

BIBLIOTECA
C. I. F. - U. S.
UNIVERSIDAD DE SONORA

UNIVERSIDAD DE SONORA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
FÍSICA

”EFECTOS DEL CAMPO MAGNÉTICO
SOBRE EL MOVIMIENTO ONDULATORIO
DE UNA CUERDA CON CORRIENTE
ELÉCTRICA ALTERNA”

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Física)

Presenta
Dimas Talavera Velázquez

1942

Dirigida por:
Dr. Evguenii V. Kourmychev K.

HERMOSILLO, SONORA, MÉXICO.

ENERO DE 1999.

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Evguenii V. Kourmychov K. por su gran dedicación y paciencia al dirigir este trabajo.

A la Dra. María Elena Zayas Saucedo por su gran apoyo.

Para los doctores Germán Campoy Güereña, Julio César Saucedo Morales y Raúl García Llamas por haber dedicado su tiempo en leer y sugerir correcciones a este trabajo.

A todos y cada una de las personas del Centro de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, porque de una u otra forma colaboraron en este trabajo.

7/10/62

DEDICATORIA

A mis padres: Ernesto y Dominga

A mis hermanos: Veronica, Jesús, Silvia y Carlos Armando.

A mi novia Nubia

Contenido

0.1	INTRODUCCIÓN	3
1	ECUACIÓN DE ONDA DE UNA CUERDA CON CORRIENTE ELÉCTRICA EN UN CAMPO MAGNÉTICO	7
1.1	DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO	7
1.2	CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE ACUERDO A CONDICIONES FÍSICAS	10
2	ALGUNAS SOLUCIONES EN EL CASO DE LOS DOS EXTREMOS FIJOS: MOVIMIENTO TRANSVERSAL	13
2.1	SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 1	16
2.2	SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2	23
2.3	SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3	26
2.4	SOLUCIÓN ASINTÓTICA PARA MOVIMIENTO CON AMORTIGUAMIENTO	30
2.5	RESONANCIA	35
3	DOS ALGORITMOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DE ONDA CON ACOPLAMIENTO ENTRE MODOS TRANSVERSALES Y LONGITUDINALES	37
4	EXPERIMENTOS EN LABORATORIO	41
4.1	PARÁMETROS PRINCIPALES DEL SISTEMA	42
4.2	DISEÑO DEL EQUIPO EXPERIMENTAL	42
4.3	MONTAJE EXPERIMENTAL	44
4.4	DATOS NUMÉRICOS DEL SISTEMA	45
4.5	MEDICIONES Y DATOS EXPERIMENTALES	47
5	CONCLUSIONES	58
6	ANEXO	60
6.1	OSCILACIONES FORZADAS CON AMORTIGUAMIENTO	60
6.2	MEDICIONES DEL CAMPO MAGNÉTICO	63

Lista de Figuras

4.1	Diagrama del aparato experimental	43
4.2	Posición del imán respecto a los planos de coordenadas	48
4.3	Oscilaciones de la cuerda con extremos TL -fijos. El imán se encuentra en posición: 1) $x = 11.5$ cm, 2) $x = 34.5$ cm y 3) $x = 57$ cm.	51
4.4	Oscilaciones de la cuerda observadas sobre el plano xy . Las condiciones de frontera son los dos extremos TL -fijos. El imán está en la posición de $x = 21.5$ cm..	52
4.5	Oscilaciones de la cuerda en el plano xz . Las condiciones en la frontera son los dos extremos TL -fijos. El imán está en la posición de $x = 21.5$ cm.. . . .	53
4.6	Oscilaciones de la cuerda en el plano xz . Las condiciones en la frontera son los dos extremos TL -fijos. El imán está en la posición en $x = 46.5$ cm.	54
4.7	Trampa de onda con posición del imán en $x = 43$ cm.	55
4.8	Perturbaciones en la fase de trampa de onda.	55
4.9	Oscilaciones de la cuerda con un extremo L -fijo y el otro L -amortiguado, manteniendo los dos extremos T -fijos, y con posición del imán en $x = 55.4$ cm.	56
4.10	Trampa de onda con el imán en la posición $x = 49.5$ cm.	57
4.11	Trampa de onda con la posición del imán en $x = 20$ cm.	57

0.1 INTRODUCCIÓN

El movimiento ondulatorio y las oscilaciones, como su parte constituyente, demuestran su presencia e importancia prácticamente en todas las áreas de la física. Tradicionalmente el fenómeno del movimiento ondulatorio se estudia en diferentes disciplinas de la física o ciencias afines (biología, química y matemáticas). De alguna manera, las ondas sonoras parecen muy diferentes a las ondas electromagnéticas, debido a la naturaleza de los campos que se propagan (campo de presión o de densidad en el caso de las ondas sonoras y campo electromagnético en el otro). Sin embargo, las ondas de diferente naturaleza suelen tener mucho en común, lo que finalmente se expresa en semejanza de las ecuaciones de propagación de los campos correspondientes. En este sentido, un modelo empleado para describir el movimiento ondulatorio de una naturaleza, puede proporcionar nuevos conocimientos para otras áreas.

La cuerda elástica es un modelo fundamental y básico de la teoría de ondas. Los últimos diez - quince años muestran escaso interés al problema de ondas en una cuerda elástica clásica, dejando a un lado un fuerte desarrollo de la teoría de (super)cuerdas cuánticas. Parece que ya casi todo está resuelto en esta área. Sin embargo, un nuevo aliento en esta área se puede esperar con el estudio del sistema que consta de una cuerda conductora con corriente eléctrica en un campo magnético. Resulta que este sistema ondulatorio muestra nuevas propiedades interesantes. El describir algunas de ellas y darles interpretación física es el propósito de este trabajo.

Los trabajos más recientes sobre el tema de movimiento ondulatorio de una cuerda se les puede resumir de la siguiente manera.

El artículo de Fogleman, [1], habla de cuerdas cuánticas. Basándose en modos normales se hace la cuantización canónica de una cuerda no relativista, libre del efecto de una fuerza externa. La cuerda, al contrario de sistemas usualmente usados en manuales estándar de mecánica cuántica, es un objeto continuo y, por lo tanto, tiene mucho que ver con campos. La cuerda no relativista ya cuantizada se compara en este trabajo con campos cuantizados.

En artículos de Elliott, [2],[3], se hace énfasis en la investigación de los efectos no lineales intrínsecos en el movimiento transversal. Esta no linealidad se debe a un alargamiento no uniforme de la cuerda (tomando en cuenta la amplitud finita de oscilación) durante la oscilación y que, a su vez, provoca variaciones de tensión en la cuerda, $T = T(x, t) = T(u(x, t))$. Efectos no lineales se observan en instrumentos musicales reales, teniendo sus orígenes en la rigidez finita de la cuerda y en los efectos de los puentes que soportan la cuerda (condiciones en la frontera), iniciando la salida de la armonicidad. La simple cuerda tensada, entonces, sería considerada como dos osciladores no lineales paraméricamente acoplados[2]. Una simple cuerda tensada impulsada sinusoidalmente es usada comúnmente para ilustrar los conceptos de resonancia. En la práctica, este sistema raramente ejecuta oscilaciones

planas pero prefiere movimientos circulares. Esto es como consecuencia de la no linealidad intrínseca de la cuerda tensada, y el acoplamiento paramétrico asociado entre las dos polarizaciones transversales[3]. Cabe mencionar que la no linealidad considerada en estos trabajos es puramente temporal, debido a que se supuso (desde el principio) la solución en forma del modo normal: $x(z, t) = x(t) \sin(kz)$, $y(z, t) = y(t) \sin(kz)$. A consecuencia de esta no linealidad se acopla el movimiento en los modos normales transversales. Sin embargo, hay que mencionar que el concepto de modos normales surge como consecuencia del método de separación de variables para ecuaciones lineales. Por lo tanto, la suposición hecha en estos trabajos es bastante restringida y, posiblemente, describe una clase reducida de soluciones.

El trabajo[4], subrayando que vibraciones forzadas de cuerdas, de un lado, tienen mucho en común con sus vibraciones libres y, de otro lado, con el movimiento armónico de un solo objeto, trata en general el problema del efecto de una fuerza puntual sobre el movimiento transversal unidimensional en forma del modo normal base. En breve, lo que está considerado es: ecuación de onda unidimensional con amortiguamiento, un modo normal base $y(x, t) = A \sin(kx) \exp(i\omega t)$, la fuerza se supone puntual y su efecto se toma en cuenta por medio de condiciones en la frontera en el punto de aplicación de la fuerza, se desprecian efectos no lineales. Dado lo anterior, se encuentra la amplitud de vibración en el punto de aplicación de la fuerza. En el caso de una fuerza magnética, adicional a la fuerza motriz "principal" (la cuerda conductora con corriente eléctrica alterna en un campo magnético), se le toma en cuenta como un amortiguamiento adicional. Hay que decir que en este trabajo no se da importancia a la estructura de la fuerza magnética (distribución en el espacio).

En el artículo[5] están considerados los resultados de un experimento simple y su correspondencia con las relaciones de dispersión para una cadena monoatómica y una diatómica; está observada la buena correspondencia. Relaciones de dispersión son estudiadas por medio de la formación de ondas estacionarias en una cuerda con masas (cuentas) puntuales sujetadas a ella. Cuando la frecuencia de la corriente sinusoidal, que pasa por la cuerda, corresponde a uno de los modos normales de la cuerda cuentada, son observadas las ondas estacionarias. El sistema guarda analogía a un filtro eléctrico de bajo paso consistiendo de inductancias y capacitores, pero este es simple en diseño y puede ser usado como una analogía para enseñar modos normales y relaciones de dispersión en una red unidimensional. En el experimento de este trabajo la fuerza magnética (interacción de la corriente eléctrica alterna sinusoidal con un campo magnético estático) esta empleada como la fuerza motriz, pero no se toma en cuenta la distribución de la fuerza a lo largo de la cuerda.

Un artículo sumamente interesante es [6], donde se estudia el movimiento transversal unidimensional de una cuerda con masas puntuales y su analogía a sistemas cuánticos. Principalmente, está estudiado el problema de eigenvalores, tanto teórica como experimentalmente. Para la ecuación de onda no lineal, donde la no linealidad se debe a variaciones de tensión por la amplitud finita de oscilaciones de la cuerda, por el método de modos normales se obtiene el espectro de frecuencias. A causa de la no linealidad, las frecuencias resonantes se desplazan hacia arriba con respecto a las de los modos normales de la cuerda sin no linealidad. Cabe mencionar que la no linealidad considerada en el artículo es de la misma

naturaleza que en los trabajos de Elliott; sin embargo, considerando sólo el movimiento transversal unidimensional, los autores desprecian los efectos de acoplamiento entre modos normales transversales, que es uno de los resultados principales de los trabajos de Elliott.

Pasando a la cuerda con masas, los autores del artículo [6] desprecian la no linealidad y resuelven el problema de eigenvalores y eigenfunciones en la aproximación de "modos normales". En el estudio experimental se emplean los dos métodos: análisis de modos normales y análisis de pulsos. Resultados teóricos y experimentales se encuentran en buena concordancia. Uno de los resultados más interesantes es la demostración de la existencia de una banda prohibida de frecuencias en una cuerda con distribución de masas aleatoria, cuando las eigenfunciones (funciones de onda) son localizadas en una parte de la cuerda.

En [7] están estudiadas las vibraciones no lineales de una cuerda elástica en el marco del modelo de modo único fundamental (single-mode model). La no linealidad en este modelo es intrínseca y se debe a la dependencia de la tensión en la amplitud de vibraciones. La ecuación no lineal, a la que se introduce también un amortiguamiento y una fuerza externa, describe acoplamiento directo entre movimientos transversales en dos direcciones perpendiculares. Adicionalmente, se menciona la opción de acoplamiento indirecto entre oscilaciones transversales por medio del movimiento longitudinal. Cuando una cuerda vibra, la longitud de la cuerda debe también fluctuar, causando oscilaciones en la tensión de la cuerda. Estas oscilaciones longitudinales ocurren cerca del doble de la frecuencia de las vibraciones transversales. El acoplamiento entre oscilaciones transversales y longitudinales de la cuerda es esencialmente un fenómeno no lineal que no es capturado por el modelo lineal familiar.

Soluciones, obtenidas en este trabajo, demuestran diferentes formas de movimiento transversal: periódico, cuasiperiódico y caótico. La histéresis es encontrada usando el método de amplitudes variándolas lentamente, y vibraciones caóticas son predichas por un régimen accesible experimentalmente. Vibraciones periódicas estables existen tanto para el movimiento plano como para el circular. Se subraya que la no linealidad considerada es dominante cuando la deformación longitudinal de la cuerda y, por lo tanto la tensión, es pequeña. Se menciona que una cuerda elástica es un ejemplo simple de sistemas espacialmente distribuidos no lineales; aparte del interés intrínseco teórico, la dinámica de una cuerda elástica no lineal puede aclarar muchos aspectos de la dinámica de sistemas más complicados, tales como láseres.

Resumiendo la bibliografía considerada, podemos decir que una cuerda elástica es un sistema distribuido en el espacio y, con mucha frecuencia, se describe necesariamente por un modelo no lineal, a pesar de que tanto desplazamientos longitudinales como transversales son pequeños. La no linealidad considerada en los trabajos citados, se puede llamar intrínseca, siguiendo a Elliott, porque es no linealidad propia del sistema y se debe a variaciones de tensión a causa del alargamiento de la cuerda en su movimiento transversal. Esta no linealidad se rige por el movimiento del sistema. No linealidad intrínseca, como está considerada en la mayoría de los trabajos, lleva al acoplamiento de modos transversales.

En nuestro trabajo está considerado un modelo de una cuerda elástica que, despreciando la no linealidad intrínseca y, a consecuencia, del correspondiente acoplamiento entre modos T y L de la cuerda, sin embargo, posee una no linealidad y un acoplamiento no intrínsecos,

que se rigen por las condiciones ajenas a la cuerda; es decir, por el campo magnético no uniforme, distribuido a lo largo de ella. La posibilidad de controlar los parámetros de la no linealidad y acoplamiento entre modos de vibración en el sistema de una cuerda elástica con corriente eléctrica alterna en un campo magnético, se presenta como una gran opción para estudiar y simular diferentes formas del movimiento en sistemas ondulatorios no lineales con ondas acopladas.

El trabajo tiene como propósito describir y darle interpretación física al movimiento ondulatorio de una cuerda tensada con corriente eléctrica alterna en un campo magnético. Este sistema, a la vez que es un sistema básico, se convierte en un ejemplo de movimiento ondulatorio complicado (acoplamiento entre modos transversales y longitudinales, tanto lineal como no lineal) al aplicar a la cuerda la fuerza magnetostática.

En el Capítulo 1, se sigue con la derivación y clasificación de las ecuaciones de onda de una cuerda tensada con corriente eléctrica alterna en un campo magnético permanente. El sistema considerado resulta ser bastante complicado debido a diferentes y muy variados tipos de acoplamiento entre modos transversales y longitudinales. En este capítulo se hace resaltar la gran importancia que tiene la interacción electromagnética para la generación de diferentes tipos de ondas, dependiendo de la configuración del campo magnético.

En el Capítulo 2, está estudiado teóricamente el movimiento transversal en uno de los casos más simples de nuestro modelo, en el que los modos transversales están desacoplados. Para el movimiento sin amortiguamiento, obtuvimos soluciones analíticas de tres problemas que se distinguen por las condiciones iniciales. Basandonos en las soluciones, analizamos gráficamente el movimiento transversal de la cuerda, y le dimos su interpretación física. Después, tomando en cuenta el amortiguamiento, encontramos soluciones asintóticas de los problemas anteriores, y haciendo el análisis gráfico le dimos la interpretación física al movimiento de la cuerda. Además, está estudiado el efecto de resonancia al movimiento transversal de la cuerda, tanto para el movimiento con, como sin amortiguamiento.

En el Capítulo 3, desarrollamos dos algoritmos de solución, en el modelo de movimiento de una cuerda con corriente eléctrica en un campo magnético, para un movimiento mucho más complicado, con un acoplamiento no lineal entre los modos transversales y longitudinales. Estos algoritmos, aunque no implementados en este trabajo, proporcionan la base matemática para un estudio teórico del movimiento de la cuerda que se observa en la investigación experimental.

El Capítulo 4 trata de nuestra experiencia en la investigación experimental de los modos ondulatorios de una cuerda tensada con corriente eléctrica en un campo magnético, contando con la base teórica[12][13][14].

Capítulo 1

ECUACIÓN DE ONDA DE UNA CUERDA CON CORRIENTE ELÉCTRICA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

1.1 DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Una cuerda tensada es un sistema físico básico, y se usa como un modelo bien establecido para la demostración de cierta variedad de ondas y movimiento oscilatorio ([1] - [12], [29] - [38]). Los modos transversales y longitudinales del movimiento de este sistema, suelen considerarse independientes. Pero, ¿qué pasaría si se toma una cuerda con corriente eléctrica bajo tensión elástica y se somete a la acción de un campo magnético? Esto trataremos de contestar en éste y en el capítulo siguiente de acuerdo a las referencias [12], [13] y [14].

Es bien conocido que una cuerda conductora con corriente eléctrica, sometida a un campo magnético, experimenta la acción de la fuerza magnetostática. Si la corriente eléctrica es alterna, la fuerza magnetostática que actúa en la cuerda es también alterna. Esta fuerza ciertamente causará oscilaciones forzadas y/o movimiento ondulatorio en la cuerda. Resulta que debido a la estructura de la fuerza magnetostática y la posibilidad de dar una configuración deseable para el campo magnético, la variedad de formas del movimiento ondulatorio de la cuerda es sorprendentemente grande. Además, este movimiento ya no es tan simple como el de la cuerda sin corriente; se encuentra que, por lo general, los modos transversales pueden estar acoplados tanto entre sí como con los modos longitudinales de manera lineal y no lineal.

Para obtener las ecuaciones que gobiernan el movimiento ondulatorio de la cuerda,

con corriente eléctrica bajo la tensión T y la acción de un campo magnético permanente $\mathbf{H}(x, y, z)$, se toma la siguiente geometría del sistema. La cuerda en su estado de equilibrio se extiende en línea recta y la hacemos coincidir con el eje x , en el sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) . La forma de la cuerda en cualquier instante, se puede expresar en términos del desplazamiento de cada punto P de la cuerda. Sea x la coordenada de un punto P , en el estado de equilibrio de la cuerda. En el instante t , el desplazamiento del punto P se describe por el vector $\mathbf{u}(x, t) = (u^x, u^y, u^z)$, donde las componentes $u^y(x, t)$ y $u^z(x, t)$ describen un movimiento transversal pequeño de la cuerda tensada, mientras que la componente $u^x(x, t)$ describe un movimiento longitudinal.

En el modelo lineal, cuando se desprecian los efectos de no linealidad intrínseca ([2], [3], [6] y [7]), las ecuaciones de movimiento transversal y longitudinal, con una fuerza externa se expresan como sigue[14], [13] y [12]:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u^{y,z}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u^{y,z}}{\partial x} \right) + f_M^{y,z}(x, t). \quad (1.1)$$

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u^x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left([T(x) + \lambda(x)] \frac{\partial u^x}{\partial x} \right) + f_M^x(x, t). \quad (1.2)$$

Aquí ρ es la densidad lineal de masa, T es la tensión, λ es el módulo de elasticidad y la densidad lineal de fuerzas externas (además de la tensión) es representada por las componentes correspondientes $f_M^{x,y,z}(x, t)$, donde el subíndice M indica que, en el caso considerado, la fuerza externa es la fuerza magnetostática.

Una situación muy común para el modelo lineal, es, que el movimiento transversal de una cuerda es independiente del movimiento longitudinal. Esto significa que la ec. (1.1) puede ser estudiada separadamente de la ec. (1.2). Además, ocurre que a menudo, los desplazamientos transversales u^y y u^z son independientes entre sí. Pero, la situación cambia drásticamente cuando se considera una cuerda con corriente eléctrica alterna en un campo magnético $\mathbf{H}(x, y, z)$. Cada elemento pequeño $d\mathbf{l}$ de esta cuerda está sujeto a la fuerza magnetostática

$$d\mathbf{f}_M(x, y, z, t) = I(t) [d\mathbf{l} \times \mathbf{H}(x, y, z)], \quad (1.3)$$

donde $I(t)$ es la corriente eléctrica en la cuerda y $\mathbf{H}(x, y, z)$ es un campo magnético que actúa sobre el segmento vectorial $d\mathbf{l} = (dl^x, dl^y, dl^z)$ de la cuerda. La longitud en equilibrio del elemento vectorial considerado $d\mathbf{l}$ se supuso igual a dx . Tomando en cuenta las restricciones impuestas por la pequeñez de la amplitud del movimiento, se encuentra que, a cualquier tiempo t las componentes del elemento vectorial $d\mathbf{l}$ son definidas por las siguientes expresiones:

$$d\mathbf{l}^2 = |d\mathbf{l}|^2 = (dl^x)^2 + (dl^y)^2 + (dl^z)^2$$

$$dl^x \simeq dl \left(1 - \left(\frac{\partial u^y}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u^z}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \approx dx \left(1 - \left(\frac{\partial u^y}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u^z}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \approx dx,$$

$$dl^{y,z} \simeq dl \frac{\partial u^{y,z}}{\partial x} \simeq dx \frac{\partial u^{y,z}}{\partial x}. \quad (1.4)$$

La sustitución de las expresiones, dadas por las ecs. (1.4), en la ec. (1.3) nos conduce a las expresiones explícitas para las componentes de la densidad lineal de la fuerza magnetostática $\mathbf{f}_M(x, y, z, t)$:

$$\left. \begin{aligned} f_M^x &= I(t) \left(H^z \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y \frac{\partial u^z}{\partial x} \right), \\ f_M^y &= I(t) \left(H^x \frac{\partial u^z}{\partial x} - H^z \right), \\ f_M^z &= I(t) \left(H^y - H^x \frac{\partial u^y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Un elemento infinitesimal de la cuerda, marcado por el punto $P_0(x, 0, 0)$ en el estado de equilibrio de la cuerda, se desplaza al punto $P_t(x + u^x, u^y, u^z)$ en el instante t . En las ecs. (1.5), el valor de un campo magnético tiene que ser tomado en el punto $P_t(x + u^x, u^y, u^z)$. En el caso de un movimiento pequeño de la cuerda, cada componente del campo magnético que actúa en el punto P_t , puede ser expresado por la serie de Taylor, respecto de la posición de equilibrio del punto considerado, como sigue:

$$\begin{aligned} H^{x,y,z}(x + u^x, u^y, u^z) &\simeq H^{x,y,z}(x) + \frac{\partial H^{x,y,z}}{\partial x} u^x + \frac{\partial H^{x,y,z}}{\partial y} u^y + \frac{\partial H^{x,y,z}}{\partial z} u^z \\ &= H^{x,y,z}(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^{x,y,z}(x). \end{aligned}$$

Sustituyendo la última expresión para las componentes del campo magnético en la ec. (1.5), se obtienen las siguientes expresiones aproximadas para las componentes de la fuerza magnetostática:

$$\begin{aligned} f_M^x &= I(t) \left[H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right] + \\ &+ I(t) \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x)) \frac{\partial u^y}{\partial x} - (\mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x)) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} f_M^y &= I(t) \left[H^x(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} - H^z(x) \right] + \\ &+ I(t) \left[\mathbf{u} \cdot \nabla H^x(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} - \mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x) \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} f_M^z &= I(t) \left(H^y(x) - H^x(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right) + \\ &+ I(t) \left(\mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x) - \mathbf{u} \cdot \nabla H^x(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Cabe señalar que todos los valores en las ecs. (1.6, 1.7 y 1.8) son calculados ahora sobre el eje x .

Las ecs. (1.1, 1.2, 1.6, 1.7 y 1.8), constituyen el sistema de ecuaciones completa que gobierna el movimiento de una cuerda tensada con corriente eléctrica en un campo magnético permanente. A primera vista, podría parecerse natural despreciar algunos de los términos en la segunda línea de las ecs. (1.6, 1.7 y 1.8), pues ellos contienen valores de orden pequeño. Pero, un campo magnético es un elemento externo al sistema ondulatorio considerado y, en principio, $grad(H^{x,y,z})$ puede tener un valor arbitrario, manteniendo los términos citados con una magnitud considerable. Por ésta razón, en la siguiente sección, se analizará cuidadosamente el orden de magnitud de los términos de la derecha de las ecs. (1.6, 1.7 y 1.8) para cada componente de la fuerza magnetostática.

1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE ACUERDO A CONDICIONES FISICAS

Se mostró que bajo ciertas condiciones, existen hasta 9 casos diferentes del movimiento de una cuerda con corriente eléctrica en un campo magnético permanente [14], [13]. Los casos se distinguen por la manera del acoplamiento entre los modos transversales y longitudinales. En este trabajo nos restringimos a tratar solamente dos de toda la variedad de los casos.

