



**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN FÍSICA**

**FÍSICA DEL PLASMA DE QED**

por

**MAURA ELIZABETH RAMÍREZ QUEZADA**

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora  
para la obtención del título de

**MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**Dirigida por:**

**Dra. María Elena Tejeda Yeomans**  
**Cuerpo Académico de Partículas y Cosmología**  
**Universidad de Sonora**

**Hermosillo, Sonora, México**

**Junio de 2016**

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

# Resumen

Durante los primeros microsegundos después del Big Bang, la temperatura del Universo temprano era tan alta que las partículas elementales, tales como quarks y gluones, se propagaban libremente en una sopa caliente de materia nuclear. Hoy en día este estado de la materia llamado plasma de quarks y gluones (QGP, por sus siglas en inglés), puede generarse en el Colisionador de Iones Pesados Relativistas (RHIC) en el Laboratorio Nacional de Brookhaven (BNL) y en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) en la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN). Uno de los métodos para estudiar este estado de la materia, es utilizar partículas masivas como sondas. Esto permite obtener, indirectamente, información sobre las propiedades físicas del plasma.

Para entender cómo estas partículas se utilizan como sondas, necesitamos algunas herramientas básicas. Específicamente necesitamos la Teoría Térmica de Campos (TFT) para describir procesos de las partículas elementales en condiciones de temperatura extrema. Con esta teoría podemos estudiar cómo una de estas partículas pesadas pierde energía cuando atraviesa el plasma.

El tener un mejor conocimiento de los mecanismos de pérdida de energía de sondas masivas, nos ayuda a investigar propiedades físicas del QGP. Convenientemente, el estudio del QGP se puede realizar como una extensión del estudio del plasma formado por electrones, positrones y fotones, cuya dinámica se describe con la Electrodinámica Cuántica (QED, por sus siglas en inglés). Por esta razón, en este trabajo nos enfocamos en la física del plasma de QED. Para ello, establecemos algunas de las herramientas básicas de la TFT las cuales serán necesarias para el cálculo de la pérdida de energía a temperatura finita. Trabajando en este formalismo estudiamos el mecanismo de la pérdida de energía de un muón pasando a través del plasma de QED a una temperatura  $T$ . Usamos el método propuesto por Braaten y Yuan [1], que consiste en separar en dos regiones el momento transferido del muón al plasma. Una región es la llamada *Hard*, donde el momento transferido es mayor que una escala de referencia  $q^*$  y la otra región es la llamada *Soft*, donde el momento transferido es menor que esta escala de referencia: la pérdida de energía total está dada por ambas contribuciones.

Finalmente, para evidenciar el funcionamiento de los resultados en un contexto fenomenológico, haremos el análisis de la pérdida de energía de un muón en un medio isótropo con características geométricas y cinemáticas específicas.

# Agradecimientos

Las palabras no son suficientes para expresar el agradecimiento que siento. Llegar hasta aquí no ha sido fácil, pero he tenido la suerte de encontrarme con personas que me han ayudado en el camino. Unas han estado solo un instante, otras han estado desde siempre.

La primera persona en la que pienso al escribir esto es en mi profesora María Elena. Mi perspectiva, mis ideas y mis aspiraciones cambiaron desde el momento en que pisé su cubículo. Aun recuerdo el terror que sentía cuando fui a hablar con ella y pedirle trabajar en un proyecto pequeño sobre física de partículas. Con el tiempo, ese miedo se convirtió en una gran admiración y respeto. No cabe duda que ha sido lo mejor que me ha pasado, porque más que ser mi profesora, es como una madre para mí.

También quiero agradecer a mis dos hermanas, que a pesar de todo siempre han creído en mí, Las amo: carola, arigatou gozaimasu, Sarahí Ramírez, gracias infinitas por todos tus consejos y apoyo incondicional.

Gracias a los amigos que han estado siempre para ayudarme. A Dupret, por todos aquellos desvelos estudiando y todos aquellos momentos payaseando, es una suerte tenerte como guía pero sobre todo como amigo. A Hector, que aunque probablemente nunca me entendía, siempre escuchó lo que tenía que decir sobre mi tesis. A Felix, que aunque de lejos, desde que lo conozco me ha sacado sonrisas. A Wilmer, mi colombiano favorito en el universo, gracias por la fe que has tenido en mí desde el primer día que nos conocimos. Gracias a todo el cuerpo académico de Partículas y Cosmología, de verdad los admiro y aprecio mucho.

Probablemente, no estoy mencionando a todas las personas que he conocido y me han regalado momentos felices (y tristes) sin embargo, si eres tú una de ellas, quiero que sepas que también te agradezco, por lo que sea que vivimos, si hubo momentos alegres, es por seguro que valió la pena.

# Contenido

Lista de Figuras	III
Introducción	1
<b>1 Elementos de la Teoría Térmica de Campos.</b>	<b>4</b>
1.1. Elementos de Física Estadística . . . . .	4
1.2. Formalismo de Matsubara . . . . .	5
1.2.1. Autoenergía a temperatura finita. . . . .	9
<b>2 Pérdida de energía por unidad de camino recorrido.</b>	<b>13</b>
2.1. Cálculo de $dE/dx$ . . . . .	14
2.1.1. Contribución <i>Hard</i> . . . . .	15
2.1.2. Contribución <i>Soft</i> . . . . .	22
<b>3 Pérdida de energía total en un medio isótropo.</b>	<b>29</b>
3.1. Pérdida de energía a través de un plasma finito. . . . .	31
3.2. Extensión a un plasma de quarks y gluones. . . . .	35
Conclusiones	37
<b>A Desarrollos: Capítulo I</b>	<b>39</b>
A.1. Promedio de dos operadores a temperatura finita . . . . .	39
A.2. El operador de densidad de un ensemble como ecuación de evolución temporal a temperatura finita. . . . .	39
A.3. Teorema de residuos de Cauchy aplicado al propagador térmico. . . . .	40
A.4. Desarrollo de la autoenergía $\Pi(\vec{p}, p^0)$ . . . . .	41
A.5. Límites cinemáticos de $\Pi(\vec{p}, p^0)$ . . . . .	42

<b>B Reglas de Feynman</b>	<b>43</b>
B.1. Reglas de Feynman para QED. . . . .	43
<b>C Contribución <i>Hard</i></b>	<b>45</b>
C.1. Contribución de dispersión de Compton. . . . .	45
C.2. Desarrollo de trazas en la amplitud al cuadrado de la contribución <i>Hard</i> . . . . .	46
C.3. Álgebra del cuadrado de la amplitud . . . . .	46
C.4. Reescribiendo la delta de Dirac . . . . .	48
C.5. Integral respecto a $\omega$ . . . . .	48
C.6. Desarrollo de $N$ . . . . .	49
C.7. Álgebra del resultado final en la integración de la ecuación (2.47) . . . . .	49
<b>D Contribución <i>Soft</i></b>	<b>52</b>
D.1. Desarrollo del cuadrado de la amplitud <i>Soft</i> . . . . .	52
D.2. Desarrollo de $ \mathcal{M}_2 ^2$ . . . . .	53
D.3. Desarrollo de $ \mathcal{M}_3 ^2$ . . . . .	54
D.4. Desarrollo de función par para la distribución térmica. . . . .	55
D.5. Función paso . . . . .	56
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>

# Lista de Figuras

1.1. Autoenergía del campo bosónico $\Phi$ . . . . .	10
2.1. Diagrama de la contribución <i>Hard</i> para $dE/dx$ . . . . .	13
2.2. Autoenergía $\Pi(P)$ de la contribución <i>Soft</i> para $dE/dx$ . . . . .	13
2.3. Diagramas de dispersión Compton . . . . .	16
2.4. Propagador efectivo del fotón. . . . .	23
3.1. Gráfica para $F'_{Soft}$ , $q^* = 17\text{MeV} - 40\text{MeV}$ , $q_{min} = 1.7\text{MeV}$ y $m_\gamma = 1\text{MeV}$ . . . . .	30
3.2. Contribución <i>Soft</i> y <i>Hard</i> en la pérdida de energía, donde $q^* = 17\text{MeV}$ , $q_{min} = 1.7$ MeV, y $m_\gamma = 1$ MeV. . . . .	31
3.3. Pérdida de energía total del muón en función de su velocidad con $q^* = 17\text{MeV} -$ $40\text{MeV}$ , $q_{min} = 1.7\text{MeV}$ y $m_\gamma = 1\text{MeV}$ . La línea continua muestra el resultado que se obtuvo en este trabajo, y la punteada es el resultado de Bjorken[1]. . . . .	32
3.4. Esquema de un plasma con geometría circular. En la figura se muestra un evento generado a una distancia $d$ del centro del plasma. La distancia $r$ es la distancia que el muón va a recorrer para escapar del plasma y $\theta$ es el ángulo al cual sale disparado. . . . .	32
3.5. Pérdida de energía del muón, que se mueve a una velocidad $v = 0.5$ , en función la dirección a través del plasma. . . . .	33
3.6. Pérdida de energía del muón, que se mueve a una velocidad $v = 0.9$ , en función la dirección a través del plasma. . . . .	34
3.7. La figura (a) muestra el recorrido alrededor del ángulo 0. La figura (b) muestra el recorrido alrededor de l ángulo $\pi$ . Ambos para un evento generado cerca de la frontera. . . . .	34

