellas funciones ψ para las cuales dicho operador es acotado en $L^p(\omega)$ y en $BMO(\omega)$, donde $\omega(x)$ denotará una función medible definida en \mathbb{R}^n .

En la última parte de este trabajo presentamos nuestras conclusiones y un par de apéndices.

CAPÍTULO 1

EL ESPACIO BMO

En este capítulo estudiaremos el espacio de funciones con oscilación media acotada en \mathbb{R}^n , denotado por $BMO(\mathbb{R}^n)$, o simplemente por BMO si el contexto no causa confusión. Los elementos de este espacio son aquellas funciones cuya desviación de sus promedios sobre cubos es acotada. Las funciones en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tienen esta propiedad, sin embargo existen funciones no acotadas cuya oscilación promedio es acotada. Tales funciones son lentamente crecientes y típicamente tienen un crecimiento logarítmico en infinito. El espacio de funciones BMO comparte propiedades similares con el espacio L^∞ , y de hecho, sirve como sustituto del mismo. Sólo por mencionar un ejemplo, las integrales singulares clásicas no transforman L^∞ en L^∞ , sino L^∞ en BMO .

El desarrollo que presentaremos en este capítulo está basado en material que puede ser consultado en [6], [12], [14], [19] y [25].

1.1. Funciones con oscilación media acotada

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y Q un cubo. Denotemos por f_Q el promedio de f en Q , esto es:

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f.$$

La función maximal sharp de f se define del modo siguiente

$$M^\# f(x) := \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy \tag{1.1}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x . Notemos que la integral que aparece en (1.1) mide la oscilación promedio de f en el cubo Q .

Diremos que f tiene oscilación media acotada si la función $M^\#f \in L^\infty$.

Definimos

$$BMO(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : M^\#f \in L^\infty\}.$$

Para $f \in BMO$ introducimos la siguiente cantidad

$$\|f\|_* = \|M^\#f\|_\infty = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|.$$

Podemos ver fácilmente que $\|\cdot\|_*$ es una seminorma en BMO , pero además tenemos que $\|f\|_* = 0$ si y sólo si f es constante c.t.p. en \mathbb{R}^n .

En efecto, si $\|f\|_* = 0$ entonces $\int_Q |f(x) - f_Q| dx = 0$ para cada cubo Q de \mathbb{R}^n .

Tomemos una sucesión de cubos centrados en 0 y cuyos diámetros $R_k \rightarrow \infty$, digamos que $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ es tal sucesión. Así, suponiendo además que $Q_k \subset Q_{k+1}$ para todo k tendremos en particular que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_{Q_k}| \chi_{Q_k}(x) dx = 0.$$

Por consiguiente, existe una subsucesión $\left\{ |f - f_{Q_{k_j}}| \chi_{Q_{k_j}} \right\}_{j=1}^\infty$ que converge a cero casi en todas partes si $j \rightarrow \infty$, y como $\chi_{Q_{k_j}} \rightarrow 1$ puntualmente, se sigue que $f(x) - f_{Q_{k_j}} \rightarrow 0$ casi en todas partes para $j \rightarrow \infty$. De esto concluimos que f es constante casi en todas partes.

Es claro que si f es constante casi en todas partes entonces $\|f\|_* = 0$.

Debido a lo anterior, es costumbre pensar en BMO como el espacio definido arriba módulo las funciones constantes.

Así, dos funciones que difieren por una constante coinciden como funciones en BMO .

De este modo $(BMO, \|\cdot\|_*)$ resulta ser un espacio normado y más aun es completo, lo cual probaremos en el siguiente Teorema.

Teorema 1.1 *El espacio $(BMO, \|\cdot\|_*)$ es de Banach.*

Prueba. Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en BMO .

Sea Q un cubo en \mathbb{R}^n , si $m, n \rightarrow \infty$ entonces

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \left[f_n(x) - (f_n)_Q \right] - \left[f_m(x) - (f_m)_Q \right] \right| dx \leq \|f_n - f_m\|_* \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

De este modo, $(f_n - (f_n)_Q)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(Q)$ y por tanto

$$f_n - (f_n)_Q \rightarrow g^Q \quad (1.3)$$

si $n \rightarrow \infty$ en $L^1(Q)$ para alguna $g^Q \in L^1(Q)$.

De la misma manera, para cualquier otro cubo $Q_1 \supset Q$ tenemos

$$f_n - (f_n)_{Q_1} \rightarrow g^{Q_1} \quad (1.4)$$

si $n \rightarrow \infty$ en $L^1(Q_1)$ por tanto también en $L^1(Q)$.

Se sigue de (1.3) y (1.4) que $\left((f_n - (f_n)_Q) - (f_n - (f_n)_{Q_1}) \right)_{n=1}^\infty$ converge en $L^1(Q)$, esto es, la sucesión de constantes $\left((f_n)_{Q_1} - (f_n)_Q \right)_{n=1}^\infty$ converge en $L^1(Q)$ a $\varphi_{Q, Q_1} \equiv g^Q - g^{Q_1}$.

Sean $S_n = (f_n)_{Q_1} - (f_n)_Q$, $\varphi = \varphi_{Q, Q_1}$ entonces

$$\begin{aligned} \left| S_n - \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi \right| &= \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q (S_n - \varphi) \right| \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |S_n - \varphi| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si $n \rightarrow \infty$, así concluimos que

$$\left((f_n)_{Q_1} - (f_n)_Q \right)_{n=1}^{\infty} \rightarrow C \equiv C(Q, Q_1) \quad (1.5)$$

donde $C = \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi_{Q, Q_1}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea Q_k el cubo con centro en el origen y longitud de lado k . Puesto que cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ se encuentra en algún Q_k , definamos nuestra función límite f mediante la expresión

$$f(x) = g^{Q_k}(x) - C(Q_1, Q_k) \text{ si } x \in Q_k. \quad (1.6)$$

Necesitamos ver que f está bien definida por (1.6). Así bastará demostrar que si $x \in Q_k \subset Q_{k'}$ entonces

$$g^{Q_k}(x) - C(Q_1, Q_k) = g^{Q_{k'}}(x) - C(Q_1, Q_{k'}) \quad (1.7)$$

Pero (1.7) es equivalente a ver que si $1 < k < k'$

$$\begin{aligned} C(Q_1, Q_{k'}) - C(Q_1, Q_k) &= g^{Q_{k'}}(x) - g^{Q_k}(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - (f_n)_{Q_{k'}}) - \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - (f_n)_{Q_k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((f_n)_{Q_k} - (f_n)_{Q_{k'}}) \end{aligned}$$

donde el límite se tomó en la norma de $L^1(Q_k)$, y puesto que $((f_n)_{Q_k} - (f_n)_{Q_{k'}})$ y $C(Q_1, Q_{k'}) - C(Q_1, Q_k)$ son funciones constantes, se sigue que si $n \rightarrow \infty$ entonces

$$(f_n)_{Q_k} - (f_n)_{Q_{k'}} \rightarrow C(Q_1, Q_{k'}) - C(Q_1, Q_k).$$

De aquí obtenemos

$$C(Q_k, Q_{k'}) = C(Q_1, Q_{k'}) - C(Q_1, Q_k)$$

o equivalentemente

$$C(Q_1, Q_k) + C(Q_k, Q_{k'}) = C(Q_1, Q_{k'}) \quad (1.8)$$

Así, probar (1.7) es equivalente a demostrar (1.8). Pero (1.5) implica que

$$(f_n)_{Q_k} - (f_n)_{Q_1} \longrightarrow C(Q_1, Q_k)$$

$$(f_n)_{Q_{k'}} - (f_n)_{Q_1} \longrightarrow C(Q_1, Q_{k'})$$

$$(f_n)_{Q_{k'}} - (f_n)_{Q_k} \longrightarrow C(Q_k, Q_{k'})$$

Entonces

$$(f_n)_{Q_k} - (f_n)_{Q_1} - (f_n)_{Q_{k'}} + (f_n)_{Q_1} + (f_n)_{Q_{k'}} - (f_n)_{Q_k} \longrightarrow C(Q_1, Q_k) - C(Q_1, Q_{k'}) + C(Q_k, Q_{k'}),$$

por lo que

$$C(Q_1, Q_k) - C(Q_1, Q_{k'}) + C(Q_k, Q_{k'}) = 0,$$

es decir, $C(Q_1, Q_k) + C(Q_k, Q_{k'}) = C(Q_1, Q_{k'})$ que es exactamente (1.8).

Esto muestra que nuestra función f definida mediante (1.6) efectivamente tiene sentido.

Ahora, regresamos a nuestro cubo fijo Q . Podemos encontrar k suficientemente grande tal que $Q \subset Q_k$. Entonces, usando nuestra definición (1.6) tendremos que

$$\begin{aligned} \int_Q |(f_n - f)(x) - (f_n - f)_Q| dx &= \int_Q |f_n(x) - g^{Q_k}(x) + C(Q_1, Q_k) - (f_n)_Q + f_Q| dx \\ &= \int_Q |f_n(x) - (f_n)_Q - g^Q(x) \\ &\quad + \{g^Q(x) - g^{Q_k}(x) + C(Q_1, Q_k) + f_Q\}| dx \end{aligned}$$

Enseguida notemos que $g^Q(x) - g^{Q_k}(x) + C(Q_1, Q_k) + f_Q$ es idénticamente cero en Q ya que:

Para $x \in Q \subset Q_k$ se tiene

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx = \frac{1}{|Q|} \int_Q g^{Q_k}(x) dx - C(Q_1, Q_k),$$

luego

$$\begin{aligned} & g^Q(x) - g^{Q_k}(x) + C(Q_1, Q_k) + f_Q \\ &= g^Q(x) - g^{Q_k}(x) + C(Q_1, Q_k) + (g^{Q_k})_Q - C(Q_1, Q_k) \\ &= g^Q(x) - g^{Q_k}(x) + (g^{Q_k})_Q \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) - (f_n)_Q] - \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) - (f_n)_{Q_k}] + (g^{Q_k})_Q \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(f_n)_{Q_k} - (f_n)_Q] + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q [f_n(x) - (f_n)_{Q_k}] dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(f_n)_{Q_k} - (f_n)_Q + (f_n)_Q - (f_n)_{Q_k}] \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde el límite se tomó en la norma de $L^1(Q)$ normalizado.

Así tenemos que si $n \rightarrow \infty$

$$\int_Q |(f_n - f)(x) - (f_n - f)_Q| dx = \int_Q |f_n(x) - (f_n)_Q - g^Q(x)| dx \rightarrow 0.$$

Luego, para todo cubo Q , si $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |(f_n - f)(x) - (f_n - f)_Q| dx \rightarrow 0.$$

Por tanto, si $n \rightarrow \infty$

$$\|f_n - f\|_* \rightarrow 0$$

lo cual muestra que $f \in BMO$ y $f_n \rightarrow f$ en BMO . ■

Proposición 1.2 Para $f \in BMO$ se tienen las siguientes estimaciones:

$$(a) \quad \frac{1}{2} \|f\|_* \leq \sup_Q \inf_{a \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - a| dx \leq \|f\|_*.$$

$$(b) \quad M^\sharp(|f|)(y) \leq 2M^\sharp f(y).$$

Prueba. La segunda desigualdad en (a) es inmediata ya que

$$\|M^\sharp f\|_\infty = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx.$$

Ahora, para cualquier $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \int_Q |f(x) - f_Q| dx &\leq \int_Q |f(x) - a| dx + \int_Q |a - f_Q| dx \\ &= \int_Q |f(x) - a| dx + \left| a - \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \right| |Q| \\ &= \int_Q |f(x) - a| dx + \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q [a - f(x)] dx \right| |Q| \\ &\leq 2 \int_Q |f(x) - a| dx, \end{aligned}$$

por lo que dividiendo ambos extremos de la desigualdad por $2|Q|$, tomando ínfimo sobre todas las $a \in \mathbb{C}$ y luego supremo sobre todos los cubos Q , obtenemos la primera desigualdad en (a).

Para demostrar (b) observemos que para cada $y \in Q$, usando la desigualdad previa y tomando $a = |f_Q|$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| |f(x)| - |f_Q| \right| dx &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| |f(x)| - |f_Q| \right| dx \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \\ &\leq M^\sharp f(y) \end{aligned}$$

y tomando supremo sobre todos los cubos Q tal que $y \in Q$ obtenemos

$$M^\sharp(|f|)(y) \leq 2M^\sharp f(y).$$

Esto concluye la demostración de la Proposición. ■

Observaciones.

- (1) La desigualdad mostrada en la Proposición 1.2 (a) nos permite obtener una norma equivalente a $\|\cdot\|_*$ la cual nos proporciona una manera de mostrar que $f \in BMO$ sin usar su promedio en el cubo Q : sólo es suficiente encontrar una constante a (que puede depender de Q) tal que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - a| dx \leq C$$

con C independiente de Q .

- (2) Usando Proposición (1.2) (b) vemos que si $f \in BMO$ entonces $|f| \in BMO$.
- (3) Sin embargo, el recíproco de (2) no es válido.

En efecto, primero notemos que $L^\infty \subset BMO$ y que de hecho $\|f\|_* \leq 2\|f\|_\infty$. Pero existen funciones no acotadas en BMO . El ejemplo típico en \mathbb{R} es el siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{1}{|x|}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Mostremos que para una elección apropiada de C_I

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - C_I| dx \leq 2$$

donde $I = [a, b]$.

Consideraremos dos casos:

- (i) $0 < a < b$.

Para este caso tomemos $C_I = \ln \frac{1}{|b|}$ y notemos que

$$\begin{aligned}
 \int_I \left| \ln \frac{1}{|t|} - \ln \frac{1}{|b|} \right| dt &= \int_a^b |\ln b - \ln t| dt \\
 &= \int_a^b (\ln b - \ln t) dt \\
 &= (\ln b)(b - a) - [t \ln t - t]_{t=a}^{t=b} \\
 &= (\ln b)(b - a) - b \ln b + b + a \ln a - a \\
 &= (b - a) - a(\ln b - \ln a)
 \end{aligned}$$

Así, para algún $\rho \in (a, b)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|I|} \int_I \left| \ln \frac{1}{|t|} - \ln \frac{1}{|b|} \right| dt &= 1 - \frac{a(\ln b - \ln a)}{b - a} \\
 &= 1 - a \left(\frac{1}{\rho} \right) < 1.
 \end{aligned}$$

(ii) $-b < a < b$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $-b < a < 0 < b$.

De nuevo, sea $C_I = \ln \frac{1}{|b|}$.

$$\begin{aligned}
 \int_I \left| \ln \frac{1}{|t|} - \ln \frac{1}{|b|} \right| dt &= \int_a^{-a} \left| \ln \frac{1}{|t|} - \ln \frac{1}{|b|} \right| dt + \int_{-a}^b \left| \ln \left| \frac{1}{t} \right| - \ln \frac{1}{|b|} \right| dt \\
 &\equiv J + K
 \end{aligned}$$

Por el caso (i) $K = (b + a) + a(\ln b - \ln(-a))$.

Para J , puesto que el integrando es par tendremos

$$\begin{aligned}
J &= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{-a} (\ln b - \ln t) dt \\
&= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [(\ln b)(-a - \varepsilon) - [t \ln t - t]_{t=\varepsilon}^{t=-a}] \\
&= -2a \ln b - 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [-a \ln(-a) + a - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon] \\
&= -2a \ln b + 2a \ln(-a) - 2a \\
&= 2 [-a \ln b + a \ln(-a) - a].
\end{aligned}$$

Así $J + K = (b - a) - a [\ln b - \ln(-a)]$, por lo que para algún $-a < \rho < b$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|I|} \int_I \left| \ln \frac{1}{|t|} - \ln \frac{1}{|b|} \right| dt &\leq 1 - \frac{a}{b-a} [\ln b - \ln(-a)] \\
&= 1 + \frac{(-a)}{b-a} \left[\frac{\ln b - \ln(-a)}{b+a} \right] (b+a) \\
&= 1 + \frac{(-a)(b+a)}{b-a} \left(\frac{1}{\rho} \right) \\
&< 1 + \frac{(-a)(b+a)}{b-a} \left(\frac{1}{(-a)} \right) \\
&= 1 + \frac{b+a}{b-a} < 2
\end{aligned}$$

ya que como $-b < a < 0 < -a < b$ entonces $b+a < b < b-a$.