Caso 1: Si un campo magnético satisface las siguientes condiciones

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{x,y,z}| < |H^{x,y,z}| \quad \text{y} \quad |H^x| \lesssim |H^y| \sim |H^z|,$$

entonces, un análisis comparativo de las magnitudes en las ecs. (1.6, 1.7 y 1.8) nos lleva a los siguientes resultados

$$f_M^x(x, t) = I(t) \left(H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right) + I(t) \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x)) \frac{\partial u^y}{\partial x} - (\mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x)) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right], \quad (1.9)$$

$$f_M^y(x, t) = -I(t) (H^z(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x)), \quad (1.10)$$

$$f_M^z(x, t) = I(t) (H^y(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x)). \quad (1.11)$$

En este caso, los modos transversales del movimiento de una cuerda están linealmente acoplados entre sí y al movimiento longitudinal a través del desplazamiento de $u^{x,y,z}$. El movimiento longitudinal es acoplado no linealmente con el movimiento transversal.

La disyuntiva, de despreciar ($f_M^x(x, t) \simeq 0$) o mantener los términos de $f_M^x(x, t)$, surge aquí. Nótese que los términos de la derecha de la ec. (1.6), son comparables entre si, pero son mucho más pequeños que los términos correspondientes de las ecs. (1.7 y 1.8). Esto significa que la componente $f_M^x(x, t)$ es un orden de magnitud más pequeña que las componentes $f_M^{y,z}(x, t)$. A su vez, esto significa que la amplitud de las ondas longitudinales, provocadas

por esta fuerza, por lo general es mucho menor que la amplitud de las ondas transversales. Para decidir el mantener o despreciar los términos indicados, se requiere de un análisis más específico. Pero, apriori no es necesario suponer el mismo orden de magnitud para la amplitud del movimiento transversal, que para la amplitud del movimiento longitudinal. Una fuerza de pequeña amplitud, puede también causar oscilaciones y/o ondas de una considerable magnitud, bajo condiciones de resonancia. Además, en un sistema de ecuaciones de movimiento acopladas, una pequeña fuerza puede jugar un papel importante en regímenes de transición y dar lugar a cambios considerables del movimiento asintótico. Esto habla a favor de retener los términos de la derecha de la ec. (1.6).

Caso 2: Una de las situaciones mas sencillas tiene lugar cuando

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{y,z}| \ll |H^{y,z}|, \quad |\mathbf{u} \cdot \nabla H^x| < |H^x| \quad \text{y} \quad |H^x| \lesssim |H^y| \sim |H^z|,$$

Entonces las componentes de la fuerza magnetostática quedan así:

$$f_M^x(x, t) = I(t) \left(H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right), \quad (1.12)$$

$$f_M^y(x, t) = -I(t) H^z(x), \quad (1.13)$$

$$f_M^z(x, t) = I(t) H^y(x). \quad (1.14)$$

Aquí los modos transversales son desacoplados entre sí y también del movimiento longitudinal, pero el último se mantiene linealmente dependiente de los anteriores. Ambas componentes $f_M^y(x, t)$ y $f_M^z(x, t)$, tienen el mismo orden de magnitud, pero son más grandes que $f_M^x(x, t)$. Las ecuaciones del movimiento de la cuerda son lineales.

Un caso particular de la situación considerada, es como sigue. Si el campo magnético es perpendicular al eje x (es decir $H^x \equiv 0$) y satisface las condiciones $|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{y,z}| \ll |H^{y,z}|$ (se supone que en una de las últimas componentes $H^{y,z} \neq 0$ y $|H^y| \sim |H^z|$), entonces los modos y y z no están acoplados entre sí, pero el movimiento longitudinal es aún dependiente del transversal. Esta situación se describe por las ecs. (1.12 y 1.14).

Observamos que en los casos presentados, la componente longitudinal de la fuerza magnetostática es mucho más pequeña que las componentes transversales. Con la misma argumentación que en el Caso 1 se ve que esta situación requiere un análisis más específico en cada caso particular. Además, algunos experimentos preliminares mostraron claramente que el movimiento longitudinal causado por la fuerza magnetostática es observable, y los modos longitudinales están acoplados con los movimientos transversales (vease el Capítulo siguiente).

Como mostramos en ésta sección, los modos transversales (modos T) y modos longitudinales (modos L) del movimiento ondulatorio del sistema, están acoplados por lo general entre sí, tanto linealmente como no linealmente. Además, como se puede ver, por ejemplo en [8] y [14], en cada extremo de la cuerda se puede aplicar hasta cinco diferentes condiciones

en la frontera para cada uno de los modos T y L . Lo dicho indica que el sistema es un ejemplo de movimientos ondulatorios complejos y con una gran variedad de tipos de ondas. Sin embargo, en este trabajo nos limitamos a considerar solamente dos tipos de condiciones en la frontera: a) los dos extremos TL fijos; b) un extremo TL fijo y el otro T fijo y L amortiguado.

Capítulo 2

ALGUNAS SOLUCIONES EN EL CASO DE LOS DOS EXTREMOS FIJOS: MOVIMIENTO TRANSVERSAL

A continuación se procede a solucionar las ecuaciones, correspondientes al Caso 2, del movimiento de una cuerda tensada con corriente eléctrica alterna, en un campo magnético y en el campo gravitacional. Como ejemplo, se considerará una cuerda uniforme:

$$\rho(x) \equiv \rho = cte, \quad T(x) \equiv T = cte, \quad \lambda(x) \equiv \lambda = cte. \quad (2.1)$$

En este caso, las ecuaciones de movimiento, ecs. (1.1, 1.2, 1.12, 1.13 y 1.14), toman la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u^x}{\partial t^2} = v_l^2 \frac{\partial^2 u^x}{\partial x^2} + \hat{I}(t) \left(H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 u^y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u^y}{\partial x^2} - \hat{I}(t) H^z(x) - g, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u^z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u^z}{\partial x^2} + \hat{I}(t) H^y(x), \quad (2.4)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, $v^2 = T/\rho$ es la velocidad de onda transversal, $v_l^2 = (T + \lambda)/\rho$ es la velocidad de onda longitudinal, $\hat{I}(t) = I(t)/\rho$ es una corriente eléctrica normalizada. El campo gravitacional está dirigido en sentido contrario al eje y . El campo magnético es transversal con respecto al eje x , $H^x \equiv 0$, y además, las componentes transversales del campo magnético se toman como constantes en un intervalo:

$$H^y(x) = \begin{cases} H^y = cte^y, & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ 0, & \text{si } x \text{ está fuera de } (x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$H^z(x) = \begin{cases} H^z = cte^z, & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ 0, & \text{si } x \text{ está fuera de } (x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.6)$$

Nótese que la configuración de éste campo magnético puede ser aproximada en una región angosta, entre las dos caras planas de un imán permanente, cuyas terminales estén colocadas frente a frente.

Se considera aquí una cuerda de longitud L con los dos extremos fijos, uno está colocado en el punto $x = 0$ y el otro en el punto $x = L$. Esto implica las siguientes condiciones en la frontera para las componentes del desplazamiento de la cuerda:

$$u^{x,y,z}(0, t) = u^{x,y,z}(L, t) = 0, \quad (2.7)$$

donde el tiempo es $t \geq 0$.

Para el sistema físico descrito por las ecs. (2.2 y 2.7), es natural considerar las siguientes condiciones iniciales, las cuales definen los correspondientes problemas a resolver.

Problema 1. El problema 1 se especifica por condiciones iniciales iguales a cero (al tiempo $t = 0$ la cuerda está extendida uniformemente en la línea recta y está en reposo)

$$u^{x,y,z}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^{x,y,z}(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (2.8)$$

Problema 2. El problema 2 consiste en imponer las siguientes condiciones iniciales:

$$u^x(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^x(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (2.9)$$

$$u^y(x, 0) = \frac{\rho g}{2T} x(x - L), \quad \frac{\partial u^y(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (2.10)$$

$$u^z(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^z(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (2.11)$$

Estas fórmulas describen la forma de equilibrio de la cuerda accionada por la fuerza de gravedad en el plano vertical y sujeta a la tensión T , vea la componente $u^y(x, 0)$. En el instante $t = 0$ la cuerda está en reposo, y, además, no hay ni desplazamiento longitudinal, ni en dirección z .

Problema 3. Este problema está especificado por las siguientes condiciones iniciales:

$$u^x(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^x(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (2.12)$$

$$u^y(x, 0) = B_M^y \text{ sen } k_M x, \quad \frac{\partial u^y(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (2.13)$$

$$u^z(x, 0) = B_N^z \text{sen } k_N x, \quad \frac{\partial u^z(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (2.14)$$

Esto significa que en el instante $t = 0$ la cuerda está en reposo y no hay desplazamiento longitudinal. La cuerda está deformada en el plano vertical según el M -ésimo modo normal, y en el plano horizontal según el modo N -ésimo. Aquí M y N son números naturales correspondientes al M -ésimo y al N -ésimo modo normal, donde $k_n = n\pi/L$ es la forma general del número de onda de los modos normales.

Ahora procedemos a resolver los tres problemas citados. Debido a que el movimiento transversal de la cuerda, descrito por las ecs. (2.3 y 2.4), es separable del movimiento longitudinal, se obtienen solamente soluciones para el desplazamiento transversal. Aquí no vamos a considerar el movimiento longitudinal, ya que en este caso no influye este último sobre el movimiento transversal.

El método de separación de variables se usó para obtener las soluciones. Primero se presentan los pasos comunes en el procedimiento de solución de los tres problemas y, posteriormente, se lleva a cabo la solución de cada problema particular.

Sean las funciones $Y_n(x)$ y $Z_n(x)$ los modos normales de las ecuaciones homogéneas:

$$u_{tt}^{y,z} - v^2 u_{xx}^{y,z} = 0,$$

correspondientes a las ecs. (2.3 y 2.4), donde los subíndices implican las correspondientes derivadas parciales. Entonces

$$Y_n''(x) + k_n^2 Y_n(x) = 0, \quad Z_n''(x) + k_n^2 Z_n(x) = 0,$$

donde los valores k_n están definidos por las condiciones en la frontera, ec. (2.7), lo cual implica que

$$Y_n(0) = Y_n(L) = 0, \quad Z_n(0) = Z_n(L) = 0.$$

En este caso se tiene que

$$Y_n(x) = Z_n(x) = \text{sen } k_n x, \quad k_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

Se supone que las componentes de la fuerza externa están desarrolladas en los modos normales como sigue ($0 < x < L$):

$$f^{y,z}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{y,z}(t) Y_n(x). \quad (2.16)$$

Se buscan soluciones de las ecs. (2.3 y 2.4) en forma de expansiones en los modos normales ($0 < x < L$, $t > 0$):

$$u^{y,z}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{y,z}(t) Y_n(x). \quad (2.17)$$

En este caso las ecuaciones de movimiento, ecs. (2.3 y 2.4), restringen a las funciones $S_n^{y,z}(t)$ para que sean soluciones de las ecuaciones

$$\frac{d^2 S_n^{y,z}(t)}{dt^2} + k_n^2 v^2 S_n^{y,z}(t) = f_n^{y,z}(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

con condiciones iniciales

$$S_n^{y,z}(0) = \alpha_n^{y,z}, \quad \frac{dS_n^{y,z}(0)}{dt} = \beta_n^{y,z}, \quad (2.19)$$

las cuales provienen de los siguientes desarrollos de las condiciones iniciales

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n^{y,z}(0) Y_n(x) = u^{y,z}(x, 0) \equiv a^{y,z}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{y,z} Y_n(x), \quad (2.20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{dS_n^{y,z}(0)}{dt} \right) Y_n(x) = \frac{\partial u^{y,z}(x, 0)}{\partial t} \equiv b^{y,z}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{y,z} Y_n(x). \quad (2.21)$$

La solución de la ec. (2.18), sujeta a las condiciones iniciales (2.19), se obtiene fácilmente usando los métodos estándar y está dada por la siguiente expresión (vease el Anexo 6.1):

$$S_n^{y,z}(t) = \alpha_n^{y,z} \cos \omega_n t + \frac{\beta_n^{y,z}}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n^{y,z}(\tau) \operatorname{sen} \omega_n (t - \tau) d\tau, \quad (2.22)$$

donde $\omega_n = k_n v$.

Siguiendo el método de separación de variables, para resolver los Problemas 1, 2 y 3, se tiene primero que expandir las componentes de la fuerza externa, ec. (2.16), y las condiciones iniciales, ec. (2.19).

2.1 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 1

Aquí se resuelven las ecuaciones del movimiento transversal de una cuerda, ecs. (2.3 y 2.4), en el campo magnético constante, ecs. (2.5 y 2.6), con condiciones de frontera dadas por la ec. (2.7) y con condiciones iniciales dadas por la ec. (2.8).

A fin de tener las expansiones requeridas en modos normales, ec. (2.15), se hace la extensión periódica impar de las funciones

$$f^y(x, t) = -\hat{I}(t) H^z(x) - g, \quad f^z(x, t) = \hat{I}(t) H^y(x), \quad 0 < x < L, \quad (2.23)$$

en toda la línea x . Tomando en cuenta la configuración del campo magnético descrito por las ecs. (2.5 y 2.6), fácilmente se obtienen las siguientes expresiones ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$f_n^y(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f^y(x, t) \operatorname{sen} k_n x dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{L} \int_{x_1}^{x_2} \hat{I}(t) H^z \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx - \frac{2}{L} \int_0^L g \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \hat{I}(t) H^z (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) + \frac{2g}{n\pi} (\cos n\pi - 1), \tag{2.24}
\end{aligned}$$

$$f_n^z(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f^z(x, t) \operatorname{sen} k_n x dx = -\frac{2}{n\pi} \hat{I}(t) H^y (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1). \tag{2.25}$$

Para la corriente eléctrica de la forma $\hat{I}(t) = \hat{I}_0 \cdot \cos \omega t$, las soluciones de la ec. (2.18) con condiciones iniciales iguales a cero, ecs. (2.8, 2.20 y 2.21), se encuentran fácilmente de la expresión general, ec. (2.22):

$$S_n^y(t) = \frac{A_n^y (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{n(\omega_n^2 - \omega^2)} - G_n^y (\cos \omega_n t - 1), \tag{2.26}$$

$$S_n^z(t) = \frac{A_n^z (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{n(\omega_n^2 - \omega^2)}, \tag{2.27}$$

donde

$$\begin{aligned}
G_n^y &= \frac{2g}{n\pi\omega_n^2} (\cos n\pi - 1) = -\frac{4g}{n\pi\omega_n^2} \operatorname{sen}^2 n\frac{\pi}{2}, \\
A_n^y &= \frac{2}{\pi} \hat{I}_0 H^z (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1), \\
A_n^z &= -\frac{2}{\pi} \hat{I}_0 H^y (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1), \\
\omega_n = k_n v &= \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = n\omega_1, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

De aquí, juntando los resultados presentados por las ecs. (2.15, 2.17, 2.26, 2.27 y 2.28) se encuentra que la solución del Problema 1 tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u^y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n^y(t) Y_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{I}_0 H^z (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} k_n x \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4g}{n\pi\omega_n^2} (\cos \omega_n t - 1) \operatorname{sen}^2 \left(n\frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sen} k_n x, \tag{2.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n^z(t) Y_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{I}_0 H^y (\cos k_n x_1 - \cos k_n x_2) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} k_n x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\hat{I}_0 H^y}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} k_n (x_2 + x_1) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} k_n (x_2 - x_1) \right) \\
&\quad \times \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} t (\omega_n + \omega) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} t (\omega_n - \omega) \right) \operatorname{sen} k_n x. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Debería notarse que no hay singularidad en estas soluciones cuando $\omega \rightarrow \omega_n$.

Usando el programa Mathematica, procedemos al análisis gráfico de las soluciones, ecs. (2.29, 2.30), escogiendo parámetros del sistema que representan condiciones experimentales realizadas en nuestros experimentos (vease Cap. 4). Por lo tanto, con los parámetros experimentales se calculó la frecuencia fundamental del sistema $\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 144.38 \text{ rad/seg}$ o $\nu_1 = 22.99 \text{ Hz}$. El valor del campo magnético, cuando lo último abarca toda la cuerda, tomamos a $H^y = H^z = 100 \text{ gauss}$, $H^x = 0$, lo que corresponde a la magnitud típica del campo magnético en nuestros experimentos. La corriente normalizada es $\hat{I}_0 = I_0/\rho = 5694.76 \text{ Am/kg}$. Fijando la frecuencia de la corriente eléctrica $\omega = 2\pi\nu = 376.99 \text{ rad/seg}$, que determina la frecuencia de la fuerza motriz, graficamos la forma de la cuerda en diferentes instantes de tiempo. Para el análisis gráfico de las soluciones en forma de series infinitas, ecs. (2.29 y 2.30), se usaron sumas de los primeros 100 términos, tomando en cuenta que para las sumas de más de 30 términos ya no se observan cambios en las gráficas. Los resultados para el campo magnético uniforme están presentados como sigue.

En la Fig. 2.1 se presenta la forma de ondas $u^y(x, t)$ en el plano xy en treinta diferentes instantes del tiempo, separados secuencialmente por el intervalo de $3 \times 10^{-3} \text{ seg}$: la frecuencia de la fuerza es igual a $\nu = 60 \text{ Hz}$, que es la frecuencia de la corriente alterna de la red eléctrica comercial. En este caso el intervalo (x_1, x_2) , donde el campo magnético uniforme es distinto de cero, abarca toda la cuerda, que corresponde a $x_1 = 0$ y $x_2 = L$.

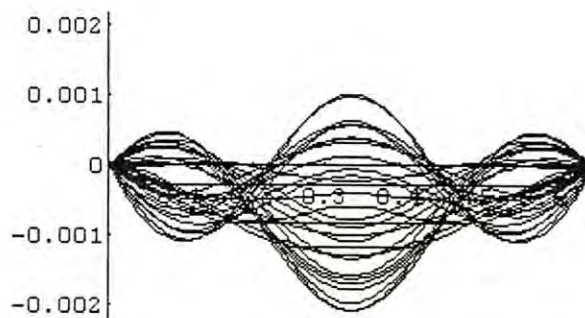


Fig. 2.1. Ondas transversales $u^y(x, t)$ para diferentes valores de t con el intervalo (x_1, x_2) que se extiende sobre toda la cuerda; Problema 1. Las unidades en el eje horizontal x y en el eje vertical u^y están en metros.

Las particularidades de la figura son: a) se nota la tendencia de formar dos nodos, aunque no bien definidos; b) las distancias entre los nodos secuenciales son diferentes, se nota que la

cresta central es más grande que las de los extremos de la cuerda; c) la amplitud máxima de oscilaciones es del orden de 2 mm ; d) la figura es simétrica con respecto al centro de la cuerda y, demuestra cierta concavidad, lo que se debe a la presencia de la fuerza gravitacional. Las gráficas de $u^z(x, t)$, no presentadas en este trabajo, son casi idénticas a las de $u^y(x, t)$, salvo a la simetría de oscilaciones $u^z(x, t)$ con respecto al eje x .

La Fig. 2.2 (a,b) presenta las gráficas paramétricas de oscilaciones de la cuerda en las secciones transversales $x = L/2$ y $x = L/3$, durante el tiempo de 0 a 1 segundo.

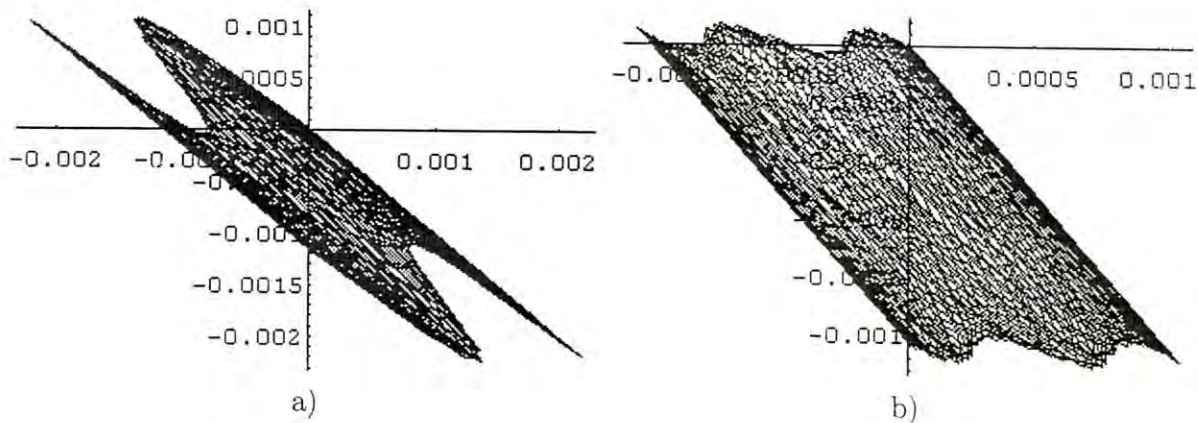
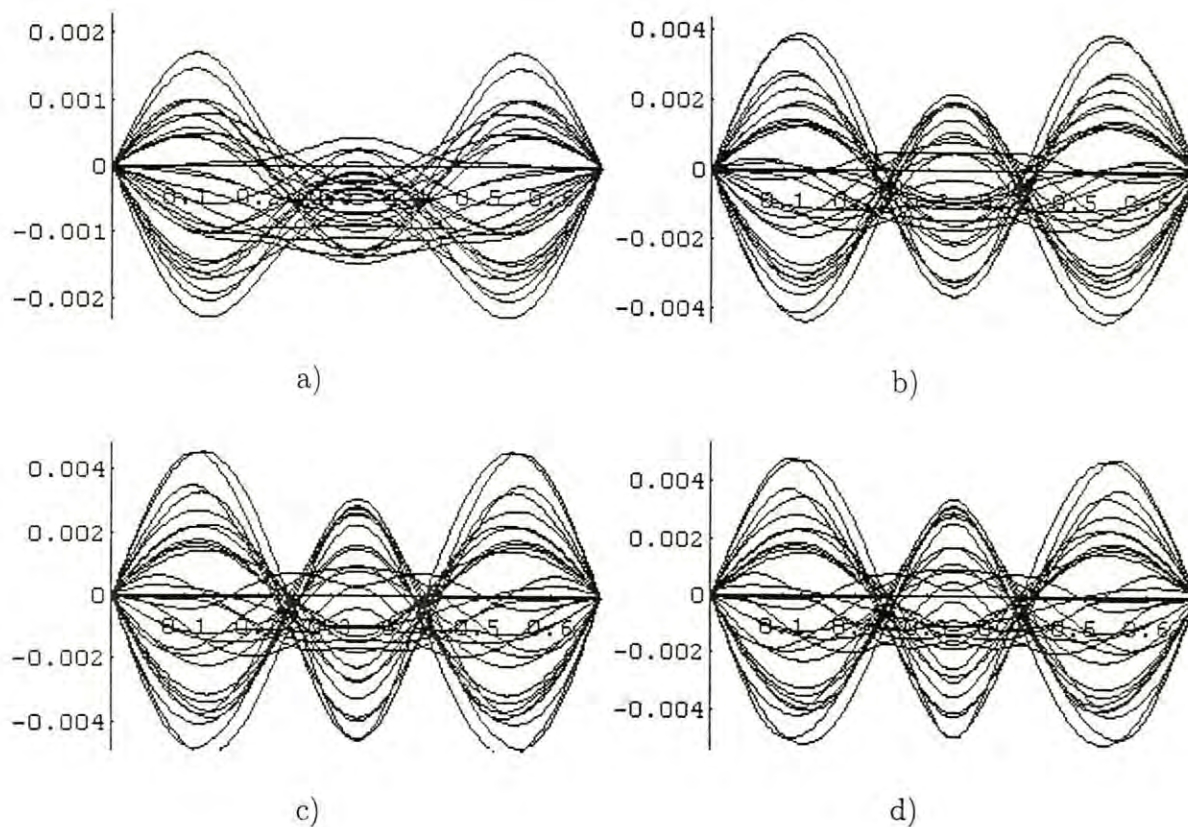


Fig. 2.2 Oscilaciones transversales de la cuerda en sección transversal a) $x = L/2$ y b) $x = L/3$. Problema 1, cuando el campo magnético abarca el intervalo $x_1 = 0$ y $x_2 = L$. Las unidades en el eje horizontal u^z y en el eje vertical u^y están en metros.

Se ve que las oscilaciones son aperiódicas, si no caóticas, y en el transcurso del tiempo la trayectoria de un punto de la cuerda llena cierta figura, de apariencia uniforme. Esta forma de movimiento de la cuerda es poco esperada pensando que la fuerza motriz magnética es periódica. El efecto se debe a la presencia de la fuerza gravitacional y condiciones iniciales. Se puede mostrar que, despreciando la fuerza gravitacional en este problema (poniendo $g = 0$), las gráficas se degeneran a una línea recta que pasa por el punto $y = z = 0$, que corresponde a la composición de dos oscilaciones $u^y(x, t)$ y $u^z(x, t)$ con la diferencia de fases igual a π .

Con el propósito de estudiar los efectos de la distribución del campo magnético sobre la cuerda, analizamos gráficamente las ondas, al reducir el intervalo (x_1, x_2) , donde el campo magnético es distinto de cero, y al cambiar la localización del intervalo sobre el eje x (vease Figs. 2.3 (a,b,c,d,e)). Cabe mencionar que, aunque en nuestros experimentos no se realiza la configuración del campo magnético uniforme extendido sobre toda la cuerda, estos resultados, a parte de tener interés académico, pueden aclarar la situación para sistemas (cuerdas) de mucho menor tamaño cuando es fácil de realizar un campo magnético uniforme que abarca toda la cuerda.