3.8. Diagramas de Feynman en QCD para los cálculos adicionales. <i>(a)</i> y <i>(b)</i> corresponden a la dispersión de Compton de los gluones y el inciso <i>(c)</i> corresponde al vértice de tres gluones. . . . .	36
3.9. Construcción de las amplitudes de dispersión de Compton de los gluones a partir de QED. . . . .	36
B.1. Diagrama de Feynman con líneas exteriores entrantes y salientes. . . . .	44
B.2. Líneas externas para electrones, positrones y fotones. . . . .	44
C.1. Dispersión de Compton del fotón. . . . .	45



# Introducción

La Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés) es una herramienta básica desarrollada a temperatura cero con alta predictibilidad en los experimentos. En la física de Altas Energías se utiliza para describir y analizar la Física de Partículas Elementales, bajo condiciones como las que prevalecen en colisiones de partículas en un acelerador.

Cuando la QFT no es suficiente para describir algunos procesos que se observan en los colisionadores, es necesario considerar un factor extra para completar la teoría y reforzar su predictibilidad: este factor es la temperatura. Seguramente, la primera vez que alguien descubre que la naturaleza puede describirse por teorías a temperatura cero o a temperatura distinta de cero, surgen muchas dudas al respecto. Por ejemplo, alguien se puede preguntar ¿En qué tipo de colisiones debemos considerar la temperatura?, ¿qué fenómenos surgen cuando consideramos un medio termodinámico? o simplemente, ¿qué diferencia hay entre procesos que se describen a temperatura cero y a temperatura finita, si utilizamos la misma escala de energía? Contestar estas preguntas no es fácil, sin embargo, la respuesta radica en qué se está colisionando en el experimento. Por ejemplo, para colisiones que se realizan entre partículas tales como electrón-protón, electrón-positrón, protón-protón, basta con utilizar la QFT a  $T = 0$  para describir los procesos. Mientras que para colisiones entre núcleos de iones pesados como  $Cu - Cu$ ,  $Au - Au$  o  $Pb - Pb$  es necesario analizar la temperatura.

En las colisiones entre nucleos se describe un conjunto de partículas que interactúan y conforman un medio termodinámico. Por esta razón, no es difícil adivinar que la mejor manera de describir estos procesos es utilizando los principios fundamentales de la Mecánica Estadística. Esta rama de la Física permite predecir el comportamiento de un sistema termodinámico mediante el conocimiento de las propiedades dinámicas de las partículas que conforman el sistema [2]. La función de partición que nos permite determinar las propiedades del sistema, como veremos, está estrechamente relacionada con la QFT en el espacio euclidiano. Así, esta relación entre la QFT y la Mecánica Estadística da origen a una nueva teoría que describe procesos a temperatura finita, llamada Teoría Térmica de Campos (TFT, por sus siglas en inglés)[3]. Hoy en día, el estudio de la TFT se desarrolla para estudiar, entre otros, procesos como colisiones de

iones pesados a altas energías. Las bases de esta teoría han sido establecidas desde hace más de 50 años, por el trabajo de Takeo Matsubara [4], entre otros. La cuantización de los operadores del campo en TFT se logra a través de la frecuencia de Matsubara en lugar de la energía y el momento [5]. El formalismo de Matsubara ha sido aplicado exitosamente para calcular efectos térmicos en problemas de altas energías [6]. Uno de los más importantes es la descripción de una fase deconfinada llamada plasma de quarks y gluones (QGP). Esta fase se genera en las colisiones de iones pesados, donde se determinó que el plasma se produce alrededor de una temperatura de 150 MeV. A medida que el plasma se enfría, los quarks, antiquarks y gluones se combinan para formar la materia hadrónica. La descripción de este plasma, es uno de los principales desarrollos que nos ha permitido conocer un poco más acerca del Universo temprano [7].

Para estudiar la formación y evolución del QGP, es necesario comparar datos experimentales con predicciones de la teoría. El entendimiento de las diferentes etapas después de la creación del plasma y de las transiciones de fase que sufre, requiere de un amplio espectro de mediciones y teorías. En general existen herramientas robustas que han servido de guía, por ejemplo: QCD perturbativa tiene un rango de aplicabilidad en temperaturas altas, para la fase del QGP donde quarks y gluones se comportan como libres. Otro ejemplo es el uso de QCD en la red (*lattice* QCD), como método no perturbativo basado en simulaciones numéricas que permiten la descripción de la formación de hadrones en la evolución del plasma [8]. En este trabajo usaremos un método para la descripción de la física de QGP, que consiste en implementar y extender técnicas de un plasma de QED a uno de QGP. El primer paso para lograr esto, es determinar la pérdida de energía de una partícula masiva, actuando como sonda, a través del plasma de QED. Determinar la pérdida de energía nos permitirá explorar de manera indirecta las propiedades físicas del plasma, abriéndonos el camino al QGP [9].

En el Capítulo 1 realizamos una descripción de los conceptos necesarios de la TFT; iniciando con los conceptos básicos de la Mecánica Estadística. Enseguida se introduce el formalismo de Matsubara, con el que se muestra la conexión entre la Mecánica Estadística y la QFT. Para terminar, se desarrolla una autoenergía a temperatura finita, con el fin de establecer la forma del propagador de un bosón en el contexto del formalismo de Matsubara. En el Capítulo 2 se utiliza el resultado que se obtuvo en el Capítulo 1 para presentar detalladamente el cálculo de la pérdida de energía del muón. Este capítulo se divide en dos secciones importantes: una de la contribución *Hard* y otra de la contribución *Soft* a la pérdida de energía total. En el Capítulo 3 se realiza un análisis de los resultados obtenidos en el Capítulo 2, discutiendo el comportamiento de

## Introducción

---

la pérdida de energía en el plasma isótropo. De igual manera se realiza un análisis de la pérdida de energía estableciendo un límite espacial para el plasma, lo que permite un acercamiento más real a los procesos realizados en una colisión. Finalmente, se establece la conexión con el plasma de QGP especificando los cambios necesarios adicionales a la pérdida de energía.

# Capítulo 1

| *Elementos de la Teoría Térmica de Campos.*

Nos interesa describir el proceso de la pérdida de energía de un muón dentro de un plasma de QED a una temperatura  $T$ . En la TFT existen muchos métodos que nos permiten desarrollar y describir este tipo de procesos. Uno de los más conocidos en la teoría cuántica de campos a temperatura finita, es el formalismo de tiempo imaginario, o formalismo de Matsubara<sup>1</sup>.

En este capítulo vamos a presentar los elementos básicos de la Física Estadística y su relación con la QFT, para culminar con una breve descripción del formalismo de Matsubara[4][7].

## 1.1. Elementos de Física Estadística

Uno de los conceptos principales de la Física Estadística es el de *ensemble*. Éste se define como el conjunto de sistemas idénticamente preparados, en contacto con un baño térmico a una temperatura  $T$ . Consideremos un sistema de volumen  $V$  caracterizado por el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$ . El estado de equilibrio del sistema está descrito por el operador de matriz de densidad de estados de energía;

$$\rho(\beta) = e^{-\beta\mathcal{H}}, \quad (1.1)$$

con el cual es posible realizar un análisis estadístico del conjunto de partículas que conforman el sistema. Si trabajamos en unidades naturales<sup>2</sup>,  $\beta$  representa el inverso de la temperatura de equilibrio. Para fines prácticos vamos a trabajar con un ensemble arbitrario, ya que lo que desarrollamos en esta sección no depende de la naturaleza del ensemble. Así la función de partición para el ensemble está definida como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta) &= \text{Tr}[\rho(\beta)] \\ &= \text{Tr}[e^{-\beta\mathcal{H}}], \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde  $\text{Tr}$  es la traza sobre un conjunto completo de estados. Una vez que se determina esta función se puede calcular el valor promedio o valor de expectación de una cantidad física  $A$ , de

---

<sup>1</sup>Llamado así por *Takeo Matsubara*, quién fue el primero en establecer una teoría perturbativa para la función de partición en la teoría cuántica de campos (1955)[3][5].