Los casos restantes pueden reducirse a (i) o (ii) ya que la función es par.

Por tanto $f \in BMO$, sin embargo $g(x) = \text{sgn}(x)f(x) \notin BMO$, aun cuando $|g(x)| = f(x) \in BMO$.

En efecto,

$$g(x) = \begin{cases} \log \frac{1}{x} & 0 < x < 1 \\ -\log \frac{1}{-x} & -1 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \text{ o } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Así $g(x)$ es una función impar, y para cualquier intervalo de la forma $[-a, a]$ con $a > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |g(x) - g_{[-a,a]}| dx &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |g(x)| dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \log \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{a} [x - x \log x]_{t=0}^{t=a} \\ &= \frac{1}{a} [a - a \log a] \\ &= 1 - \log a \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

si $a \longrightarrow 0$ (nótese que $g_{[-a,a]} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a g(t) dt = 0$).

A continuación exhibiremos la conexión existente entre el espacio BMO y las integrales singulares. Requerimos primero introducir la siguiente definición.

Definición 1.3 Diremos que T es un operador integral singular, si T es un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ para el cual existe una función medible K definida en $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \Delta$ ($\Delta = \{(x, y) : x = y\}$) tal que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto entonces T tiene la representación

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy$$

para $x \notin \text{sop } f$.

La función K se llama el núcleo del operador. Cuando el núcleo satisface ciertas estimaciones, la teoría clásica establece que T es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$ y de tipo débil $(1, 1)$. Se puede mostrar que T no transforma L^∞ en L^∞ , pero como lo deja entrever el resultado que probaremos a continuación, T de hecho transforma L^∞ en BMO .

Teorema 1.4 *Sea T un operador integral singular como se describe en la definición (1.3) donde el núcleo además satisface la siguiente condición de Hörmander, esto es,*

$$\int_{|x-y|>2|x-w|} |K(x, y) - K(w, y)| dy \leq C. \quad (1.9)$$

Entonces si f es una función acotada de soporte compacto, $Tf \in BMO$ y $\|Tf\|_ \leq C \|f\|_\infty$.*

Prueba. Sea Q un cubo fijo de \mathbb{R}^n con centro en c_Q y sea Q^* el cubo centrado en c_Q y con longitud de lado $4\sqrt{n}l(Q)$, donde $l(Q)$ denota la longitud del lado de Q .

Sea $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = f\chi_{Q^*}$, $f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*}$ y sea $a = Tf_2(c_Q)$.

Observemos que para $x \in Q$ y $y \notin Q^*$

$$|x - c_Q| \leq (\text{diam } Q) / 2 \leq \sqrt{n}l(Q) / 2$$

y además

$$|x - y| > \frac{1}{2}(l(Q^*) - l(Q)) > \sqrt{n}l(Q) > 2|x - c_Q|.$$

Como se cumple (1.9) y T es acotado en L^2 tendremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf(x) - a| dx &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(x)| dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_2(x) - Tf_2(c_Q)| dx \\ &\leq \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} [K(x, y) - K(c_Q, y)] f(y) dy \right| dx \\ &\leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_{Q^*} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} |K(x, y) - K(c_Q, y)| dy dx \right] \|f\|_\infty \\ &\leq C \|f\|_\infty + C' \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

lo cual implica que $Tf \in BMO$ y que $\|Tf\|_* \leq C \|f\|_\infty$. ■

1.2. Desigualdad de John-Nirenberg

En esta sección, examinaremos la tasa de crecimiento de las funciones en el espacio BMO .

Con el objeto de motivar el teorema que probaremos a continuación, consideremos primero la función $\log\left(\frac{1}{|x|}\right)$ que como hemos mostrado previamente, nos proporciona un ejemplo de función no acotada en BMO . En el intervalo $I = (-a, a)$ su promedio es $1 - \log a$; dado $\lambda > 1$,

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x \in I : \left| \log\left(\frac{1}{|x|}\right) - (1 - \log a) \right| > \lambda \right\} \right| &= \left| \left\{ x \in I : \left| \log \frac{a}{|x|} - \log e \right| > \lambda \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ x \in I : \left| \log \frac{ae^{-1}}{|x|} \right| > \lambda \right\} \right| \\ &= |\{x \in I : |x| < ae^{-\lambda-1}\}| \\ &= 2ae^{-\lambda-1} = (2a)(e^{-1})e^{-\lambda} = |I|e^{-1}e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra que en cierto sentido, el crecimiento logarítmico es el máximo posible para funciones en BMO . La demostración utiliza una técnica muy conocida en Análisis de Fourier: la descomposición de Calderón-Zygmund (ver Teorema 5.8).

Teorema 1.5 *Sea $f \in BMO$. Entonces existen constantes C_1 y C_2 , que dependen sólo de la dimensión, tal que para cualquier cubo Q en \mathbb{R}^n y cualquier $\lambda > 0$,*

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \leq C_1 e^{-C_2 \lambda / \|f\|_*} |Q|. \quad (1.10)$$

Prueba. Puesto que (1.10) es homogénea, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|f\|_* = 1$. Así para todo cubo Q se tiene:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq 1 \quad (1.11)$$

Ahora, formamos la descomposición de Calderón-Zygmund de $f - f_Q$ en Q a altura 2 (esto se hace como en el Teorema de Descomposición de Calderón Zygmund, pero en vez de los cubos diádicos en \mathbb{R}^n , empezamos bisectando los lados de Q hasta formar 2^n cubos iguales y repitiendo este proceso para todos los cubos formados. La desigualdad (1.11) reemplaza la hipótesis de que $f \in L^1$). Esto nos produce una familia de cubos $\{Q_{1,j}\}$ tal que

$$\text{i)} \quad 2 < \frac{1}{|Q_{1,j}|} \int_{Q_{1,j}} |f(x) - f_Q| dx \leq 2^{n+1}$$

$$\text{ii)} \quad |f(x) - f_Q| \leq 2 \text{ si } x \in Q - \cup_j Q_{1,j}$$

$$\text{iii)} \quad \sum_j |Q_{1,j}| \leq \frac{1}{2} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq \frac{1}{2} |Q|$$

$$\text{iv)} \quad |f_{Q_{1,j}} - f_Q| = \left| \frac{1}{|Q_{1,j}|} \int_{Q_{1,j}} (f(x) - f_Q) dx \right| \leq 2^{n+1}.$$

En cada cubo $Q_{1,j}$ formamos la descomposición de Calderón-Zygmund de $f - f_{Q_{1,j}}$ a altura 2 (de nuevo, por hipótesis, el promedio de $f - f_{Q_{1,j}}$ en $Q_{1,j}$ es a lo sumo 1). Obtenemos así una familia de cubos $\{Q_{1,j,k}\}$ que satisface lo siguiente:

- $|f_{Q_{1,j,k}} - f_{Q_{1,j}}| \leq 2^{n+1}$
- $|f(x) - f_{Q_{1,j}}| \leq 2 \text{ si } x \in Q_{1,j} - \cup_k Q_{1,j,k}$
- $\sum_k |Q_{1,j,k}| \leq \frac{1}{2} |Q_{1,j}|.$

Reunamos los cubos $Q_{1,j,k}$ correspondientes a todos los $Q_{1,j}$ y llamémoslos $\{Q_{2,j}\}$.

Entonces

$$\sum_j |Q_{2,j}| \leq \frac{1}{4} |Q|$$

y si $x \notin \cup_j Q_{2,j}$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_Q| &\leq |f(x) - f_{Q_{1,j}}| + |f_{Q_{1,j}} - f_Q| \\ &\leq 2 + 2^{n+1} \leq 2(2^{n+1}). \end{aligned}$$

Repetamos este proceso indefinidamente. Entonces para cada N , obtenemos una familia de cubos ajenos $\{Q_{N,j}\}$ tal que

$$|f(x) - f_Q| \leq N2^{n+1}$$

si $x \notin \cup_j Q_{N,j}$ y

$$\sum_j |Q_{N,j}| \leq \frac{1}{2^N} |Q|.$$

Fijemos $\lambda \geq 2^{n+1}$ y elíjase N de tal modo que $N2^{n+1} \leq \lambda < (N+1)2^{n+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} |\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| &\leq |\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > N2^{n+1}\}| \\ &\leq \sum_j |Q_{N,j}| \leq \frac{1}{2^N} |Q| \\ &= e^{-N \log 2} |Q| \leq e^{-C_2 \lambda} |Q|, \end{aligned} \tag{1.12}$$

ya que si $C_2 = \frac{\log 2}{2^{n+2}}$ entonces

$$C_2 \lambda = \frac{\log 2}{2^{n+2}} \lambda < \frac{\log 2}{2^{n+2}} [N2^{n+1} + 2^{n+1}] = \frac{N \log 2}{2} + \frac{\log 2}{2} \leq N \log 2.$$

Si ahora $\lambda < 2^{n+1}$ entonces $C_2 \lambda < \frac{\log 2}{2} = \log \sqrt{2}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} |\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| &\leq |Q| \\ &\leq e^{\log \sqrt{2} - C_2 \lambda} |Q| \\ &= \sqrt{2} e^{-C_2 \lambda} |Q| \end{aligned} \tag{1.13}$$

y así podemos tomar $C_1 = \sqrt{2}$. De (1.12) y (1.13) concluimos la prueba. ■

Observación. La desigualdad de John-Nirenberg es una condición necesaria y suficiente para la pertenencia a BMO .

En efecto: Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y satisface que para cada cubo Q y para cada $\alpha > 0$

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\}| \leq B e^{-C\alpha} |Q|$$

donde B, C son constantes que sólo dependen de la dimensión n , entonces para cada cubo Q

$$\begin{aligned} \int_Q |f(x) - f_Q| dx &= \int_0^\infty |\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\}| d\alpha \\ &\leq B |Q| \int_0^\infty e^{-C\alpha} d\alpha \\ &= \frac{B}{C} |Q| \end{aligned}$$

por lo que $f \in BMO$.

Corolario 1.6 Para toda $1 < p < \infty$,

$$\|f\|_{\star, p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en BMO equivalente a $\|\cdot\|_\star$.

Prueba. Será suficiente probar que

$$\|f\|_{\star, p} \leq C_p \|f\|_\star$$

ya que la desigualdad opuesta es inmediata.

Por el Teorema 1.5 tenemos para cada cubo Q

$$\begin{aligned} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx &= \int_0^\infty p \lambda^{p-1} |\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| d\lambda \\ &\leq C_1 |Q| \int_0^\infty p \lambda^{p-1} e^{-C_2 \lambda / \|f\|_\star} d\lambda \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $s = \frac{C_2 \lambda}{\|f\|_*}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx &\leq C_1 p \left(\frac{\|f\|_*}{C_2} \right)^p \int_0^\infty s^{p-1} e^{-s} ds \\ &= C_1 p C_2^{-p} \Gamma(p) \|f\|_*^p, \end{aligned}$$

lo cual finaliza la demostración. ■

Como consecuencia de este corolario obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.7 *Dada $f \in BMO$, existe $\lambda > 0$ tal que para cualquier cubo Q*

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{\lambda |f(x) - f_Q|} dx < \infty.$$

Prueba. Observemos que para $\lambda > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q e^{\lambda |f(x) - f_Q|} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^k dx \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} C_1 k C_2^{-k} \Gamma(k) \|f\|_*^k \\ &= 1 + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{\|f\|_*^k}{C_2^k} \end{aligned}$$

donde $C_1 = 1$ o $\sqrt{2}$ y $C_2 = \frac{\log 2}{2^{n+2}}$.

Luego, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{\|f\|_*^k}{C_2^k}$ converge si $\frac{\lambda \|f\|_*}{C_2} < 1$, es decir, si $\lambda < \frac{C_2}{\|f\|_*}$. ■

CAPÍTULO 2

PROMEDIO DE HARDY-LITTLEWOOD CON PESO

En este capítulo estudiaremos una generalización con peso del operador promedio de Hardy-Littlewood y mostraremos que bajo ciertas condiciones en el peso estos operadores resultan ser acotados en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, así como también en $BMO(\mathbb{R}^n)$. En este proceso, determinaremos de manera precisa la norma del operador en dichos espacios.

Nuestra exposición está basada en las referencias [15] y [27].

2.1. Acotamiento del operador en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y en $BMO(\mathbb{R}^n)$

Definición 2.1 Dadas $\psi : [0, 1] \rightarrow (0, \infty]$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funciones medibles, el promedio de Hardy-Littlewood de f con peso ψ se define así:

$$U_\psi f(x) := \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt. \quad (2.1)$$

Nuestra intención es clasificar aquellas funciones ψ para las cuales el operador U_ψ es acotado en L^p , $1 \leq p \leq \infty$ y en BMO .

El operador U_ψ tiene una cercana relación con el operador maximal M de Hardy-Littlewood, a saber, cuando $\psi \equiv 1$ y $n = 1$ pues en tal caso U_ψ se reduce al clásico promedio de Hardy-Littlewood

$$Uf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y)dy$$

para $x \neq 0$, lo cual se obtiene haciendo el cambio de variable $y = tx$ en (2.1).

Hardy probó en [15] que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left[\int_0^\infty |Uf(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

para $p \in (1, \infty)$, donde la constante $\frac{p}{p-1}$ es la mejor posible. Ilustraremos a continuación la demostración de Hardy de la desigualdad (2.2). Que la constante es la mejor posible será una consecuencia de lo que probaremos posteriormente en este capítulo.

Proposición 2.2 *Dada $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible, se cumple:*

$$\left[\int_0^\infty |Uf(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 < p < \infty$, donde $Uf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y)dy$, $x \neq 0$. Además la constante $\frac{p}{p-1}$ es la mejor posible.

Prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $f(y) \geq 0$ para toda $y \in \mathbb{R}^n$.

A fin de evitar casos triviales supongamos que f es no nula.

Sea $n \in \mathbb{N}$, defínase $f_n = \min\{f, n\}$ y $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

Elíjase X_0 suficientemente grande tal que f, f_n, F_n no sean nulas en $(0, X)$ si $X > X_0$.

Así

$$\begin{aligned} \int_0^X \left(\frac{F_n(x)}{x} \right)^p dx &= \int_0^X F_n^p(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{-1}{p-1} x^{1-p} \right] dx \\ &= \frac{-1}{p-1} \int_0^X F_n^p(x) \frac{d}{dx} (x^{1-p}) dx \\ &= \left[\frac{-x^{1-p} F_n^p(x)}{p-1} \right]_0^X + \frac{p}{p-1} \int_0^X \left(\frac{F_n(x)}{x} \right)^{p-1} f_n(x) dx \\ &\leq \frac{p}{p-1} \int_0^X \left(\frac{F_n(x)}{x} \right)^{p-1} f_n(x) dx, \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado el hecho de que F_n es continua por lo cual la integral es de Riemann y podemos integrar por partes, y en la última desigualdad usamos que

$$\frac{F_n(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f_n(t) dt \longrightarrow f_n(0) = 0$$

cuando $x \longrightarrow 0$ por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue.

Por consiguiente, si p' denota el exponente conjugado de p , esto es, $1/p + 1/p' = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^X \left(\frac{F_n(x)}{x} \right)^p dx &\leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \left[\int_0^X \left(\frac{F_n(x)}{x} \right)^{(p-1)p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \times \left[\int_0^X f_n^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{p}{p-1} \right) \left(\int_0^X \left(\frac{F_n(x)}{x} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^X f_n^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Dado que $\int_0^X \left(\frac{F_n(x)}{x} \right)^p dx$ es positivo y finito, entonces

$$\left[\int_0^X \left(\frac{F_n(x)}{x} \right)^p dx \right]^{1-\frac{1}{p'}} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \left[\int_0^X f_n^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Como $f_n \nearrow f$, $F_n \nearrow F$, $f_n \geq 0$ y $F_n \geq 0$ se sigue del Teorema de Convergencia Monótona que

$$\int_0^X f_n^p(x) dx \longrightarrow \int_0^X f^p(x) dx$$

y

$$\int_0^X \left(\frac{F_n(x)}{x} \right)^p dx \longrightarrow \int_0^X \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx$$

cuando $n \longrightarrow \infty$ por lo que

$$\left[\int_0^X \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \left[\int_0^X f^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Haciendo que $X \longrightarrow \infty$, una nueva aplicación del Teorema de Convergencia Monótona nos permite obtener

$$\left[\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \left[\int_0^\infty f^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

como deseábamos mostrar. ■

Cuando $p = \infty$ es claro que $\|Uf\|_{L^\infty(0,\infty)} \leq \|f\|_{L^\infty(0,\infty)}$ y que esta desigualdad es la mejor posible (basta tomar $f \equiv 1$).