Cada una de las Figs. 2.3 (a,b,c,d,e) representa la forma de la cuerda $u^y(x, t)$ en el plano xy para treinta diferentes valores de tiempo, separados secuencialmente por el intervalo de 3×10^{-3} seg. Manteniendo los parámetros de la cuerda, cada figura está calculada para un campo magnético uniforme normalizado $H_{norm}^{y,z} = H^{y,z} (L / (x_2 - x_1))$ con el intervalo (x_1, x_2) centrado en la mitad de la cuerda. La magnitud del intervalo se toma igual a: a) $L/2$ en el segmento $(x_1 = L/4, x_2 = 3L/4)$; b) $L/4$ en el segmento $(x_1 = 3L/8, x_2 = 5L/8)$; c) $L/8$ en el segmento $(x_1 = 7L/16, x_2 = 9L/16)$; d) $L/16$ en el segmento $(x_1 = 15L/32, x_2 = 17L/32)$; e) $L/32$ en el segmento $(x_1 = 31L/64, x_2 = 33L/64)$. El factor $L / (x_2 - x_1)$ lo introducimos para el campo normalizado con el fin de mantener la magnitud de la fuerza magnética total sobre la cuerda.



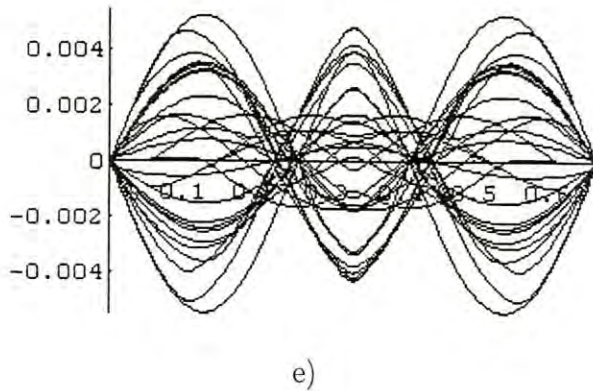


Fig. 2.3. Ondas transversales $u^y(x, t)$ para diferentes magnitudes del intervalo (x_1, x_2) , cuando éste se centra en la mitad de la cuerda; Problema 1. Las unidades en el eje horizontal x y en el eje vertical u^y están en metros.

Al comparar las gráficas en la serie, Fig. 2.1 y Figs. 2.3 (a,b,c,d,e), se observan cambios fuertes entre las gráficas de las Figs. 2.1 y 2.3 (a,b) tanto en posición de los nodos, como en amplitudes de oscilación. Estos ocurren cuando una de las fronteras, de la región que abarca el campo magnético, cruza alguno de los nodos. Sin embargo, cuando los cambios en la magnitud del intervalo (x_1, x_2) ya se encuentran dentro de dos nodos consecuentes, las oscilaciones ya no sufren cambios considerables (vease Figs.2.3 (b,c,d,e)).

Del modo similar a la serie anterior de gráficas, obtuvimos otra serie de gráficas reduciendo la extensión del intervalo (x_1, x_2) , donde el campo magnético uniforme normalizado es diferente de cero, hacia el extremo derecho de la cuerda. En las Figs. 2.4 (a,b,c,d,e,f) la magnitud y localización del intervalo (x_1, x_2) varían de la siguiente forma: a) $3L/4$ en el segmento $(x_1 = L/4, x_2 = L)$; b) $L/2$ en el segmento $(x_1 = L/2, x_2 = L)$; c) $L/4$ en el segmento $(x_1 = 3L/4, x_2 = L)$; d) $L/8$ en el segmento $(x_1 = 7L/8, x_2 = L)$; e) $L/16$ en el segmento $(x_1 = 15L/16, x_2 = L)$; f) $L/32$ en el segmento $(x_1 = 31L/32, x_2 = L)$.

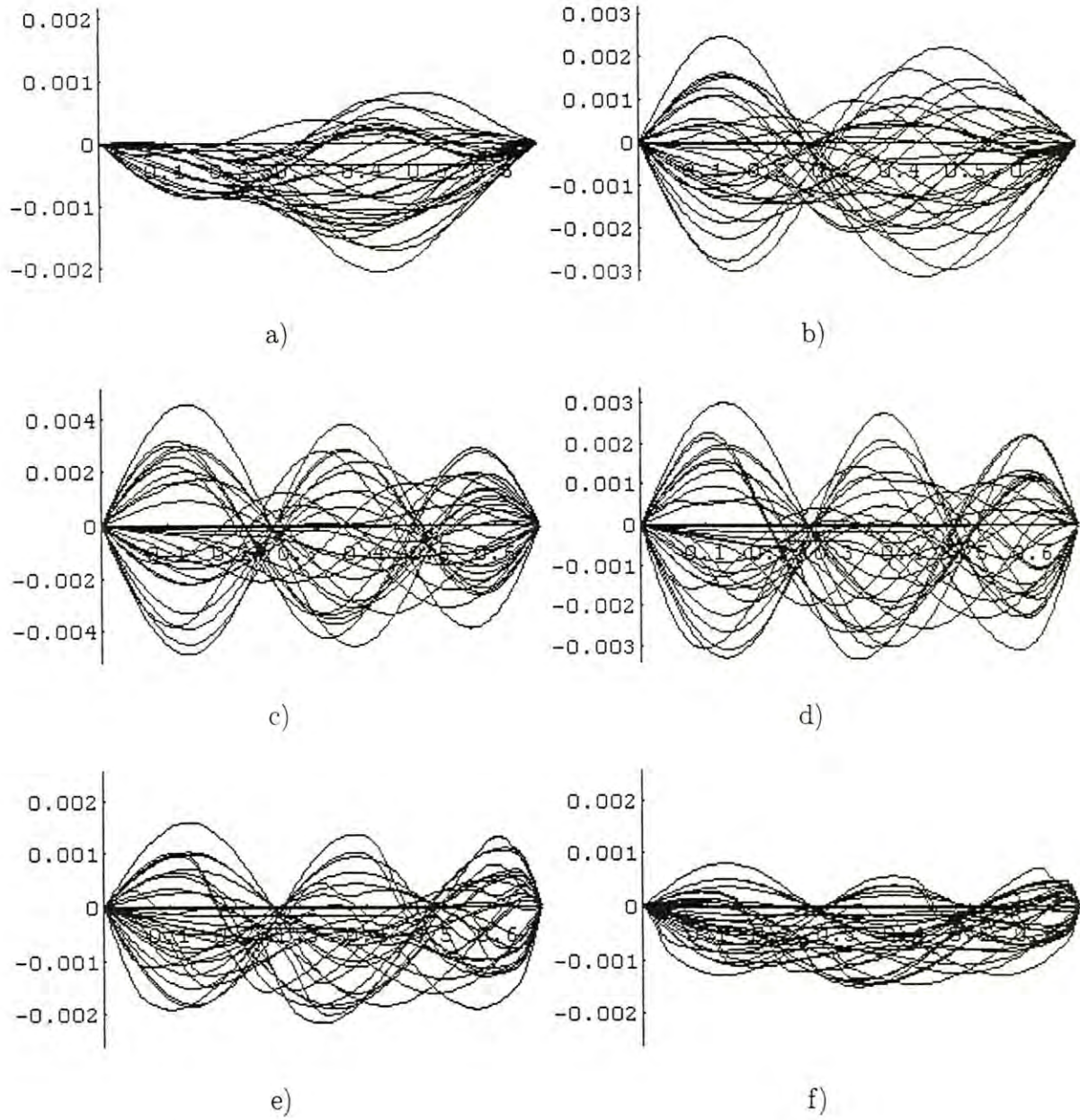


Fig. 2.4. Ondas transversales $u^y(x, t)$ para diferentes magnitudes del intervalo (x_1, x_2) , cuando el extremo x_2 se fija en el extremo derecho de la cuerda, variando a x_1 ; Problema 1. Las unidades en el eje horizontal x y en el eje vertical u^y están en metros.

Recordamos que la frecuencia de la fuerza magnética se encuentra cerca de la frecuencia del tercer modo de la frecuencia normal de la cuerda. En las gráficas de las Figs. (2.1 y 2.4 (a,b)) se observa una transformación del tercer (pseudo)modo normal al segundo (pseudo)modo normal, aumentando la amplitud de oscilación. A partir de la Fig. 2.4 c, de nuevo se establece la oscilación en el tercer (pseudo)modo normal y su amplitud disminuye conforme se reduce el intervalo (x_1, x_2) , donde el campo magnético normalizado es diferente de cero. Analizando los cambios en las Figs. 2.1 y 2.4 (a,b,c,d,e,f), llegamos a la conclusión que los cambios más drásticos en forma de oscilación de la cuerda ocurren cuando la frontera de la región, donde existe el campo magnético, cruza pseudonodos (nodos no bien definidos) de oscilación de la Fig. 2.1.

Un efecto parecido, el cambio del patrón de oscilaciones, observamos en nuestros experimentos cuando el imán se acerca a los nodos de las ondas estacionarias.

Cabe mencionar que las gráficas de oscilaciones $u^z(x, t)$ en el plano xz muestran cambios similares a los de $u^y(x, t)$, con la diferencia de tener simetría de oscilaciones con respecto al eje x .

2.2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2

Se resuelven las ecuaciones del movimiento transversal de una cuerda, las ecs. (2.3 y 2.4), en un campo magnético constante, las ecs. (2.5 y 2.6), con las condiciones de frontera dadas por la ec. (2.7) y con las condiciones iniciales dadas por las ecs. (2.9 y 2.10). El esquema de la solución es idéntico que para el problema 1.

Entonces, para una corriente eléctrica de la forma $\hat{I}(t) = \hat{I}_0 \cos \omega t$, las soluciones de la ec. (2.18) con las condiciones iniciales dadas por la ec. (2.19), se encuentran fácilmente de la ec. (2.22):

$$S_n^y(t) = \alpha_n^y \cos \omega_n t + \frac{A_n^y (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{n (\omega_n^2 - \omega^2)} - G_n^y (\cos \omega_n t - 1), \quad (2.31)$$

donde las notaciones son dadas por la ec. (2.28). En el caso considerado, el valor inicial de $S_n^y(t)$ está dado por el valor de

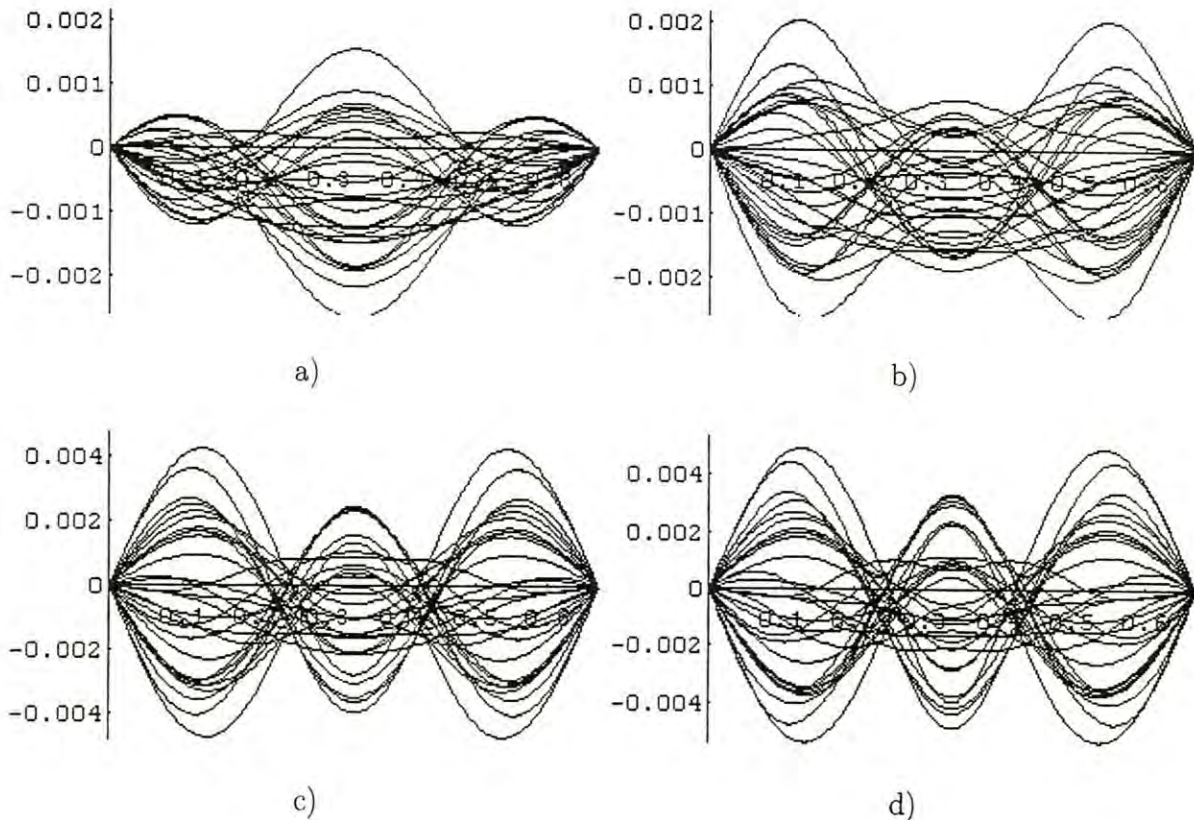
$$\alpha_n^y = \frac{2\rho g L^2 ((-1)^n - 1)}{T\pi^3 n^3} = \frac{2g}{n\pi\omega_n^2} (\cos n\pi - 1) = G_n^y. \quad (2.32)$$

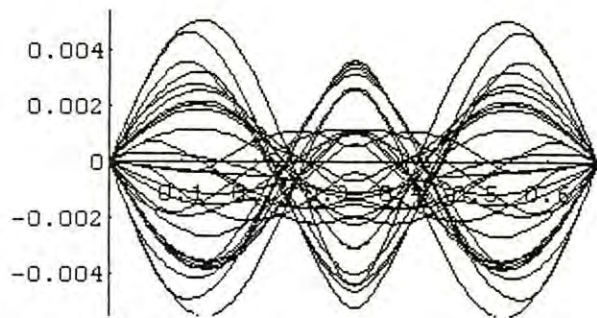
La función $S_n^z(t)$ es la misma que la ec. (2.27). Por lo tanto, la solución $u^z(x, t)$ es la misma, ec. (2.30), que en el problema 1. La solución $u^y(x, t)$ es diferente de la del problema 1 y está dada por la siguiente serie:

$$u^y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^y(t) Y_n(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{I}_0 H^z (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin k_n x \\
&\quad + \frac{\rho g}{2T} x (x - L). \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Siguiendo el esquema del Problema 1, graficamos oscilaciones $u^y(x, t)$ de la cuerda para diferentes magnitudes del intervalo (x_1, x_2) , en treinta diferentes instantes secuenciales de tiempo, separados por el intervalo de 3×10^{-3} seg. Los resultados se presentan en las Figs. 2.5 (a,b,c,d,e) para diferentes extensiones del intervalo (x_1, x_2) , donde el campo magnético uniforme normalizado es $H_{norm}^{y,z} = H^{y,z} (L / (x_2 - x_1))$. El intervalo está centrado en la mitad de la cuerda y su magnitud es: a) L en el segmento $(x_1 = 0, x_2 = L)$; b) $L/2$ en el segmento $(x_1 = L/4, x_2 = 3L/4)$; c) $L/4$ en el segmento $(x_1 = 3L/8, x_2 = 5L/8)$; d) $L/8$ en el segmento $(x_1 = 7L/16, x_2 = 9L/16)$; e) $L/16$ en el segmento $(x_1 = 15L/32, x_2 = 17L/32)$.





e)

Fig. 2.5. Ondas transversales $u^y(x, t)$ para diferentes magnitudes del intervalo (x_1, x_2) que está centrado en la mitad de la cuerda; Problema 2. Las unidades en el eje horizontal x y en el eje vertical u^y están en metros.

Como se puede ver en estas gráficas, los cambios de las oscilaciones, causados por la variación de la magnitud del intervalo (x_1, x_2) , son muy similares a los presentados en las gráficas del Problema 1. Sin embargo, en contraste con el Problema 1, las oscilaciones son plano-polarizadas que se demuestra con las gráficas en secciones transversales al eje x (vease Figs. 2.6 (a,b)).

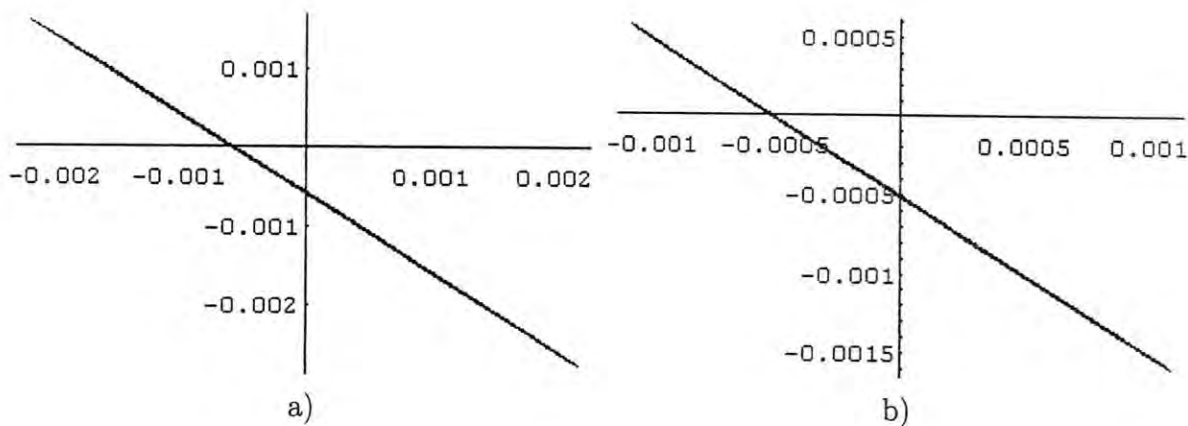


Fig. 2.6. Oscilaciones transversales de la cuerda en sección transversal a) $x = L/2$ y b) $x = L/3$. Problema 2, con el intervalo (x_1, x_2) que abarca toda la cuerda. Las unidades en el eje horizontal u^z y en el eje vertical u^y están en metros.

Esta polarización plana de las ondas se debe a condiciones iniciales del problema, cuando la cuerda inicialmente tiene la forma de equilibrio en el campo gravitacional. En este caso la diferencia de fase entre oscilaciones $u^y(x, t)$ y $u^z(x, t)$, desde el inicio es igual a π y se mantiene constante en el transcurso del tiempo.

Las oscilaciones $u^z(x, t)$ son muy parecidos a las $u^y(x, t)$, salvo que las primeras son simétricas con respecto al eje x .

2.3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3

Y por último se resuelven las ecuaciones del movimiento transversal de una cuerda, ecs. (2.3 y 2.4), en el campo magnético constante, ecs. (2.5 y 2.6), con condiciones en la frontera dadas por la ec. (2.7) y con condiciones iniciales dadas por las ecs. (2.13 y 2.14). El esquema de solución es idéntico al que se tenía en el Problema 1.

Entonces, para la corriente eléctrica de la forma $\hat{I}(t) = \hat{I}_0 \cos \omega t$, la solución de la ec. (2.18) con condiciones iniciales dadas por la ec. (2.19), se encuentra de la ec. (2.22):

$$S_n^y(t) = \delta_{nM} B_M^y \cos \omega_n t + \frac{A_n^y (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{n (\omega_n^2 - \omega^2)} - G_n^y (\cos \omega_n t - 1), \quad (2.34)$$

$$S_n^z(t) = \delta_{nN} B_N^z \cos \omega_n t + \frac{A_n^z (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{n (\omega_n^2 - \omega^2)}. \quad (2.35)$$

Por lo tanto la solución del problema 3 está dada por la siguiente serie:

$$\begin{aligned} u^y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n^y(t) Y_n(x) = B_M^y \cos \omega_M t \sin k_M x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{I}_0 H^z (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin k_n x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4g}{n\pi\omega_n^2} (\cos \omega_n t - 1) \sin^2 n \frac{\pi}{2} \sin k_n x, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} u^z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n^z(t) Y_n(x) = B_N^z \cos \omega_N t \sin k_N x + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{I}_0 H^y (\cos k_n x_1 - \cos k_n x_2) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin k_n x. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Un caso particular del campo magnético considerado, descrito por las ecs. (2.5 y 2.6), es el campo magnético constante en intervalo (x_1, x_2) que se extiende sobre toda la cuerda.

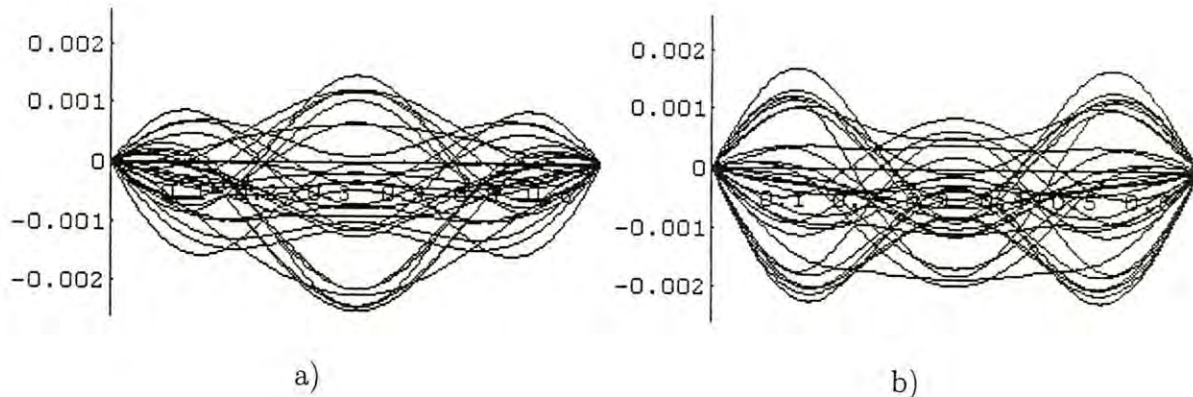
Esto significa que $x_1 = 0$ y $x_2 = L$ en dichas ecuaciones. Entonces, para la solución obtenida se tiene

$$\frac{2\hat{I}_0 H^{y,z} (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin k_n x =$$

$$\frac{2\hat{I}_0 H^{y,z} (\cos n\pi - 1) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)}.$$

Esta expresión tiene una estructura muy similar a la de los términos referidos al campo gravitacional. La única diferencia es que el campo "pseudo-gravitacional", causado por la interacción magnetostática, tiene una frecuencia ω distinta de cero.

Siguiendo el esquema del Problema 1, graficamos oscilaciones $u^y(x, t)$ de la cuerda para diferentes magnitudes del intervalo (x_1, x_2) , donde el campo magnético uniforme normalizado $H_{norm}^{y,z} = H^{y,z} (L / (x_2 - x_1))$ es distinto de cero, centrando éste intervalo en la mitad de la cuerda. Se grafican oscilaciones de la cuerda en treinta instantes secuenciales de tiempo, que están separados por el intervalo de $3 \times 10^{-3} \text{ seg}$. La forma inicial de la cuerda la definimos de acuerdo con el modo normal fundamental $u^y(x, 0) = \sin k_1 x$ y $u^z(x, 0) = \sin k_1 x$. Los resultados se presentan en la Fig. 2.7 (a,b,c,d,e) para las siguientes magnitudes del intervalo (x_1, x_2) : a) L en el segmento $(x_1 = 0, x_2 = L)$; b) $L/2$ en el segmento $(x_1 = L/4, x_2 = 3L/4)$; c) $L/4$ en el segmento $(x_1 = 3L/8, x_2 = 5L/8)$; d) $L/8$ en el segmento $(x_1 = 7L/16, x_2 = 9L/16)$; e) $L/16$ en el segmento $(x_1 = 15L/32, x_2 = 17L/32)$.