<sup>2</sup>En unidades naturales tenemos  $\kappa = 1$ ,  $c = 1$ ,  $\hbar = 1$ , donde  $\kappa$  es la constante de Boltzman,  $c$  es la velocidad de la luz y  $\hbar$  es la constante de Planck.

la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_\beta &= \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \text{Tr}[\rho(\beta)A] \\ &= \frac{\text{Tr}[\rho(\beta)A]}{\text{Tr}[\rho(\beta)]}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Para cualquier  $A$  en el marco de *Schrödinger*, tenemos un operador en el marco de *Heisenberg* definido como:

$$A_H(t) = e^{i\mathcal{H}t} A e^{-i\mathcal{H}t}.\tag{1.4}$$

El promedio para dos operadores a temperatura finita es:

$$\begin{aligned}\langle A_H(t)B_H(t') \rangle &= \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \text{Tr}[\rho(\beta)A_H(t)B_H(t')] \\ &= \langle B_H(t')A_H(t+i\beta) \rangle.\end{aligned}\tag{1.5}$$

La ecuación (1.5), que se obtiene en el apéndice A.1, es conocida como la relación *Kubo - Martin - Schwinger* (KMS) que da lugar a la periodicidad y anti-periodicidad en las funciones de dos puntos de Green  $G_\beta$  a temperatura finita. Es importante destacar que la temperatura juega el papel de tiempo imaginario. Esta es la razón de porqué al formalismo de Matsubara también se le conoce como el formalismo de tiempo imaginario. En este formalismo tenemos definido:

$$\tau = it \longrightarrow t = -i\tau.\tag{1.6}$$

Una vez establecido esto, pasamos a realizar una breve descripción de este formalismo en la siguiente sección.

## 1.2. Formalismo de Matsubara

En cualquier teoría cuántica de campos, hay una infinidad de valores esperados de todos los estados posibles. Si existen interacciones, la función de partición de un sistema estadístico no se puede evaluar de manera exacta. Una forma de evaluarla de manera perturbativa es utilizando el formalismo de Matsubara. Éste ofrece un método análogo al de *QFT*. La ecuación (1.1), tiene la forma de un operador de evolución en el tiempo para tiempos imaginarios negativos. Si separamos el hamiltoniano en la suma de un hamiltoniano libre  $\mathcal{H}_0$  y uno de interacción  $\mathcal{H}'$ , tenemos

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}',\tag{1.7}$$

por lo que la ecuación (1.1) se reescribe como

$$\rho(\beta) = e^{-\beta\mathcal{H}} = \rho_0(\beta)\rho_1(\beta),\tag{1.8}$$

donde hemos definido,

$$\rho_0(\beta) \equiv e^{-\beta\mathcal{H}_0}, \quad (1.9)$$

$$\rho_1(\beta) = e^{\beta\mathcal{H}_0} e^{-\beta\mathcal{H}}. \quad (1.10)$$

Utilizando la definición (1.6), la ecuación de evolución que satisface  $\rho_1$  está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_1(\tau)}{\partial\tau} &= \frac{\partial\rho_0^{-1}(\tau)}{\partial\tau}\rho(\tau) + \rho_0^{-1}\frac{\partial\rho(\tau)}{\partial\tau} \\ &= -\mathcal{H}'_I(\tau)\rho_1(\tau), \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde

$$\mathcal{H}'_I(\tau) = \rho_0^{-1}(\tau)\mathcal{H}'\rho_0(\tau). \quad (1.12)$$

La ecuación (1.11) es análoga a la ecuación del operador de evolución del tiempo en QFT a temperatura cero; ésta determina la evolución temporal de un estado inicial a un estado final. Si la integramos obtenemos

$$\rho_1(\beta) = P_\tau e^{\int_0^\beta d\tau\mathcal{H}'_I(\tau)}, \quad (1.13)$$

donde  $P_\tau$  es una constante de integración. La ecuación (1.13) es análoga a la expresión de la *matriz S* de QFT a temperatura cero<sup>3</sup>. La diferencia aquí es que la integral de tiempo es sobre un intervalo finito a lo largo del eje imaginario. Esta es la diferencia más importante entre ambos formalismos.

Como podemos ver, la discusión a temperatura finita es paralela a la discusión a temperatura cero. Así, podemos concluir que las interacciones térmicas también tienen una representación en diagramas de Feynman modificados por la temperatura.

En QFT el propagador de Feynman es una función de Green de dos puntos y expresa la propagación de una partícula entre dos puntos  $x_i$  y  $x_f$ . El espacio de configuración no es el más apropiado para describir la propagación de partículas con cuadrimento  $P$  bien definido; en este caso resulta más sencillo trabajar con una función de Green definida en el espacio de momentos. Ambas están relacionadas mediante transformadas de Fourier. Las funciones de Green de dos puntos solo dependen de diferencias  $x_i - x_f$  debido a la invarianza bajo translaciones, así que su transformada de Fourier solo dependerá de 1 momento.

Lo mismo ocurre en el formalismo de Matsubara. Es mucho más sencillo calcular los diagramas de Feynman en el espacio de momentos. Como ya dijimos, los diagramas de Feynman para este formalismo, sufren una pequeña modificación dada la presencia de temperatura. En

<sup>3</sup>Consultar *An Introduction to Quantum Field Theory*, pag. 102-104, ec. 4.71 [11]

este caso, los diagramas contienen las frecuencias de Matsubara que definiremos más adelante. Estas frecuencias son diferentes para bosones y fermiones. Para definir las, veamos algunas de las propiedades de las funciones de Green de dos puntos  $G_\beta$ .

- La función de Green de dos puntos depende solo de la diferencia  $\tau - \tau'$ .
- Cada variable de tiempo está entre  $0 \leq \tau, \tau' \leq \beta$ . Como consecuencia, el argumento de la función tiene el rango  $-\beta \leq \tau - \tau' \leq \beta$  con  $\beta = \frac{1}{T}$
- Un resultado que se puede ver de la relación *KMS* en la ecuación (1.5), es el siguiente:

$$G_\beta(0, \tau) = \pm G_\beta(\beta, \tau) \quad (1.14)$$

que muestra la (anti) periodicidad de las funciones de Green de dos puntos.

- Como la función  $G_\beta$  está definida en intervalos finitos, entonces la transformada de Fourier correspondiente puede tener solo frecuencias discretas  $\omega_n$ .

$$G_\beta(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} G_\beta(\omega_n) \quad (1.15)$$

donde

$$G_\beta(\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\beta(\tau) \quad (1.16)$$

- Aunque todos los modos enteros se permiten en el desarrollo de Fourier, solo los enteros pares contribuyen a la función de Green bosónica, mientras que los enteros impar contribuyen a la función de Green fermiónica. Esto se debe a las condiciones de (anti) periodicidad que satisface  $G_\beta$ .
- El último punto nos permite escribir las frecuencias de Matsubara, como:

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} & \text{para bosones} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{para fermiones} \end{cases}$$

con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

En el formalismo canónico de QFT, es posible determinar la forma del propagador aplicando la transformada de Fourier al espacio de momentos a la ecuación de movimiento de la partícula. Ahora que hemos establecido las propiedades que deben tener estas funciones y su transformada en la TFT, es posible determinar los propagadores térmicos de manera análoga.

El formalismo de Matsubara o de tiempo imaginario, descrito en esta sección también puede desarrollarse en el contexto de la integral de camino [5][6]. El tratamiento con integrales de camino de las teorías de campos es muy útil y la estrecha relación entre Mecánica Cuántica y Mecánica Estadística, como lo veremos a continuación, se hace evidente.