Enseguida abordaremos el problema del acotamiento de U_ψ en el contexto de \mathbb{R}^n .

Teorema 2.3 *Sea $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ una función medible y sea $p \in [1, \infty]$. Entonces*

(i) $U_\psi : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ existe como operador acotado si y sólo si

$$\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt < \infty. \quad (2.3)$$

Además, cuando (2.3) se satisface, la norma del operador U_ψ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ está dada por

$$\|U_\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt. \quad (2.4)$$

(ii) $U_\psi : BMO(\mathbb{R}^n) \rightarrow BMO(\mathbb{R}^n)$ existe como operador acotado si y sólo si

$$\int_0^1 \psi(t) dt < \infty. \quad (2.5)$$

Además, cuando (2.5) se verifica, la norma de U_ψ en $BMO(\mathbb{R}^n)$ está dada por

$$\|U_\psi\|_{BMO(\mathbb{R}^n) \rightarrow BMO(\mathbb{R}^n)} = \int_0^1 \psi(t) dt. \quad (2.6)$$

Prueba. (i) Bastará considerar el caso en el que $p \in [1, \infty)$ ya que cuando $p = \infty$ claramente se cumple el resultado.

Supongamos que se verifica (2.3).

Usando la Desigualdad Integral de Minkowski tenemos que

$$\begin{aligned}
\|U_\psi f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(tx)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \psi(t)dt \\
&= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t)dt.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

De este modo, vemos que U_ψ transforma continuamente $L^p(\mathbb{R}^n)$, en sí mismo.

Ahora supongamos que U_ψ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|U_\psi f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.8}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Enseguida, definamos para $\varepsilon > 0$ la función

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ |x|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{|x|>1} |x|^{-n-p\varepsilon} dx = \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} d\sigma r^{-n-p\varepsilon} r^{n-1} dr \\
&= |S^{n-1}| \int_1^\infty r^{-p\varepsilon-1} dr = |S^{n-1}| \left[\frac{r^{-p\varepsilon}}{-p\varepsilon} \right]_{r=1}^{r=\infty} \\
&= \frac{|S^{n-1}|}{p\varepsilon} = \frac{C_n}{p\varepsilon}
\end{aligned}$$

donde $C_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

También

$$\begin{aligned} U_\psi f_\varepsilon(x) &= \int_0^1 f_\varepsilon(tx)\psi(t)dt = \int_0^1 |tx|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \chi_{\{|tx|>1\}}\psi(t)dt \\ &= \begin{cases} |x|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \int_{\frac{1}{|x|}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon}\psi(t)dt & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Puesto que la desigualdad (2.8) se aplica a f_ε , escribiendo $\delta = \frac{1}{\varepsilon} > 1$ tendremos:

$$\begin{aligned} C^p \|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &\geq \|U_\psi f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ &= \int_{|x|>1} \left[|x|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \int_{\frac{1}{|x|}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon}\psi(t)dt \right]^p dx \\ &\geq \int_{|x|>\delta} \left[|x|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \int_{\frac{1}{\delta}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon}\psi(t)dt \right]^p dx \\ &= \left[\int_{|x|>\delta} |x|^{-n-p\varepsilon} dx \right] \left[\int_{\frac{1}{\delta}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon}\psi(t)dt \right]^p. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ahora, hacemos el cambio de variable $u = \frac{x}{\delta}$ en la primera integral y obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{|x|>\delta} |x|^{-n-p\varepsilon} dx &= \int_{|u|>1} \delta^{-n-p\varepsilon} |u|^{-n-p\varepsilon} \delta^n du \\ &= \int_{|u|>1} \delta^{-p\varepsilon} |u|^{-n-p\varepsilon} du \\ &= \delta^{-p\varepsilon} \|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p; \end{aligned}$$

también observamos que en la segunda integral dado que $\frac{1}{\delta} < t < 1$ entonces $t^{-\varepsilon} > 1$ y así

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon}\psi(t)dt \geq \int_{\frac{1}{\delta}}^1 t^{-\frac{n}{p}}\psi(t)dt.$$

Con esta información vemos que

$$C^p \|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \geq \|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \left[\delta^{-\varepsilon} \int_{\frac{1}{\delta}}^1 t^{-\frac{n}{p}}\psi(t)dt \right]^p \quad (2.10)$$

y (2.10) implica que

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt \leq C\delta^\varepsilon,$$

esto es,

$$\int_\varepsilon^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt \leq \frac{C}{\varepsilon^\varepsilon}$$

para toda $\varepsilon > 0$.

Tomando límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt \leq C.$$

Mostraremos ahora que la norma del operador U_ψ está dada por (2.4).

En efecto, si se verifica (2.3), esto es $\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt < \infty$ entonces como vimos en (2.7) se tiene que

$$\|U_\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt \quad (2.11)$$

lo cual nos proporciona una de las desigualdades requeridas.

Para demostrar la igualdad en (2.11) supongamos que se tiene una desigualdad estricta. Así, existe un número positivo k tal que

$$\|U_\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)} \leq k < \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt. \quad (2.12)$$

Usando la función f_ε definida previamente tendremos por (2.9) y (2.10) que

$$k^p \|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \geq \|U_\psi f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \geq \|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \left[\varepsilon^\varepsilon \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt \right]^p$$

lo cual implica

$$k \geq \varepsilon^\varepsilon \int_\varepsilon^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt$$

y haciendo que $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$k \geq \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt. \quad (2.13)$$

Pero (2.13) contradice (2.12), así

$$\|U_\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt.$$

Hemos demostrado completamente la parte (i) del Teorema.

(ii) Como es usual, si $Q \subset \mathbb{R}^n$ es un cubo, para $t > 0$ el conjunto tQ denotará el cubo con el mismo centro que Q y con longitud de lado $tl(Q)$ donde $l(Q)$ denota la longitud de lado de Q .

Supongamos que se cumple la condición (2.5), esto es, $\int_0^1 \psi(t) dt < \infty$. Sea $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y sea Q un cubo cualquiera en \mathbb{R}^n , entonces por el Teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned} (U_\psi f)_Q &= \frac{1}{|Q|} \int_Q U_\psi f(x) dx = \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^1 f(tx) \psi(t) dt dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q f(tx) dx \right] \psi(t) dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{|tQ|} \int_{tQ} f(y) dy \right] \psi(t) dt \\ &= \int_0^1 f_{tQ} \psi(t) dt \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |U_\psi f(x) - (U_\psi f)_Q| dx &= \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \int_0^1 f(tx) \psi(t) dt - \int_0^1 f_{tQ} \psi(t) dt \right| dx \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \left[\int_0^1 |f(tx) - f_{tQ}| \psi(t) dt \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(tx) - f_{tQ}| dx \right] \psi(t) dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{|tQ|} \int_{tQ} |f(y) - f_{tQ}| dy \right] \psi(t) dt \\ &\leq \|f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 \psi(t) dt \end{aligned} \tag{2.14}$$

lo cual implica que U_ψ es acotado en $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Recíprocamente, supongamos que U_ψ es acotado en $BMO(\mathbb{R}^n)$. Definamos $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_0(x) = 1$ para $x \in \mathbb{R}_l^n$, $f_0(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}_r^n$, donde \mathbb{R}_l^n y \mathbb{R}_r^n denotan las porciones izquierda y derecha de \mathbb{R}^n , respectivamente, separadas por el hiperplano $x_1 = 0$ (x_1 es la primera coordenada de $x \in \mathbb{R}^n$).

Así

$$\begin{aligned} (U_\psi f_0)(x) &= \int_0^1 f_0(tx)\psi(t)dt \\ &= \begin{cases} \int_0^1 \psi(t)dt & \text{si } x \in \mathbb{R}_l^n \\ -\int_0^1 \psi(t)dt & \text{si } x \in \mathbb{R}_r^n \end{cases} \end{aligned}$$

esto es,

$$U_\psi f_0 = f_0 \int_0^1 \psi(t)dt. \quad (2.15)$$

Siendo f_0 un elemento de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, claramente pertenece a $BMO(\mathbb{R}^n)$ y como no es una función constante entonces $\|f_0\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} > 0$, luego de (2.15) vemos que

$$\int_0^1 \psi(t)dt = \frac{\|U_\psi f_0\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}}{\|f_0\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}} \leq \|U_\psi\|_{BMO(\mathbb{R}^n) \rightarrow BMO(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Finalmente, (2.14) nos dice que

$$\|U_\psi\|_{BMO(\mathbb{R}^n) \rightarrow BMO(\mathbb{R}^n)} \leq \int_0^1 \psi(t)dt.$$

Por tanto,

$$\|U_\psi\|_{BMO(\mathbb{R}^n) \rightarrow BMO(\mathbb{R}^n)} = \int_0^1 \psi(t)dt,$$

concluyendo así la demostración de nuestro teorema. ■

Recordemos que en (2.2) quedó pendiente demostrar que la constante $\frac{p}{p-1}$ es la mejor posible. Para completar este punto, observemos que cuando $n = 1$ y $\psi \equiv 1$ por

(2.3) la norma del operador U es

$$\begin{aligned}\|U\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} dt = \left[\frac{t^{-\frac{1}{p}+1}}{-\frac{1}{p}+1} \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}\end{aligned}$$

lo que muestra que la constante $\frac{p}{p-1}$ es la mejor posible en la Desigualdad de Hardy.

CAPÍTULO 3

CONMUTADOR DEL OPERADOR DE HARDY-LITTLEWOOD CON PESO

El estudio de conmutadores de operadores ha sido un tema de mucha atención en el Análisis de Fourier. Existe un resultado muy famoso demostrado por R. Coifman, R. Rochberg y G. Weiss que establece que el conmutador

$$T_b f := bTf - T(bf)$$

es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, si y sólo si $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Aquí T es un operador integral singular de Calderón-Zygmund, esto es, T es un operador integral singular donde el núcleo K además satisface:

$$(I) \quad |K(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n},$$

$$(II) \quad |K(x, y) - K(x, z)| \leq C \frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \quad \text{si } |x-y| > 2|y-z|,$$

$$(III) \quad |K(x, y) - K(w, y)| \leq C \frac{|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \quad \text{si } |x-y| > 2|x-w|,$$

para alguna $\delta > 0$.

A partir de lo anterior, se han generalizado muchos resultados a otras clases de operadores, no sólo los de Calderón-Zygmund. Por esta razón, en este capítulo consideraremos conmutadores de operadores de Hardy-Littlewood con peso y demostraremos que son acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

En este capítulo nos hemos basado en la referencia [9].

3.1. Definición y estimaciones previas

Definición 3.1 Sean $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ una función medible. Definimos el conmutador del operador de Hardy con peso, U_ψ^b como

$$U_\psi^b f := bU_\psi f - U_\psi(bf),$$

donde, como es usual

$$U_\psi f(x) = \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt,$$

$x \in \mathbb{R}^n$. La función b se llama el símbolo del conmutador.

En general, se sabe que cuando el símbolo del conmutador está en $BMO(\mathbb{R}^n)$, las propiedades del conmutador empeoran en relación a las del operador mismo (en el sentido de las singularidades del núcleo). Por ello, es razonable pensar que la condición

$$\mathcal{A} := \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt < \infty$$

que sabemos necesaria y suficiente para el acotamiento de U_ψ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, no podrá asegurar el acotamiento de U_ψ^b en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (cuando $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$).

Así, nuestra intención será encontrar condiciones necesarias y suficientes en el peso ψ que aseguren que el operador U_ψ^b sea acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.

La idea central para obtener nuestro resultado será controlar los conmutadores de los operadores de Hardy con peso por medio del operador maximal de Hardy-Littlewood en vez de usar (como es usual al estudiar integrales singulares) la función maximal sharp.

Antes de enunciar el teorema principal de este capítulo que probaremos en la siguiente sección, definiremos las siguientes constantes

$$\mathcal{B} := \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

y

$$\mathcal{C} := \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log\left(\frac{2}{t}\right) dt.$$

Observación. Para \mathcal{C} definida como antes, dado que $\mathcal{C} = \mathcal{A} \log 2 + \mathcal{B}$, es claro que $\mathcal{C} < \infty$ implica que $\mathcal{A} < \infty$. Sin embargo, si $\mathcal{A} < \infty$ entonces no necesariamente $\mathcal{C} < \infty$.

Para ejemplificar esto, sea $0 < \alpha < 1$.

Defínase

$$\psi(t) = \tilde{\psi}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

$0 \leq t \leq 1$, donde

$$\exp\left(s\left(\frac{n}{p} - 1\right)\right) \tilde{\psi}(s) = \begin{cases} s^{-1+\alpha}, & 0 < s \leq 1 \\ s^{-1-\alpha}, & 1 < s < \infty \\ 0, & s = 0, \infty. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt = \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \tilde{\psi}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{e}} t^{-\frac{n}{p}} \exp\left(-\log\left(\frac{1}{t}\right)\right) \left(\frac{n}{p} - 1\right) \left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-1-\alpha} dt \\ &\quad + \int_{\frac{1}{e}}^1 t^{-\frac{n}{p}} \exp\left(-\log\left(\frac{1}{t}\right)\right) \left(\frac{n}{p} - 1\right) \left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-1+\alpha} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{e}} t^{-\frac{n}{p}} t^{\frac{n}{p}-1} (-\log(t))^{-1-\alpha} dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 t^{-\frac{n}{p}} t^{\frac{n}{p}-1} (-\log(t))^{-1+\alpha} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t} (-\log(t))^{-1-\alpha} dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t} (-\log(t))^{-1+\alpha} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{\frac{1}{e}} (-\log(t))^{-1-\alpha} \left(\frac{-dt}{t} \right) - \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\log(t))^{-1+\alpha} \left(\frac{-dt}{t} \right) \\
&= \left[\frac{1}{\alpha} \left(\log \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{-\alpha} \right]_{t=0}^{t=\frac{1}{e}} - \left[\frac{1}{\alpha} \left(\log \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{\alpha} \right]_{t=\frac{1}{e}}^{t=1} \\
&= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} < \infty.
\end{aligned}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \mathcal{A} \log(2) + \mathcal{B} = \frac{2}{\alpha} \log(2) + \mathcal{B} \\
&= \frac{2}{\alpha} \log(2) + \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log \left(\frac{1}{t} \right) dt \\
&= \frac{2}{\alpha} \log(2) + \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t} \left(\log \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{-(1+\alpha)} \log \left(\frac{1}{t} \right) dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t} \left(\log \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{-1+\alpha} \log \left(\frac{1}{t} \right) dt \\
&= \frac{2}{\alpha} \log(2) + \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t} \left(\log \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{-\alpha} dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t} \left(\log \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{\alpha} dt
\end{aligned}$$

y un cálculo sencillo muestra que la primera integral es infinita, mientras que la segunda es finita, por lo cual $\mathcal{C} = \infty$.

Para la prueba de nuestro resultado de acotamiento requeriremos del siguiente lema.

Lema 3.2 *Sea C una constante positiva, y Q_1, Q_2 dos bolas de \mathbb{R}^n tales que si Q es la bola más pequeña que contiene a Q_1 y a Q_2 entonces*

$$|Q| \leq C |Q_i|,$$

$i = 1, 2$.