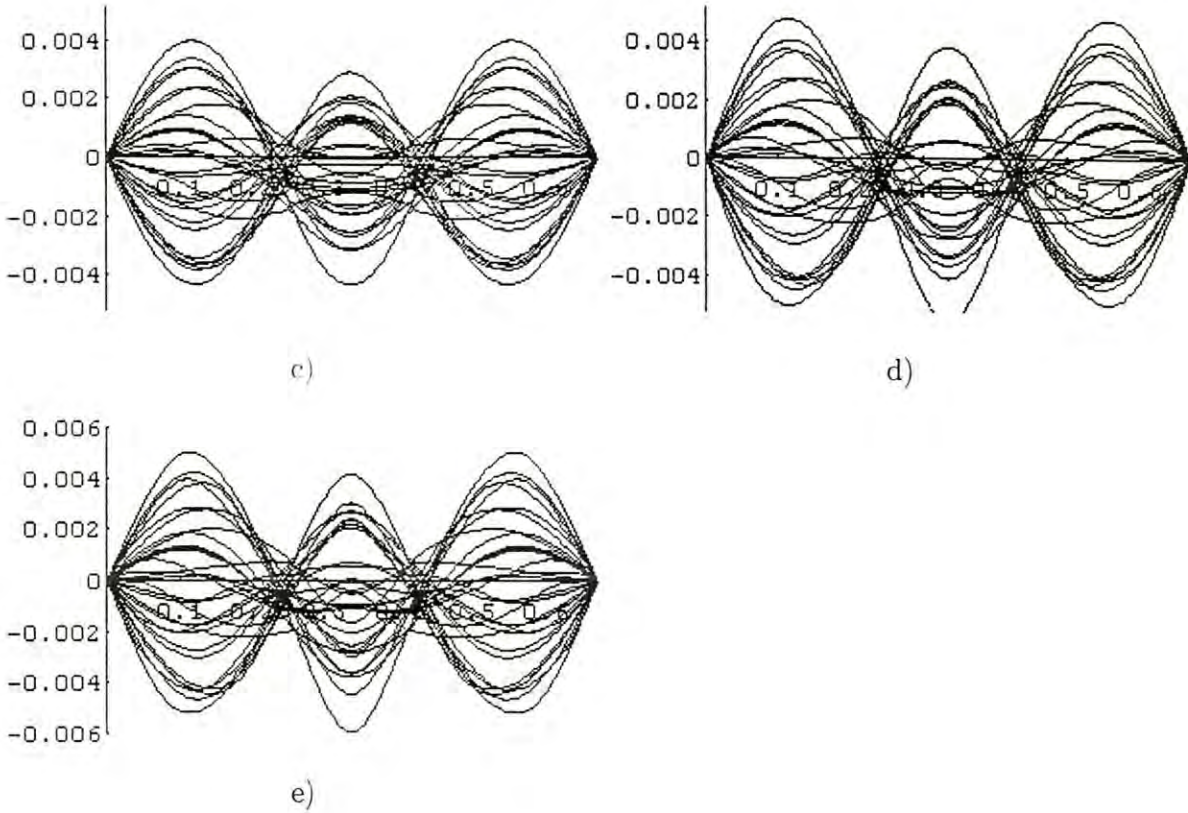


Fig. 2.7. Ondas transversales $u^y(x, t)$ para diferentes magnitudes del intervalo (x_1, x_2) que está centrado en la mitad de la cuerda; Problema 3. Las unidades en el eje horizontal x y en el eje vertical u^y están en metros.

Como se puede ver en estas gráficas, los cambios de las oscilaciones, causados por la variación de la magnitud del intervalo (x_1, x_2) , son similares a los presentados en las gráficas del Problema 1.

La Fig. 2.8 (a,b) presenta las gráficas paramétricas de oscilaciones de la cuerda en las secciones transversales $x = L/2$ y $x = L/3$, durante el tiempo de 0 a 1 segundo.

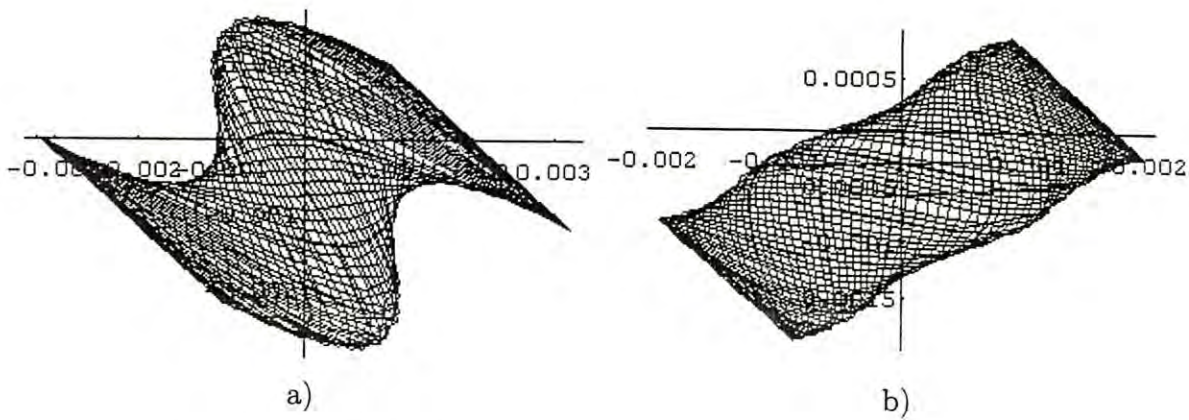


Fig. 2.8. Oscilaciones transversales de la cuerda en sección transversal a) $x = L/2$ y b) $x = L/3$. Problema 3, con extensión del intervalo (x_1, x_2) sobre toda la cuerda. Las unidades en el eje horizontal u^z y en el eje vertical u^y están en metros.

Se ve que las oscilaciones son aperiódicas, si no caóticas, y en el transcurso del tiempo la trayectoria de un punto de la cuerda llena cierta figura, de apariencia uniforme, y que es diferente de la figura del Problema 1. Esta forma de movimiento de la cuerda es poco esperada pensando que la fuerza motriz magnética es periódica. El efecto se debe a la presencia de la fuerza gravitacional y condiciones iniciales. Se puede mostrar que, despreciando la fuerza gravitacional en este problema (poniendo $g = 0$), las gráficas se degeneran a una línea recta que pasa por el punto $y = z = 0$, que corresponde a la composición de dos oscilaciones $u^y(x, t)$ y $u^z(x, t)$ con la diferencia de fases igual a π .

Cabe hacer algunos comentarios respecto a las soluciones obtenidas en esta sección. Aunque las soluciones están representadas en forma de series formales, son muy instructivas debido a que: 1) muestran la aplicación del método de Fourier para la solución de problemas del movimiento ondulatorio en cuerdas; 2) las condiciones iniciales, usadas en el planteamiento de los problemas, son muy adecuados para los experimentos; 3) además, las condiciones iniciales del problema 1 son el caso límite de las condiciones iniciales, tanto del problema 2 (cuando $\rho g L \ll T$) como del problema 3 (cuando $B_M^y, B_N^z \rightarrow 0$); 4) tendiendo $x_2 \rightarrow x_1$, a condición de que $\hat{I}_0 H^{y,z}(x_2 - x_1) = \text{const}$, se obtiene formalmente la fuerza magnetostática casi puntual, del tipo de la función $\delta(x - x_1)$.

2.4 SOLUCIÓN ASINTÓTICA PARA MOVIMIENTO CON AMORTIGUAMIENTO

En condiciones reales, el movimiento de una cuerda ocurre, por lo general, en presencia de un amortiguamiento que se debe a: 1) fricción con aire; 2) fricción interna (rigidez finita) de la cuerda; 3) una pequeña inducción electromagnética, en caso de la cuerda con una corriente eléctrica en un campo magnético. Este tipo de amortiguamiento se toma en cuenta en ecuaciones de movimiento fenomenológicamente, por medio de un término que es proporcional a la velocidad de desplazamiento.

Suponiendo un amortiguamiento en los Problemas 1, 2 y 3, se puede demostrar, tal como sigue, que la solución asintótica no depende de las condiciones iniciales y es única para estos tres problemas.

En presencia de amortiguamiento, el movimiento transversal de la cuerda, es decir las funciones $S_n^{y,z}(t)$ en el método de separación de variables deben satisfacer a las ecuaciones

$$\frac{d^2 S_n^{y,z}(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dS_n^{y,z}(t)}{dt} + \omega_n^2 S_n^{y,z}(t) = f_n^{y,z}(t), \quad (2.38)$$

(en particular $f_n^{y,z}(t) \sim \cos \omega t$) con condiciones iniciales

$$S_n^{y,z}(0) = \alpha_n^{y,z}, \quad \frac{dS_n^{y,z}(t)}{dt} = \beta_n^{y,z} \quad n = 1, 2, \dots$$

donde β es el coeficiente de amortiguamiento, $\omega_n = k_n v = (n\pi/L)\sqrt{T/\rho}$ es la frecuencia del n -ésimo modo transversal. Aquí se supone que β es menor que ω_1 , que da valores complejos para todas las raíces $\lambda_n = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_n^2}$ de la ecuación secular, para detalles vease Anexo 6.1.

La solución general de la ecuación del tipo ec. (2.38), está dada por la suma de la solución, ec. (6.2) y ec. (6.6), y de la solución particular, ec. (6.14), vease Anexo 6.1. En el transcurso del tiempo, cuando $t \rightarrow \infty$ es bastante grande, de dicha solución general sobrevive solamente la parte "estacionaria", dada por la ec. (6.15), y esta solución asintótica ya no depende de las condiciones iniciales. Por lo tanto, las soluciones de los Problemas 1, 2 y 3, que se distinguen solamente por las condiciones iniciales, en presencia de amortiguamiento y para el tiempo bastante grande convergen a la solución estacionaria (asintótica), que es única para los tres problemas. Esta solución se constituye de la siguiente manera.

En el caso cuando la fuerza, ec. (2.23), es armónica con la $\hat{I}(t) = \hat{I}_0 \cos \omega t$, para soluciones "estacionarias" de $S_n^{y,z}(t)$ se usa la fórmula ec. (6.15): (\tilde{S} es solución estacionaria)

$$\tilde{S}_n^z(t) = \frac{\tilde{A}_n^z \cos(\omega t - \theta_n)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (2.39)$$

donde

$$f_n^z(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f^z(x, t) \sin k_n x dx \equiv \tilde{A}_n^z \cos \omega t; \quad (2.40)$$

$$\tilde{A}_n^z = -\frac{2}{n\pi} \hat{I}_0 H^y (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) \equiv A_n^z/n. \quad (2.41)$$

$$\tan \theta_n = \frac{2\beta\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (2.42)$$

Es fácil de ver, que la estructura de la solución $\tilde{S}_n^y(t)$ es muy parecida a $\tilde{S}_n^z(t)$, salvo que se le agrega la parte constante, correspondiente a la fuerza gravitatoria, es decir:

$$\tilde{S}_n^y(t) = \frac{\tilde{A}_n^y \cos(\omega t - \theta_n)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} + G_n^y, \quad (2.43)$$

donde

$$f_n^y(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f^y(x, t) \sin k_n x dx \equiv \tilde{A}_n^y \cos \omega t + G_n^y \omega_n^2; \quad (2.44)$$

$$\tilde{A}_n^y = \frac{2}{n\pi} \hat{I}_0 H^z (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) \equiv A_n^y/n. \quad (2.45)$$

$$G_n^y = \frac{2g}{n\pi\omega_n^2} (\cos n\pi - 1) = -\frac{4g}{n\pi\omega_n^2} \sin^2 n\frac{\pi}{2}. \quad (2.46)$$

Además, se recuerda que

$$\frac{\rho g}{2T} x(x-L) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^y \sin k_n x$$

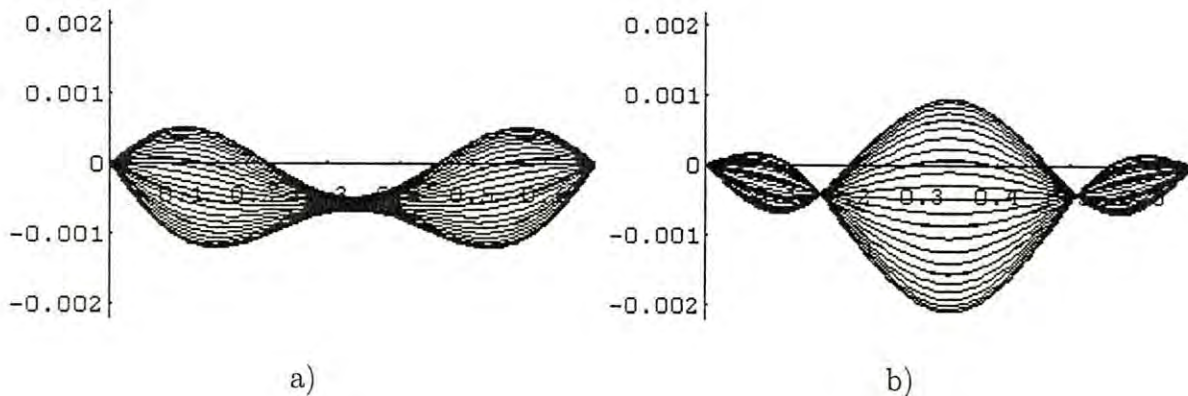
$$G_n^y = \frac{2}{L} \int_0^L \left[\frac{\rho g}{2T} x(x-L) \right] \sin k_n x dx. \quad (2.47)$$

De las ecs. (2.39, 2.40 y 2.41), tenemos (\tilde{u}^z es solución asintótica)

$$\begin{aligned} \tilde{u}^z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_n^z(t) \sin k_n x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\omega t - \theta_n) \frac{\tilde{A}_n^z \sin k_n x}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \\ &= -\frac{2}{\pi} \hat{I}_0 H^y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\omega t - \theta_n) (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) \sin k_n x}{n \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}; \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}^y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n^y(t) \sin k_n x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\omega t - \theta_n) \frac{\bar{A}_n^y \sin k_n x}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} + \frac{\rho g}{2T} x(x-L) \\
&= \frac{2}{\pi} \hat{I}_0 H^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\omega t - \theta_n) (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) \sin k_n x}{n \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} + \frac{\rho g}{2T} x(x-L). \quad (2.49)
\end{aligned}$$

Es importante comparar como varía la forma de oscilaciones entre los dos casos de movimiento de la cuerda: sin y con amortiguamiento. Con este fin, siguiendo el esquema del análisis en el Problema 1, manteniendo parámetros de la cuerda y la frecuencia de la corriente $\omega = 2\pi\nu = 376.99 \text{ rad/seg}$, analizaremos gráficamente las soluciones dadas por las ecs. (2.48, 2.49). Graficamos las oscilaciones $u^y(x,t)$ en la cuerda, con diferentes magnitudes del intervalo (x_1, x_2) , para treinta diferentes valores de tiempo y separados secuencialmente por intervalo de $3 \times 10^{-3} \text{ seg}$. Los resultados se presentan en la Fig. 2.9 (a,b,c,d,e) para los siguientes valores del intervalo (x_1, x_2) : a) extensión L en el segmento $(x_1 = 0, x_2 = L)$; b) extensión $L/2$ en el segmento $(x_1 = L/4, x_2 = 3L/4)$; c) extensión $L/4$ en el segmento $(x_1 = 3L/8, x_2 = 5L/8)$; d) extensión $L/8$ en el segmento $(x_1 = 7L/16, x_2 = 9L/16)$; e) extensión $L/16$ en el segmento $(x_1 = 15L/32, x_2 = 17L/32)$. Recordamos que el campo magnético uniforme normalizado $H_{norm}^{y,z} = H^{y,z} (L/(x_2 - x_1))$ es distinto de cero en el intervalo (x_1, x_2) . En éste caso el intervalo está centrado en la mitad de la cuerda.



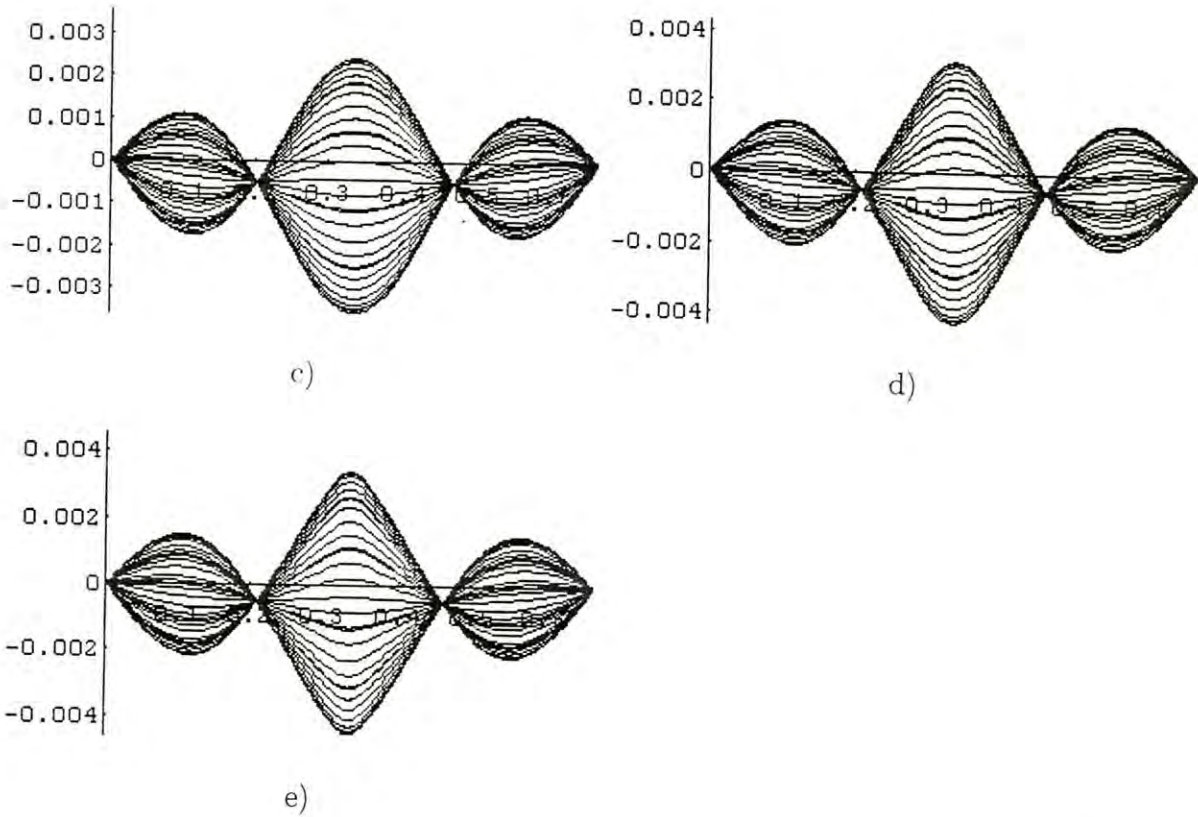


Fig. 2.9. Ondas transversales $u^y(x,t)$ en la cuerda, para diferentes extensiones del campo magnético, centrado en la mitad de la misma, para el movimiento ondulatorio con amortiguamiento. Las unidades en el eje horizontal x y en el eje vertical u^y están en metros.

De estas gráficas se puede ver que al disminuir la extensión del intervalo de L a $L/2$, las oscilaciones de "segundo modo" se transforman a las de "tercer modo", vease las Figs. 2.9 (a,b).

Para las extensiones del intervalo (x_1, x_2) menores que $L/2$, las oscilaciones siguen siendo de "tercer modo"; sin embargo, reduciendo la extensión, se observan cambios tanto en posición de los nodos, como en amplitud de oscilaciones en las crestas de los extremos de la cuerda (vease Figs. 2.9 (b,c,d,e)).

Los nodos de las ondas en el movimiento con amortiguamiento, en contraste a los de los Problemas 1,2,3, son bien definidos. En contraste con el Problema 1 y 2, las oscilaciones son plano-polarizadas que se demuestra con las gráficas en secciones transversales a $x = L/2$ y $x = L/3$ (vease Figs.2.10 (a,b)) para la extensión del intervalo (x_1, x_2) igual a L .

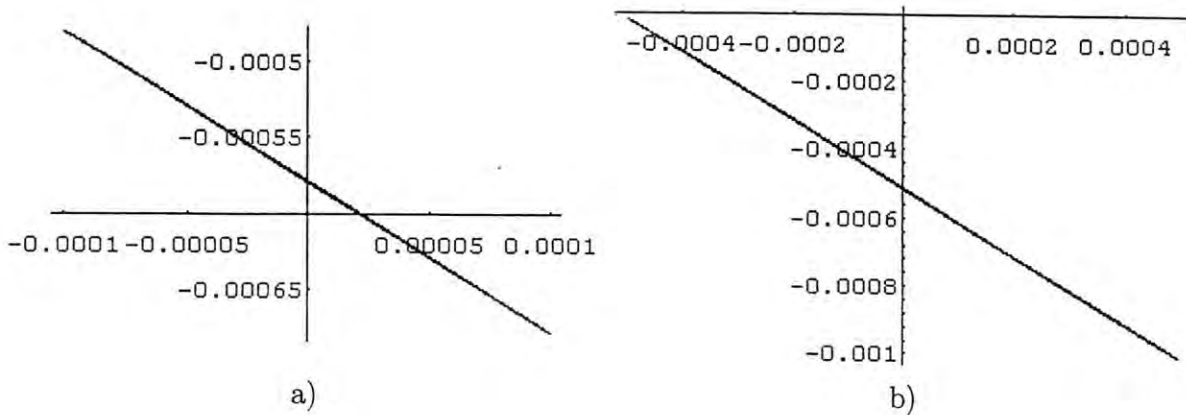


Fig. 2.10. Oscilaciones transversales de la cuerda en sección transversal a) $x = L/2$ y b) $x = L/3$. Movimiento ondulatorio con amortiguamiento cuando el intervalo (x_1, x_2) se extiende sobre toda la cuerda. Las unidades en el eje horizontal u^z y en el eje vertical u^y están en metros.

Oscilaciones $u^z(x, t)$ son muy parecidos a las $u^y(x, t)$, salvo que las primeras son simétricas con respecto al eje x .

Resumiendo el análisis del movimiento ondulatorio de una cuerda sin amortiguamiento en los Problemas 1, 2, 3 y con amortiguamiento de la última sección, podemos concluir que, debido a las diferencias demostradas, es sumamente importante tomar en cuenta las condiciones iniciales en el período del establecimiento de ondas estacionarias (asintóticas), aun cuando hay un amortiguamiento. Los efectos observados pueden tener aun más consecuencias en casos del movimiento ondulatorio de una cuerda con acoplamiento entre diferentes modos, llevando a diferentes soluciones asintóticas. Análisis de los Problemas 1,2,3 y movimiento con amortiguamiento es importante y puede servir como una base para una interpretación correcta de resultados para un movimiento ondulatorio, con acoplamiento entre modos y diferentes tiempos de amortiguamiento en modos, y con no linealidad. Además, el análisis presentado puede ser útil para uso práctico del método de pulsos (pulse analysis), que consiste de análisis del espectro vibracional de un sistema en respuesta a la excitación por un pulso externo con bastante amplio espectro de frecuencias [6].

2.5 RESONANCIA

No cabe duda en la importancia de resonancia en fenómenos ondulatorios. Sin embargo, en nuestro estudio gráfico en secciones anteriores, la frecuencia de la fuerza de excitación, $\nu = 60 \text{ Hz}$, la escogimos de tal manera que no coincida con ninguna de las frecuencias de modos normales: $\nu_n = n\nu_1$, donde $\nu_1 = 22.99 \text{ Hz}$ es la frecuencia del modo fundamental transversal. Lo hacemos con el fin de separar diferentes efectos en análisis del movimiento ondulatorio de la cuerda. Se puede ver que $\nu = 60 \text{ Hz}$ es más cercana a $\nu_3 = 68.97 \text{ Hz}$. Por tanto, es interesante completar nuestra investigación, incluyendo el caso de resonancia. Lo hicimos, poniendo $\nu = \nu_3 = 68.97 \text{ Hz}$.

Fig. 2.11 demuestra las graficas de ondas $u^y(x, t)$, ec. (2.29), en las mismas condiciones que la Fig. 2.1, salvo que se cambió la frecuencia de la fuerza de excitación de $\nu = 60 \text{ Hz}$ a $\nu = \nu_3 = 68.97 \text{ Hz}$.

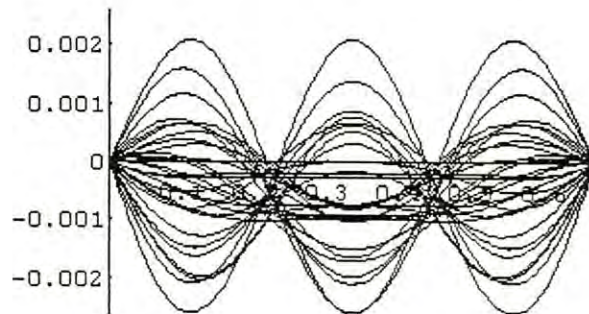


Fig. 2.11. Ondas transversales $u^y(x, t)$ en el caso de resonancia, $\nu = \nu_3$, cuando el intervalo (x_1, x_2) se extiende sobre toda la cuerda; Problema 1, movimiento sin amortiguamiento. Las unidades en el eje horizontal x y en el eje vertical u^y están en metros.

Vemos que en condiciones de resonancia la amplitud máxima de las oscilaciones se aumentó casi el doble que en el caso para las condiciones del Problema 1, las distancias entre los nodos en la cuerda son a simple vista iguales, las amplitudes de oscilaciones en diferentes crestas son también iguales entre sí; sin embargo, los nodos siguen estando no bien definidos.

La Fig. 2.12 muestra las gráficas de las ondas en la cuerda con amortiguamiento, ec. (2.49), en las mismas condiciones que la Fig. 2.9 a, salvo que la frecuencia de la fuerza de excitación se cambió de $\nu = 60 \text{ Hz}$ a $\nu = \nu_3 = 68.97 \text{ Hz}$.

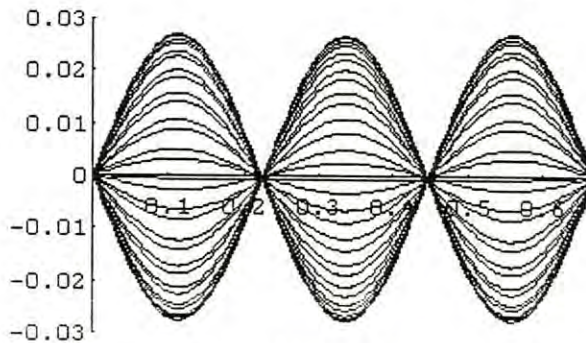


Fig. 2.12. Ondas transversales $u^y(x, t)$ en el caso de resonancia, $v = v_3$, cuando el intervalo (x_1, x_2) se extiende sobre toda la cuerda; movimiento ondulatorio con amortiguamiento. Las unidades en el eje horizontal x y en el eje vertical u^y están en metros.