La amplitud de transición en QFT a  $T = 0$  tiene la representación funcional:

$$\langle \Phi(\vec{x}_2, t_2) | \Phi(\vec{x}_1, t_1) \rangle = \left\langle \Phi_2 | e^{-i\mathcal{H}(t_2-t_1)} | \Phi_1 \right\rangle = N' \int \mathcal{D}\Phi e^{i\mathcal{S}}, \quad (1.17)$$

donde  $\Phi$  es un campo arbitrario y  $N'$  es una constante de normalización.  $\mathcal{S}$  es la Acción que se define como

$$\mathcal{S}[\Phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}, \quad (1.18)$$

donde  $\mathcal{L}$  representa la densidad lagrangiana del sistema. La integral de camino está definida sobre trayectorias con los puntos extremos fijos

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}_1, t_1) &= \Phi_1, \\ \Phi(\vec{x}_2, t_2) &= \Phi_2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Pasamos del espacio de Minkowski al espacio Euclidiano mediante una rotación de Wick  $t \rightarrow -it$  y definimos la evolución temporal igual al inverso de la temperatura:

$$t_1 - t_2 = -i\beta \quad (1.20)$$

Con esta relación podemos conectar la formulación de la integral de camino de QFT, en el espacio Euclidiano, a la función de partición de la mecánica estadística:

$$N' \int \mathcal{D}\Phi e^{-i\mathcal{S}_E} = \mathcal{Z}(\beta), \quad (1.21)$$

el subíndice  $E$  se refiere a la Acción Euclidiana, donde los campos cumplen con las condiciones de (anti) periodicidad:

$$\Phi(\vec{x}, \beta) = \pm \Phi(\vec{x}, 0)$$

donde la elección del signo de la ecuación (1.14) va a depender de qué tipo de campo sea, bosónico o fermiónico. La formulación de integral de camino de la función de partición es bastante interesante ya que muestra cómo la descripción a  $T = 0$  y  $T \neq 0$  son cualitativamente similares. Los diagramas en este formalismo se obtienen de un desarrollo perturbativo de la integral de camino con la única diferencia de que las variables de campo tienen que satisfacer las condiciones de (anti) periodicidad. Esto ocasiona que los valores temporales sean discretos, como ya se vio.

En resumen, el formalismo de Matsubara posee las siguientes características:



- La función de partición se conecta a la integral de camino, donde la Acción corresponde a la Acción Euclidiana del sistema original con el intervalo temporal de integración finito.
- Los campos fundamentales de esta Acción Euclidiana deben satisfacer las condiciones de (anti) periodicidad, con un período de  $\beta$ .
- Las reglas de Feynman para ésta teoría pueden extraerse de la integral de camino. La diferencia entre QFT y TFT, radica en la dependencia del propagador con la temperatura  $T$ , mientras que los vértices entre las teorías son exactamente los mismos.

Gracias a este último punto, dada cualquier teoría cuántica de campo podemos describir perturbativamente, mediante diagramas de Feynman, fenómenos que ocurren en TFT. El propagador para los campos escalares<sup>4</sup> en el espacio de momentos es de la forma

$$\begin{aligned} G_{\beta}(\vec{k}, \omega_n) &= \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}, \\ &= \frac{1}{(4n^2\pi^2/\beta^2) + \vec{k}^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde  $\vec{k}$  es el momento y  $m$  es la masa de la partícula escalar.  $\omega_n$  son las frecuencias de Matsubara.

Es importante destacar que el formalismo de Matsubara ha sido desarrollado completamente en el contexto de sistemas en equilibrio, así que solo podemos describir procesos muy lentos en el tiempo que caracteriza la evolución del plasma en equilibrio<sup>5</sup>.

### 1.2.1. Autoenergía a temperatura finita.

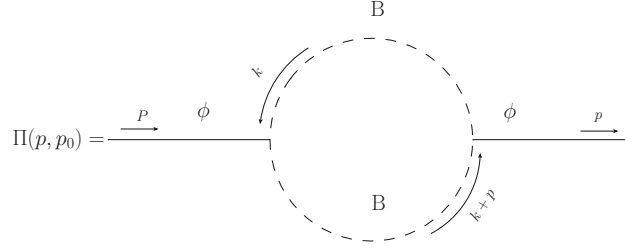
Para mostrar el desarrollo de una autoenergía a temperatura finita, vamos a trabajar con una teoría bosónica y escalar descrita por la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\Phi\partial^{\mu}\Phi - \frac{m^2}{2}\Phi^2 + \frac{1}{2}\partial_{\mu}B\partial^{\mu}B - \frac{M^2}{2}B^2 - \frac{g}{2}\Phi B^2, \quad (1.23)$$

donde  $B$  y  $\Phi$  son sus campos correspondientes a partículas masivas con masas  $M$  y  $m$  respectivamente. Dado que son campos escalares, su propagador es de la forma (1.22) y los vértices son iguales a los de temperatura cero. Si queremos calcular cantidades a temperatura finita, debemos tomar al tiempo como un parámetro imaginario, así la teoría se convierte en euclidiana. Los

<sup>4</sup>Un campo escalar es el descrito por la ecuación de Klein-Gordon que resulta en una teoría de bosones de espín 0[10].

<sup>5</sup>Según resultados de experimentos en el RHIC, en colisiones nucleares se estima que el plasma de quarks y gluones se encuentra en equilibrio aproximadamente en un tiempo del orden de  $10\text{fm} = 10^{-14}\text{s}$ .

Figura 1.1: Autoenergía del campo bosónico  $\Phi$ 

cálculos pueden realizarse de manera análoga al caso de temperatura cero, la única diferencia es que los valores de la variable temporal son discretos y por lo tanto, en lugar de una integral debemos hacer una suma sobre los valores discretos de energía:

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (1.24)$$

La autoenergía del campo  $\Phi$  en la figura (1.1) corresponde al último término de interacción de la ecuación (1.23). Esta autoenergía se construye utilizando las reglas de Feynman para un campo bosónico escalar. En este caso, tenemos dos patas que valen 1, 2 propagadores que están dados por la ecuación (1.22) y dos vértices que corresponden a la constante de acoplamiento  $\frac{g}{2}$  en la ecuación (1.23). Todos se multiplican y se integran respecto al momento  $k$ . Esto queda de la siguiente forma,

$$\Pi(\vec{p}, p_0) = \frac{g^2}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left(\frac{4n^2\pi^2}{\beta^2}\right) + E_k^2} \frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{\beta} + p_0\right)^2 + E_{\vec{k}+\vec{p}}^2} \quad (1.25)$$

donde

$$E_{\vec{k}} = (\vec{k}^2 + M^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.26)$$

$$E_{\vec{k}+\vec{p}} = [(\vec{k} + \vec{p})^2 + M^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Podemos reescribir la ecuación (1.25) como:

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{p}, p_0) = & \frac{g^2}{2\beta} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2 \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{k}} E_{\vec{k}+\vec{p}}} \left[ \frac{1}{n + \frac{\beta E_{\vec{k}}}{2\pi} i} - \frac{1}{n - \frac{\beta E_{\vec{k}}}{2\pi} i} \right] \\ & \times \left[ \frac{1}{n + \frac{\beta p_0}{2\pi} + \frac{\beta E_{\vec{k}+\vec{p}}}{2\pi} i} - \frac{1}{n + \frac{\beta p_0}{2\pi} - \frac{\beta E_{\vec{k}+\vec{p}}}{2\pi} i} \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

La sumatoria sobre  $n$  se evalua utilizando la representación en serie que surge del Teorema de Residuos (ver apéndice A.4) que establece que:

$$\sum_n \frac{1}{n+ix} \frac{1}{n+ix} = \frac{\pi}{x-y} [\coth(\pi x) - \coth(\pi y)]. \quad (1.28)$$

Introducimos este resultado a la expresión para la autoenergía (1.27), tomamos los valores discretos para  $p_0 = \frac{2n\pi}{\beta}$  y la periodicidad de la cotangente hiperbólica. Con esto obtenemos:

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{p}, p_0) = & \frac{g^2}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{E_{\vec{k}}} \coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right) \frac{1}{E_{\vec{k}+\vec{p}}^2 - (E_{\vec{k}} - ip_0)^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_{\vec{k}+\vec{p}}} \coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}+\vec{p}}}{2}\right) \frac{1}{E_{\vec{k}}^2 - (E_{\vec{k}+\vec{p}} - ip_0)^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Es importante destacar que la autoenergía no es una función analítica en el origen  $\vec{p} = 0$ . A temperatura finita, la invarianza de Lorentz se rompe por la elección del marco de referencia específico, por lo tanto, la amplitud puede depender de manera independiente de  $p_0$  y  $\vec{p}$ . Esto implica que los límites para  $p_0 \rightarrow 0$ ,  $\vec{p} \rightarrow 0$  y  $\vec{p} \rightarrow 0$ ,  $p_0 \rightarrow 0$  no necesariamente son iguales (ver apéndice A.6). Por ejemplo, el límite  $\vec{p} \rightarrow 0$ ,  $p_0 = 0$ , corresponde a tomar un límite estático, que permite obtener la masa para los campos eléctricos generada por la dinámica [4].