Entonces, para cada función $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$|b_{Q_1} - b_{Q_2}| \leq 2C \|b\|_{\star}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{donde } \|b\|_* = & \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q| dx). \\
 & Q \text{ bola}
 \end{aligned}$$

Prueba. Es inmediato que

$$|b_{Q_1} - b_{Q_2}| \leq |b_{Q_1} - b_Q| + |b_Q - b_{Q_2}|.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
 |b_{Q_1} - b_Q| &= \left| \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} b(x) dx - b_Q \right| = \left| \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} [b(x) - b_Q] dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} |b(x) - b_Q| dx \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q| dx \leq C \|b\|_*.
 \end{aligned}$$

El sumando que falta se estima de modo similar, por tanto

$$|b_{Q_1} - b_{Q_2}| \leq 2C \|b\|_*$$

y de este modo concluimos la demostración. ■

Otro resultado que necesitaremos es el Corolario 1.6, a saber:

$$\begin{aligned}
 \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\sim \|b\|_* \\
 &Q \text{ bola}
 \end{aligned}$$

para $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y $1 < p < \infty$.

Recordamos que en virtud de que las medidas de Lebesgue de las bolas y los cubos en \mathbb{R}^n son comparables, el operador maximal de Hardy-Littlewood M puede definirse también como

$$\begin{aligned}
 Mf(x) &= \sup_{x \in Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \\
 &Q \text{ bola}
 \end{aligned}$$

y se sabe que M es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.

3.2. Acotamiento del conmutador

Ahora ya tenemos todas las herramientas necesarias para enunciar y demostrar el acotamiento en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, del conmutador U_ψ^b .

Teorema 3.3 *Sea $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ una función medible y $1 < p < \infty$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. U_ψ^b es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para cada $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.
2. $\mathcal{C} < \infty$.

Prueba. (1) \implies (2) Supongamos que $\|U_\psi^b\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C < \infty$ para alguna constante C (que puede depender de b).

Para mostrar que $\mathcal{C} < \infty$ como deseamos, probaremos que $\mathcal{A} < \infty$ y $\mathcal{B} < \infty$.

Elíjase $b(x) = \log|x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Por hipótesis $\|U_\psi^b\|_{p \rightarrow p} < \infty$.

Para cualquier $0 < \varepsilon < 1$ tomemos

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_p^p &= \int_{|x|>1} \left(|x|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon}\right)^p dx = \int_{|x|>1} |x|^{-n-p\varepsilon} dx \\ &= \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} r^{-n-\varepsilon p} d\sigma r^{n-1} dr = \int_1^\infty \left[\int_{S^{n-1}} d\sigma \right] r^{-\varepsilon p-1} dr \\ &= |S^{n-1}| \int_1^\infty r^{-\varepsilon p-1} dr = \frac{C_n}{p\varepsilon} \end{aligned}$$

donde $C_n = |S^{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, la medida superficial de la esfera.

Por otra parte

$$\begin{aligned}
(U_{\psi}^b f_{\varepsilon})(x) &= b(x) \int_0^1 f_{\varepsilon}(tx) \psi(t) dt - \int_0^1 b(tx) f_{\varepsilon}(tx) \psi(t) dt \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ \log(|x|) \int_0^{\frac{1}{|x|}} f_{\varepsilon}(tx) \psi(t) dt + \log|x| \int_{\frac{1}{|x|}}^1 f_{\varepsilon}(tx) \psi(t) dt \\ - \int_0^{\frac{1}{|x|}} \log|tx| f_{\varepsilon}(tx) \psi(t) dt - \int_{\frac{1}{|x|}}^1 \log|tx| f_{\varepsilon}(tx) \psi(t) dt & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ - \int_{\frac{1}{|x|}}^1 [\log t] |tx|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \psi(t) dt & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \int_{\frac{1}{|x|}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt & \text{si } |x| > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Sea $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$, entonces $\delta > 1$ y

$$\begin{aligned}
\|U_{\psi}^b f_{\varepsilon}\|_p^p &= \int_{|x|>1} \left[|x|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \int_{\frac{1}{|x|}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt \right]^p dx \\
&\geq \int_{|x|>\delta} \left[|x|^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \int_{\frac{1}{\delta}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt \right]^p dx \\
&= \left[\int_{|x|>\delta} |x|^{-\frac{np}{p}-\varepsilon p} dx \right] \left[\int_{\varepsilon}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt \right]^p \\
&= \left[\int_{|x|>\delta} |x|^{-n-\varepsilon p} dx \right] \left[\int_{\varepsilon}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt \right]^p \\
&= \left[\int_{|y|>1} \delta^{-n-\varepsilon p+n} |y|^{-n-\varepsilon p} dy \right] \left[\int_{\varepsilon}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt \right]^p \\
&= \varepsilon^{\varepsilon p} \|f_{\varepsilon}\|_p^p \left[\int_{\varepsilon}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt \right]^p,
\end{aligned}$$

donde en el penúltimo renglón se hizo el cambio de variable $y = \frac{x}{\delta}$.

Esto implica que

$$\|U_{\psi}^b f_{\varepsilon}\|_p \geq \varepsilon^{\varepsilon} \|f_{\varepsilon}\|_p \int_{\varepsilon}^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt.$$

Por consiguiente

$$\|U_\psi^b\|_{L^p \rightarrow L^p} \geq \frac{\|U_\psi^b f_\varepsilon\|_p}{\|f_\varepsilon\|_p} \geq \varepsilon^\varepsilon \int_\varepsilon^1 t^{-\frac{n}{p}-\varepsilon} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt$$

y haciendo que $\varepsilon \rightarrow 0^+$ vemos que

$$\infty > \|U_\psi^b\|_{L^p \rightarrow L^p} \geq \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt = \mathcal{B}.$$

Ahora nos falta mostrar que $\mathcal{A} < \infty$.

Para ello, consideremos la familia de funciones b_k dadas por

$$b_k(x) = \chi_{Q(0,1)}(x) \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(\pi k |x|)),$$

$k \in \mathbb{N}$, donde $Q(0,1)$ es la bola unitaria.

Dado que b_k es acotada entonces pertenece a $BMO(\mathbb{R}^n)$ y por hipótesis $\|U_\psi^{b_k}\|_{L^p \rightarrow L^p} < \infty$.

Tómese $f = \chi_{Q(0,1)}$. Entonces

$$U_\psi^{b_k} f(x) = b_k(x) \int_0^1 \psi(t) dt - \int_0^{\min\{1, \frac{1}{|x|}\}} \psi(t) \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(\pi k t |x|)) dt.$$

Ahora, podemos encontrar $k = k(\psi)$ suficientemente grande tal que

$$\left| U_\psi^{b_k} f(x) \right| \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(t) dt,$$

para $\frac{1}{2} < |x| < 1$.

Así

$$\left| U_\psi^{b_k} f_1(x) \right| \geq \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \psi(t) dt \right] f_1(x)$$

donde $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$ y $A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\}$.

De aquí

$$\left\| U_{\psi}^{b_k} f_1 \right\|_p \geq \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \psi(t) dt \right] \|f_1\|_p$$

lo que implica que

$$\infty > \left\| U_{\psi}^{b_k} \right\|_{L^p \rightarrow L^p} \geq \frac{\left\| U_{\psi}^{b_k} f_1 \right\|_p}{\|f_1\|_p} \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(t) dt.$$

Además,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(t) dt \leq \int_0^1 \psi(t) dt < \infty.$$

Puesto que $t^{-\frac{n}{p}}$ es localmente integrable en $t = 1$ tenemos que

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt < \infty.$$

Dado que $\mathcal{B} \leq \left\| U_{\psi}^{b_k} \right\|_{L^p \rightarrow L^p} < \infty$, tenemos

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt \leq C \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt \leq C\mathcal{B} < \infty.$$

(Aquí $C = \frac{1}{\log 2}$ pues como $0 < t < \frac{1}{2}$ entonces $\log t < \log \frac{1}{2}$ o $\log 2 < \log \frac{1}{t}$).

Por tanto $\mathcal{A} < \infty$ y así tenemos que $\mathcal{C} < \infty$, como queríamos demostrar.

(2) \implies (1) Suponemos $\mathcal{C} < \infty$, esto es,

$$\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log\left(\frac{2}{t}\right) dt < \infty.$$

Fijemos una bola $Q \subset \mathbb{R}^n$ y sea $x \in Q$. Entonces usando el Teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |U_\psi^b f(y)| dy &= \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| b(y) \int_0^1 f(ty) \psi(t) dt - \int_0^1 b(ty) f(ty) \psi(t) dt \right| dy \\
&= \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \int_0^1 [b(y)f(ty) - b(ty)f(ty)] \psi(t) dt \right| dy \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^1 |b(y) - b(ty)| |f(ty)| \psi(t) dt dy \\
&= \frac{1}{|Q|} \int_0^1 \int_Q |(b(y) - b(ty)) f(ty)| \psi(t) dy dt \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \int_0^1 \int_Q |(b(y) - b_Q) f(ty)| dy \psi(t) dt \\
&\quad + \frac{1}{|Q|} \int_0^1 \int_Q |(b_Q - b_{tQ}) f(ty)| dy \psi(t) dt \\
&\quad + \frac{1}{|Q|} \int_0^1 \int_Q |(b(ty) - b_{tQ}) f(ty)| dy \psi(t) dt \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Ahora estimaremos cada uno de estos sumandos. Elijase algún $1 < r < p$ y sea r' su exponente conjugado, así usando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{|Q|} \int_0^1 \int_Q |(b(y) - b_Q) f(ty)| dy \psi(t) dt \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \int_0^1 \left[\int_Q |f(ty)|^r dy \right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_Q |b(y) - b_Q|^{r'} dy \right]^{\frac{1}{r'}} \psi(t) dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(ty)|^r dy \right]^{\frac{1}{r}} \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y) - b_Q|^{r'} dy \right]^{\frac{1}{r'}} \psi(t) dt \\
&\leq C \|b\|_* \int_0^1 \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(ty)|^r dy \right]^{\frac{1}{r}} \psi(t) dt \\
&= C \|b\|_* \int_0^1 \left[\frac{1}{|tQ|} \int_{tQ} |f(u)|^r du \right]^{\frac{1}{r}} \psi(t) dt
\end{aligned}$$

$$\leq C \|b\|_{\star} \int_0^1 (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \psi(t) dt,$$

con lo cual hemos obtenido una estimación para I_1 .

Aclaremos que en la desigualdad anterior convenimos que si Q es la bola con centro x_Q y radio r_Q entonces tQ es la bola con centro tx_Q y radio tr_Q .

Análogamente, tenemos que

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{|Q|} \int_0^1 \int_Q |(b(ty) - b_{tQ}) f(ty)| dy \psi(t) dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(ty)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(ty) - b_{tQ}|^{r'} dy \right)^{\frac{1}{r'}} \psi(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{|tQ|} \int_{tQ} |f(u)|^r du \right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{|tQ|} \int_{tQ} |b(u) - b_{tQ}|^{r'} du \right)^{\frac{1}{r'}} \psi(t) dt \\ &\leq C \|b\|_{\star} \int_0^1 (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \psi(t) dt, \end{aligned}$$

y de nueva cuenta, obtenemos una estimación para I_3 .

Enseguida estimaremos I_2 .

Para esta estimación utilizaremos una técnica diferente.

Observemos primero que es posible encontrar $a \in (1, 2]$ tal que para cada $i = 0, 1, 2, \dots$ podemos asegurar

$$a^{-i}Q \cap a^{-i-1}Q \neq \emptyset. \quad (3.1)$$

En efecto, sea x_Q el centro de la bola Q y r_Q su radio.

Analizaremos los siguientes casos.

Caso 1. Si $\|x_Q\| = r_Q$ basta tomar $a = 2$ pues en este caso tendremos fácilmente la condición (3.1) ya que las bolas están anidadas como se muestra en la Figura 1.

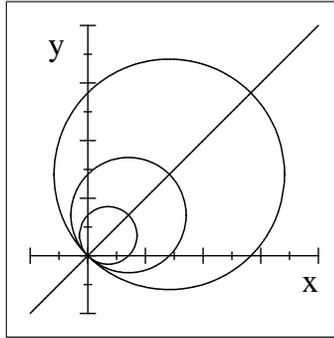


Figura 1

Caso 2. $r_Q > \|x_Q\|$. En este caso también podemos tomar $a = 2$ ya que la condición (3.1) se verifica fácilmente pues de nuevo las bolas están anidadas como se muestra en la Figura 2.

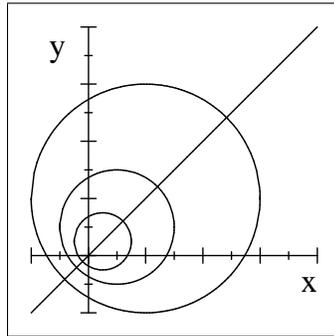


Figura 2

Caso 3. $r_Q < \|x_Q\|$. En este caso tomemos $\rho = 1 - \frac{r_Q}{\|x_Q\|} \in (0, 1)$ y sea $a = \rho^{-1}$. La familia de bolas $a^{-i}Q$ tiene centros $\rho^i x_Q$ y radio $\rho^i r_Q$, para cada $i = 0, 1, 2, \dots$

La elección de ρ fue así porque estamos buscando un número $0 < \rho < 1$ tal que $\|\rho x_Q - x_Q\| = r_Q$ lo cual implica que $\rho = 1 - \frac{r_Q}{\|x_Q\|}$.

Para elegir el siguiente centro requerimos hallar $0 < \rho' < \rho$ tal que $\|\rho' x_Q - \rho x_Q\| = \rho r_Q$ lo cual implica que $\rho \left[1 - \frac{r_Q}{\|x_Q\|} \right] = \rho'$, entonces $\rho' = \rho^2$. Las bolas correspondientes se muestran en la Figura 3.

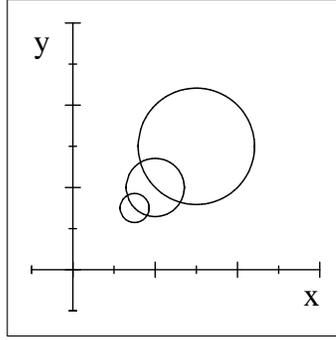


Figura 3

El análisis de estos tres casos muestra que la condición (3.1) se verifica claramente en todos ellos.

Ahora continuamos con nuestro objetivo de estimar el sumando I_2 .

Tomemos $1 < r < \rho$, luego tenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{|Q|} \int_0^1 \int_Q |(b_Q - b_{tQ}) f(ty)| dy \psi(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(ty) dy \right) |b_Q - b_{tQ}| \psi(t) dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(ty)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} |b_Q - b_{tQ}| \psi(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} |b_Q - b_{tQ}| \psi(t) dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a^{-k-1}}^{a^{-k}} (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} |b_Q - b_{tQ}| \psi(t) dt \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a^{-k-1}}^{a^{-k}} (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \left\{ \left[\sum_{i=0}^k |b_{a^{-i}Q} - b_{a^{-i-1}Q}| \right] + |b_{a^{-k-1}Q} - b_{tQ}| \right\} \psi(t) dt.
\end{aligned}$$

Enseguida notamos que debido a que $a^{-i}Q \cap a^{-i-1}Q \neq \emptyset \forall i = 0, 1, 2, \dots$ y que $|a^{-i}Q| = C_n a^{-in} r_Q^n$ y $|a^{-i-1}Q| = C_n a^{-i(n-1)} r_Q^n a^{-n}$ entonces se cumplen las condiciones del Lema 3.2 por lo que

$$|b_{a^{-i}Q} - b_{a^{-i-1}Q}| \leq C \|b\|_{\star}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

También, de nuevo por el Lema 3.2 tenemos que para $t \in [a^{-k-1}, a^{-k}]$

$$|b_{a^{-k-1}Q} - b_{tQ}| \leq C \|b\|_{\star}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C \|b\|_{\star} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a^{-k-1}}^{a^{-k}} (k+1) (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \psi(t) dt \\
&= C \|b\|_{\star} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a^{-k-1}}^{a^{-k}} \left[\left(\frac{1}{\log a} \right) k \log a + 1 \right] (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \psi(t) dt \\
&\leq C \|b\|_{\star} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a^{-k-1}}^{a^{-k}} (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \psi(t) \log a^k dt + \int_0^1 (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \psi(t) dt \right\} \\
&\leq C \|b\|_{\star} \int_0^1 (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \psi(t) \left(1 + \log \frac{1}{t} \right) dt,
\end{aligned}$$

puesto que para $a^{-k-1} < t < a^{-k}$ se tiene $a^k < t^{-1} < a^{k+1}$ y así $\log a^k \leq \log t^{-1}$.