En esta ocasión, la resonancia causó cambios más drásticos. La amplitud máxima de oscilaciones subió más de treinta veces. Las ondas tienen la forma típica para el tercer modo normal que se distingue mucho del "segundo modo" en la Fig. 2.9 a.

Las distancias entre nodos son iguales entre sí, las amplitudes de oscilación son iguales en diferentes crestas.

Por tanto, diferentes combinaciones de tales factores como distribución de la fuerza de excitación sobre la cuerda, amortiguamiento y resonancia pueden causar notables cambios en forma de oscilación de una cuerda con la corriente eléctrica alterna en un campo magnético.

Capítulo 3

DOS ALGORITMOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DE ONDA CON ACOPLAMIENTO ENTRE MODOS TRANSVERSALES Y LONGITUDINALES

En la sección anterior fue empleado el método de separación de variables para resolver problemas de movimiento ondulatorio de la cuerda, cuando los modos transversales del movimiento están desacoplados. Sin embargo, la distribución del campo magnético que se presenta en la situación experimental de este trabajo, Capítulo 4, nos hace pensar que el modelo teórico más adecuado para la situación indicada es lo que llamamos Caso 1 de la sección 1.2. Este modelo ya no admite el uso directo de la separación de variables, como un método casi universal para la solución de los problemas con fronteras y con condiciones iniciales. Sería posible, como un método directo, emplear métodos numéricos para solucionar el Caso 1 que se describe por el sistema de ecs. (1.1, 1.2, 1.9, 1.10 y 1.11). Sin embargo, dando cierta prioridad a los métodos analíticos, desarrollamos dos esquemas iterativos que pueden ser considerados como híbridos y admiten el uso de la separación de variables y otros métodos convencionales.

Para planterar el nuevo esquema de solución del Caso 1, reescribimos las ecuaciones en la siguiente forma. Suponiendo que la densidad lineal de la cuerda ρ , la tensión T y el módulo de elasticidad λ son constantes, primeramente introducimos los operadores diferenciales lineales, que actúan sobre una función $u(x, t)$ de la siguiente manera:

$$T_t \cdot u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\tilde{R} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$T_x \cdot u \equiv v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

$$L_t \cdot u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\tilde{r} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$L_x \cdot u \equiv v_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.4)$$

y, además, los operadores de la fuerza magnetostática (FM)

$$F_M^x \cdot (u^x, u^y, u^z) \equiv \tilde{I}(t) \left(H^z \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y \frac{\partial u^z}{\partial x} \right) + \tilde{I}(t) \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla H^z) \frac{\partial u^y}{\partial x} - (\mathbf{u} \cdot \nabla H^y) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right], \quad (3.5)$$

$$F_M^y \cdot (u^x, u^y, u^z) \equiv -\tilde{I}(t) (H^z + \mathbf{u} \cdot \nabla H^z), \quad (3.6)$$

$$F_M^z \cdot (u^x, u^y, u^z) \equiv \tilde{I}(t) (H^y + \mathbf{u} \cdot \nabla H^y). \quad (3.7)$$

Recordaremos que en las ecuaciones anteriores $v^2 = T/\rho$ y $v_l^2 = (T + \lambda)/\rho$ es la velocidad de onda transversal y longitudinal, respectivamente; $\tilde{R} = R/\rho$ y $\tilde{r} = r/\rho$ son los coeficientes de amortiguamiento para ondas transversales y longitudinales, respectivamente.

Los operadores F_L^y y F_L^z son lineales, pero el operador F_L^x es no lineal. Por lo tanto, los modos transversales, modos yz , están acoplados entre sí y con u^x de manera no lineal (a través de u^x).

En términos de los operadores introducidos anteriormente, reescribimos las ecuaciones de movimiento, Caso 1, de una cuerda tensada con corriente eléctrica en un campo magnético permanente, pero no uniforme, de la siguiente forma:

$$L_t \cdot u^x(x, t) = L_x \cdot u^x(x, t) + F_L^x \cdot (u^x, u^y, u^z), \quad (3.8)$$

$$T_t \cdot u^y(x, t) = T_x \cdot u^y(x, t) + F_L^y \cdot (u^x, u^y, u^z), \quad (3.9)$$

$$T_t \cdot u^z(x, t) = T_x \cdot u^z(x, t) + F_L^z \cdot (u^x, u^y, u^z). \quad (3.10)$$

Nótese, que

$$\left. \begin{aligned} F_L^x \cdot (0, 0, 0) &= 0 \\ F_L^y \cdot (0, 0, 0) &= -\tilde{I}(t) H^z(x, 0, 0) \\ F_L^z \cdot (0, 0, 0) &= \tilde{I}(t) H^y(x, 0, 0) \end{aligned} \right\}. \quad (3.11)$$

Analizando la estructura de las ecuaciones de movimiento, ecs. (3.8, 3.9 y 3.10), y tomando en cuenta que la amplitud máxima de las ondas longitudinales es mucho menor que la de las ondas transversales, se propone el siguiente proceso iterativo ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$L_t \cdot u_{k+1}^x(x, t) = L_x \cdot u_{k+1}^x(x, t) + F_L^x \cdot (u_k^x, u_k^y, u_k^z), \quad (3.12)$$

$$T_t \cdot u_{k+1}^y(x, t) = T_x \cdot u_{k+1}^y(x, t) + F_L^y \cdot (u_k^x, u_k^y, u_k^z) \quad (3.13)$$

$$T_t \cdot u_{k+1}^z(x, t) = T_x \cdot u_{k+1}^z(x, t) + F_L^z \cdot (u_k^x, u_k^y, u_k^z), \quad (3.14)$$

donde escogemos para la iteración del orden cero a

$$\mathbf{u}_0(x, t) \equiv 0.$$

Además, cada iteración debe cumplir con condiciones en la frontera (CF) y condiciones iniciales (CI), salvo la "aproximación" del orden cero, $\mathbf{u}_0(x, t) \equiv 0$, que no debe satisfacer tanto a las ecuaciones de movimiento, como a las condiciones de frontera e iniciales; la $\mathbf{u}_0(x, t) \equiv 0$ es nada mas que un punto de partida para la solución del problema.

Para la solución del primer orden, $u_1(x, t)$, de las ecs. (3.12, 3.13, 3.14 y 3.11), tenemos

$$L_t \cdot u_1^x(x, t) = L_x \cdot u_1^x(x, t), \quad (3.15)$$

$$T_t \cdot u_1^y(x, t) = T_x \cdot u_1^y(x, t) - \tilde{I}(t)H^z(x, 0, 0), \quad (3.16)$$

$$T_t \cdot u_1^z(x, t) = T_x \cdot u_1^z(x, t) + \tilde{I}(t)H^y(x, 0, 0). \quad (3.17)$$

Se ve que son ecuaciones independientes, con modos T desacoplados entre sí y con los modos L , y viceversa. Por lo tanto, las ecuaciones de primer orden, con cualesquiera CF y CI, se resuelven fácilmente con el método de separación de variables. Si se sigue el esquema de iteraciones, presentado por las ecs. (3.12, 3.13 y 3.14), se puede ver que el acoplamiento entre los modos T y L ocurre en el segundo paso de iteraciones a condición, que $u_1^x \neq 0$ y/ó $\partial u_1^x / \partial t \neq 0$. En el caso de condiciones iniciales (CI) iguales a cero, $u_1^x(x, 0) = 0 = \partial u_1^x(x, 0) / \partial t$, la solución $u_1^x(x, t) \equiv 0$, y por lo tanto, los modos T se acoplan con los modos L a partir de la tercera iteración, pero a través de las soluciones del orden anterior. Eso quiere decir que en el esquema propuesto, ecs. (3.12, 3.13 y 3.14), siempre hay que resolver ecuaciones independientes, lineales, nohomogéneas, lo que es fácil, en principio, de hacer [8].

La observación anterior, sobre el acoplamiento, y el hecho de que la amplitud máxima de las ondas L es mucho menor de la de las ondas T , nos indican un esquema alternativo que puede ser útil al investigar el problema de acoplamiento entre los modos T y L . El segundo esquema es como sigue.

Para empezar, resolvemos las siguientes ecuaciones ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} T_t \cdot \tilde{u}_{k+1}^y(x, t) &= T_x \cdot \tilde{u}_{k+1}^y(x, t) + F_L^y \cdot (0, \tilde{u}_k^y, \tilde{u}_k^z) \\ T_t \cdot \tilde{u}_{k+1}^z(x, t) &= T_x \cdot \tilde{u}_{k+1}^z(x, t) + F_L^z \cdot (0, \tilde{u}_k^y, \tilde{u}_k^z) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Se encuentran

$$\tilde{u}^{y,z}(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k^{y,z}(x, t),$$

que son modos T acoplados entre sí, pero independientes de los modos L $u^x(x, t)$.

Después se busca la solución para los modos L acoplados con los modos T ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$L_t \cdot \tilde{u}_{k+1}^x(x, t) = L_x \cdot \tilde{u}_{k+1}^x(x, t) + F_L^x \cdot (\tilde{u}_k^x, \tilde{u}_k^y, \tilde{u}_k^z); \quad (3.19)$$

entonces

$$\tilde{u}^x(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k^x(x, t).$$

Después los modos T se acoplan con los modos L , resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} T_t \cdot \tilde{u}_{k+1}^y(x, t) &= T_x \cdot \tilde{u}_{k+1}^y(x, t) + F_L^y \cdot \left(\tilde{u}^x, \tilde{u}_k^y, \tilde{u}_k^z \right) \\ T_t \cdot \tilde{u}_{k+1}^z(x, t) &= T_x \cdot \tilde{u}_{k+1}^z(x, t) + F_L^z \cdot \left(\tilde{u}^x, \tilde{u}_k^y, \tilde{u}_k^z \right) \end{aligned} \right\}, \quad (3.20)$$

donde en calidad de embrión se toma $\tilde{u}_0^{y,z}(x, t) \equiv \bar{u}^{y,z}(x, t)$. Entonces, la solución para los modos T , ya corregidos del acoplamiento con los modos L es

$$\tilde{u}^{y,z}(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k^{y,z}(x, t).$$

Después, si es necesario, se repiten las iteraciones siguiendo el esquema de las ecs. (3.19 y 3.20). Las ecuaciones de este esquema son también desacopladas, lineales y nohomogéneas que son, en principio, fácilmente solubles [8].

Capítulo 4

EXPERIMENTOS EN LABORATORIO

Un estudio científico de un fenómeno, por lo general, se lleva a cabo en dos formas complementarias: estudio teórico y estudio experimental. Lo ideal es que las dos formas de estudio se lleven a cabo al mismo tiempo. Pero la realidad es que, con frecuencia, un estudio se lleva a cabo solo en una de estas formas, teórica ó experimental, empezando por el estudio en una forma más cualitativa que cuantitativa. Y pasando un tiempo, cuando tanto las técnicas experimentales como teóricas se han desarrollado a un nivel cuantitativamente confiable, se comparan los resultados experimentales y los teóricos para completar el estudio científico de interés. Basándonos en ésta observación, incluimos en el texto ésta sección que describe nuestra experiencia en la investigación experimental del movimiento ondulatorio de una cuerda tensada con corriente eléctrica alterna, sumergida en un campo magnético permanente.

Las metas principales de ésta sección son: 1) mostrar algunas técnicas y la metodología del estudio experimental del fenómeno a un nivel básico; 2) mostrar los resultados preliminares del estudio experimental del movimiento ondulatorio de una cuerda. Tanto los resultados teóricos como los experimentales no están completos por el momento. Por lo tanto, no se debe buscar aquí una relación estrecha entre los resultados teóricos de la sección anterior y los experimentales de ésta sección, debido a que en la actualidad el estudio del fenómeno está en su fase inicial y se hace, hasta cierto punto, independientemente en la teoría y en el experimento. Esto, con el propósito de ligar y comparar los resultados de ambos estudios en el futuro.

Nuestro estudio experimental persigue las siguientes metas:

- Caracterizar cuantativamente el campo magnético.
- Estudiar los modos transversales y longitudinales del movimiento ondulatorio de la cuerda tensada, con corriente eléctrica, en diferentes configuraciones del campo

magnético permanente, producido por un imán en forma de anillo.

- Estudiar los modos transversales y su acoplamiento con los modos longitudinales para dos tipos de condiciones en la frontera que son: 1) los dos extremos TL -fijos y 2) un extremo TL -fijo y el otro extremo T -fijo y L -amortiguado (T - transversal, L - longitudinal).

4.1 PARÁMETROS PRINCIPALES DEL SISTEMA

El diseño y la utilización del equipo experimental depende de los parámetros principales del sistema de interés. Primeramente, al analizar las ecuaciones básicas del movimiento de una cuerda con corriente eléctrica alterna en un campo magnético permanente (ecuaciones del Capítulo 1), se encontró que los parámetros principales del sistema ondulatorio son:

- La tensión de la cuerda - T ;
- La densidad de masa lineal de la cuerda - ρ ;
- La longitud de la cuerda - L ;
- La corriente eléctrica en la cuerda - I ;
- El campo magnético que actúa sobre la cuerda - H ;
- La frecuencia de la corriente eléctrica ν ;
- Las condiciones en la frontera de la cuerda.

Además, hay que tomar en cuenta las condiciones iniciales para regímenes transitorios de las oscilaciones.

4.2 DISEÑO DEL EQUIPO EXPERIMENTAL

Para los estudios experimentales de dicho fenómeno se diseñó y construyó un equipo experimental básico que permite controlar y/o variar de modo reproducible los parámetros principales del sistema ondulatorio. El equipo está formado principalmente de tres partes, que son: eléctrica, magnética y mecánica.

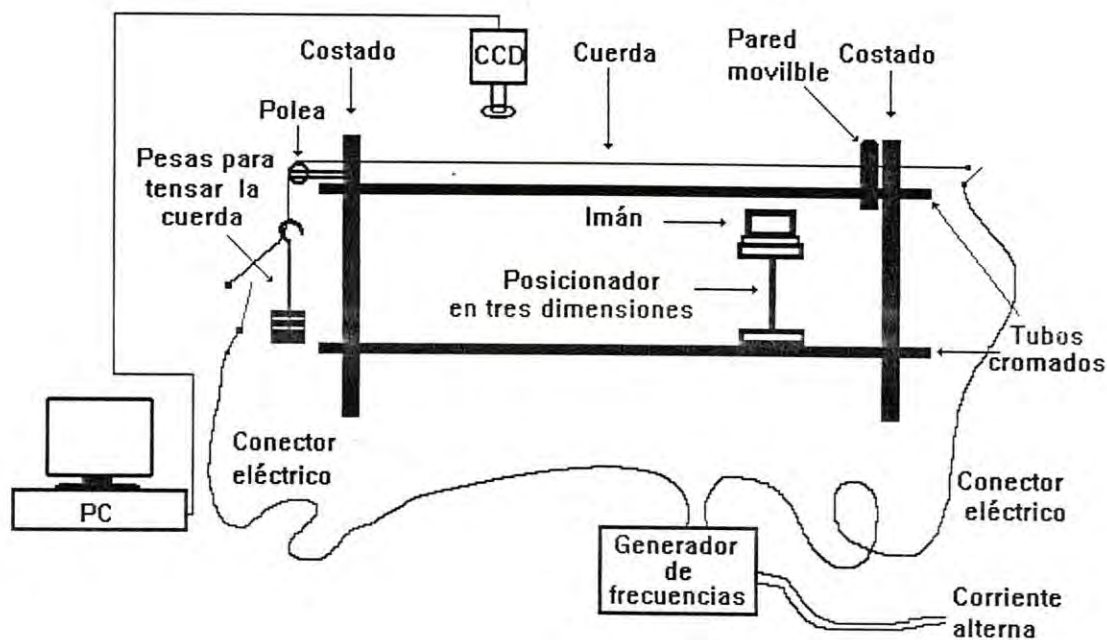


Figura 4.1: Diagrama del aparato experimental

PARTE ELÉCTRICA

La componente eléctrica consta de un circuito constituido por una cuerda conductora, por la que fluye una corriente eléctrica alterna de 60 Hz ([13], [14]). Ver el esquema de ésta parte en la Figura 4.1.

PARTE MAGNÉTICA

En este experimento el campo magnético está proporcionado por un imán permanente, en forma de anillo de una bocina comercial. Los cambios de configuración del campo magnético que actúa sobre la cuerda, se logran por medio de variaciones de la posición del imán respecto a la cuerda. La componente magnética del equipo experimental se representa esquemáticamente en la Figura 4.1.

PARTE MECÁNICA

La componente mecánica está formada por los siguientes elementos: cuatro tubos cromados y dos paredes de madera. Los elementos anteriores, se encuentran ensamblados de tal manera, que constituyen un marco con cierta rigidez y estructura, que permite un acceso

fácil a las observaciones de las ondas en la cuerda y un cambio reproducible de los parámetros del sistema ondulatorio. Un punto importante, es que la componente mecánica del equipo experimental es bastante rígida, por lo cual no presenta vibraciones adicionales que afecten a las vibraciones propias del sistema de interés.

Las dos paredes tienen un orificio a la mitad de la parte superior que contienen un buje perforado, por el que pasa la cuerda. Estos bujes nos proporcionan condiciones en la frontera de dos tipos: 1) los dos extremos TL -fijos; 2) un extremo TL -fijo y el otro extremo T -fijo y L -amortiguado. Para tener las condiciones en la frontera del tipo de los dos extremos TL -fijos, se usan tornillos incorporados en los bujes, que fijan la cuerda en ambos bujes (los dos puntos fijos de la cuerda). Las condiciones en la frontera del segundo tipo se cumplen cuando el tornillo, del lado de las pesas de tensión, está libre y permite a la cuerda deslizarse con un amortiguamiento (movimiento longitudinal amortiguado) en el agujero del buje correspondiente. Pero el movimiento transversal está completamente restringido debido a que el tamaño del agujero es ligeramente mayor que el diámetro de la cuerda.

La cuerda siempre se mantiene fija en un extremo, donde se coloca el origen del sistema de coordenadas. En el otro extremo de la cuerda se tiene un dispositivo sujeto a la pared, compuesto de un pequeño eje, en el cual está colocada una polea. La polea se utiliza para mantener horizontal a la cuerda y deslizando en el agujero del buje correspondiente y para verificar a simple vista el movimiento longitudinal.

La tensión físicamente graduada, es proporcionada por un sistema de pesas sujetas a un extremo de la cuerda (vease la Figura 4.1).

4.3 MONTAJE EXPERIMENTAL

Se pueden variar las dimensiones del equipo y la longitud de la parte de la cuerda, involucrada en el movimiento ondulatorio, deslizando las paredes sobre los tubos (ver Figura 4.1). Además, se colocó una tabla en los dos tubos superiores del dispositivo, que se emplea para variar la longitud de la cuerda sin desplazar las paredes (ver Figura 4.1). Un extremo de la cuerda se mantiene sujeto (el origen de la coordenada x) en todos los experimentos.

Para proporcionar la tensión en la cuerda, al otro extremo se le coloca un sistema de pesas, cuando éste extremo puede deslizarse por el agujero del buje. Después de proporcionar la tensión a la cuerda, para llevar a cabo las condiciones de frontera con extremos TL -fijos se puede sujetar este extremo, conservando el valor de la tensión. La polea, que rueda libremente sobre su eje, es usada para facilitar el deslizamiento de la cuerda respecto al agujero del buje.

En principio, la cuerda puede ser de densidad de masa lineal variable, conductora y hasta magnética. Pero, si fuera magnética la cuerda alteraría los resultados, debido a que la cuerda por sí sola se atrae con el imán. Por lo tanto, se optó por escoger una cuerda no magnética. Además, se considera una cuerda con densidad de masa lineal uniforme, lo cual facilita los cálculos y la interpretación de los resultados de la observación.

Con el fin de tener una corriente en la cuerda, se usa un generador armónico de frecuencias que da una diferencia de potencial de 12 *volts* como máximo y una corriente eléctrica máxima de 6 *amperes* con frecuencia que puede variarse desde 0 hasta 500 *Hz*. A estas condiciones, la cuerda no aumenta su temperatura, circunstancia que podría modificar la tensión (que como encontramos anteriormente, es un parámetro importante del sistema ondulatorio) en la cuerda de un modo significativo.

Se emplea el campo magnético inhomogéneo producido por un imán permanente. Para variar la configuración del campo magnético, se puede cambiar la posición del imán en el espacio. Para que las mediciones fuesen reproducibles, era necesario que el imán tuviese libertad de posición perfectamente controlable. Se tomó la idea de una mesa óptica y se construyó un dispositivo que permite mover un objeto en tres dimensiones, solucionandose este problema.

La tensión a la que está sujeta la cuerda es un parámetro importante y preciso. Con este propósito se empleó una polea en un extremo de la cuerda y un sistema de pesas que sirven para tener un control de la tensión desde 0.5 *gr* hasta 200 *gr* y más, si es necesario, con escalamientos de 0.5 *gramos*.

Para tener un control más fino sobre la posición de los nodos y los antinodos de oscilaciones, se coloca una regla graduada en la parte superior del equipo (el origen de la cuerda está colocado en el punto $x = 0$).

4.4 DATOS NUMÉRICOS DEL SISTEMA

En los experimentos nos restringimos a los siguientes valores de los parámetros. La longitud de la cuerda, que en estos experimentos no se varía, es igual a $L = 67.25$ *cm*. La densidad lineal de masa es $\rho = 0.5268$ *gr/m*. La tensión de la cuerda es $T = 0.4905$ *N*.

Como se concluye en el Capítulo 1, el campo magnético, es decir, su distribución espacial tiene un papel fundamental en el sistema ondulatorio de interés. Debido a éste, su caracterización cuantitativa y precisa es de gran importancia para escoger un modelo matemático adecuado para el movimiento de la cuerda y, además, nos permitiría una solución analítica o numérica del modelo.

En nuestros experimentos, el campo magnético $\mathbf{H}(x, y, z)$ inhomogéneo es proporcionado por un imán permanente en forma de anillo. La configuración del campo magnético, en que esta sumergida la cuerda, se cambia al mover el imán en x, y, z . Utilizando un gaussímetro, se logró la caracterización de las líneas de fuerza del campo magnético cuantitativamente, para el imán que está empleando en este trabajo. Además, obtuvimos un ajuste de las líneas del campo magnético mediante cuatro Lorentzianas, que es muy útil para las simulaciones matemáticas. Los detalles de las mediciones y resultados están presentados en el Anexo 6.2.

Utilizando un generador de frecuencias, reducimos la tensión eléctrica en la cuerda de 110 a 12 *volts* y, además, fue posible variar la frecuencia de la corriente eléctrica de 0 hasta 500 *Hz*.

Con respecto a condiciones en la frontera, un extremo de la cuerda se mantuvo fijo, tanto para las ondas transversales como para las ondas longitudinales, lo que se denominó el extremo TL -fijo ($T =$ Transversal y $L =$ Longitudinal). En cuanto al otro extremo, una serie de experimentos se llevó a cabo con las condiciones en la frontera del extremo TL -fijo, mientras que en otros experimentos, para éste extremo se eligieron las condiciones en la frontera combinadas: para el movimiento transversal T -fijo y para el movimiento longitudinal L -amortiguado.

Un parámetro importante del sistema ondulatorio es la velocidad de propagación de onda, que se calculó en base a los valores típicos de los parámetros empleados para los experimentos en este trabajo, que son:

- La densidad de masa lineal, al ser medida, resultó ser $\rho = 5.268 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$.
- La masa de las pesas de tensión es igual a $m = 0.05 \text{ kg}$, y, por lo tanto, la tensión producida en la cuerda por ésta masa se calcula como $T = m \cdot g = 0.4905 \text{ N}$.
- Al efectuar la medición del radio de la cuerda resultó ser $r = 3.04 \times 10^{-4} \text{ m}$, y el área de su sección transversal es igual a $S = \pi \cdot r^2 = 7.2583 \times 10^{-8} \text{ m}^2$.
- Tomando de tablas el valor del módulo de Young para el cobre igual a $E = 1 \times 10^{11} \text{ N}^2/\text{m}^2$, fácilmente encontramos el módulo de elasticidad que es $\lambda = E \cdot S = 7258.3 \text{ N}$.

Con estos valores encontrados se calcula la velocidad de onda transversal que es

$$v_T = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\rho}} = \sqrt{\frac{0.4905}{5.268 \times 10^{-4}}} = 30.51 \text{ m/s}, \quad (4.1)$$

y consecuentemente la velocidad de onda longitudinal es

$$\begin{aligned} v_L &= \sqrt{\frac{T + \lambda}{\rho}} = \sqrt{\frac{m \cdot g + E \cdot \pi \cdot r^2}{\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{0.4905 + 7258.3}{5.268 \times 10^{-4}}} = 3712.02 \text{ m/s}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde ρ es la densidad de masa lineal, m es la masa del sistema de pesas que se sujetan a uno de los extremos de la cuerda, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad, $T = m \cdot g$ es la tensión ejercida sobre la cuerda, $\lambda = E \cdot S$ es el módulo de elasticidad, E es el módulo de Young, S es la sección transversal de la cuerda. La relación entre estas velocidades de onda es $v_L = 121.7v_T$.