Una manera alternativa de ver a las autoenergías en temperatura finita es introduciendo la distribución térmica,

$$n(E_{\vec{k}}) = \frac{1}{e^{\beta E_{\vec{k}}} - 1}, \quad (1.30)$$

$$n(E_{\vec{k}+\vec{p}}) = \frac{1}{e^{\beta E_{\vec{k}+\vec{p}}} - 1}. \quad (1.31)$$

Las funciones de distribución (1.30) y (1.31) se obtienen de:

$$\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right) = 1 + 2n(E_{\vec{k}}), \quad (1.32)$$

así, podemos reescribir la ecuación (1.29) como

$$\begin{aligned} \Pi(\omega) = & \frac{g^2}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{k}} E_{\vec{k}+\vec{p}}} \left[ (1 + n(E_{\vec{k}}))(1 + n(E_{\vec{k}+\vec{p}})) - n(E_{\vec{k}})n(E_{\vec{k}+\vec{p}}) \right] \\ & \times \left( \frac{1}{\omega + E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{p}}} - \frac{1}{\omega - E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{p}}} \right) \\ & + (n(E_{\vec{k}})(1 + n(E_{\vec{k}+\vec{p}})) - (n(E_{\vec{k}+\vec{p}})(1 + n(E_{\vec{k}}))) \\ & \times \left( \frac{1}{\omega - E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{p}}} - \frac{1}{\omega + E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{p}}} \right) \Big]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Observemos que para este ejemplo:

- A temperatura finita, la autoenergía debe ser pesada por factores de estadística.
- Si estuviéramos trabajando con campos de fermiones, aparte de la estructura espinorial, los factores estadísticos tendrían la forma  $(1 - n_F(E_{\vec{k}}))$ , que es el "Factor de Bloqueo de Pauli", representando que hay una distribución real de fermiones en el medio de densidad  $n$ . Así que la densidad disponible de los estados para los posibles decaimientos se suprime.
- Hay partículas reales presentes en un medio y como consecuencia hay canales disponibles que no lo están o no son posibles en  $T = 0$ .

Por ejemplo, con la densidad lagrangiana de la ecuación (1.23) para esta teoría podemos analizar el proceso

$$\Phi \longrightarrow B + B$$

que ocurre con un factor estadístico

$$(1 + n(E_{\vec{k}}))(1 + n(E_{\vec{k}+\vec{p}})).$$

Como en el medio térmico hay  $B$ 's reales, tenemos también el proceso inverso,

$$B + B \longrightarrow \Phi$$

éste ocurre con el factor estadístico:

$$n(E_{\vec{k}})n(E_{\vec{k}+\vec{p}})$$

Notamos que estos dos procesos están contenidos en la ecuación (1.33), donde se observa que la razón de decaimiento total para  $\Phi$  es la diferencia entre ellos. Los otros términos representan los procesos adicionales a temperatura finita:

$$\Phi + B \longrightarrow B$$

$$B \longrightarrow \Phi + B.$$

que ocurren con el factor estadístico:

$$(n(E_{\vec{k}})(1 + n(E_{\vec{k}+\vec{p}})) - (n(E_{\vec{k}+\vec{p}})(1 + n(E_{\vec{k}}))).$$

En este capítulo nuestra discusión se ha concentrado en el formalismo de tiempo imaginario, o de Matsubara, aplicado a los sistemas estadísticos en equilibrio térmico. Todas las herramientas y propiedades mostradas en este capítulo son utilizadas para determinar la pérdida de energía  $dE/dx$  de un muón a través de un plasma de QED en equilibrio térmico.

# Capítulo 2

*Pérdida de energía por unidad de camino recorrido.*

Este capítulo consiste en el cálculo de la pérdida de energía  $\frac{dE_p}{dx}$  de un muón propagándose a través de un plasma de QED formado de electrones, positrones y fotones. El cálculo está dado por dos contribuciones: La primera es la *Hard*, que está determinada por el diagrama de Feynman a nivel árbol que se muestra en la figura (2.1). La segunda contribución es la *Soft*, determinada por un diagrama de Feynman que contiene el propagador efectivo de un fotón respresentado en la figura (2.2). Esta idea fue propuesto por Braaten y Yuan [1] donde se introduce el momento  $q^*$  arbitrario para separar las regiones del momento  $q$  transferido en las interacciones:  $q > q^*$  para la contribución *Hard* y  $q < q^*$  para la contribución *Soft*.

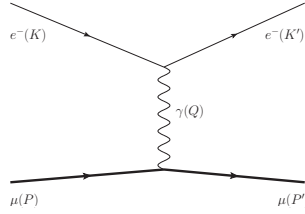


Figura 2.1: Diagrama de la contribución *Hard* para  $dE/dx$ .

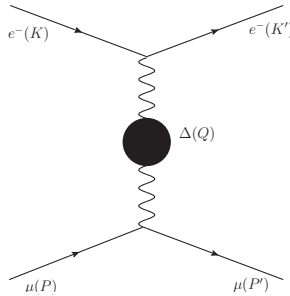


Figura 2.2: Autoenergía  $\Pi(P)$  de la contribución *Soft* para  $dE/dx$ .

El plasma que el muón atraviesa es isótropo y está en equilibrio térmico a una temperatura  $T$ . Dentro, el muón interactúa con un electrón térmico de masa despreciable tal que  $m_e \ll eT \ll M, P$ , así que trabajaremos a primer orden en  $\frac{T}{M}$  y  $\frac{T}{P}$ . Inicialmente, el muón tiene un 4-momento  $P = (E_p, \vec{p})$  y una velocidad  $\vec{v}$ , mientras que el electrón tiene un 4-momento inicial  $K = (E_k, \vec{k})$ . Durante la interacción intercambian un fotón que posee un 4-momento  $Q = (\omega, \vec{q})$

donde  $\omega = E'_k - E_k$  es la energía del fotón y  $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$  es el momento transferido. El muón sale con un 4-momento  $P' = (E'_p, \vec{p}')$  y una velocidad  $\vec{v}'$ , y el electrón térmico con un 4-momento  $K' = (E'_k, \vec{k}')$ .

¿Cómo podemos saber, teóricamente, cuánta energía pierde el muón en el proceso? Como primera aproximación, uno podría decir que la diferencia de energías  $\Delta E = E_p - E'_p$  es la energía perdida. Ya que no todos poseen la misma energía, se debe considerar un rango de energías para los muones en el estado inicial y final. Así que es necesario obtener un *promedio* de energía integrando sobre un rango  $\Delta E$ .

En la siguiente sección vamos a comenzar por el cálculo de la pérdida de energía de la contribución *Hard*, seguido de la *Soft*.

## 2.1. Cálculo de $dE/dx$

Usando la *Regla Dorada* de Fermi [10][11], la amplitud de transición es

$$\begin{aligned} \Gamma(E_p) = & \frac{1}{2E_p} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'_p} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_k} n_F(E_k) \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E'_k} [1 - n_F(E'_k)] \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4(P + K - P' - K') \frac{1}{2} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Podemos ver que las integrales de los factores de flujo, solo son sobre la parte espacial de los vectores de 4-momento salientes. La  $\delta$  garantiza la conservación del momento del proceso. El término  $n_F(E_k) = (e^{E_k/T} + 1)^{-1}$  viene del formalismo de Matsubara visto en el Capítulo 1 y se introduce para las partículas térmicas entrantes, mientras que para las salientes, tenemos el término  $1 - n_F(E'_k)$ . Usando  $\Gamma$  el promedio de la energía perdida es:

$$\Delta E_p = \frac{1}{\Gamma} \int_M^\infty dE'_p (E_p - E'_p) \frac{d\Gamma}{dE'_p}(E_p, E'_p) \quad (2.2)$$

Como el plasma se conforma por una distribución de partículas, es necesario integrar sobre la diferencia de energías y el diferencial de la razón de decaimiento con respecto a la energía del estado final del muón  $\frac{d\Gamma}{dE'_p}$ . Ésta integral es respecto a  $E'_p$  porque dado un estado inicial, integramos para todos los valores de energía posibles en el estado final. El tiempo promedio de la interacción del muón con el plasma es  $1/\Gamma$ , por lo tanto la distancia promedio que viaja es  $\Delta x = v/\Gamma$ , donde  $v = |\vec{v}'|$ . Así que la energía perdida por unidad de distancia recorrida es

$$-\frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{v} \int_M^\infty dE'_p (E_p - E'_p) \frac{d\Gamma}{dE'_p}(E_p, E'_p). \quad (2.3)$$

El signo menos indica que si la energía del estado final del sistema  $E'_p$  es mayor que la energía del estado inicial, el muón gana energía del plasma. Caso contrario ocurre cuando la energía del estado final es menor que la del estado inicial.