Ahora, usando las estimaciones que hemos obtenido previamente tendremos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |U_{\psi}^b f(y)| dy \leq C \|b\|_{\star} \int_0^1 (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \left[1 + \log \frac{1}{t} \right] \psi(t) dt.$$

Tomando el supremo sobre todas las bolas Q tales que $x \in Q$ obtenemos

$$M(U_\psi^b f)(x) \leq C \|b\|_\star \int_0^1 (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \left[1 + \log \frac{1}{t}\right] \psi(t) dt \quad (3.2)$$

y tomando ahora norma en $L^p(\mathbb{R}^n)$ llegamos a

$$\|M(U_\psi^b f)(\cdot)\|_p \leq C \|b\|_\star \left\| \int_0^1 (Mf^r(t\cdot))^{\frac{1}{r}} \left[1 + \log \frac{1}{t}\right] \psi(t) dt \right\|_p. \quad (3.3)$$

Ahora aplicamos la Desigualdad Integral de Minkowski y obtenemos

$$\begin{aligned} \|M(U_\psi^b f)(\cdot)\|_p &\leq C \|b\|_\star \int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}^n} (Mf^r(tx))^{\frac{p}{r}} dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[1 + \log \frac{1}{t}\right] \psi(t) dt \\ &= C \|b\|_\star \int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}^n} (Mf^r(y))^{\frac{p}{r}} dy \right]^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{n}{p}} \left[1 + \log \frac{1}{t}\right] \psi(t) dt \\ &\leq C \|b\|_\star \|f\|_p \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \left[1 + \log \frac{1}{t}\right] \psi(t) dt \end{aligned}$$

en donde hemos usado el hecho de que el operador maximal de Hardy-Littlewood M es acotado en $L^{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)$ para $p > r > 1$. Como consecuencia del Teorema de Diferenciación de Lebesgue es bien sabido que

$$|U_\psi^b f(x)| \leq M(U_\psi^b f)(x)$$

casi en todas partes, lo que implica que

$$\|U_\psi^b f\|_p \leq C \|b\|_\star \|f\|_p \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \left(1 + \log \frac{1}{t}\right) dt.$$

Entonces

$$\|U_\psi^b\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C \|b\|_\star \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \left(1 + \log \frac{1}{t}\right) dt.$$

Hemos visto antes de la demostración del Teorema que suponer $\mathcal{C} < \infty$, es decir,

$$\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log \left(\frac{2}{t}\right) dt < \infty$$

implica que

$$\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt < \infty,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \left(1 + \log \frac{1}{t}\right) dt &= \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) dt + \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt \\ &\leq C \left[\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log 2 dt + \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt \right] \\ &= C \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t) \log \frac{2}{t} dt \end{aligned}$$

y esto muestra que $\|U_\psi^b\|_{L^p \rightarrow L^p} < \infty$ como queríamos probar. ■

CAPÍTULO 4

ESPACIOS DE MORREY

Con el objeto de estudiar el comportamiento local de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden, C. Morrey introdujo en [18] algunos espacios de funciones que posteriormente fueron generalizados y denominados espacios de Morrey $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, los cuales constituyen una generalización natural de los espacios $L^q(\mathbb{R}^n)$. En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de estos espacios y probaremos que el operador promedio de Hardy con peso actúa continuamente en éstos. Asimismo, encontraremos condiciones necesarias y suficientes en el peso para asegurar el acotamiento del conmutador en los espacios $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

El desarrollo de este capítulo está basado en las referencias [10], [1] y [5].

4.1. Definición de $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y acotamiento de U_ψ en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$

Definición 4.1 Denotemos por $Q(x, R)$ la bola con centro en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ y radio R . Sea $1 \leq q < \infty$ y $-\frac{1}{q} \leq \lambda$. El espacio de Morrey $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ se define así:

$$L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

donde

$$\|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ R > 0}} \left[\frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a, R)} |f(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (4.1)$$

Notemos que en la definición anterior pudimos haber considerado también cubos en vez de bolas ya que las medidas de Lebesgue de ambos son comparables. Esta observación es también aplicable al espacio $BMO(\mathbb{R}^n)$, como lo comentamos en capítulos previos.

Otra observación importante es la siguiente:

- Si $\lambda = -\frac{1}{q}$ tenemos que $L^{q, -\frac{1}{q}}(\mathbb{R}^n) = L^q(\mathbb{R}^n)$; cuando $\lambda = 0$ se tiene $L^{q, 0}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$, y cuando $\lambda > 0$ tenemos $L^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

En efecto, cuando $\lambda = -\frac{1}{q}$ la condición que define a $L^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ se convierte en

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left[\int_{Q(a, R)} |f(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{L^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

$$R > 0$$

por lo que es claro que todo elemento de $L^q(\mathbb{R}^n)$ está en $L^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ y recíprocamente.

Cuando $\lambda = 0$ la condición (4.1) se convierte en

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{|Q(a, R)|} \int_{Q(a, R)} |f(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{L^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

$$R > 0$$

así, por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue tenemos

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

casi en todas partes, luego $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Recíprocamente, toda $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ verifica la condición correspondiente a $\lambda = 0$ y entonces $f \in L^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Finalmente, si $\lambda > 0$ la condición (4.1) se reduce a

$$\frac{1}{|Q(a, R)|^{\lambda + \frac{1}{q}}} \left[\int_{Q(a, R)} |f(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

para toda $a \in \mathbb{R}^n$ y para toda $R > 0$, lo cual es imposible si $f \neq 0$ ya que podríamos tomar $R > 0$ arbitrariamente pequeño y usar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue para concluir que en tal caso f debería ser cero, lo cual es imposible. Así, $f = 0$.

En virtud de la observación anterior, sólo consideraremos el caso en el que $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$.

Enseguida mostraremos que los espacios de Morrey son completos.

Proposición 4.2 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach.

Prueba. Sea $(f_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j, k \geq N$

$$\|f_j - f_k\|_{L^{q,\lambda}} < \varepsilon,$$

esto es, para toda $a \in \mathbb{R}^n$, para toda $R > 0$ y para todo $j, k \geq N$

$$\left[\frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a, R)} |f_j(x) - f_k(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f_j - f_k\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \quad (4.2)$$

De manera particular, para $a = 0$ tenemos que para toda $R > 0$

$$\left[\frac{1}{|Q(0, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(0, R)} |f_j(x) - f_k(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} < \varepsilon$$

si $j, k \geq N$.

Entonces para toda $R > 0$

$$\left[\int_{Q(0,R)} |f_j(x) - f_k(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} < C_n \varepsilon R^{n(\frac{1}{q} + \lambda)}$$

si $j, k \geq N$.

Así, para cada $R > 0$ $(f_j|_{Q(0,R)})_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^q(Q(0, R))$ y como este último es completo, existe una función que denotaremos por $f^{Q(0,R)}$ en $L^q(Q(0, R))$ tal que $f_j|_{Q(0,R)} \rightarrow f^{Q(0,R)}$ en $L^q(Q(0, R))$, si $j \rightarrow \infty$.

Ahora consideramos una sucesión creciente en $(0, \infty)$, digamos $(R_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $R_j \nearrow \infty$, y definamos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ así

$$f(x) = f^{Q(0,R_j)}(x)$$

si $x \in Q(0, R_j)$.

Veamos que f está bien definida.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y supóngase que $k > j$ donde $x \in Q(0, R_j) \subset Q(0, R_k)$. Ya que

$$f_m|_{Q(0,R_j)} \rightarrow f^{Q(0,R_j)}$$

en $L^q(Q(0, R_j))$ cuando $m \rightarrow \infty$ y también

$$f_m|_{Q(0,R_j)} \rightarrow f^{Q(0,R_k)}$$

en $L^q(Q(0, R_k))$ cuando $m \rightarrow \infty$ puesto que $f_m|_{Q(0,R_j)} = (f_m|_{Q(0,R_k)})|_{Q(0,R_j)}$, se sigue por unicidad de límite en $L^q(Q(0, R_j))$ que

$$f^{Q(0,R_k)}|_{Q(0,R_j)} = f^{Q(0,R_j)}$$

casi en todas partes.

Resta demostrar que $f_j \rightarrow f$ en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ si $j \rightarrow \infty$.

Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$. Supongamos $R \leq R_l$ para algún $l \in \mathbb{N}$, tal que $Q(a, R) \subset Q(0, R_l)$. Puesto que $f_j|_{Q(a,R)} \rightarrow f$ si $j \rightarrow \infty$ en $L^q(Q(0, R))$ existe una subsucesión $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$ de $(f_j|_{Q(a,R)})_{j=1}^\infty$ tal que $f_{n_j} \rightarrow f$ si $j \rightarrow \infty$ casi en todas partes en $Q(a, R)$.

Así, tenemos que para $j \in \mathbb{N}$ fija

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a,R)} |f_j(x) - f(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a,R)} \lim_{k \rightarrow \infty} \inf |f_j(x) - f_{n_k}(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \left[\frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a,R)} |f_j(x) - f_{n_k}(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que para el término en el corchete hayamos elegido j y k suficientemente grandes tal que se cumpla la desigualdad (4.2).

Por tanto

$$\|f_j - f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$$

si j es suficientemente grande. Así $f_j - f \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, y puesto que $f_j \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ tendremos que $f \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y además $f_j \rightarrow f \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ si $j \rightarrow \infty$, como deseábamos probar. ■

Ahora, examinaremos la continuidad del operador de Hardy con peso

$$U_\psi f(x) = \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt$$

en los espacios de Morrey.

Teorema 4.3 *Sea $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ una función medible. Sea $1 < q < \infty$ y*

$-\frac{1}{q} < \lambda < 0$. Entonces U_ψ es un operador acotado en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

$$\mathcal{B} := \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt < \infty. \quad (4.3)$$

Además

$$\|U_\psi\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt. \quad (4.4)$$

Prueba. Supongamos que se cumple la condición (4.3). Entonces usando la desigualdad integral de Minkowski tenemos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{|Q(a,R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a,R)} |U_\psi f(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\frac{1}{|Q(a,R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a,R)} \left| \int_0^1 f(tx) \psi(t) dt \right|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left[\frac{1}{|Q(a,R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a,R)} \left[\int_0^1 |f(tx)| \psi(t) dt \right]^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{1}{|Q(a,R)|^{\frac{1}{q} + \lambda}} \left[\int_{Q(a,R)} \left[\int_0^1 |f(tx)| \psi(t) dt \right]^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{1}{|Q(a,R)|^{\frac{1}{q} + \lambda}} \int_0^1 \left[\int_{Q(a,R)} |f(tx)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \psi(t) dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{|Q(a,R)|^{1+q\lambda}} \int_{Q(a,R)} |f(tx)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \psi(t) dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{|Q(ta, tR)|^{1+q\lambda}} \int_{Q(ta, tR)} |f(y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q}} t^{n\lambda} \psi(t) dt \\ &\leq \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Así, U_ψ transforma $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo y además tenemos de lo anterior que

$$\|U_\psi\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt. \quad (4.5)$$

La prueba de la recíproca la realizaremos mediante un cálculo estándar.

Supongamos que U_ψ es un operador acotado en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Consideremos la función

$$f_0(x) = |x|^{n\lambda},$$

$x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $f_0 \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ puesto que:

- (i) Si $|a| > 2R$ entonces cuando $|x - a| < R$ tendremos que $2R - R < |a| - R < |x|$ esto es, $|x| > R$. Así, para $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a, R)} |x|^{n\lambda q} dx &\leq \frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a, R)} R^{n\lambda q} dx \\ &= \frac{1}{C_n R^{n+n\lambda q}} R^{n\lambda q} C_n R^n = 1. \end{aligned}$$

- (ii) Si $|a| < 2R$ entonces $Q(a, R) \subset Q(0, 3R)$ (pues si $|x - a| < R$ entonces $|x| < R + |a| < 3R$) y por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a, R)} |x|^{n\lambda q} dx &\leq \frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(0, 3R)} |x|^{n\lambda q} dx \\ &= \frac{1}{C_n R^{n(1+\lambda q)}} \int_0^{3R} \int_{S^{n-1}} d\sigma r^{n\lambda q} r^{n-1} dr \\ &= \frac{|S^{n-1}|}{C_n R^n R^{n\lambda q}} \frac{3^{n(1+\lambda q)} R^{n(1+\lambda q)}}{n(1+\lambda q)} \\ &= \frac{|S^{n-1}| 3^{n(1+\lambda q)}}{C_n (n(1+\lambda q))} \equiv C_{n,\lambda,q}. \end{aligned}$$

También, tenemos que

$$\begin{aligned} U_\psi f_0(x) &= \int_0^1 f_0(tx) \psi(t) dt = \int_0^1 |tx|^{n\lambda} \psi(t) dt \\ &= |x|^{n\lambda} \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt = f_0(x) \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt \end{aligned}$$

es decir,

$$U_\psi f_0 = f_0 \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt.$$

Esto implica que

$$\|U_\psi f_0\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \|f_0\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt,$$

y por consiguiente

$$\|U_\psi\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{\|U_\psi f_0\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|f_0\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} = \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt \quad (4.6)$$

De (4.5) y (4.6) se infiere que

$$\int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt = \|U_\psi\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.$$

Esto concluye la prueba de nuestro teorema. ■

4.2. Acotamiento del conmutador U_ψ^b en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$

Al igual que en el capítulo anterior, deseamos también estudiar las propiedades de continuidad del conmutador

$$U_\psi^b f = bU_\psi f - U_\psi(bf)$$

en los espacios de Morrey cuando $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

La técnica que utilizaremos es muy similar a la empleada en el capítulo previo, pero ahora requeriremos del uso del acotamiento de la función maximal de Hardy-Littlewood en los espacios de Morrey. Este resultado fue demostrado por F. Chiarenza y M. Frasca en [5] y lo desarrollamos a continuación.

Lema 4.4 Sean $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$ y $1 < q < \infty$. Entonces M es acotado en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Usaremos la siguiente desigualdad probada por C. Fefferman y E. Stein en [7] (ver Teorema 5.9). Si f y φ son funciones medibles, $\varphi \geq 0$, ambas con valores reales entonces existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^q \varphi(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q M\varphi(x) dx. \quad (4.7)$$

Sea $f \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi = \chi_{Q(a,R)}$ donde $Q(a,R)$ representa una bola de centro a y radio R . Usando (4.7) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{Q(a,R)} [Mf(x)]^q dx &= \int_{\mathbb{R}^n} [Mf(x)]^q \varphi(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q M\varphi(x) dx \\ &= C \int_{Q(a,2R)} |f(x)|^q M\varphi(x) dx \\ &+ C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q(a,2^{k+1}R) \setminus Q(a,2^kR)} |f(x)|^q M\varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ahora usando la variante de la función maximal de Hardy-Littlewood que usa bolas centradas en el punto, notamos que

$$\begin{aligned} M\varphi(x) &= \sup_{\rho>0} \frac{1}{|Q(x,\rho)|} \int_{Q(x,\rho)} \chi_{Q(a,R)}(y) dy \\ &\leq \sup_{\rho>0} \frac{|Q(a,R) \cap Q(x,\rho)|}{|Q(x,\rho)|} \leq 1 \end{aligned}$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$, en particular, cuando $x \in Q(a,2R)$.