A continuación se muestra que las oscilaciones forzadas de la cuerda, observadas en estos experimentos, ocurren fuera de la región de resonancia. Se recuerda que la frecuencia de la fuerza magnetostática es debida a la corriente eléctrica y es igual a

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 60\text{Hz}. \quad (4.3)$$

Las frecuencias de los modos normales de la cuerda son (vea ecs. (2.15 y 2.28))

$$\omega_n = k_n \cdot v = \frac{n\pi}{L} \cdot v, \quad (4.4)$$

donde k_n es el número de onda del modo normal n -ésimo, v es la velocidad de onda transversal ó longitudinal, según sea el caso, y L la longitud de la cuerda.

En el caso de ondas transversales, cuando $n = 1$, la razón entre las frecuencias, ecs. (4.4 y 4.3), es igual a

$$\frac{\omega_{1T}}{\omega} = \frac{1}{2 \cdot 60 \cdot L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 0.3779.$$

Para $n = 2$

$$\frac{\omega_{2T}}{\omega} = 0.7558.$$

Para $n = 3$

$$\frac{\omega_{3T}}{\omega} = 1.1337,$$

que este último modo es el mas próximo para que ocurra la resonancia. Por lo tanto, se ve que la resonancia no debe alterar considerablemente las oscilaciones transversales.

Para el primer modo de la onda longitudinal se obtiene

$$\frac{\omega_{1L}}{\omega} = \frac{1}{2 \cdot 60 \cdot L} \sqrt{\frac{T + \lambda}{\rho}} = 45.99.$$

Por lo tanto, las oscilaciones en las ondas longitudinales se encuentran muy lejos de que ocurra una resonancia.

4.5 MEDICIONES Y DATOS EXPERIMENTALES

Antes de empezar con el análisis de experimentos, cabe mencionar que los experimentos de este trabajo, repitiendo en lo principal los experimentos de la [13], no tienen la relación estrecha con los cálculos teóricos del Capítulo 2, sino la similitud en algunas características. Esto se debe a lo siguiente. En la etapa actual del avance experimental resultó que está disponible efectivamente sólo el imán en forma de anillo, que, a su vez, tiene un campo magnético de tal configuración (vease el Anexo 6.2) que implica el uso del modelo Caso 1 (vease la Sección 1.2). Por otra parte, el desarrollo teórico del modelo Caso 1 aún no tiene soluciones analíticas o numéricas, sino que estan propuestos dos algoritmos de solución (vease el Capítulo 3). Sin embargo, basandose en soluciones disponibles del modelo más simple, Caso 2 (vease el Capítulo 2), y en resultados experimentales, se pudo encontrar algunos rasgos del movimiento de la cuerda que son comunes para diferentes modelos teóricos del

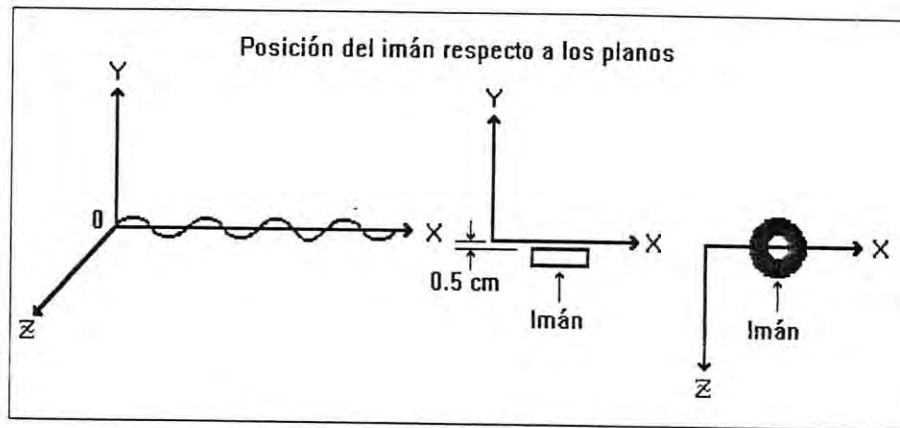


Figura 4.2: Posición del imán respecto a los planos de coordenadas

movimiento de una cuerda tensada con una corriente eléctrica alterna en diferentes campos magnéticos.

Recordemos que los experimentos se realizaron con los siguientes parámetros constantes $L = 67.25 \text{ cm}$, $T = 0.4905 \text{ N}$. Además, en el circuito eléctrico de la cuerda se incorporó el generador de frecuencias que nos permite variar tanto el voltaje como la frecuencia de la corriente eléctrica.

Por la interacción con el aire y la fricción interna de la cuerda al doblamiento, las oscilaciones de la cuerda siempre ocurren con la presencia de amortiguamiento. Experimentalmente se encontró que el amortiguamiento total de las oscilaciones libres de la cuerda ocurren dentro de aproximadamente 10 segundos. Este es el período de transición de las oscilaciones iniciales a las oscilaciones forzadas. Debido a esta razón, las formas de las oscilaciones observadas en este trabajo serán oscilaciones estacionarias forzadas por la fuerza magnetostática.

A continuación describimos algunos ejemplos de registros de datos experimentales sobre ondas transversales en la cuerda. Los experimentos están agrupados en casos, de tal manera que cada caso es un grupo de experimentos - pruebas en cierto sentido similares. Las observaciones - mediciones se realizaron en los planos xy y xz (vease la Figura 4.2).

Caso 1. Condiciones en la frontera son los dos extremos TL -fijos. Cambiamos la posición del imán permanente en forma de anillo sobre el eje x donde se encuentra la cuerda. El plano superior del imán, que está paralelo al plano xz , se mantiene a la distancia 0.5 cm del eje x . Directamente se observa el movimiento transversal de la cuerda. Vease la Figura 4.2. En éste caso se hicieron las siguientes pruebas.

Prueba 1. Si el centro geométrico del disco superior del imán (que se escoge como el punto de referencia de la posición del imán) se encuentra en la posición $P_x = 11.5 \text{ cm}$, y después lo movemos en la región $7 < P_x < 17.5 \text{ cm}$, los modos transversales observados de oscilación son estables. El dibujo correspondiente de la Figura 4.3, muestra la forma de la onda estacionaria en el plano xy , posición del imán, posición de los nodos y la polarización elíptica de onda en los planos que están paralelos al plano yz y cruzan el eje x en puntos cercanos a los nodos. La siguiente tabla muestra los datos experimentales de las amplitudes (dobles) de oscilaciones en los planos correspondientes de tres crestas consecutivas. En esta tabla, también se encuentran los datos experimentales de la posición de los nodos (salvo los nodos en los extremos de la cuerda) sobre el eje x para las ondas transversales en los planos correspondientes. Se nota que la posición de los nodos en el plano xz no coincide con la de los nodos en el plano xy . Anotamos, que se observa perfectamente la simetría de espejo del problema respecto al plano xy , lo último concuerda con el planteamiento teórico del problema. Además, fíjense en la secuencia de las elipses de polarización, vertical - horizontal, vertical - horizontal, y en los datos de posición de los nodos, que nos permitirá comparar estas observaciones con las de la Prueba 3.

DATOS			
PRUEBA NO. 1			
	cms.	cms.	cms.
$2A_{xz}$	0.6	0.6	0.6
$2A_{xy}$	0.6	0.6	0.6
N_{xz}	22.5	44.5	
N_{xy}	20.5	43.75	

Prueba 2. Si el imán se encuentra en la posición $P_x = 34 \text{ cm}$, que está aproximadamente a la mitad de la distancia entre los dos extremos, y después lo movemos en la región $28 < P_x < 41 \text{ cm}$, los modos transversales de oscilación observados son estables. El segundo dibujo de la Figura 4.3 muestra la forma de la onda estacionaria en el plano xy , posición del imán, posiciones de los nodos y la polarización elíptica de onda en los planos que están paralelos al plano yz y cruzan el eje x en puntos cercanos de los nodos. La siguiente tabla muestra datos experimentales de las amplitudes (dobles) de oscilaciones en planos correspondientes en tres crestas consecutivas. En esta tabla, también se encuentran datos experimentales de la posición de los nodos (salvo los nodos en los extremos de la cuerda) sobre el eje x para las ondas transversales en planos correspondientes. Se nota que la posición de los nodos en el plano xz no coincide con la de los nodos en el plano xy . Además de la simetría de espejo con respecto al plano xy , se observa claramente la simetría de espejo con respecto al plano, que es paralelo al yz y pasa por la mitad de la cuerda (fíjense en la secuencia de las elipses de polarización, horizontal - vertical, vertical - horizontal, y en los datos de la posición de los nodos). Además, existen dos simetrías compuestas: 1) reflexión de espejo en el plano yz con la consiguiente traslación a la distancia L ; 2) reflexión de espejo en el plano, que es paralelo al plano yz y pasa por el extremo lejano de la cuerda, con la consiguiente traslación

a la distancia $-L$. Las simetrías observadas concuerdan con el planteamiento teórico del problema.

DATOS			
PRUEBA NO. 2			
	cms.	cms.	cms.
$2A_{xz}$	0.6	0.6	0.6
$2A_{xy}$	0.6	0.6	0.6
N_{xz}	23	45	
N_{xy}	23.5	43.75	

Prueba 3. Esta prueba, como se ve de los resultados experimentales en la siguiente tabla y del tercer dibujo de la Figura 4.3, es exactamente la inversión de espejo de la Prueba 1 respecto a cualquier plano paralelo al yz , con la consiguiente traslación a la distancia correspondiente. Aquí el imán se coloca en la posición $P_x = 57 \text{ cm}$ y, después, al moverlo en el intervalo $54 < P_x < 60 \text{ cm}$, se encuentra que los modos transversales de oscilación son estables.

DATOS			
PRUEBA NO. 3			
	cms.	cms.	cms.
$2A_{xz}$	0.6	0.6	0.6
$2A_{xy}$	0.6	0.6	0.6
N_{xz}	23	45	
N_{xy}	23.75	46.5	

Nótese que las pruebas del Caso 1, a pesar de tener ciertas imperfecciones en los métodos de observación y registro de datos experimentales, nos demuestran perfectamente la simetría de espejo del problema con los dos extremos TL -fijos. Lo observado se encuentra en plena concordancia con el análisis teórico de la simetría del problema. Además, se encontró que los modos transversales, observados en el Caso 1, son muy estables respecto al desplazamiento del imán sobre el eje x en el intervalo de aproximadamente entre 8 a 10 cm . Sin embargo, se observó que un cambio pronunciado en el patrón de oscilaciones ocurre siempre y cuando el imán se encuentra en la cercanía de un nodo. Lo último concuerda cualitativamente con cálculos del Capítulo 2.

Caso 2. Este caso también es con condiciones en la frontera de los dos extremos TL -fijos. La forma de mover el imán (desplazamientos a lo largo del eje x) es también muy similar a la del Caso 1. Pero, hemos observado anteriormente, que el acercamiento del imán a los nodos de los modos estacionarios provoca un cambio drástico en los modos de oscilación. Usando ésta observación y cambiando la velocidad de desplazamiento del imán en los alrededores de

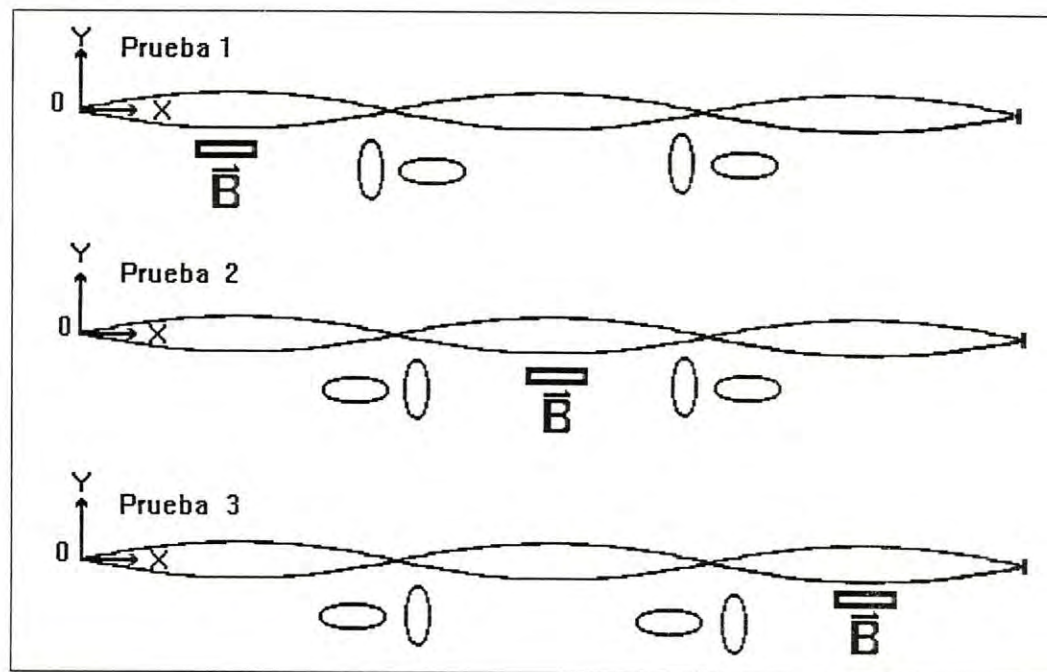


Figura 4.3: Oscilaciones de la cuerda con extremos TL -fijos. El imán se encuentra en posición: 1) $x = 11.5$ cm, 2) $x = 34.5$ cm y 3) $x = 57$ cm.

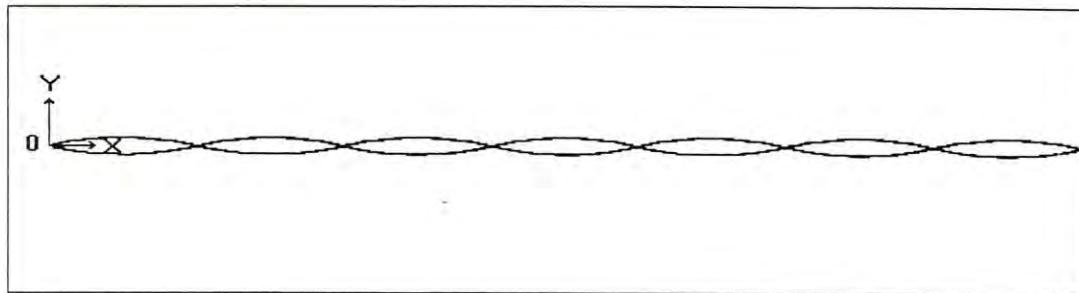


Figura 4.4: Oscilaciones de la cuerda observadas sobre el plano xy . Las condiciones de frontera son los dos extremos TL -fijos. El imán está en la posición de $x = 21.5$ cm..

los nodos, logramos encontrar algunos modos estacionarios nuevos que están descritos en las siguientes pruebas.

Prueba 1. Cuando el imán está en la posición $P_x = 21.5$ cm, se observan 6 nodos sobre el plano xy bien definidos, y 3 nodos sobre el plano xz , uno bien definido y los otros dos no muy definidos. El término "nodo bien definido" se refiere aquí a un nodo clásico que está formado por el cruce de las envolventes de onda estacionaria. El término "nodo no muy definido" (lo que podemos llamar "cintura de avispa") se refiere aquí a un pseudo-nodo que, en realidad, es una "cintura" formada por las envolventes de la onda estacionaria, pero las últimas no se cruzan. Las siguientes tabla y Figuras 4.4 y 4.5 llevan registros de los datos experimentales y muestran lo dicho anteriormente. En las tablas, A_{xy} y N_{xy} representan la amplitud en la cresta y la posición del nodo de ondas transversales en el plano xy , mientras tanto las A_{xz} y N_{xz} son la amplitud en la cresta y la posición del nodo de ondas transversales en el plano xz .

DATOS							
PRUEBA NO. 1							
	cms.	cms.	cms.	cms.	cms.	cms.	cms.
$2A_{xy}$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
$2A_{xz}$	0.4	0.4	0.4	0.4			
N_{xy}	10.5	20	29	38.5	48	57.5	
N_{xz}	19	30	48.25				

Prueba 2. Con el imán en la posición $P_x = 46.5$ cm sobre el eje x se observan las oscilaciones en ondas transversales. Las siguientes tabla y Figura 4.6 llevan registros de los datos experimentales. Hemos observado que la onda T estacionaria en el plano xy es muy parecida, a simple vista, a la onda correspondiente de la Prueba 1 (vease la Figura 4.4). En cuanto a la onda en el plano xz , se ve (vease Figuras 4.5 y 4.6) la inversión de espejo de la prueba 1 respecto a cualquier plano paralelo al plano yz , con consiguiente traslación a la

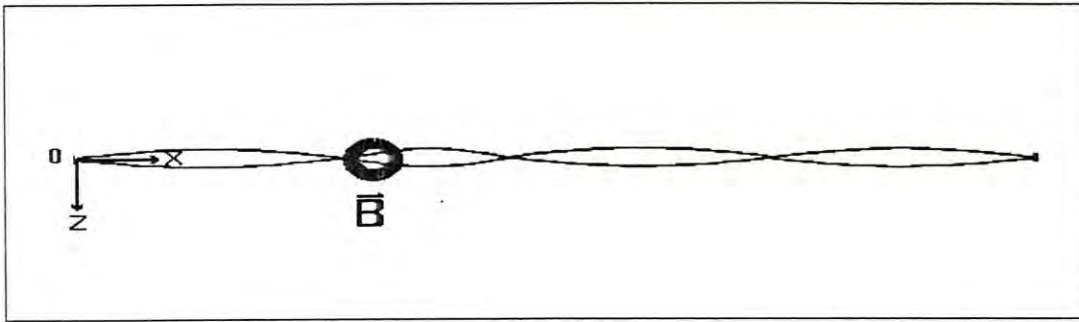


Figura 4.5: Oscilaciones de la cuerda en el plano xz . Las condiciones en la frontera son los dos extremos TL -fijos. El imán está en la posición de $x = 21.5$ cm..

distancia correspondiente. Lo observado se encuentra en plena concordancia con el análisis teórico de la simetría del problema.

DATOS							
PRUEBA NO. 2							
	cms.	cms.	cms.	cms.	cms.	cms.	cms.
$2A_{xy}$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
$2A_{xz}$	0.4	0.4	0.4	0.4			
N_{xy}	10.5	20	29	38	48	57	
N_{xz}	19	37	48				

Vemos que en el Caso 2 se observan modos transversales muy diferentes en comparación con los del Caso 1. Además, éstas ondas son diferentes de las calculadas en el Capítulo 2, en el caso del campo magnético uniforme. Lo último demuestra la importancia tanto de la extensión, como de la configuración del campo magnético en el proceso de generación de ondas en la cuerda. Los modos ondulatorios son también estables respecto a cierto desplazamiento del imán sobre el eje x , pero el intervalo es relativamente pequeño y mide aproximadamente 1.5 cm.

Caso 3. Un caso, muy distinto de los descritos anteriormente, ocurre aquí al cambiar condiciones en la frontera de la cuerda. Aquí llevamos a cabo condiciones en la frontera del tipo de un extremo TL -fijo y el otro extremo T -fijo y L -amortiguado. Con estas condiciones

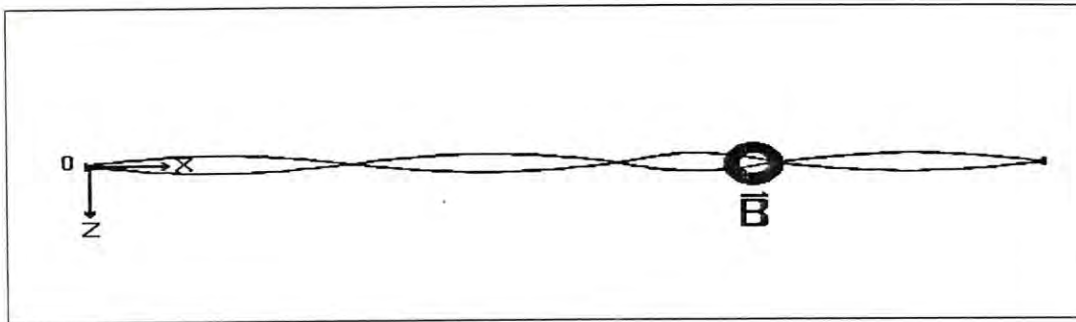


Figura 4.6: Oscilaciones de la cuerda en el plano xz . Las condiciones en la frontera son los dos extremos TL -fijos. El imán está en la posición en $x = 46.5$ cm.

de frontera se observó que el movimiento longitudinal modifica al movimiento transversal de la cuerda.

Prueba 1. Con el imán en la posición $P_x = 43$ a 43.5 cm sobre el eje x y con $z = 0$ cm, se observan ondas estacionarias, en tal forma que las oscilaciones ocupan una parte de la cuerda y la otra parte se mantiene inalterada a simple vista. Estas oscilaciones fueron llamadas trampa de onda. La región inalterada, llamada región del silencio, se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 44$ cm sobre el eje x , mientras tanto, la zona de oscilaciones transversales está entre $x = 44$ y $x = 67.25$ cm. La onda es planamente polarizada en el plano xz , ver a la Figura 4.7.

Por otra parte, fueron observados perturbaciones en intervalos de aproximadamente 20 seg con una duración aproximada de 10 seg cada una, rompiendo la trampa de onda y convirtiéndola en otro tipo de onda que tiene oscilaciones en los dos planos xz y xy , Figura 4.8. Después de haber transcurrido el tiempo de la perturbación, se vuelve a establecer la trampa de onda. Hasta el momento, no hemos encontrado la explicación de este comportamiento de la cuerda.

DATOS			
PRUEBA NO. 1			
	cms.	cms.	cms.
$2A_{xz}$	0.3	0.0	0.0
$2A_{xy}$	0.0	0.0	0.0
N_{xz}	44	0.0	0.0
N_{xy}			

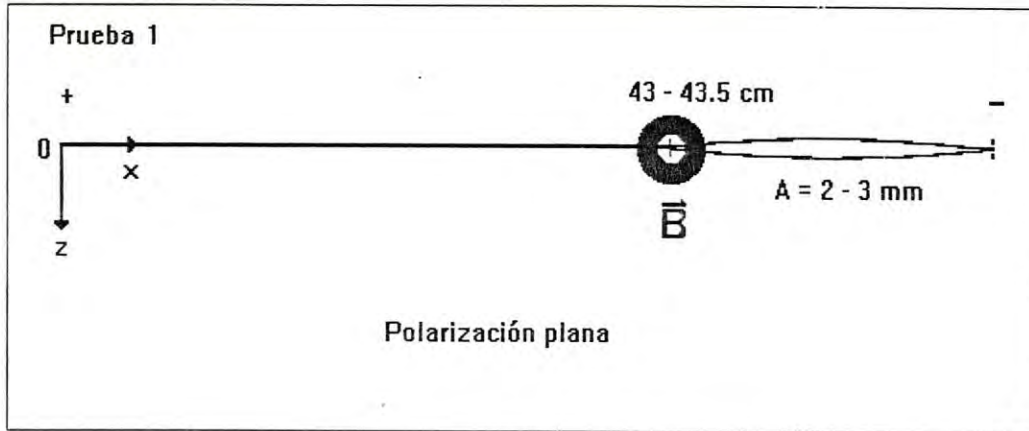


Figura 4.7: Trampa de onda con posición del imán en $x = 43 \text{ cm}$.

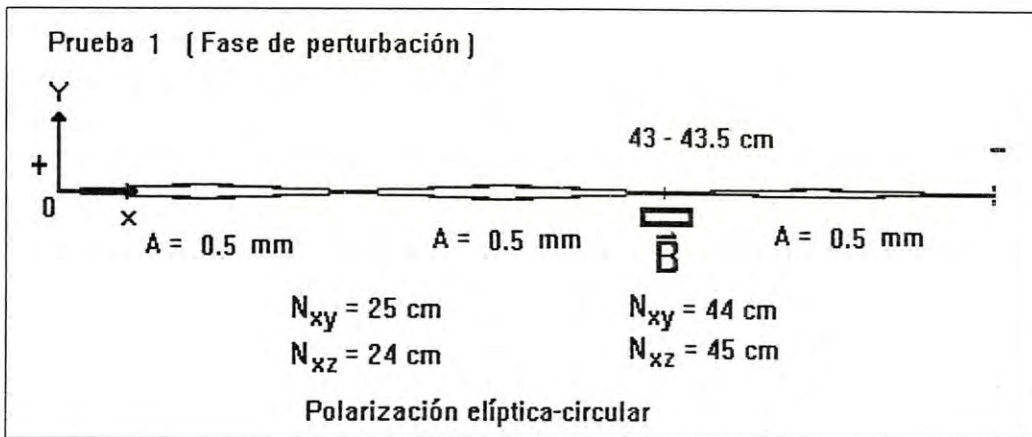


Figura 4.8: Perturbaciones en la fase de trampa de onda.