Para el cálculo de la pérdida de energía necesitamos hacer algunas consideraciones. La primera, es considerar que estamos trabajando con un plasma isótropo. Esto significa que no importa la dirección de propagación del muón. Además, la masa de los electrones y positrones que conformen este plasma debe ser muy pequeña en comparación a la temperatura del plasma. Las velocidades del muón entrante y saliente están dadas por

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E_p}, \quad (2.4)$$

$$\vec{v}' = \frac{\vec{p}'}{E'_p}. \quad (2.5)$$

Para la energía final del muón en ambas contribuciones, tomamos la aproximación de la energía como,

$$E'_p = E_p - \vec{v} \cdot \vec{q}. \quad (2.6)$$

En la contribución *Soft*, el fotón intercambiado interactúa con el medio, por lo tanto se genera una masa térmica debido a la dinámica. Esta masa es proporcional a la temperatura  $m_\gamma \propto eT$ . Asumiendo que el momento transferido es muy pequeño en esta región, es posible aproximar la energía final como,

$$E'_k \simeq E_k - \hat{k} \cdot \vec{q}. \quad (2.7)$$

Una vez establecidas estas consideraciones, pasamos a determinar la pérdida de energía en ambas regiones.

### 2.1.1. Contribución *Hard*.

La pérdida de energía en la aproximación *Hard* resulta de las ecuaciones (2.1) y (2.3).

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} &= \frac{1}{E_p} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'_p} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_k} n_F(E_k) \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^4 2E'_k} [1 - n_F(E'_k)] \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(P + K - P' - K') \frac{1}{2} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 \frac{\omega}{v} \Theta(q - q^*) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde la función  $\Theta(q - q^*)$  impone la restricción de la región *Hard*.

La ecuación (2.1) corresponde a los diagramas de las figuras (2.1) y (2.2). A parte de esta contribución, también tenemos una que viene de la dispersión de Compton. Ésta consta de la

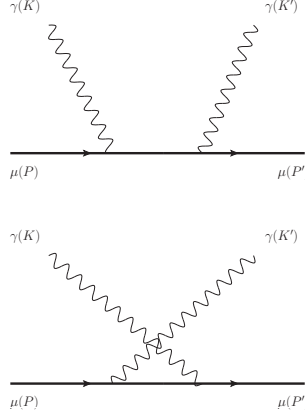


Figura 2.3: Diagramas de dispersión Compton

suma de los diagramas en la figura (2.3). Sin embargo está suprimida por un factor  $(T/M)^2$  (ver apéndice C.1) con respecto a la dispersión de Coulomb [1][7]. Por lo tanto la única contribución a la pérdida de energía en la región *Hard* es la correspondiente a la figura (2.1). Para determinar  $dE/dx$  en la región *Hard*, es necesario calcular la amplitud de probabilidad  $\mathcal{M}$  de este proceso. Usando las reglas de Feynman para QED (ver apéndice B) su amplitud correspondiente es:

$$i\mathcal{M} = \bar{U}(K')(-ie\gamma^\mu)V(K) \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{Q^2} \right) V(P)(-ie\gamma^\nu)\bar{U}(P'). \quad (2.9)$$

Donde  $U$  y  $V$  son las funciones de estado de las partículas interactuantes. La amplitud conjugada es de la forma,

$$-i\mathcal{M}^* = -i\frac{e^2}{Q^2}[\bar{V}(K)\gamma^\nu U(K')][U(P')\gamma_\nu \bar{V}(P)]. \quad (2.10)$$

Por lo tanto el cuadrado es,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{Q^4}[\bar{U}(K')\gamma^\mu V(K)\bar{V}(K)\gamma^\nu U(K')][V(P)\gamma_\mu \bar{U}(P')U(P')\gamma_\nu \bar{V}(P)]. \quad (2.11)$$

Sumamos sobre el espín de los estados iniciales y finales para obtener,

$$\frac{1}{2} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2Q^4} Tr[K'\gamma^\mu K\gamma^\nu] Tr[(P-M)\gamma_\mu (P'+M)\gamma_\nu]. \quad (2.12)$$

Calculando las trazas (ver apéndice C.2) obtenemos,

$$\frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 16 \frac{e^4}{Q^4} (K' \cdot PK \cdot P' + K' \cdot P'K \cdot P + K' \cdot KM^2) \quad (2.13)$$

$$= 16 \frac{e^4}{Q^4} [(E_p E_k - \vec{p} \cdot \vec{k})(E'_p E'_k - \vec{p}' \cdot \vec{k}') + (E_p E'_k - \vec{p} \cdot \vec{k}') (E'_p E_k - \vec{p}' \cdot \vec{k}) + M^2 K' \cdot K], \quad (2.14)$$



donde utilizamos la definición de 4-momento.

Considerando que la velocidad del muón entrante y saliente está dada por  $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E_p}$  y  $\vec{v}' = \frac{\vec{p}'}{E_p'}$  respectivamente y que  $\vec{v} = \vec{v}'$ , tenemos la aproximación,

$$E_p' \simeq E_p - \vec{v} \cdot \vec{q}, \quad (2.15)$$

podemos escribir la ecuación (2.14) como,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 16 \frac{e^4}{Q^4} \{ & (E_p E_k - E_p \vec{v} \cdot \vec{k})(E_p' E_k' - E_p' \vec{v} \cdot \vec{k}') \\ & + (E_p E_k' - E_p \vec{v} \cdot \vec{k}')(E_p' E_k - E_p' \vec{v} \cdot \vec{k}') + M^2 K \cdot K' \}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Desarrollando el cuadrado de la amplitud de probabilidad (ver apéndice C.3) factorizando  $E_p E_p'$  y expresando  $M^2 = E_p^2 - \vec{p}^2$ , obtenemos

$$\frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 16 \frac{e^4}{Q^4} E_p E_p' \left[ 2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})(E_k' - \vec{v} \cdot \vec{k}') + (1 - v^2) K \cdot K' \frac{E_p}{E_p'} \right], \quad (2.17)$$

donde podemos identificar  $K \cdot K'$  como,

$$K \cdot K' = -\frac{Q^2}{2} \quad (2.18)$$

ya que  $m_e$  es despreciable. Si  $E_p' \gg \vec{v} \cdot \vec{q}$ , podemos expresar la ecuación (2.17) de la siguiente manera,

$$\frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 16 \frac{e^4}{Q^4} E_p E_p' \left[ 2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})(E_k' - \vec{v} \cdot \vec{k}') - \frac{1 - v^2}{2} Q^2 \right]. \quad (2.19)$$

Introducimos el resultado (2.19) en la ecuación (2.8) e integramos sobre el momento  $p'$  utilizando la función delta, obtenemos la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} = & \frac{4\pi e^4}{v} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k} n_F(E_k) \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k'} [1 - n_F(e_k')] \\ & \times \frac{\omega}{(\omega^2 - q^2)^2} \Theta(q - q^*) \delta(E_p + E_k - E_p' - E_k') \\ & \times \left[ 2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})(E_k' - \vec{v} \cdot \vec{k}') - \frac{1 - v^2}{2} (\omega^2 - q^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Utilizando conservación de la energía, así como la aproximación en la ecuación (2.15) podemos escribir el argumento de la delta en términos de la energía, el momento del fotón y la velocidad del muón, así la pérdida de energía queda como sigue

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} = & 4\pi \frac{e^4}{v} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k} n_F(E_k) \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k'} [1 - n_F(E_k')] \frac{\omega}{(\omega^2 - q^2)^2} \Theta(q - q^*) \\ & \times \delta(\omega - \vec{v} \cdot \vec{q}) \left[ 2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})(E_k' - \vec{v} \cdot \vec{k}') - \frac{1 - v^2}{2} (\omega^2 - q^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

En el término del factor de Pauli  $[1 - n_F(e'_k)]$ ,  $n_F(E'_k)$  puede ser suprimido ya que el término correspondiente en el integrando es impar ante el cambio de  $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$  y su integral se reduce a cero. Con esto obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} &= 4\pi \frac{e^4}{v} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k} n_F(E_k) \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{E'_k} \frac{\omega}{(\omega^2 - q^2)^2} \Theta(q - q^*) \\ &\quad \times \delta(\omega - \vec{v} \cdot \vec{q}) [2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})(E'_k - \vec{v} \cdot \vec{k}') - \frac{1-v^2}{2}(\omega^2 - q^2)] \end{aligned} \quad (2.22)$$

además, por conservación de 3-momento tenemos,

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \rightarrow \vec{k}' = \vec{q} + \vec{k}.$$