Asimismo, notemos que para que $Q(a,R)$ y $Q(x,\rho)$ se intersecten cuando $2^k R \leq |x-a| < 2^{k+1}R$ necesitamos que $\rho > (2^{k+1}-1)R$, por lo cual para estas x tendremos que

$$\begin{aligned} M\varphi(x) &\leq \sup_{\rho>(2^{k+1}-1)R} \frac{|Q(a,R) \cap Q(x,\rho)|}{|Q(x,\rho)|} \\ &\leq \frac{R^n}{(2^{k+1}-1)^n R^n} \leq \frac{R^n}{(|x-a|-R)^n}. \end{aligned}$$

Substituyendo ambas estimaciones en (4.8) tendremos lo siguiente:

$$\int_{Q(a,R)} [Mf(x)]^q dx \leq C \left[\int_{Q(a,2R)} |f(x)|^q dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q(a,2^{k+1}R) \setminus Q(a,2^k R)} |f(x)|^q \frac{R^n}{(|x-a|-R)^n} dx \right].$$

Ahora, puesto que $\frac{1}{|x-a|-R} < \frac{1}{(2^k-1)R} \leq \frac{1}{2^{k-1}R}$ para $k = 1, 2, \dots$ tendremos que

$$\begin{aligned} \int_{Q(a,R)} [Mf(x)]^q dx &\leq C \left[\int_{Q(a,2R)} |f(x)|^q dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^n}{(2^{k-1}R)^n} \int_{Q(a,2^{k+1}R)} |f(x)|^q dx \right] \\ &\leq C \left[|Q(a, 2R)|^{1+\lambda q} \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^q + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k-1})^n} |Q(a, 2^{k+1}R)|^{1+\lambda q} \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^q \right] \\ &= C \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^q \left[R^{n(1+\lambda q)} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{2^{Kn-n}} 2^{(k+1)n(1+\lambda q)} R^{n(1+\lambda q)} \right] \\ &\leq C \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^q R^{n(1+\lambda q)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kn} 2^{kn(1+\lambda q)} 2^n 2^{n(1+\lambda q)} \right] \\ &\leq C \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^q R^{n(1+\lambda q)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kn\lambda q} \right] \\ &\leq C \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^q |Q(a, R)|^{1+\lambda q} \end{aligned}$$

ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{kn\lambda q}$ converge porque $\lambda q < 0$ y donde $C = C(n, \lambda, q)$.

Por lo tanto, hemos mostrado que para toda $a \in \mathbb{R}^n$ y para toda $R > 0$

$$\frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a,R)} [Mf(x)]^q dx \leq C \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^q,$$

esto es, M es acotado en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < \infty$ y $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$, lo cual concluye nuestra demostración. ■

Para poder establecer nuestro resultado de acotamiento del conmutador, requerimos introducir la siguiente notación

$$\mathcal{F} := \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) \log \frac{2}{t} dt.$$

Teorema 4.5 *Sea $1 < q < \infty$ y $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1) U_ψ^b es acotado en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ para toda $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.
- (2) $\mathcal{F} < \infty$.

Prueba. (2) \implies (1) Supongamos que $\mathcal{F} = \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) \log \frac{2}{t} dt < \infty$.

En el Teorema 3.3 mostramos la estimación (3.2) por lo cual tenemos

$$M(U_\psi^b f)(x) \leq C \|b\|_\star \int_0^1 (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \left(\log \frac{2}{t} \right) \psi(t) dt.$$

Sea $1 < q < \infty$ y supongamos que $1 < r < q$.

Tomemos ahora norma en $L^{q,\lambda}$ y usando la Desigualdad de Minkowski obtenemos

$$\begin{aligned} \|M(U_\psi^b f)(x)\|_{L^{q,\lambda}} &\leq C \|b\|_\star \left[\frac{1}{|Q(a, R)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(a, R)} \left[\int_0^1 (Mf^r(tx))^{\frac{1}{r}} \left(\log \frac{2}{t} \right) \psi(t) dt \right]^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \|b\|_\star \int_0^1 \left[\frac{1}{|Q(ta, tR)|^{1+\lambda q}} \int_{Q(ta, tR)} (Mf^r(tx))^{\frac{q}{r}} dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \times t^{n\lambda} \left(\log \frac{2}{t} \right) \psi(t) dt \\ &\leq C \|b\|_\star \left\| (Mf^r)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{q,\lambda}} \int_0^1 t^{n\lambda} \left(\log \frac{2}{t} \right) \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Dado que

$$|U_\psi^b f(x)| \leq M(U_\psi^b f)(x)$$

casi en todas partes, usando el Lema 4.4 obtenemos que

$$\begin{aligned} \|U_{\psi}^b f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|b\|_{\star} \left\| (Mf^r)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 t^{n\lambda} \left(\log \frac{2}{t} \right) \psi(t) dt \\ &\leq C \|b\|_{\star} \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 t^{n\lambda} \left(\log \frac{2}{t} \right) \psi(t) dt. \end{aligned}$$

(El Lema 4.4 fue usado del modo siguiente: si $Q = Q(a, R)$ entonces

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{|Q|^{1+\lambda q}} \int_Q (Mf^r)^{\frac{q}{r}} dx \right]^{\frac{1}{q}} &= \left[\frac{1}{|Q|^{1+\frac{q}{r}\lambda}} \int_Q (Mf^r)^{\frac{q}{r}} dx \right]^{\frac{1}{q}} \frac{|Q|^{\frac{1}{r}\lambda}}{|Q|^{\lambda}} \\ &\leq C \left[\frac{1}{|Q|^{1+\frac{q}{r}\lambda}} \int_Q |f|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \frac{|Q|^{\frac{1}{r}\lambda}}{|Q|^{\lambda}} \\ &= C \left[\frac{1}{|Q|^{1+q\lambda}} \int_Q |f|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|U_{\psi}^b\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{\star} \int_0^1 t^{n\lambda} \left(\log \frac{2}{t} \right) \psi(t) dt < \infty$$

con lo cual concluimos la prueba de esta implicación.

(1) \implies (2) Supongamos que el operador U_{ψ}^b es acotado en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ para todo $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos la función $f_0(x) = |x|^{n\lambda}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Hemos visto en el Teorema 4.3 que $f_0 \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Tomemos $b_0(x) = \log |x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
(U_\psi^{b_0} f_0)(x) &= b_0(x)U_\psi f_0(x) - U_\psi(b_0 f_0)(x) \\
&= \log|x| \int_0^1 f_0(tx)\psi(t)dt - \int_0^1 b_0(tx)f_0(tx)\psi(t)dt \\
&= \log|x| \int_0^1 t^{n\lambda} |x|^{n\lambda} \psi(t)dt - \int_0^1 [\log|x| + \log t] t^{n\lambda} |x|^{n\lambda} \psi(t)dt \\
&= \log|x| \left[\int_0^1 t^{n\lambda} |x|^{n\lambda} \psi(t)dt - \int_0^1 t^{n\lambda} |x|^{n\lambda} \psi(t)dt \right] - |x|^{n\lambda} \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) \log t dt \\
&= |x|^{n\lambda} \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt,
\end{aligned}$$

esto es,

$$U_\psi^{b_0} f_0 = f_0 \left[\int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt \right],$$

luego

$$\|U_\psi^{b_0}\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{\|U_\psi^{b_0} f_0\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|f_0\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} = \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt$$

lo cual implica que

$$\int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt < \infty. \quad (4.9)$$

Por otra parte, consideremos ahora

$$f_1(x) = |x|^{n\lambda} \chi_{Q(0,1)}(x),$$

$x \in \mathbb{R}^n$, y también la familia de funciones

$$b_k(x) = \chi_{Q(0,1)}(x) \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(\pi k |x|)),$$

$k \in \mathbb{N}$. Claramente $b_k \in BMO(\mathbb{R}^n)$, además

$$\begin{aligned} U_\psi^{b_k} f_1(x) &= b_k(x) \int_0^1 f_1(tx) \psi(t) dt - \int_0^1 f_1(tx) b_k(tx) \psi(t) dt \\ &= b_k(x) |x|^{n\lambda} \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt - |x|^{n\lambda} \int_0^{\min\{1, \frac{1}{|x|}\}} t^{n\lambda} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(\pi kt |x|)) \psi(t) dt \\ &= |x|^{n\lambda} \left[b_k(x) \int_0^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt - \int_0^{\min\{1, \frac{1}{|x|}\}} t^{n\lambda} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(\pi kt |x|)) \psi(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Procediendo del mismo modo que lo hicimos en el Capítulo anterior (Teorema 3.3) podemos escoger k suficientemente grande, $k = k(\psi)$ tal que

$$\left| U_\psi^{b_k} f_1(x) \right| \geq \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \psi(t) dt \right] |x|^{n\lambda}$$

para $\frac{1}{2} < |x| < 1$, es decir

$$\left| U_\psi^{b_k} f_1(x) \right| \geq \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \psi(t) dt \right] f_1(x)$$

para $\frac{1}{2} < |x| < 1$.

Dado que $f_1|_A \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ para cualquier medible $A \subset Q(0, 1)$, se sigue que para $A = \{y \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < |y| < 1\}$ tendremos

$$\frac{\left\| U_\psi^{b_k} (f_1|_A) \right\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|f_1|_A\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(t) dt$$

entonces

$$\left\| U_\psi^{b_k} \right\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(t) dt$$

y por tanto

$$\int_0^1 \psi(t) dt < \infty.$$

Finalmente, como $\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(t) dt \leq \int_0^1 \psi(t) dt < \infty$ y $t^{n\lambda}$ es integrable en $[\frac{1}{2}, 1]$ obtenemos que $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{n\lambda} \psi(t) dt < \infty$; además

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n\lambda} \psi(t) dt \leq C \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n\lambda} \psi(t) \log \frac{1}{t} dt < \infty$$

lo que implica

$$\int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t)dt < \infty. \quad (4.10)$$

De (4.9) y (4.10) concluimos que

$$\mathcal{F} = \int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t) \log \frac{2}{t} dt < \infty$$

como deseábamos mostrar. ■

CAPÍTULO 5

OPERADOR GENERALIZADO DE HARDY CON PESO

En este capítulo estudiaremos un nuevo operador de Hardy con peso definido por

$$U_{\psi,s}f(x) = \int_0^1 f(s(t)x)\psi(t)dt$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ y $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles y Γ es una curva paramétrica en \mathbb{R}^n dada por $(t, x) \mapsto s(t)x$, $t \in [0, 1]$, $x \in \mathbb{R}^n$. Bajo condiciones apropiadas para $s(t)$ y para el peso ω , caracterizaremos aquellas funciones de peso ψ tales que el operador $U_{\psi,s}$ es acotado en $L^p(\omega)$ y en $BMO(\omega)$. También, calcularemos la norma del operador en los respectivos espacios.

El contenido que abordamos aquí está basado en los artículos [4] y [26].

5.1. Definición y estimaciones previas

Definición 5.1 Sean $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Definimos el operador generalizado de Hardy con peso $U_{\psi,s}$ asociado con la curva paramétrica $s(x, t) := s(t)x$ como

$$U_{\psi,s}f(x) = \int_0^1 f(s(t)x)\psi(t)dt$$

para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible.

Claramente, el operador U_ψ estudiado en los capítulos previos es un caso especial del operador $U_{\psi,s}$, a saber, cuando $s(t) = t$.

En todo este capítulo $\omega(x)$ denotará una función medible no negativa definida en \mathbb{R}^n .

Recordamos que una función medible f pertenece a $L^p(\omega)$ si

$$\|f\|_{L^p(\omega)} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

El espacio BMO con peso, que denotaremos por $BMO(\omega)$, está constituido por el conjunto de todas las funciones medibles f que tienen oscilación promedio acotada respecto al peso ω , esto es,

$$\|f\|_{BMO(\omega)} = \sup_B \frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x) - f_{B,\omega}| \omega(x) dx < \infty$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas n -dimensionales B .

Aquí,

$$\omega(B) = \int_B \omega(x) dx$$

y

$$f_{B,\omega} = \frac{1}{\omega(B)} \int_B f(x) \omega(x) dx.$$

Claramente, cuando $\omega \equiv 1$ obtenemos el espacio clásico $BMO(\mathbb{R}^n)$. Notemos también que $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\omega)$.

Definición 5.2 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotaremos por \mathcal{W}_α el conjunto de todas las funciones ω definidas en \mathbb{R}^n , medibles, $\omega(x) > 0$ casi en todas partes en \mathbb{R}^n , $0 < \int_{S^{n-1}} \omega(y) d\sigma(y) < \infty$ y ω es absolutamente homogénea de grado α , esto es, $\omega(tx) = |t|^\alpha \omega(x)$ para toda $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

En la definición anterior $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. La medida σ es la única medida de Borel en S^{n-1} tal que $m(\phi^{-1}(E)) = (\rho \otimes \sigma)(E)$, donde $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow$

$(0, \infty) \times S^{n-1}$, $\phi(x) = (|x|, \frac{x}{|x|})$, ρ es la medida definida en $(0, \infty)$ como $\rho(B) = \int_B r^{n-1} dr$ y m es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n (cf. [8], Teorema 2.49).

Observaciones.

(1) Un peso $\omega \in \mathcal{W}_\alpha$ no necesariamente pertenece a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Observemos que si $\omega \in \mathcal{W}_\alpha$ entonces para $x \neq 0$

$$\omega(x) = \omega\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x|^\alpha \omega\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Dado que $0 < \int_{S^{n-1}} \omega(y) d\sigma(y) < \infty$, vemos que $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha > -n$.

Cuando $n = 1$ se tiene que $\omega(x) = |x|^\alpha \omega\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^\alpha \omega(\pm 1) = \omega(1) |x|^\alpha$.

(2) Para $n \geq 1$ la función $\omega(x) = |x|^\alpha \in \mathcal{W}_\alpha$, lo cual es evidente (aquí $\alpha \neq 0$).

(3) Si $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{W}_\alpha$ entonces $\theta\omega_1 + \lambda\omega_2 \in \mathcal{W}_\alpha$ para todo par $\theta, \lambda > 0$.

(4) Si $n > 1$ y $\alpha \neq 0$ entonces $\omega(x_1, \dots, x_n) = |x_j|^\alpha$ está en \mathcal{W}_α , para $j \in \{1, \dots, n\}$.

(5) Si $n > 1$, $\alpha = 0$ y $\phi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\phi \in L^1(S^{n-1})$, $\phi(y) > 0$ para toda $y \in S^{n-1}$ y $\phi(y) = \phi(-y)$ para toda $y \in S^{n-1}$ entonces claramente la función

$$\omega(x) = \begin{cases} \phi\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

pertenece a \mathcal{W}_0 .

A continuación, estableceremos y probaremos un par de lemas técnicos que nos auxiliarán en la demostración de los resultados importantes de este capítulo que serán presentados en la siguiente sección.

Lema 5.3 Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, si $\omega \in \mathcal{W}_\alpha$ y $\varepsilon > 0$ entonces

$$\int_{|x|>1} \frac{\omega(x)}{|x|^{n+\alpha+\varepsilon}} dx = \int_{|x|<1} \frac{\omega(x)}{|x|^{n+\alpha-\varepsilon}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \int_{S^{n-1}} \omega(x) d\sigma(x) & \text{si } n > 1, \\ \frac{2\omega(1)}{\varepsilon} & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Prueba. Ya que las pruebas de ambas igualdades son similares, daremos sólo la demostración del caso $|x| > 1$.

Consideremos primero el caso $n > 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{|x|>1} \frac{\omega(x)}{|x|^{n+\alpha+\varepsilon}} dx &= \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} \omega(ry) d\sigma(y) r^{-n-\alpha-\varepsilon+n-1} dr \\ &= \int_1^\infty \left[\int_{S^{n-1}} \omega(y) d\sigma(y) \right] r^\alpha r^{-\alpha-\varepsilon-1} dr \\ &= \left[\int_{S^{n-1}} \omega(y) d\sigma(y) \right] \int_1^\infty r^{-\varepsilon-1} dr \\ &= \left(\frac{r^{-\varepsilon}}{-\varepsilon} \right) \Big|_1^\infty \left[\int_{S^{n-1}} \omega(y) d\sigma(y) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{S^{n-1}} \omega(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Ahora consideremos el caso $n = 1$. Como vimos en el apartado (1) de la observación previa, en este caso $\omega(x) = C|x|^\alpha$, C una constante positiva (de hecho $C = \omega(1)$). Así

$$\begin{aligned} \int_{|x|>1} \frac{\omega(x)}{|x|^{1+\alpha+\varepsilon}} dx &= \omega(1) \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}} dx \\ &= 2\omega(1) \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} \\ &= 2\omega(1) \left[\frac{-1}{\varepsilon} \frac{1}{x^\varepsilon} \right] \Big|_1^\infty \\ &= \frac{2\omega(1)}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

y con esto concluimos. ■

Para establecer el siguiente lema, necesitamos de la siguiente definición que generaliza una propiedad de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Definición 5.4 Si ω es una función de peso, esto es, ω es una función medible definida en \mathbb{R}^n tal que $\omega(x) > 0$ casi en todas partes sobre \mathbb{R}^n , diremos que ω tiene la propiedad duplicante si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\omega(B(x, 2r)) \leq C\omega(B(x, r))$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y para toda $r > 0$. Aquí $B(x, r)$ denota la bola en \mathbb{R}^n de centro x y radio r .