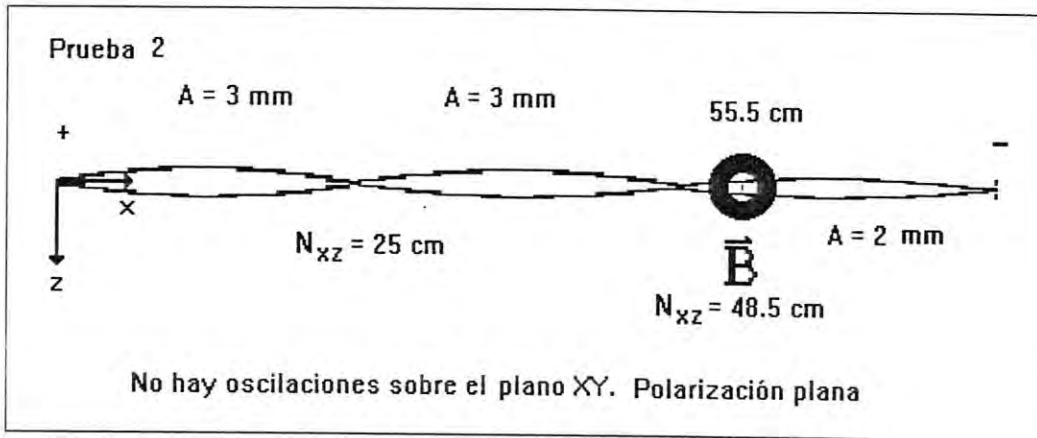


Figura 4.9: Oscilaciones de la cuerda con un extremo L -fijo y el otro L -amortiguado, manteniendo los dos extremos T -fijos, y con posición del imán en $x = 55.4 \text{ cm}$.

Prueba 2. El imán está en la posición de $P_x = 55.5 \text{ cm}$ sobre el eje x y con $z = 0 \text{ cm}$. Se observa la onda estacionaria planamente polarizada con dos nodos y 3 antinodos, la extensión de los cuales va disminuyendo (25 cm , 23.5 cm y 19 cm) contandolos del extremo TL -fijo hacia el extremo T -fijo y L -amortiguado, ver Figura 4.9.

Cabe mencionar que las distancias entre los nodos son diferentes, aunque la onda es estacionaria. Esto significa que la longitud de onda λ depende de x , pues el campo magnético parece efectivamente producir un cambio del medio de propagación de las ondas.

DATOS			
PRUEBA NO. 2			
	cms.	cms.	cms.
$2A_{xz}$	0.3	0.3	0.2
$2A_{xy}$	0.0	0.0	0.0
N_{xz}	0.0	0.0	0.0
N_{xy}	25.0	48.5	

Prueba 3. La posición del imán está en $P_x = 49.5 \text{ cm}$ sobre el eje x y $z = 0 \text{ cm}$. La onda estacionaria es planamente polarizada en el plano xz . Hay un nodo, en $N_{xz} = 25 \text{ cm}$ sobre el eje x , y dos vientres. La parte de la cuerda de 49.5 a 67.25 cm se mantiene sin oscilar a simple vista, ver Figura 4.10. Esto también es un régimen de trampa de onda.

Prueba 4. El imán está en la posición de $P_x = 20 \text{ cm}$ sobre el eje xy y $z = 0 \text{ cm}$. La onda estacionaria es planamente polarizada y tiene un nodo en $N_{xz} = 43 \text{ cm}$ y dos vientres.

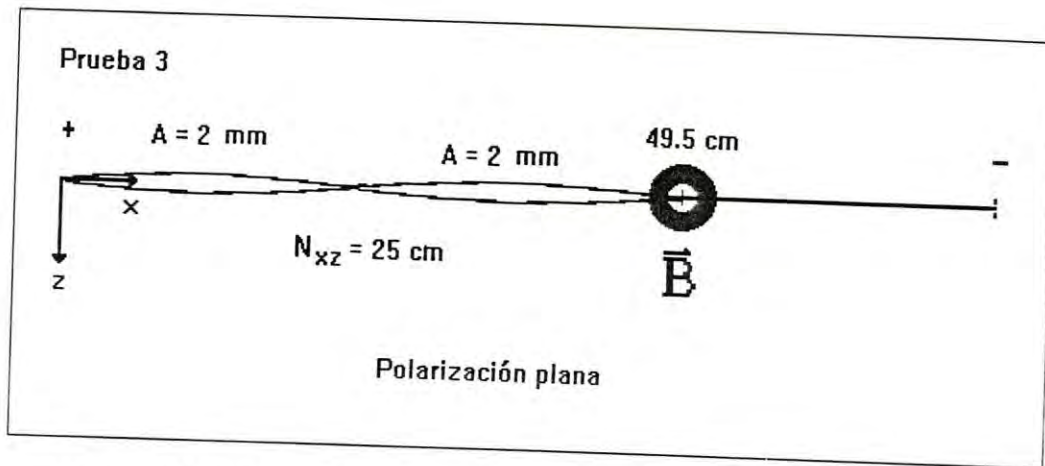


Figura 4.10: Trampa de onda con el imán en la posición $x = 49.5$ cm.

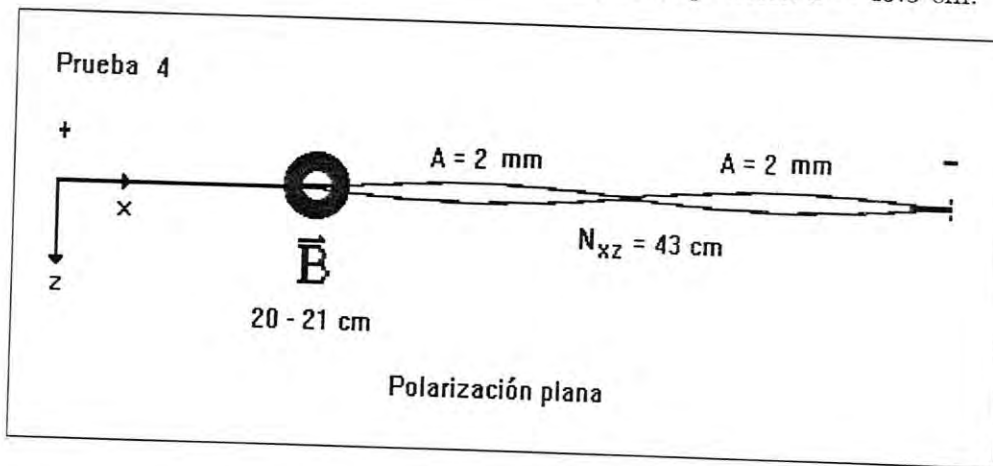


Figura 4.11: Trampa de onda con la posición del imán en $x = 20$ cm.

La parte de la cuerda de 0 a 20.5 cm permanece sin oscilar a simple vista, ver Figura 4.11. Esta trampa de onda es parecida a la de la Prueba 3 de este caso, pero no es una inversión de espejo una respecto a la otra.

Nótese que las ondas transversales (del tipo trampa de onda), observadas en el Caso 3, no se logran observar en la cuerda con los dos extremos *TL*-fijos, Casos 1 y 2. El Caso 3 se distingue de los Casos 1 y 2 únicamente por la condición de frontera para el movimiento longitudinal a un sólo extremo de la cuerda. De aquí se puede concluir que la trampa de onda indica el efecto del movimiento longitudinal sobre el movimiento transversal, y, por consiguiente, que existe un acoplamiento entre los modos transversales y longitudinales del movimiento ondulatorio de una cuerda tensada con corriente eléctrica en un campo magnético.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

En este trabajo fueron estudiadas las oscilaciones forzadas en el sistema ondulatorio que consiste de una cuerda tensada con corriente eléctrica en un campo magnético permanente de diferentes configuraciones. La derivación y el análisis de las ecuaciones de movimiento demostraron complejidad y gran variedad de formas de movimiento ondulatorio del sistema considerado. Según la configuración del campo magnético se distinguen hasta 9 diferentes formas del sistema de ecuaciones de movimiento. Cada forma del sistema de ecuaciones describe un cierto tipo de acoplamiento entre modos transversales y longitudinales. Este sistema es multiparamétrico y los parámetros principales que gobiernan el movimiento del sistema son: T - la tensión en la cuerda, L - la longitud de la cuerda, ρ - la densidad de masa lineal, $I(t)$ - la corriente eléctrica en la cuerda, $\mathbf{H}(x, y, z)$ - el campo magnético y las condiciones en la frontera, junto con condiciones iniciales (vease Capítulo 1).

En éste trabajo nos restringimos al estudio de los dos modelos para el sistema ondulatorio (vease el Capítulo 1). Nuestro estudio, teórico (Capítulos 1, 2 y 3) y experimental (Capítulo 4), del movimiento ondulatorio de una cuerda tensada se puede concluir de la siguiente manera.

1) El estudio teórico para el campo magnético uniforme mostró que el movimiento ondulatorio transversal de la cuerda sin amortiguamiento, por lo general, es aperiódico, aun cuando la fuerza de excitación es armónica. Dependiendo de las condiciones iniciales la polarización de onda puede ser plana o no. (vease Secciones 2.1 y 2.3).

2) Se observaron cambios drásticos en la forma del movimiento transversal estacionario, cuando la "frontera" del campo magnético cruza la vecindad de un nodo (vease Secciones 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 y 4.5).

3) Cuando la cuerda está sumergida en el campo magnético uniforme, se observó que el efecto de resonancia sobre la amplitud y la forma de oscilaciones de la cuerda tiene mucho más influencia en el caso del movimiento ondulatorio con amortiguamiento que sin amortiguamiento. En el movimiento con amortiguamiento la amplitud es aproximadamente 14

veces mayor que la amplitud del movimiento sin amortiguamiento (vease Sección 2.5).

4) Para los modelos con acoplamiento entre modos transversales y longitudinales, fueron desarrollados dos algoritmos de solución de las ecuaciones de movimiento. Los algoritmos propuestos redujeron el problema de solución de las ecuaciones acopladas en el problema de solución de las ecuaciones lineales y desacopladas, que son fácil de resolver (vease Capítulo 3).

5) La medición y ajuste analítico del campo magnético del imán en forma de anillo, que fue usado en los experimentos, nos indican que las ecuaciones del Caso 1 de la sección 1.2 son el modelo adecuado para el estudio teórico del movimiento ondulatorio de la cuerda en éste campo magnético (vease Anexo 6.2 y Sección 1.2).

6) En base de la solución asintótica analítica, obtenida en éste trabajo, se encontró que el amortiguamiento juega un papel importante en la estabilización (sintonización) de las oscilaciones que se reflejó en el efecto de resonancia y polarización de onda en la cuerda (vease Sección 2.4 y Anexo 6.1)

7) Con condiciones en la frontera un extremo TL -fijo y el otro T -fijo y L -amortiguado, encontramos un régimen de movimiento transversal llamado trampa de onda, con polarización plana. Estos modos transversales no se encuentran en el caso con condiciones en la frontera de los dos extremos TL -fijos, lo que indica un acoplamiento entre modos transversales y longitudinales del movimiento ondulatorio de la cuerda. Además, las ondas localizadas de este tipo nos muestran la existencia de banda prohibida en oscilaciones de la cuerda en ciertas configuraciones del campo magnético (vease Sección 4.5).

Ya que en el presente trabajo el estudio del fenómeno está en su fase inicial y se hace independientemente, hasta cierto punto, en la teoría y en el experimento, no se debe buscar aquí una relación estrecha entre los resultados teóricos y los experimentales. Sin embargo, los algoritmos de solución de las ecuaciones del movimiento, propuestos en el Capítulo 3, nos ofrecen herramienta teórica importante para ligar estudios teóricos con experimentales. Sería importante llevar a cabo los cálculos en estos algoritmos ya con los parámetros de los experimentos realizados, y así lograr el comparar los resultados de ambos estudios, verificando la validez de los modelos teóricos del fenómeno.

Una cuerda elástica es un ejemplo básico de sistemas espacialmente distribuidos; aparte del interés intrínseco teórico, la dinámica de una cuerda elástica no lineal puede aclarar muchos aspectos de la dinámica de sistemas más complicados, tales como láseres de fibra óptica. La posibilidad de controlar los parámetros de la no linealidad y acoplamiento entre modos de vibración en el sistema de una cuerda elástica con corriente eléctrica alterna en un campo magnético, se presenta como una gran opción para estudiar y simular diferentes formas del movimiento en sistemas ondulatorios no lineales con ondas acopladas.

Capítulo 6

ANEXO

6.1 OSCILACIONES FORZADAS CON AMORTIGUAMIENTO

Es bien conocido, que la solución general de la ecuación

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = f(t), \quad (6.1)$$

se presenta como la suma de la solución general

$$x_g(t) = Ce^{\lambda t} + C^*e^{\lambda^*t}, \quad (6.2)$$

de la ecuación homogénea,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad (6.3)$$

y, de una solución particular

$$x_p(t) = -x_1(t) \int_0^t \frac{x_2 f \cdot d\tau}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} + x_2(t) \int_0^t \frac{x_1 f \cdot d\tau}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2}, \quad (6.4)$$

de la ec. (6.1). Aquí

$$x_1(t) = e^{\lambda t} \quad y \quad x_2(t) = e^{\lambda^*t}, \quad (6.5)$$

son soluciones fundamentales de la ec. (6.3), donde

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \equiv -\beta \pm i\tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}. \quad (6.6)$$

Se puede presentar la solución $x_g(t)$ en la siguiente forma:

$$x_g(t) = Ce^{\lambda t} + C^*e^{\lambda^*t} = A \cdot e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}t + \alpha), \quad (6.7)$$

donde A y α son constantes reales arbitrarias.

Consideremos el caso de la fuerza de excitación armónica

$$f(t) \equiv f_0 \cos(\Omega t + \chi) = f_0 \cdot \frac{e^{i(\Omega t + \chi)} + e^{-i(\Omega t + \chi)}}{2}. \quad (6.8)$$

Sustituyendo las ecs.(6.5, 6.6 y 6.8) en la ec.(6.4) y tomando en cuenta las relaciones,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-\beta + i\bar{\omega})x_1, & \dot{x}_2 &= (-\beta - i\bar{\omega})x_2, \\ x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2 &= x_1x_2[-i\bar{\omega} - i\bar{\omega}] = -2i\bar{\omega}x_1 \cdot x_2, \end{aligned} \quad (6.9)$$

tenemos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{f_0}{4i\bar{\omega}} \left\{ e^{\lambda t} \left[\frac{e^{i\chi} (e^{(-\lambda+i\Omega)t} - 1)}{-\lambda + i\Omega} + \frac{e^{-i\chi} (e^{(-\lambda-i\Omega)t} - 1)}{-\lambda - i\Omega} \right] \right\} \\ &+ \frac{f_0}{4i\bar{\omega}} \left\{ -e^{\lambda^* t} \left[\frac{e^{i\chi} (e^{(-\lambda^*+i\Omega)t} - 1)}{-\lambda^* + i\Omega} + \frac{e^{-i\chi} (e^{(-\lambda^*-i\Omega)t} - 1)}{-\lambda^* - i\Omega} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Para seguir adelante, realicemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (-\lambda + i\Omega)(-\lambda^* - i\Omega) &= \beta^2 + \bar{\omega}^2 - 2\bar{\omega}\Omega + \Omega^2 \\ &= \beta^2 + (\bar{\omega} - \Omega)^2, \end{aligned} \quad (6.11)$$

y

$$\begin{aligned} (-\lambda - i\Omega)(-\lambda^* + i\Omega) &= \beta^2 + \bar{\omega}^2 - 2\bar{\omega}\Omega + \Omega^2 \\ &= \beta^2 + (\bar{\omega} + \Omega)^2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Después, de la ec. (6.10) se sigue

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{f_0}{4i\bar{\omega}} \left\{ \frac{(-\lambda^* - i\Omega)e^{i\chi} (e^{i\Omega t} - e^{\lambda t}) - (-\lambda + i\Omega) e^{-i\chi} (e^{-i\Omega t} - e^{\lambda^* t})}{\beta^2 + (\bar{\omega} - \Omega)^2} \right\} \\ &+ \frac{f_0}{4i\bar{\omega}} \left\{ \frac{(-\lambda^* + i\Omega)e^{-i\chi} (e^{-i\Omega t} - e^{\lambda t}) - (-\lambda - i\Omega) e^{i\chi} (e^{i\Omega t} - e^{\lambda^* t})}{\beta^2 + (\bar{\omega} + \Omega)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Reacomodando el primer numerador, tenemos

$$\begin{aligned} &(-\lambda^* - i\Omega)e^{i\chi} (e^{i\Omega t} - e^{\lambda t}) - (-\lambda + i\Omega) e^{-i\chi} (e^{-i\Omega t} - e^{\lambda^* t}) \\ &= (\beta + i(\bar{\omega} - \Omega)) e^{i\chi} (e^{i\Omega t} - e^{\lambda t}) - (\beta - i(\bar{\omega} - \Omega)) e^{-i\chi} (e^{-i\Omega t} - e^{\lambda^* t}) \\ &= \beta (e^{i(\Omega t + \chi)} - e^{-i(\Omega t + \chi)}) + i(\bar{\omega} - \Omega) (e^{i(\Omega t + \chi)} + e^{-i(\Omega t + \chi)}) \\ &\quad - \beta e^{-\beta t} (e^{i(\bar{\omega} t + \chi)} - e^{-i(\bar{\omega} t + \chi)}) - i(\bar{\omega} - \Omega) e^{-\beta t} (e^{i(\bar{\omega} t + \chi)} + e^{-i(\bar{\omega} t + \chi)}) \\ &= 2i\beta \sin(\Omega t + \chi) + 2i(\bar{\omega} - \Omega) \cos(\Omega t + \chi) \\ &\quad - 2i\beta e^{-\beta t} \sin(\bar{\omega} t + \chi) - 2i(\bar{\omega} - \Omega) e^{-\beta t} \cos(\bar{\omega} t + \chi). \end{aligned}$$

El otro numerador es

$$\begin{aligned}
& (-\lambda^* + i\Omega)e^{-ix} (e^{-i\Omega t} - e^{\lambda t}) - (-\lambda - i\Omega) e^{ix} (e^{i\Omega t} - e^{\lambda^* t}) \\
= & (\beta + i(\bar{\omega} + \Omega)) e^{-ix} (e^{-i\Omega t} - e^{\lambda t}) - (\beta - i(\bar{\omega} + \Omega)) e^{ix} (e^{i\Omega t} - e^{\lambda^* t}) \\
= & -\beta (e^{i(\Omega t + \chi)} - e^{-i(\Omega t + \chi)}) + i(\bar{\omega} + \Omega) (e^{i(\Omega t + \chi)} + e^{-i(\Omega t + \chi)}) \\
& -\beta e^{-\beta t} (e^{i(\bar{\omega} t - \chi)} - e^{-i(\bar{\omega} t - \chi)}) - i(\bar{\omega} + \Omega) e^{-\beta t} (e^{i(\bar{\omega} t - \chi)} + e^{-i(\bar{\omega} t - \chi)}) \\
= & -2i\beta \sin(\Omega t + \chi) + 2i(\bar{\omega} + \Omega) \cos(\Omega t + \chi) \\
& -2i\beta e^{-\beta t} \sin(\bar{\omega} t - \chi) - 2i(\bar{\omega} + \Omega) e^{-\beta t} \cos(\bar{\omega} t - \chi).
\end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ec. (6.10), se tiene

$$\begin{aligned}
x_p(t) = & \frac{f_0}{2\bar{\omega}} \left\{ [\beta^2 + (\bar{\omega} - \Omega)^2]^{-1} [\beta \sin(\Omega t + \chi) + (\bar{\omega} - \Omega) \cos(\Omega t + \chi)] \right\} \\
& - \frac{f_0}{2\bar{\omega}} \left\{ [\beta^2 + (\bar{\omega} - \Omega)^2]^{-1} [\beta e^{-\beta t} \sin(\bar{\omega} t + \chi) + (\bar{\omega} - \Omega) e^{-\beta t} \cos(\bar{\omega} t + \chi)] \right\} \\
& + \frac{f_0}{2\bar{\omega}} \left\{ [\beta^2 + (\bar{\omega} + \Omega)^2]^{-1} [-\beta \sin(\Omega t + \chi) + (\bar{\omega} + \Omega) \cos(\Omega t + \chi)] \right\} \\
& - \frac{f_0}{2\bar{\omega}} \left\{ [\beta^2 + (\bar{\omega} + \Omega)^2]^{-1} [\beta e^{-\beta t} \sin(\bar{\omega} t - \chi) + (\bar{\omega} + \Omega) e^{-\beta t} \cos(\bar{\omega} t - \chi)] \right\}.
\end{aligned}$$

Introduciendo las fases θ_1 y θ_2 por medio de las siguientes relaciones trigonométricas

$$\begin{aligned}
\tan \theta_1 & \equiv \frac{\beta}{\bar{\omega} - \Omega}; \iff \sin \theta_1 = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + (\bar{\omega} - \Omega)^2}} \\
\tan \theta_2 & \equiv \frac{\beta}{\bar{\omega} + \Omega}; \iff \sin \theta_2 = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + (\bar{\omega} + \Omega)^2}},
\end{aligned}$$

finalmente tenemos la solución particular en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
x_p(t) = & \frac{f_0}{2\bar{\omega}} \left\{ [\beta^2 + (\bar{\omega} - \Omega)^2]^{-1/2} [\cos(\Omega t + \chi - \theta_1) - e^{-\beta t} \cos(\bar{\omega} t + \chi - \theta_1)] \right\} + \\
& \frac{f_0}{2\bar{\omega}} \left\{ [\beta^2 + (\bar{\omega} + \Omega)^2]^{-1/2} [\cos(\Omega t + \chi + \theta_2) - e^{-\beta t} \cos(\bar{\omega} t - \chi - \theta_2)] \right\} \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Se puede comprobar que $x_p(t)|_{t=0} \equiv x_p(0) = 0$ y $\dot{x}_p(t)|_{t=0} = 0$, como debe ser.

En el límite, $t \rightarrow \infty$, la solución general, que es la suma de las ecs. (6.7 y 6.14), tiende a la solución estacionaria, que no depende de las condiciones iniciales. Esta solución estacionaria es (vease la definición de θ_1 y θ_2 y la ec.(6.14))

$$x_{est}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{nhg}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_0}{2\bar{\omega}} \left\{ [\beta^2 + (\bar{\omega} - \Omega)^2]^{-1} [(\bar{\omega} - \Omega) \cos(\Omega t + \chi) + \beta \sin(\Omega t + \chi)] \right\} \\
&\quad + \frac{f_0}{2\bar{\omega}} \left\{ [\beta^2 + (\bar{\omega} + \Omega)^2]^{-1} [(\bar{\omega} + \Omega) \cos(\Omega t + \chi) - \beta \sin(\Omega t + \chi)] \right\} \\
&= \frac{f_0}{2\bar{\omega}} \left\{ \cos(\Omega t + \chi) \left[\frac{\bar{\omega} - \Omega}{\beta^2 + (\bar{\omega} - \Omega)^2} + \frac{\bar{\omega} + \Omega}{\beta^2 + (\bar{\omega} + \Omega)^2} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{f_0}{2\bar{\omega}} \left\{ \sin(\Omega t + \chi) \left[\frac{\beta}{\beta^2 + (\bar{\omega} - \Omega)^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + (\bar{\omega} + \Omega)^2} \right] \right\} \\
&= \frac{f_0 \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \cos(\Omega t + \chi - \theta)}{(\omega^2 + \Omega^2)^2 - 4\bar{\omega}^2 \Omega^2} \\
&= \frac{f_0 \cos(\Omega t + \chi - \theta)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = x_{est}(t) \tag{6.15}
\end{aligned}$$

donde

$$\left. \begin{aligned}
\sin \theta &= \frac{2\beta\Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \\
\cos \theta &= \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \\
\tan \theta &= \frac{2\beta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}.
\end{aligned} \right\} \tag{6.16}$$

Recordaremos que ω es la frecuencia propia del sistema oscilatorio y Ω es la frecuencia de la fuerza.

La ec. (6.15) es idéntica a la solución obtenida en el libro [15], usando el otro método.

6.2 MEDICIONES DEL CAMPO MAGNÉTICO

El propósito de obtener las líneas de fuerza del campo magnético experimentalmente es de tener una buena aproximación de la configuración del campo magnético, para hacer un análisis matemático adecuado de las ecuaciones de movimiento y, por consiguiente, poder dar una buena interpretación física de la solución del problema.

La geometría del experimento en la medición de las componentes vectoriales del campo magnético está en la Fig. 6.1. El plano xz coincide con el plano superior del imán. Los planos xy y yz pasan por el centro del imán, y por lo tanto el eje y coincide con el eje de simetría rotacional del imán en forma de anillo.

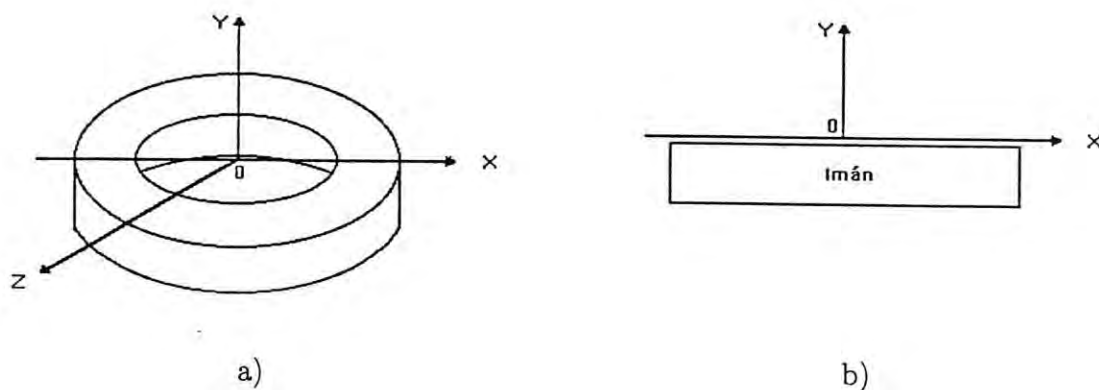


Fig. 6.1. El sistema de coordenadas del experimento de medición de las componentes vectoriales del campo magnético: a) experimento visto en xyz , b) experimento visto en el plano xy .