Haciendo el cambio de  $\vec{k}'$  a  $q$  en la pérdida de energía, encontramos,

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} &= 4\pi \frac{e^4}{v} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k} n_F(E_k) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega + E_k} \frac{\omega}{(\omega^2 - q^2)^2} \Theta(q - q^*) \\ &\quad \times \delta(\omega - \vec{v} \cdot \vec{q}) [2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})(\omega + E_k - \vec{v} \cdot \vec{q} - \vec{v} \cdot \vec{k}) - \frac{1-v^2}{2}(\omega^2 - q^2)]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

De aquí se sigue,

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} &= 4\pi \frac{e^4}{v} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k} n_F(E_k) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega + E_k} \frac{\omega}{(\omega^2 - q^2)^2} \Theta(q - q^*) \\ &\quad \times \delta(\omega - \vec{v} \cdot \vec{q}) [2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})^2 + 2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})(\omega - \vec{v} \cdot \vec{q}) - \frac{1-v^2}{2}(\omega^2 - q^2)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Si integramos respecto a  $q$  en la expresión anterior, el término de la integral que depende de  $(\omega - \vec{v} \cdot \vec{q})$  se anula por la definición de la Delta de Dirac. Esto nos permite simplificar la expresión (2.24) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} &= 4\pi \frac{e^4}{v} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k} n_F(E_k) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega + E_k} \frac{\omega}{(\omega^2 - q^2)^2} \Theta(q - q^*) \\ &\quad \times \delta(\omega - \vec{v} \cdot \vec{q}) [2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})^2 - \frac{1-v^2}{2}(\omega^2 - q^2)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Trabajando en coordenadas esféricas de la variable  $q$ , obtenemos la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} &= \frac{2e^4}{(2\pi)^5 v} \int d^3k \frac{1}{E_k} n_F(E_k) \int_{q^*}^{\infty} q^2 dq \int d\Omega_q \frac{\delta(\omega - \vec{v} \cdot \vec{q})}{|\vec{q} + \vec{k}|} \\ &\quad \times \frac{\omega}{(\omega^2 - q^2)^2} [2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})^2 - \frac{1-v^2}{2}(\omega^2 - q^2)], \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde ahora tenemos que  $\omega = |\vec{q} + \vec{k}| - E_k$ . Para simplificar la expresión, debemos recordar que  $dE/dx$  no depende de la dirección de la velocidad  $\vec{v}$ . Así, podemos escoger que  $\vec{v}$  esté sobre el

eje  $z$ . Esto nos va a permitir reescribir la función delta de la siguiente manera [12].

$$\delta(|\vec{q} + \vec{k}| - E_k - \vec{v} \cdot \vec{q}) = \frac{\delta(\phi_q - \phi_0) \Theta(E_k + \vec{v} \cdot \vec{q}) 2|\vec{q} + \vec{k}|}{q \sqrt{4E_k^2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_q - [q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (E_k \cos \theta_k - kv)]^2}} \quad (2.27)$$

donde  $\phi_0$  es la solución a la ecuación

$$\cos(\phi_0 - \phi_k) = -\frac{q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (k \cos \theta_k - kv)}{2k \sin \theta_k \sin \theta_q}. \quad (2.28)$$

Hasta este paso, podemos sustituir la ecuación (2.27) dentro de la ecuación (2.26) y realizar la integración con respecto a  $\phi_0$ . Con esto se obtiene la siguiente expresión,

$$\left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} = \frac{2e^4}{(2\pi)^5 v} \int d^3 k \frac{n_F(E_k)}{E_k} \int_{q^*}^{\infty} q dq \int_{-1}^1 d \cos \theta_q 4 \Theta(k + vq \cos \theta_q) \quad (2.29)$$

$$\times \frac{\Theta(4k^2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_q - [q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (k \cos \theta_k - kv)]^2)}{\sqrt{4k^2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_q - [q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (k \cos \theta_k - kv)]^2}} \quad (2.30)$$

$$\times \frac{\omega}{(\omega^2 - q^2)^2} \left[ 2(E_k - \vec{v} \cdot \vec{k})^2 + \frac{1 - v^2}{2} (\omega^2 - q^2) \right]. \quad (2.31)$$

El resultado para la integral respecto a  $\phi_q$  se encuentra restringido por la función paso:

$$\Theta(4k^2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_q - [q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (k \cos \theta_k - kv)]^2).$$

Cambiando la integral respecto a  $\vec{k}$  a coordenadas esféricas, y considerando que hicimos  $m_e = 0$ , podemos aproximar la magnitud del momento  $k$  a la energía  $E_k$ ,

$$\left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} = \frac{2e^4}{(2\pi)^5 v} \int dk k n_F(k) \int d\Omega_k \int_{q^*}^{\infty} q dq \int_{-1}^1 d \cos \theta_q 4 \Theta(k + vq \cos \theta_q) \times \frac{\Theta(4k^2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_q - [q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (k \cos \theta_k - kv)]^2)}{\sqrt{4k^2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_q - [q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (k \cos \theta_k - kv)]^2}} \times \frac{qv \cos \theta_q}{(v^2 q^2 \cos^2 \theta_q - q^2)^2} \left[ 2(k - \vec{v} \cdot \vec{k})^2 + \frac{1 - v^2}{2} (v^2 q^2 \cos^2 \theta_q - q^2) \right]. \quad (2.32)$$

Vamos a asumir que la magnitud del 3-momento  $k$  es una fracción del momento transferido en la dirección  $z$ ,  $k = qy$ , con este cambio de variable en la integral respecto a  $k$  obtenemos:

$$\left( -\frac{dE_p}{dx} \right)_{hard} = \frac{2e^4}{(2\pi)^5 v} \int_0^{\infty} dy y \int_{-1}^1 d \cos \theta_k \int_0^{2\pi} d\phi_k \int_{q^*}^{\infty} q n_F(q) dq \int_{-1}^1 d \cos \theta_q 4 \Theta(y + vq \cos \theta_q) \times \frac{\Theta(4k^2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_q - [q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (k \cos \theta_k - kv)]^2)}{\sqrt{4k^2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_q - [q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (k \cos \theta_k - kv)]^2}} \times \frac{v \cos \theta_q}{(v^2 \cos^2 \theta_q - 1)^2} \left[ 2y^2 (1 - v \cos \theta_k)^2 + \frac{1 - v^2}{2} (v^2 \cos^2 \theta_q - 1) \right], \quad (2.33)$$

en donde se ha simplificado la expresión dejando solamente una potencia en la variable  $q$ . Esto permite realizar la integral  $\int_{q^*}^{\infty} q n_F(q)$  para obtener,

$$\int_{q^*}^{\infty} q \left( e^{\frac{qy}{T}} + 1 \right)^{-1} = \frac{q^2}{2} - \frac{qT}{y} \ln \left( 1 + e^{\frac{qy}{T}} \right) - \frac{T^2}{y^2} \text{Li}_2 \left( -e^{\frac{qy}{T}} \right) \quad (2.34)$$

donde  $\text{Li}_2$  pertenece a las funciones Polilogarítmicas definidas como

$$\text{Li}_s(y) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t/y - 1} dt, \quad (2.35)$$

utilizando una de las propiedades de los polilogaritmos que establece que para todo  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  se tiene,

$$\text{Li}_n(x) + (-1)^n \text{Li}_n(1/x) = \left( \frac{2i\pi}{n!} \right)^n \text{B}_n \left( \frac{1}{2} + \frac{\ln(x)}{2i\pi} \right), \quad (2.36)$$

la ecuación (2.34) se puede reescribir como:

$$\int_{q^*}^{\infty} q \left( e^{\frac{qy}{T}} + 1 \right)^{-1} = \tilde{q}^2 T^2 \frac{\tilde{q}^* y \ln(1 + e^{-\tilde{q}^* y}) - \text{Li}_2(-e^{-\tilde{q}^* y})}{(\tilde{q}^* y)^2}, \quad (2.37)$$

donde  $\tilde{q}^* = \frac{q^*}{T}$ .