Observemos que si ω tiene la propiedad duplicante y $\alpha > 0$ entonces existe una constante $C_\alpha > 0$ que sólo depende de α tal que

$$\omega(\alpha B) \leq C_\alpha \omega(B)$$

para cada bola B (aquí αB denota la bola con el mismo centro que B y radio igual a α veces el radio de B).

En efecto, dado que ω es duplicante entonces es claro que para cada $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $\omega(2^m B) \leq C^m \omega(B)$. Así, dado $\alpha > 0$ existe $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \leq 2^m$ y por consiguiente $\alpha B \subset 2^m B$ por lo que $\omega(\alpha B) \leq \omega(2^m B) \leq C^m \omega(B)$.

Lema 5.5 Si $\omega \in \mathcal{W}_\alpha$ y tiene la propiedad duplicante, entonces $\log|x| \in BMO(\omega)$.

Prueba. Para ver que $\log|x| \in BMO(\omega)$ bastará demostrar que para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cada $r > 0$ existe una constante $C_{x_0, r}$ tal que

$$\frac{1}{\omega(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} |\log|x| - C_{x_0, r}| \omega(x) dx$$

es uniformemente acotada (la prueba de esta condición equivalente de pertenencia a $BMO(\omega)$ es análoga a la prueba dada para el caso $\omega \equiv 1$ en el Capítulo 1 de esta tesis).

Notemos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\omega(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} |\log |x| - C_{x_0, r}| \omega(x) dx \\
&= \frac{1}{\omega(B(x_0, r))} \int_{|x-x_0| \leq r} |\log |x| - C_{x_0, r}| \omega(x) dx \\
&= \frac{r^n}{\omega(B(x_0, r))} \int_{|z-r^{-1}x_0| \leq 1} |\log |z| + \log r - C_{x_0, r}| \omega(rz) dz \\
&= \frac{r^{\alpha+n}}{\omega(B(x_0, r))} \int_{|z-r^{-1}x_0| \leq 1} |\log |z| + \log r - C_{x_0, r}| \omega(z) dz \\
&= \frac{1}{\omega(B(r^{-1}x_0, 1))} \int_{|z-r^{-1}x_0| \leq 1} |\log |z| + \log r - C_{x_0, r}| \omega(z) dz
\end{aligned}$$

ya que $|x - x_0| < r \Leftrightarrow |r^{-1}x - r^{-1}x_0| < 1$ por lo que haciendo el cambio de variable $x = ry$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\omega(B(x_0, r)) &= \int_{B(x_0, r)} \omega(x) dx \\
&= \int_{B(r^{-1}x_0, 1)} \omega(ry) r^n dy \\
&= r^{n+\alpha} \int_{B(r^{-1}x_0, 1)} \omega(y) dy \\
&= r^{n+\alpha} \omega(B(r^{-1}x_0, 1)),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{r^{n+\alpha}}{\omega(B(x_0, r))} = \frac{1}{\omega(B(r^{-1}x_0, 1))}.$$

Esta observación sugiere que podemos tomar $C_{x_0, r} = C_{r^{-1}x_0, 1} - \log r$ y así todos los casos se reducen al caso $r = 1$ y x_0 arbitrario.

Llamemos

$$Ax_0 = \frac{1}{\omega(B(x_0, 1))} \int_{|z-x_0| \leq 1} |\log |z| - C_{x_0,1}| \omega(z) dz.$$

Si $|x_0| \leq 2$ tomemos $C_{x_0,1} = 0$ y notemos que como $|z| \leq 3$ tendremos

$$\begin{aligned} Ax_0 &\leq \frac{1}{\omega(B(x_0, 1))} \int_{|z| \leq 3} (\log 3) \omega(z) dz \\ &= (\log 3) \frac{\omega(B(0, 3))}{\omega(B(x_0, 1))} \\ &\leq (\log 3) \frac{\omega(B(x_0, 6))}{\omega(B(x_0, 1))} \leq C \end{aligned}$$

ya que $B(0, 3) \subset B(x_0, 6)$ y puesto que ω es duplicante entonces

$$\frac{\omega(B(x_0, 6))}{\omega(B(x_0, 1))} \leq C.$$

Si $|x_0| > 2$, tomemos $C_{x_0,1} = \log |x_0|$. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} Ax_0 &= \frac{1}{\omega(B(x_0, 1))} \int_{B(x_0, 1)} \left| \log \frac{|z|}{|x_0|} \right| \omega(z) dz \\ &\leq \frac{1}{\omega(B(x_0, 1))} \int_{B(x_0, 1)} \max \left\{ \log \frac{1+|x_0|}{|x_0|}, \log \frac{|x_0|}{|x_0|-1} \right\} \omega(z) dz \end{aligned}$$

(ya que $\log \frac{|z|}{|x_0|} \leq \log \frac{1+|x_0|}{|x_0|}$ y $-\log \frac{|z|}{|x_0|} = \log \frac{|x_0|}{|z|} \leq \log \frac{|x_0|}{|x_0|-1}$ puesto que $|z-x_0| \leq 1$).

Ahora como $\frac{1+|x_0|}{|x_0|} \leq \frac{3}{2}$ y $\frac{|x_0|}{|x_0|-1} \leq 2$ tenemos que

$$Ax_0 \leq \max \left\{ \log \frac{1+|x_0|}{|x_0|}, \log \frac{|x_0|}{|x_0|-1} \right\} \leq \log 2.$$

Así, $\log |x| \in BMO(\omega)$ y esto concluye la demostración. ■

5.2. Acotamiento en $L^p(\omega)$ y en $BMO(\omega)$

Teorema 5.6 Sean $p \in [1, \infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \mathcal{W}_\alpha$. Sea $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $|s(t)| \geq t^\beta$ para casi toda $t \in [0, 1]$ y alguna constante $\beta > 0$. Entonces

$$U_{\psi, s} : L^p(\omega) \rightarrow L^p(\omega)$$

existe como operador acotado si y sólo si

$$\int_0^1 |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}} \psi(t) dt < \infty. \quad (5.1)$$

Además, cuando (5.1) se cumple, la norma del operador $U_{\psi,s}$ en $L^p(\omega)$ está dada por

$$\|U_{\psi,s}\|_{L^p(\omega) \rightarrow L^p(\omega)} = \int_0^1 |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}} \psi(t) dt. \quad (5.2)$$

Prueba. Como el caso $p = \infty$ es muy sencillo, sólo consideramos $p \in [1, \infty)$.

Supongamos que se cumple la condición (5.1). Sea $f \in L^p(\omega)$. Puesto que $s(t) \neq 0$ casi en todas partes y ω es homogénea de orden α podemos aplicar la Desigualdad Integral de Minkowski y hacer un cambio de variable para obtener

$$\begin{aligned} \|U_{\psi,s}f\|_{L^p(\omega)} &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 f(s(t)x)\psi(t) dt \right|^p \omega(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(s(t)x)|^p \omega(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} \psi(t) dt \\ &= \int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |s(t)|^{-\alpha-n} \omega(y) dy \right]^{\frac{1}{p}} \psi(t) dt \\ &= \|f\|_{L^p(\omega)} \int_0^1 |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}} \psi(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

Así, $U_{\psi,s}$ está definido como un operador acotado en $L^p(\omega)$ y la norma del operador $U_{\psi,s}$ en $L^p(\omega)$ satisface

$$\|U_{\psi,s}\|_{L^p(\omega) \rightarrow L^p(\omega)} \leq \int_0^1 |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}} \psi(t) dt. \quad (5.3)$$

Recíprocamente, supongamos que $U_{\psi,s}$ está definido como un operador acotado en $L^p(\omega)$.

Sea $0 < \varepsilon < 1$ y defínase

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}-\varepsilon} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Por el Lema 5.3 tenemos que $f_\varepsilon \in L^p(\omega)$ y $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\omega)} > 0$. Además, tenemos

$$\begin{aligned} U_{\psi,s}f_\varepsilon(x) &= \int_0^1 f_\varepsilon(s(t)x)\psi(t)dt \\ &= |x|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}-\varepsilon} \int_{S(x)} |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}-\varepsilon} \psi(t)dt, \end{aligned}$$

donde $S(x) = \{t \in [0, 1] : |s(t)x| > 1\}$. Por tanto

$$\|U_{\psi,s}f_\varepsilon\|_{L^p(\omega)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n-\alpha-p\varepsilon} \left| \int_{S(x)} |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}-\varepsilon} \psi(t)dt \right|^p \omega(x)dx.$$

Observemos que si $t \in [0, 1]$ y $t \geq \frac{1}{|x|^{\frac{1}{\beta}}}$ entonces $|x|t^\beta \geq 1$ por tanto $|s(t)x| \geq 1$ siempre que $t \notin E$, $E \subset [0, 1]$ un subconjunto medible de medida cero donde $|s(\theta)| < \theta^\beta$. Así,

$$\left\{ t \in [0, 1] : t \geq \frac{1}{|x|^{\frac{1}{\beta}}} \right\} \setminus E \subset S(x).$$

Escribiendo $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ tendremos haciendo el cambio de variable $y = \delta^{-\beta}x$

$$\begin{aligned} \|U_{\psi,s}f_\varepsilon\|_{L^p(\omega)}^p &\geq \left[\int_{|x| \geq \delta^\beta} |x|^{-n-\alpha-p\varepsilon} \omega(x)dx \right] \left[\int_{\frac{1}{\delta}}^1 |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}-\varepsilon} \psi(t)dt \right]^p \\ &= \left[\int_{|y| \geq 1} \delta^{-\beta n - \beta \alpha - \beta p \varepsilon} |y|^{-n-\alpha-p\varepsilon} \omega(\delta^\beta y) \delta^{\beta n} dy \right] \\ &\quad \times \left[\int_{\frac{1}{\delta}}^1 |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}-\varepsilon} \psi(t)dt \right]^p \\ &= \left[\int_{|y| \geq 1} \delta^{-\beta n - \beta \alpha - \beta p \varepsilon} \delta^{\beta \alpha} \delta^{\beta n} |y|^{-n-\alpha-p\varepsilon} \omega(y) dy \right] \\ &\quad \times \left[\int_{\frac{1}{\delta}}^1 |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}-\varepsilon} \psi(t)dt \right]^p \\ &= \|f_\varepsilon\|_{L^p(\omega)}^p \left[\delta^{-\beta \varepsilon} \int_{\frac{1}{\delta}}^1 |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}-\varepsilon} \psi(t)dt \right]^p. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\|U_{\psi,s}\|_{L^p(\omega) \rightarrow L^p(\omega)} \geq \delta^{-\beta \varepsilon} \int_{\frac{1}{\delta}}^1 |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}-\varepsilon} \psi(t)dt.$$

Haciendo que $\varepsilon \rightarrow 0^+$ obtenemos

$$\int_0^1 |s(t)|^{-\frac{(n+\alpha)}{p}} \psi(t) dt \leq \|U_{\psi,s}\|_{L^p(\omega) \rightarrow L^p(\omega)} < \infty. \quad (5.4)$$

De (5.3) y (5.4) obtenemos la igualdad (5.2). ■

El siguiente resultado que abordaremos se refiere al acotamiento del operador $U_{\psi,s}$ en el espacio $BMO(\omega)$.

Teorema 5.7 *Supongamos que $\omega \in \mathcal{W} = \bigcup \mathcal{W}_\alpha$ y sea $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $s(t) \neq 0$ para casi toda $t \in [0, 1]$.*

(i) Si

$$\int_0^1 \psi(t) dt < \infty \quad (5.5)$$

entonces $U_{\psi,s} : BMO(\omega) \rightarrow BMO(\omega)$ existe como operador acotado y

$$\|U_{\psi,s}\|_{BMO(\omega) \rightarrow BMO(\omega)} \leq \int_0^1 \psi(t) dt.$$

(ii) Si $n = 1$ y $U_{\psi,s} : BMO(\omega) \rightarrow BMO(\omega)$ existe como operador acotado, entonces

$$\left| \int_0^1 (\text{sgn } s(t)) \psi(t) dt \right| < \infty. \quad (5.6)$$

Además, si $s(t)$ no cambia de signo en $[0, 1]$, entonces la norma del operador $U_{\psi,s}$ en $BMO(\omega)$ está dada por

$$\|U_{\psi,s}\|_{BMO(\omega) \rightarrow BMO(\omega)} = \int_0^1 \psi(t) dt. \quad (5.7)$$

(iii) Si $n > 1$, entonces $U_{\psi,s} : BMO(\omega) \rightarrow BMO(\omega)$ existe como operador acotado si y sólo si se satisface (5.5). Además, la norma de $U_{\psi,s}$ en $BMO(\omega)$ está dada también por

$$\|U_{\psi,s}\|_{BMO(\omega) \rightarrow BMO(\omega)} = \int_0^1 \psi(t) dt.$$

Prueba. (i) Supongamos que se verifica (5.5) y sea $\omega \in \mathcal{W}_\alpha$ para algún $\alpha > -n$.

Sea $f \in BMO(\omega)$ y B cualquier bola de \mathbb{R}^n . Usando el Teorema de Fubini y haciendo un cambio de variable obtenemos

$$\begin{aligned} (U_{\psi,s}f)_{B,\omega} &= \frac{1}{\omega(B)} \int_B \left[\int_0^1 f(s(t)x)\psi(t)dt \right] \omega(x)dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{\omega(B)} \int_{s(t)B} f(y) |s(t)|^{-n-\alpha} \omega(y)dy \right] \psi(t)dt \\ &= \int_0^1 f_{s(t)B,\omega} \psi(t)dt, \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} \omega(s(t)B) &= \int_{s(t)B} \omega(z)dz = \int_B \omega(s(t)y) |s(t)|^n dy \\ &= |s(t)|^{n+\alpha} \int_B \omega(y)dy = |s(t)|^{n+\alpha} \omega(B). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega(B)} \int_B \left| U_{\psi,s}f(x) - (U_{\psi,s}f)_{B,\omega} \right| \omega(x)dx \\ &= \frac{1}{\omega(B)} \int_B \left| \int_0^1 f(s(t)x)\psi(t)dt - \int_0^1 f_{s(t)B,\omega} \psi(t)dt \right| \omega(x)dx \\ &\leq \frac{1}{\omega(B)} \int_B \left[\int_0^1 |f(s(t)x) - f_{s(t)B,\omega}| \psi(t)dt \right] \omega(x)dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(s(t)x) - f_{s(t)B,\omega}| \omega(x)dx \right] \psi(t)dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{\omega(B)} \int_{s(t)B} |f(y) - f_{s(t)B,\omega}| |s(t)|^{-n-\alpha} \omega(y)dy \right] \psi(t)dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{\omega(s(t)B)} \int_{s(t)B} |f(y) - f_{s(t)B,\omega}| \omega(y)dy \right] \psi(t)dt \\ &\leq \|f\|_{BMO(\omega)} \int_0^1 \psi(t)dt. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\|U_{\psi,s}f\|_{BMO(\omega)} \leq \|f\|_{BMO(\omega)} \int_0^1 \psi(t)dt,$$

luego $U_{\psi,s}$ es acotado en $BMO(\omega)$ y en tal caso

$$\|U_{\psi,s}\|_{BMO(\omega) \rightarrow BMO(\omega)} \leq \int_0^1 \psi(t) dt.$$

(ii) Supongamos que $n = 1$ y que $U_{\psi,s}$ es un operador acotado en $BMO(\omega)$.