En el experimento se miden por separado las componentes del campo magnético H^x y H^y en el plano xy del sistema de coordenadas de la Fig. 6.1.

Se llevaron a cabo los siguientes pasos en el laboratorio: 1) el montaje experimental y 2) las mediciones de las componentes vectoriales H^x y H^y del campo magnético.

El montaje experimental en el laboratorio se realizó en una mesa óptica, que consiste de:

- a) un riel de aluminio que se sujeta a la mesa;
- b) un posicionador en tres dimensiones con alta precisión;
- c) un gaussímetro;
- d) el imán permanente en forma de anillo con el diámetro exterior de 6.6 *cm*.

Teniendo fijo el imán, se hicieron las mediciones de H^x y de H^y con el gaussímetro, que está montado en el posicionador. La toma de datos se llevó a cabo en una red en el plano xy , donde los puntos de la red están separados por intervalos de 3 *mm* en la coordenada x y de 5 *mm* en la coordenada y .

Habiendo obtenidos los datos experimentales de las componentes vectoriales del campo magnético, se utilizó el paquete "Mathematica". Con este paquete se obtuvieron las líneas de fuerza del campo magnético, Fig. 6.2. Como los datos que se analizaron fueron muchos y además por tener muy diferente la escala de magnitudes del campo magnético en los diferentes puntos de la red de medición, al obtener la gráfica no se distinguen bien las líneas de fuerza del campo magnético. Por lo tanto, se optó el graficar las líneas de fuerza en tres partes de la red de medición: a) gráfica de los vectores de las líneas de fuerza del campo

magnético desde $x = -10.25 \text{ cm}$ hasta $x = -5.125 \text{ cm}$ (vease Fig. 6.1.) que corresponde a la mitad de las mediciones en la red (ver Fig. 6.2 a); b) la gráfica de los vectores de las líneas de fuerza del campo magnético desde $x = -5.125 \text{ cm}$ hasta $x = 0 \text{ cm}$ que corresponde a la otra mitad de las mediciones en la red (ver Fig. 6.2 b) y, c) la gráfica Fig. 6.2 c que corresponde al campo magnético en el intervalo desde $x = -7.875 \text{ cm}$ hasta $x = 2.75 \text{ cm}$, que abarca la parte central de la red de mediciones de las componentes vectoriales del campo magnético H^x y de H^y .

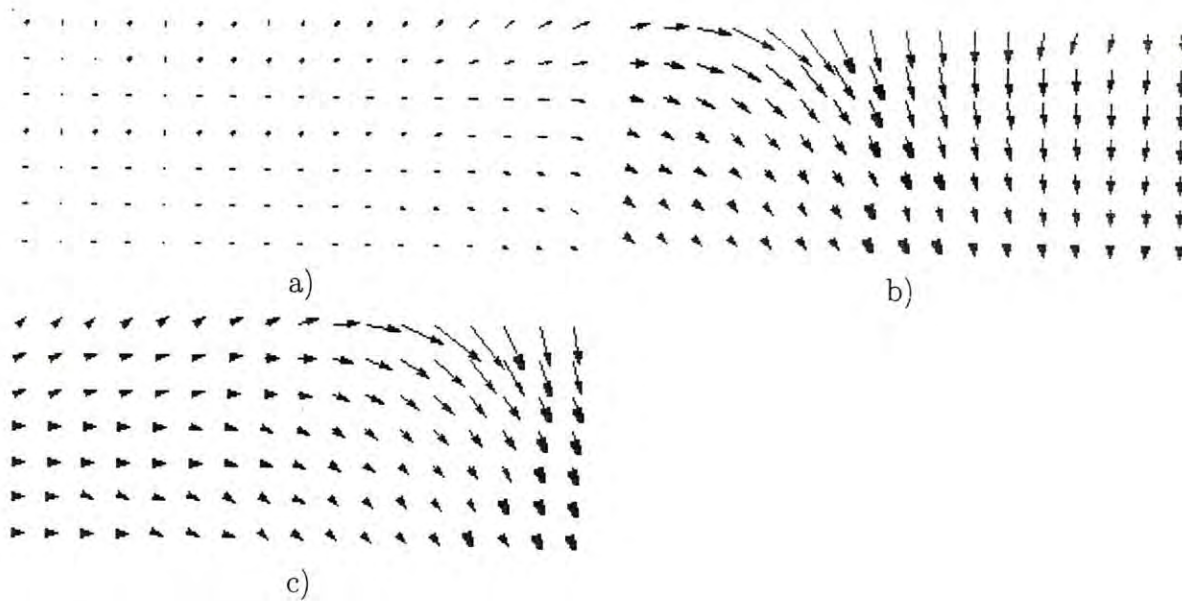


Fig. 6.2. Líneas de fuerza del campo magnético para diferentes partes de la red de medición.

Para verificar la simetría rotacional del campo magnético medimos las componentes H^x y H^y del campo magnético en el plano xy en el intervalo de $x = -10.5 \text{ cm}$ hasta $x = 10.5 \text{ cm}$, y a la altura de $y = 0.7 \text{ cm}$ de la superficie superior del imán. Los datos se grafican en la Fig. 6.3 (a,b).

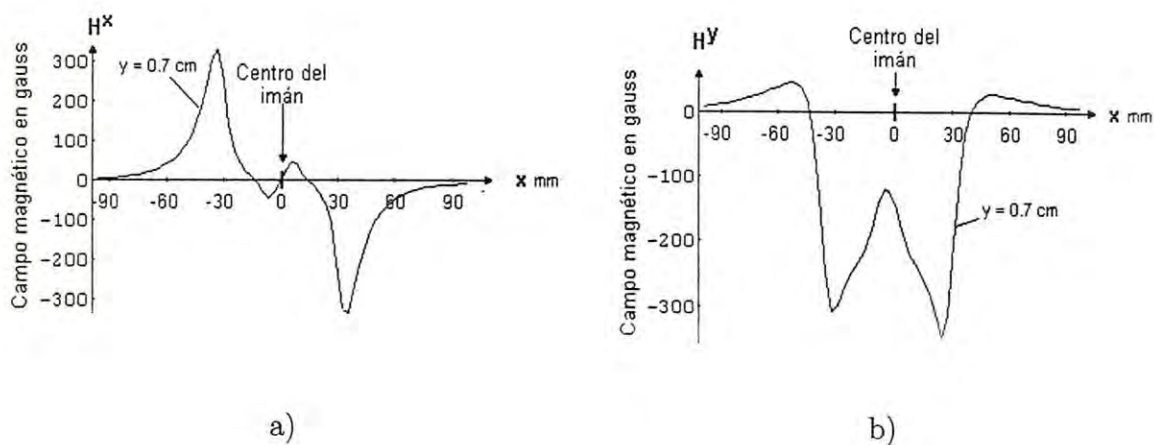


Fig. 6.3. Gráficas de los datos de las componentes vectoriales del campo magnético; a) la componente vectorial H^x a 0.7 cm sobre la superficie superior del imán, b) la componente vectorial H^y a 0.7 cm sobre la superficie superior del imán.

Estas gráficas nos demuestran, hasta cierto grado, la simetría rotacional del campo magnético del imán usado en nuestros experimentos. Lo último nos permite hacer mediciones del campo desde el centro del imán hacia afuera.

Por lo tanto, de la misma forma que en el procedimiento anterior hicimos mediciones de las componentes vectoriales del campo magnético, tanto para H^x como para H^y en el intervalo de $x = -10.5$ cm hasta $x = 0$ cm y para siete diferentes alturas sobre la superficie del imán, $y = (0.7, 1.1, 1.6, 2.1, 2.6, 3.1, 3.6)$ cm, ver la Fig. 6.4 (a,b).

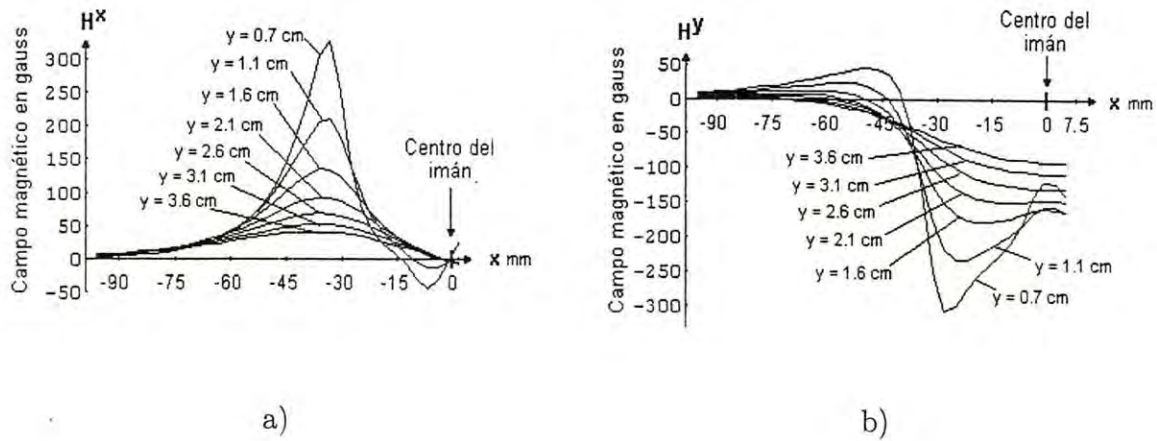


Fig. 6.4. Gráficas de las componentes H^x y H^y del campo magnético en el intervalo desde x igual a -10.5 cm hasta x igual a 0 cm para diferentes distancias sobre la superficie del imán.

Con el fin de usar los datos experimentales del campo magnético en el análisis teórico del movimiento ondulatorio de la cuerda, se buscó un ajuste para la curva experimental de la componente H^x , y se ajustó bien con cuatro funciones Lorentzianas (vease la Fig. 6.5)

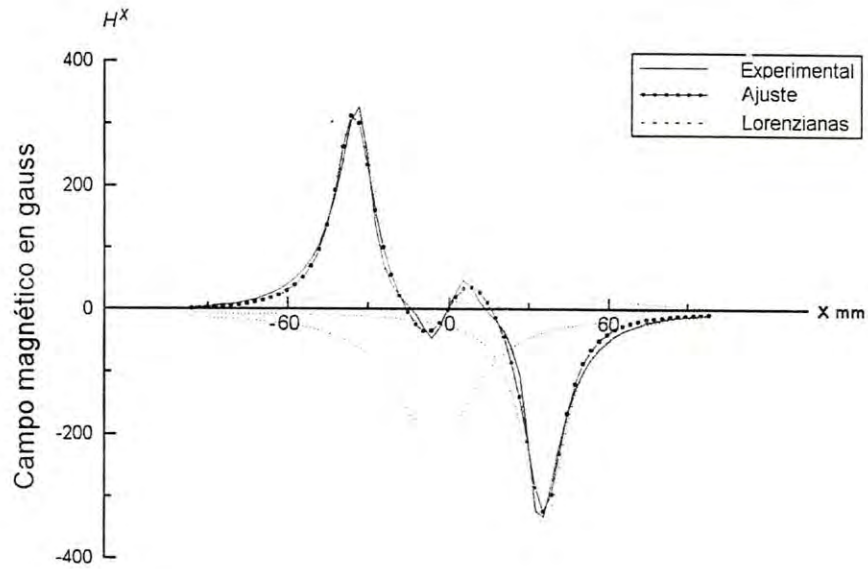


Fig.6.5. El ajuste de la gráfica experimental de H^x con 4 funciones Lorenzianas

A la gráfica anterior se le agrega la tabla de los parámetros del ajuste (vease la Fig. 6.6).

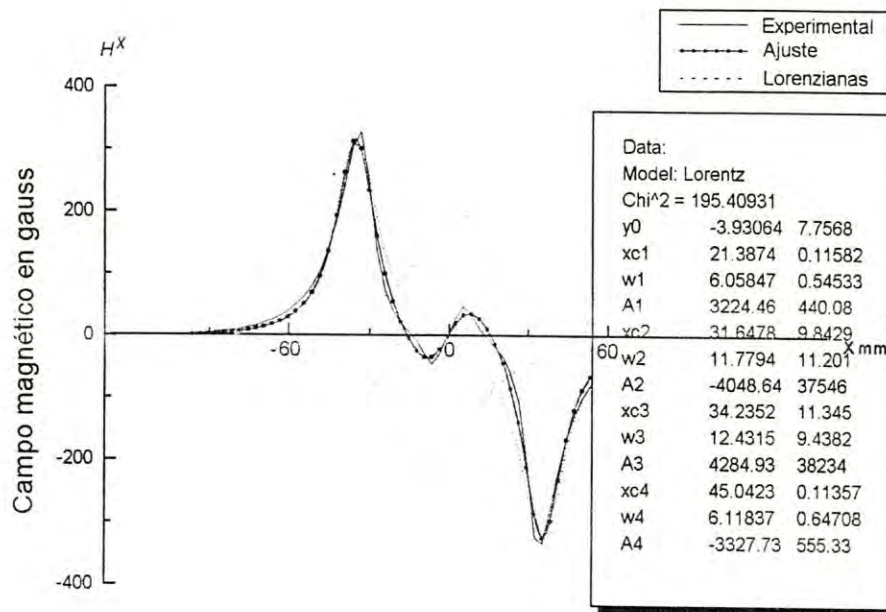


Fig.6.6. El ajuste de la gráfica experimental de H^x con 4 funciones Lorentzianas con la tabla de parámetros del ajuste.

También, se buscó un ajuste para la curva experimental de la componente H^y , y se ajustó bien con cuatro funciones Lorentzianas (vease la Fig. 6.7).

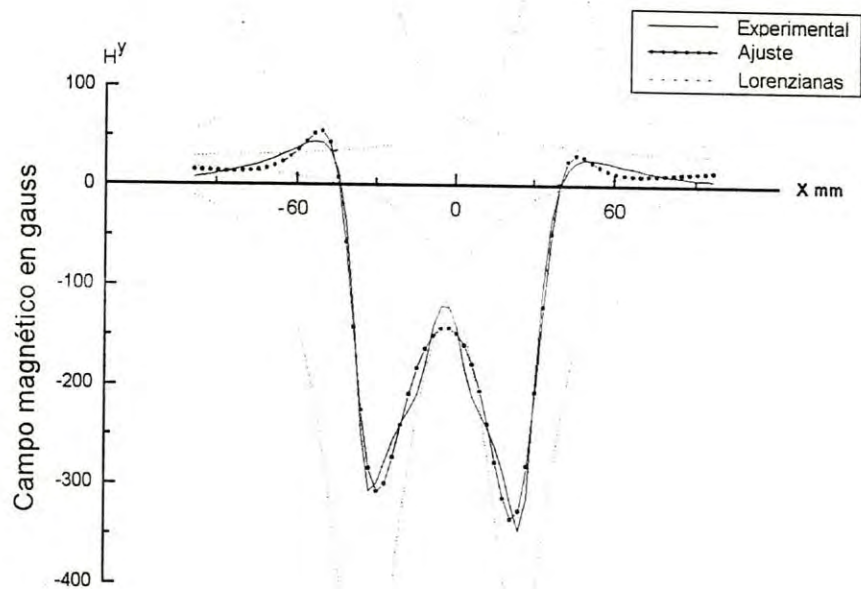


Fig.6.7. Gráficas de la componente H^y y su ajuste con 4 funciones Lorenzianas.

A la Fig. 6.7 se le agrega la tabla de los parámetros del ajuste (vease la Fig. 6.8).

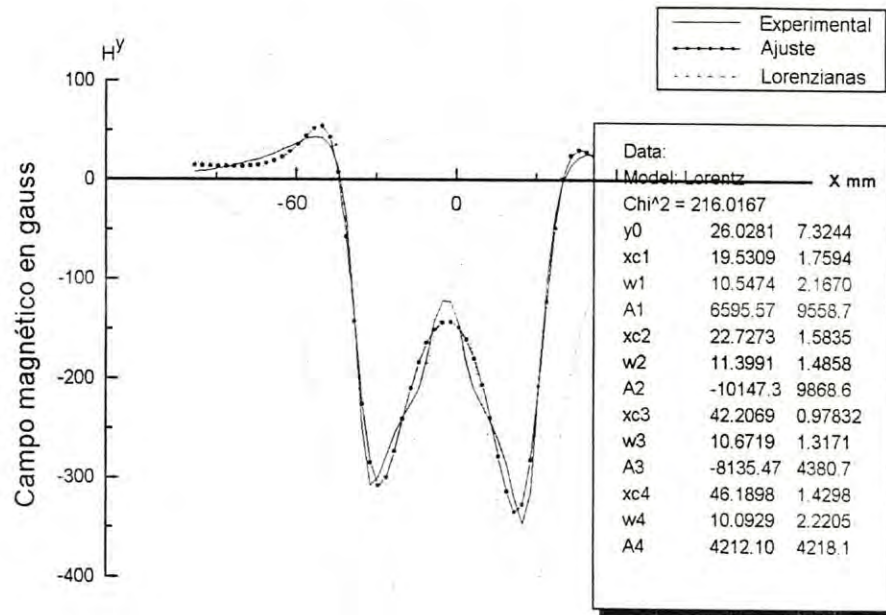


Fig.6.8. Gráfica de la componente H^y ajustada con 4 funciones Lorentzianas, con la tabla de los parámetros del ajuste.

La suposición de la simetría rotacional del campo magnético del imán en forma de anillo, que fue comprobada experimentalmente, nos permite emplear los datos de la medición en el plano xy (plano diametral del imán) de las componentes H^x y H^y para calcular el campo magnético del imán en cualquier punto del espacio. Por la simetría del imán el campo magnético en el plano diametral no tiene la componente H^z .

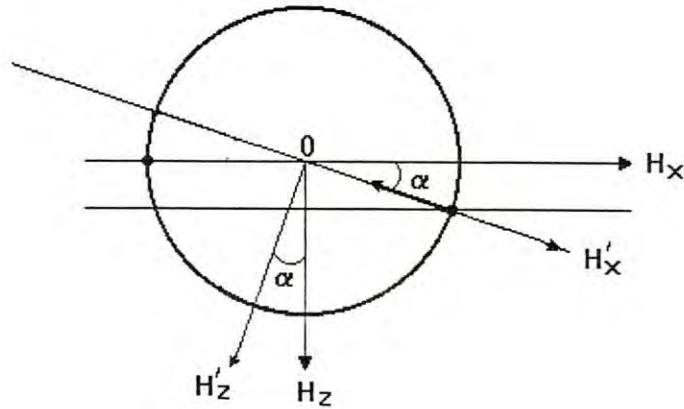


Fig.6.9. Rotación del sistema de coordenadas y la transformada correspondiente del campo magnético del imán en forma de anillo.

De la Fig. 6.9 es fácil de ver que las componentes del campo magnético del imán en un punto con coordenadas xyz se calculan por las siguientes fórmulas:

$$H^x(x, y, z) = \cos \alpha \cdot H^x(\sqrt{x^2 + z^2}, y, 0) \quad (\text{ec. 6.1})$$

$$H^y(x, y, z) = H^y(\sqrt{x^2 + z^2}, y, 0) \quad (\text{ec. 6.2})$$

$$H^z(x, y, z) = \sin \alpha \cdot H^x(\sqrt{x^2 + z^2}, y, 0), \quad (\text{ec. 6.3})$$

donde

$$\sin \alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Bibliografía

- [1] Guy Fogleman, "Quantum strings", *Am.J.Phys.* 55(4), Apr. 1987, p. 330.
- [2] J.A. Elliott, "Intrinsic nonlinear effects in vibrating strings", *Am.J.Phys.* 48(6), June 1980, p. 478-480.
- [3] J.A. Elliott, "Nonlinear resonance in vibrating strings", *Am.J.Phys.* 50(12), Dec. 1982, p. 1148-1150.
- [4] H.L. Armstrong, "Forced vibration of strings", *Am.J.Phys.* 50(11), Nov. 1982, p. 1028-1031.
- [5] G. Shanker, V.K. Gupta and N.K.Sharma, "Normal modes and dispersion relations in a beaded string: An experiment for an undergraduate laboratory", *Am.J.Phys.* 53(5), May 1985, p. 479-481.
- [6] S. Parmley, T. Zobrist, et.el., "Vibrational properties of a loaded string", *Am.J.Phys.* 63(6), June 1995, p. 547.
- [7] N.B. Tuffiaro, "Nonlinear and chaotic string vibrations", *Am.J.Phys.* 57(5), May 1989, p. 408.
- [8] G.R. Baldock, T. Bridgeman, *The Mathematical Theory of Wave Motion*, John Wiley&Sons, 1981.
- [9] A. Hirose, K.E. Lonngren, *Introduction to Wave Phenomena*, J.Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1985.
- [10] Marcelo Alonso, Edward J. Finn, *Física vol. II, Campos y ondas*, EE.UU., Fondo Educativo Interamericano, S. A. Capítulo XVIII, 1970.
- [11] F. Crawford, *Waves and Oscillations: Berkeley Physics Course*, vol. III, McGraw-Hill Book Company, N.Y.,1984.
- [12] E.V. Kurmyshev, *Oscillations of a Current Carrying Stretched String in a Magnetic Field*, Informe Técnico, CIF96-2, 18 pp.

- [13] Dimas Talvera Velázquez, "Movimiento Ondulatorio de una Cuerda Tendida con Corriente Eléctrica en un Campo Magnético", Tesis de Licenciatura en Física, Departamento de Física de la UNI-SON.
- [14] E.V. Kurmyshev, "Aspectos Físicos y Matemáticos del Movimiento Ondulatorio", Editado en la Universidad de Sonora, Hermosillo, 1998.
- [15] I.V. Saveliev, *Curso de Física General*, Mir, Moscú, v. 1, Capítulo VII
- [16] B.M. Yavorski, A. A. Pinski, *Fundamentos de Física II*, Ed. Mir Moscú, 1983.
- [17] A.B. Pipard, *The Physics of Vibration*, Cambridge University Press, 1989.
- [18] Ch. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Mecánica, Berkeley Physics Course*, vol.1, Reverté, Barcelona, 1992, pp. 209-245.
- [19] D. Halliday and R. Resnick, *Física, Parte 2*, Continental, México, 1986.
- [20] A. Portis, *Laboratory Physics: Berkeley Physics Laboratory*, Chap. 2, McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1975.
- [21] S.P. Strelkov, *Mechanics*, Part three, Oscillations and Wave, Ed. Mir publishers, Moscow, 1978.
- [22] L.S. Pontriagin, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Nauka, Moscú, 1965.
- [23] Philippe Dennery, Andre Krzywicki, *Mathematics for Physicists*, Ed. Harpper & Row, New York, 1967.
- [24] George Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, third edition, Ed. Academic Press, Inc, San Diego, 1985.
- [25] V.G. Rekach, *Problemas de la Teoría de la Elasticidad*, Capítulo II, Mir, Moscú, 1978.
- [26] A.E.H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4rth Ed., Dover Publications, Inc., N. Y., 643 pp.
- [27] P.M. Morse, and H. Feshbach, *Methods of Mathematical Physics*, Parts I and II, McGraw Hill Book Company, 1953.
- [28] L. Landau, A. Ajeizer, *Curso de Física General*, Ed. Mir Moscú 1973, pp. 99-115
- [29] P. Palfy-Muhoray, "On demonstrating transverse waves on a string", *Am.J.Phys.* 64(12), Dec. 1996, p. 1529-1530.
- [30] J.M. Nunes de Silva, "Renormalized vibrations of a loaded string ", *Am.J.Phys.* 62(5), May 1994, p. 423-426.

RFB ~~723~~
140123

- [31] C. Barratt, "Resonance in a vibrating string", *Am. J. Phys.* 52(12), Dec. 1989, p. 1148.
- [32] R. Benumof, "Momentum propagation by traveling waves on a string", *Am. J. Phys.* 50(1), Jan. 1982, p. 20.
- [33] J.H. Lienhard and M.F. Beatty, "Experimental investigation of the transverse vibrational frequency ratio for identical loaded and unloaded rubber string", *Am. J. Phys.* 50(2), Feb. 1982, p..
- [34] F.P. Clay, Jr. and R.L. Kernell, "Standing waves in a string driven by loudspeakers and signal generator", *Am. J. Phys.* 50(10), Oct. 1982, p. 910.
- [35] E. Rune Lingren, "Analysis of a pseudo stationary wave", *Am. J. Phys.* 48(6), Jun. 1980, p. 468.
- [36] F.L. Carzon, "Classroom simulation of the coupled motion of piano strings ", *Am. J. Phys.* 52(2), Feb. 1984, p. 137.
- [37] Salvatore Ganci, "The standing wave pattern of a string in fluorescent light ", *Am. J. Phys.* 52(3), Mar. 1984, p. 250.
- [38] M. Podlesak, A.R. Lee, "Democstration of resonances in string instruments", *Am. J. Phys.* 52(5), May. 1984, p..