Sea $f_0(x_1) = \text{sgn}(x_1)$, entonces si B es el intervalo $B = (x_0 - r, x_0 + r)$ donde $r > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} (f_0)_{B,\omega} &= \frac{1}{\omega(B)} \int_B \text{sgn}(x_1) d\omega(x_1) \\ &= \frac{1}{\omega(B)} \int_{\{x_1 \in B: x_1 \geq 0\}} d\omega(x_1) + \frac{1}{\omega(B)} \int_{\{x_1 \in B: x_1 < 0\}} -d\omega(x_1) \\ &= \frac{\omega(B_+) - \omega(B_-)}{\omega(B)}, \end{aligned}$$

donde $B_+ = \{x \in B : x \geq 0\}$, $B_- = \{x \in B : x < 0\}$.

Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega(B)} \int_B \left| f_0(x) - (f_0)_{B,\omega} \right| \omega(x) dx \\ &= \frac{1}{\omega(B)} \int_{B_+} \left| 1 - \frac{[\omega(B_+) - \omega(B_-)]}{\omega(B)} \right| \omega(x) dx + \frac{1}{\omega(B)} \int_{B_-} \left| -1 - \frac{[\omega(B_+) - \omega(B_-)]}{\omega(B)} \right| \omega(x) dx \\ &= \frac{1}{\omega(B)} \left| \frac{\omega(B) - \omega(B_+) + \omega(B_-)}{\omega(B)} \right| \omega(B_+) + \frac{1}{\omega(B)} \left| \frac{\omega(B) + \omega(B_+) - \omega(B_-)}{\omega(B)} \right| \omega(B_-) \\ &= \frac{1}{(\omega(B))^2} 2\omega(B_-)\omega(B_+) + \frac{1}{(\omega(B))^2} 2\omega(B_+)\omega(B_-) \\ &= \frac{1}{(\omega(B))^2} 4\omega(B_-)\omega(B_+) \leq 1, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad $\frac{4ab}{(a+b)^2} \leq 1$ para $a \geq 0$, $b \geq 0$ aplicándola con $a = \omega(B_+)$, $b = \omega(B_-)$.

Así, hemos probado que $f_0 \in BMO(\omega)$ y $0 < \|f_0\|_{BMO(\omega)} \leq 1$.

Puesto que $f_0(tx) = [\text{sgn}(t)] f_0(x)$ para toda $t \neq 0$ tenemos que

$$U_{\psi,s} f_0(x) = f_0(x) \int_0^1 [\text{sgn } s(t)] \psi(t) dt.$$

De este modo

$$\|U_{\psi,s}f_0\|_{BMO(\omega)} = \|f_0\|_{BMO(\omega)} \left| \int_0^1 [\operatorname{sgn} s(t)] \psi(t) dt \right|,$$

y esto implica que

$$\left| \int_0^1 [\operatorname{sgn} s(t)] \psi(t) dt \right| \leq \|U_{\psi,s}\|_{BMO(\omega) \rightarrow BMO(\omega)} < \infty. \quad (5.8)$$

(iii) Consideremos el caso $n > 1$.

En (i) hemos probado que la condición (5.5) implica el acotamiento de $U_{\psi,s}$.

Recíprocamente, supongamos que $U_{\psi,s}$ es acotado en $L^p(\omega)$.

Tomemos cualquier función $\phi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea esencialmente acotada, no constante y tal que $\phi(y) = \phi(-y)$ para toda $y \in S^{n-1}$. Definamos

$$f_1(x) = \begin{cases} \phi\left(\frac{x}{|x|}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dado que $f_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $f_1 \in BMO(\omega)$ y $\|f_1\|_{BMO(\omega)} \neq 0$ pues f_1 no es constante.

Notemos que $f_1(tx) = f_1(x)$ para toda $t \neq 0$ pues $\phi(y) = \phi(-y)$ para toda $y \in S^{n-1}$, así

$$U_{\psi,s}f_1(x) = f_1(x) \int_0^1 \psi(t) dt.$$

Tomando norma en $BMO(\omega)$ en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{BMO(\omega)} \int_0^1 \psi(t) dt &= \|U_{\psi,s}f_1\|_{BMO(\omega)} \\ &\leq \|f_1\|_{BMO(\omega)} \|U_{\psi,s}\|_{BMO(\omega) \rightarrow BMO(\omega)}. \end{aligned}$$

Así, (5.5) se verifica y además

$$\|U_{\psi,s}\|_{BMO(\omega) \rightarrow BMO(\omega)} = \int_0^1 \psi(t) dt.$$

Esto concluye la prueba. ■

CONCLUSIONES

Los principales resultados obtenidos en este trabajo fueron dar condiciones necesarias y/o suficientes para que el operador de Hardy-Littlewood con peso

$$U_\psi f(x) = \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt,$$

sea acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq \infty$, en $BMO(\mathbb{R}^n)$ y en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, (donde $1 < q < \infty$ y $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$).

Análogamente, caracterizamos las funciones medibles ψ que garantizan que el conmutador

$$U_\psi^b f(x) = (bU_\psi f)(x) - U_\psi(bf)(x)$$

sea acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, cuando $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Asimismo, obtuvimos condiciones en la función ω para que el operador generalizado de Hardy

$$U_{\psi,s} f(x) = \int_0^1 f(s(t)x)\psi(t)dt$$

sea acotado en $L^p(\omega)$ y en $BMO(\omega)$.

Además, en todos los casos mencionados arriba, calculamos las normas de los operadores en los respectivos espacios.

APÉNDICE A

Teorema 5.8 (*Descomposición de Calderón-Zygmund*) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$ y $\lambda > 0$ fija. Entonces, existe una familia a lo más numerable de cubos $\{Q_j\}$ que no se traslapan tal que:

(1) $\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \leq 2^n \lambda$ para todo Q_j .

(2) $f \leq \lambda$ casi en todas partes en $\mathbb{R}^n \setminus \cup Q_j$.

(3) $|\cup Q_j| = \sum |Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$.

Prueba. (1) Para cada $k \in \mathbb{Z}$ consideremos la red $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{Z}^n$ formada por aquellos puntos de \mathbb{R}^n cuyas coordenadas son múltiplos enteros de 2^{-k} .

Sea D_k la colección de cubos determinados por Λ_k , es decir, cubos con longitud de lado 2^{-k} y vértices en Λ_k .

Los cubos en $D = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} D_k$ se llaman cubos diádicos. Notemos que si $Q, Q' \in D$ y $|Q'| \leq |Q|$ entonces $Q' \subset Q$ o bien, Q y Q' no se traslapan.

Cada $Q \in D_k$ es la unión de 2^n cubos que no se traslapan que pertenecen a D_{k+1} .

Sea $C'_\lambda = \left\{ Q \in D : \lambda < \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \right\}$; notemos que siempre es posible encontrar algún $\lambda > 0$ para el cual $C'_\lambda \neq \emptyset$, ya que en caso contrario tendríamos que $f = 0$ casi en todas partes.

Sea $C_\lambda = \{Q \in C'_\lambda : Q \text{ es maximal}\}$, donde la maximalidad se entiende en el sentido de contención. Así, cada $Q \in D$ que satisface la condición que define a C'_λ está contenido en algún $Q' \in C_\lambda$.

Notemos también que la condición que define a C'_λ impone una cota superior al tamaño de Q , a saber, $|Q| < \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$.

Los cubos de C_λ por definición no se traslapan, además, si $Q \in D_k$ está en C_λ y Q' es el único cubo en D_{k-1} que contiene a Q tendremos

$$\frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} f(x) dx \leq \lambda$$

y puesto que $|Q'| = 2^n |Q|$ tenemos

$$\lambda < \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \leq \frac{2^n}{|Q'|} \int_{Q'} f(x) dx \leq 2^n \lambda.$$

Así, hemos obtenido una familia $C_\lambda = \{Q_j\}$ a lo más numerable de cubos que no se traslapan y tal que

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \leq 2^n \lambda;$$

estos cubos se llaman cubos de Calderón-Zygmund para f correspondiente a λ .

(2) Ahora, sea $x \notin \bigcup_j Q_j$. Entonces, el promedio de f sobre cualquier cubo diádico que no pertenezca a $\{Q_j\}$ será menor o igual que λ . Sea $\{R_k\}_k$ una sucesión de cubos diádicos de tamaño decreciente tal que $\bigcap_k R_k = \{x\}$. Para cada uno de ellos tendremos

$$\frac{1}{|R_k|} \int_{R_k} f(y) dy \leq \lambda.$$

Si además, x es un punto de Lebesgue de f tendremos pasando al límite que $f(x) \leq \lambda$.

Así $f(x) \leq \lambda$ para casi toda $x \notin \bigcup_j Q_j$.

(3) Notemos que

$$|Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} f(x) dx,$$

entonces

$$\left| \bigcup_j Q_j \right| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} f(x) dx \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\bigcup_j Q_j} f(x) dx \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1.$$

■

APÉNDICE B

Teorema 5.9 *Para cada $1 < p < \infty$, existe una constante C_p tal que para cualquier par de funciones medibles en \mathbb{R}^n , $\phi \geq 0$ y f , tenemos la desigualdad*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \phi(x) dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p (M\phi)(x) dx. \quad (5.9a)$$

Prueba. Cuando $M\phi(x) = \infty$ c.t.p., (5.9a) se cumple trivialmente. En caso contrario, $M\phi$ es la densidad de la medida positiva $d\mu(x) = M\phi(x)dx$ y ϕ es la densidad de otra medida positiva $d\nu(x) = \phi(x)dx$. Vistas las cosas de este modo, (5.9a) significa que M es un operador acotado de $L^p(\mu)$ a $L^p(\nu)$, lo cual es claro para $p = \infty$.

Si $M\phi(x) = 0$ para algún x , entonces $\phi(x) = 0$ c.t.p. y $L^\infty(\nu) = 0$, por lo que la desigualdad requerida se concluye fácilmente.

Si $M\phi(x) > 0$ para cada x y $\alpha > \|f\|_{L^\infty(\mu)}$, tenemos que $\int_{\{|f|>\alpha\}} M\phi(x)dx = 0$ y consecuentemente $|\{x : |f(x)| > \alpha\}| = 0$, o lo que es lo mismo, $|f(x)| \leq \alpha$ c.t.p. y así $Mf(x) \leq \alpha$ c.t.p.

Por consiguiente

$$\|Mf\|_{L^\infty(\nu)} \leq \alpha$$

y finalmente

$$\|Mf\|_{L^\infty(\nu)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

Si demostramos que M es de tipo débil (1,1) con respecto al par de medidas (ν, μ) , el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz nos permitiría concluir lo requerido, a saber, (5.9a).

Entonces todo se reduce a demostrar

$$\int_{\{x: Mf(x) > t\}} \phi(x) dx \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| (M\phi)(x) dx.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $f \geq 0$. Existe una sucesión $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ de funciones integrables tales que, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, $f_j \rightarrow f$ casi en todas partes.

Primero veremos que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} = \bigcup_j \{x \in \mathbb{R}^n : Mf_j(x) > t\}$$

como $f_j \leq f$ casi en todas partes, entonces $Mf_j(x) \leq Mf(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, por lo que si $Mf_j(x) > t$ entonces $Mf(x) > t$. Por otra parte, si $x \in \mathbb{R}^n$ satisface que $Mf(x) > t$, existe un cubo Q tal que $f_Q > t$; dado que $f_j \rightarrow f$ casi en todas partes y de manera creciente, se sigue que $(f_j)_Q \rightarrow f_Q$; por lo cual existe k tal que $(f_k)_Q > t$, de aquí que $Mf_k(x) > t$.

De esta forma, si cada f_j satisface

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_j(x) > t\}} \phi(x) dx \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)| M\phi(x) dx,$$

esto nos lleva a

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} \phi(x) dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_j(x) > t\}} \phi(x) dx \\ &\leq \frac{C}{t} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) M\phi(x) dx \\ &= \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M\phi(x) dx. \end{aligned}$$

Así podemos asumir que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Sea $t > 0$, por la descomposición de Calderón-Zygmund obtenemos una colección de cubos que no se traslapan $\{Q_j\}$ tales que

$$\frac{t}{4^n} < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \leq \frac{t}{2^n}$$

y $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} \subset \bigcup_j 3Q_j$.

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} \phi(x) dx &\leq \int_{\bigcup_j 3Q_j} \phi(x) dx \leq \sum_j \int_{3Q_j} \phi(x) dx \\ &= \sum_j \frac{1}{|3Q_j|} \int_{3Q_j} \phi(x) |3Q_j| dx \\ &\leq \sum_j \frac{1}{|3Q_j|} \int_{3Q_j} \phi(x) \frac{3^n 4^n}{t} \int_{Q_j} f(y) dy dx \\ &= \frac{3^n 4^n}{t} \sum_j \int_{Q_j} f(y) \frac{1}{|3Q_j|} \int_{3Q_j} \phi(x) dx dy. \end{aligned}$$

Si $y \in Q_j$, se sigue que $y \in 3Q_j$, en consecuencia

$$M\phi(y) \geq \frac{1}{|3Q_j|} \int_{3Q_j} \phi(x) dx.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} \phi(x) dx &\leq \frac{3^n 4^n}{t} \sum_j \int_{Q_j} f(y) M\phi(y) dy \\ &= \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M\phi(x) dx. \end{aligned}$$

■

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Alvarez, M. Guzmán-Partida, J. Lakey, *Spaces of bounded λ -central mean oscillation, Morrey spaces and λ -central Carleson measures*, Collect. Math. 51, pp. 1-47, (2000).
- [2] S. Campanato, *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 18, pp. 137-160, (1964).
- [3] C. Carton-Lebrun, M. Fosset, *Moyennes et quotients de Taylor dans BMO*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 53 (2), pp. 85-87, (1984).
- [4] N. Chuong, H. Hung, *Bounds of weighted Hardy-Cesàro operators on weighted Lebesgue and BMO spaces*, Int. Transf. Spec. Funct. 25, pp. 697-710, (2014).
- [5] F. Chiarenza, M. Frasca, *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Mat. Appl. 7, pp. 273-279, (1987).
- [6] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 29, American Mathematical Society Publications, 2001.
- [7] C. Fefferman, E. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math. 93, pp. 107-115, (1971).

- [8] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, 1999.
- [9] Z. Fu, Z. Liu, S. Lu, *Commutators of weighted Hardy operators on \mathbb{R}^n* , Proc. Amer. Math. Soc. 137, pp. 3319-3328, (2009).
- [10] Z. Fu, S. Lu, *Weighted Hardy operators and commutators on Morrey spaces*, Front. Math. China 5, pp. 531-539, (2010).
- [11] Z. Fu, S. Lu, W. Yuan, *A weighted variant of Riemann-Liouville fractional integrals on \mathbb{R}^n* , Abst. Appl. Anal., Vol. 2012, doi: 10.1155/2012/780132, 18 pp.
- [12] J. García-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North Holland Mathematics Studies, Vol. 116, North Holland, 1985.
- [13] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 249, Springer, 2008.
- [14] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 250, Springer, 2009.
- [15] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1999.
- [16] F. Jones, *Lebesgue Integration on Euclidean Space*, Jones and Bartlett Publishers, 2001.
- [17] S. Lu, *Some recent progress on n -dimensional Hardy operators*, Adv. Math. (China) 42, pp. 737-747, (2013).

- [18] C. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 43, pp. 126-166, (1938).
- [19] U. Neri, *Some properties of functions with bounded mean oscillation*, Stud. Math. 61, pp. 63-75, (1977).
- [20] J. Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal. 4, pp. 71-87, (1969).
- [21] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1986.
- [22] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability property of functions*, Princeton University Press, 1970.
- [23] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton University Press, 1971.
- [24] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, 1993.
- [25] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Dover Publications, 2004.
- [26] T. Tran, *Generalized weighted Hardy-Cesàro operators and their commutators on weighted Morrey spaces*, J. Math. Anal. Appl. 412, pp. 1025-1035, (2014).
- [27] J. Xiao, *L^p and BMO bounds of weighted Hardy-Littlewood averages*, J. Math. Anal. Appl. 262, pp. 660-666, (2001).