Sustituyendo la ecuación (2.37) e integrando con respecto a  $\phi_k$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} &= \frac{e^4}{2\pi^4 v} \int_0^{\infty} dy y F_1(\tilde{q}^* y) \int_{-1}^1 d \cos \theta_k \int_{-1}^1 d \cos \theta_q \Theta(y + vq \cos \theta_q) \\ &\times \frac{\Theta(4k^2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_q - [q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (k \cos \theta_k - kv)]^2)}{\sqrt{4k^2 \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_q - [q(1 - v^2 \cos^2 \theta_q) + 2 \cos \theta_q (k \cos \theta_k - kv)]^2}} \\ &\times \frac{v \cos \theta_q}{(v^2 \cos^2 \theta_q - 1)^2} \left[ 2y^2 (1 - v \cos \theta_k)^2 + \frac{1 - v^2}{2} (v^2 \cos^2 \theta_q - 1) \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Integrando obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{yv} \int_{|1-y|-y}^1 d\omega \Theta(v^2 - \omega^2) \\ \times \omega \left[ \frac{3\omega^2}{4} - \frac{v^2}{4} + 3y(y + \omega) - \frac{1 - v^2}{2} \frac{1}{1 - \omega^2} - (1 - v^2) \frac{y(y + \omega)}{1 - \omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Este es un resultado del trabajo de Paul Romatschke y Michael Strickland [12] donde realizaron ésta integral para la pérdida de energía de un plasma de QED anisótropo. Ellos introducen en  $n_F(k)$  un parámetro  $\xi$  el cual le da anisotropía al plasma. Introducimos el resultado (2.39) en la expresión (2.38) y obtenemos,

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} &= \frac{e^4}{2\pi^3 v^2} \int_0^{\infty} dy y F_1(\tilde{q}^* y) \int_{|1-y|-y}^1 d\omega \Theta(v^2 - \omega^2) \\ &\times \omega \left[ \frac{3\omega^2}{4} - \frac{v^2}{4} + 3y(y + \omega) - \frac{1 - v^2}{2} \frac{1}{1 - \omega^2} - (1 - v^2) \frac{y(y + \omega)}{1 - \omega^2} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Con esto, la integral sobre  $\omega$  se puede realizar analíticamente [12] utilizando lo siguiente,

$$\int_0^\infty dy \int_{|1-y|-y}^1 d\omega \Theta(v^2 - \omega^2) = \int_{\frac{1-v}{2}}^{\frac{1+v}{2}} dy \int_{1-2y}^v d\omega + \int_{\frac{1+v}{2}}^\infty dy \int_{-v}^v d\omega. \quad (2.41)$$

Con esto obtenemos

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} &= \frac{e^4}{2\pi^3 v^2} \int_{\frac{1-v}{2}}^{\frac{1+v}{2}} dy F_1(\tilde{q}^* y) \int_{1-2y}^v d\omega + \int_{\frac{1+v}{2}}^\infty dy F_1(\tilde{q}^* y) \int_{-v}^v d\omega \\ &\times \omega \left[ \frac{3\omega^2}{4} - \frac{v^2}{4} + 3y(y + \omega) - \frac{1-v^2}{2} \frac{1}{1-\omega^2} - (1-v^2) \frac{y(y+\omega)}{1-\omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Los límites de integración surgen a partir de tomar las restricciones del momento  $q$ , ( $-v < \omega < +v$ ), en la función  $\Theta$ . La restricción para el momento transferido  $q > q^*$  y  $\omega > 1 - 2y$  se sigue de  $\omega = k' - k$  y  $|\vec{q}| = |\vec{k}' - \vec{k}|$ .

Si integramos y evaluamos en el primer intervalo de  $\omega$ ,  $[-v, +v]$  obtenemos:

$$I = 2y(v - (1 - v^2) \tanh^{-1} v). \quad (2.43)$$

Ahora evaluamos las 6 integrales en el segundo intervalo de  $\omega$   $[1 - 2y, v]$  y sumamos:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{16} \left[ -16y^4 + 32y^2 + (v^4 + 2v^2 - 3) - 8y(1 - v(2 + v)) \right. \\ &\quad + 4(1 - v^2) \left[ 4y (\tanh^{-1}(1 - 2y) - \tanh^{-1} v) \right. \\ &\quad \left. \left. + (2y^2 + 1)(\ln(4y(y - 1)) - \ln(v^2 - 1)) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Integramos estos resultados respecto a la variable  $y$ ,

$$I' = \int I dy \quad (2.45)$$

$$J' = \int J dy, \quad (2.46)$$

evaluamos los límites correspondientes en las ecuaciones (2.45) y (2.46) y sumamos para obtener la siguiente expresión,

$$\begin{aligned}
(I' + J') = & \frac{\pi^2 T^2}{144} \left[ \left( 1 - \gamma + \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \left( 288v + 72 \ln \left( -\frac{1-v}{1+v} \right) - 72 \ln \left( -\frac{1-v}{1+v} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 72(1-v^2) \ln \left( -\frac{1+v}{1-v} \right) \right) + (-24v + 24(1-v^2) \tanh^{-1}[v]) \ln(q^*) \right. \\
& + 3(1-v^2) \left( \ln \left( T \frac{1-v}{1+v} \right) - \ln \left( T \frac{1+v}{1-v} \right) \right) + 4v(3-4v^2) \\
& + 6 \ln \left( \frac{4T}{1+v} \right) \left( 2v + (1-v^2) \ln \left( -\frac{1-v}{1+v} \right) \right) \\
& + 6 \ln \left( \frac{4T}{1-v} \right) \left( 2v - (1-v^2) \ln \left( -\frac{1+v}{1-v} \right) \right) \\
& \left. - 6(1-v^2) \left( \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1-v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1+v} \right) \right) \right]. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

Manipulando algebraicamente podemos simplificar esta expresión (ver apéndice C.7) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
(I' + J') = & \frac{\pi^2 T^2}{6} \left[ \left( v + \frac{1}{2}(1-v^2) \ln \frac{1-v}{1+v} \right) \left( \ln \frac{4T}{q^*} + \frac{3}{2} - \gamma + \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{1}{2} \ln(1-v^2) \right) \right. \\
& \left. - \frac{2}{3}v^3 - \frac{1}{4}(1-v^2) \left( \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1-v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1+v} \right) \right) \right]. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Introducimos el resultado en la ecuación (2.42) para obtener,

$$\begin{aligned}
\left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} = & \frac{e^4 T^2}{24\pi} \left[ \left( \frac{1}{v} + \frac{1-v^2}{2v^2} \ln \frac{1-v}{1+v} \right) \left( \ln \frac{4T}{q^*} + \frac{3}{2} - \gamma + \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{1}{2} \ln(1-v^2) \right) \right. \\
& \left. - \frac{2}{3}v - \frac{1-v^2}{4v^2} \left( \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1-v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1+v} \right) \right) \right]. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Utilizando  $E/M = 1/\sqrt{1-v^2}$ , reescribimos (2.49)

$$\left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{hard} = \frac{e^4 T^2}{24\pi} \left[ \left( \frac{1}{v} + \frac{1-v^2}{2v^2} \ln \frac{1-v}{1+v} \right) \left( \ln \frac{T}{q^*} + \ln \frac{E}{M} + F_{hard}(v) \right) \right], \tag{2.50}$$

donde

$$F_{hard}(v) = \ln 4 + \frac{3}{2} - \gamma + \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{8v^3 + 3(1-v^2) \left[ \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1-v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1+v} \right) \right]}{6 \left[ 2v + (1-v^2) \ln \frac{1-v}{1+v} \right]}, \tag{2.51}$$

una vez que hemos determinado la contribución *hard*, podemos proceder a calcular la contribución *Soft*.

### 2.1.2. Contribución *Soft*.

El proceso en la región del espacio fase, donde el fotón intercambiado tiene momento *Soft*, está representado en la figura (2.4). Ya que es un momento transferido muy pequeño, el fotón tiene

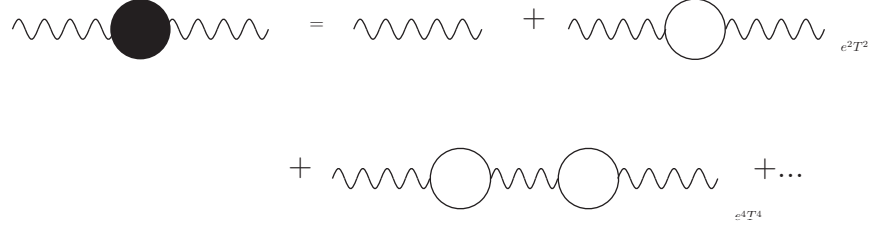


Figura 2.4: Propagador efectivo del fotón.

posibilidades de interactuar con partículas del medio. Por lo tanto, el propagador del fotón debe ser reemplazado por un propagador efectivo  $\Delta^{\mu\nu}(Q)$  que se obtiene sumando la serie geométrica de todas las autoenergías, ver figura (2.2). La contribución *Hard* y *Soft* a la pérdida de energía son invariantes de norma de manera independiente [1][7]. En la región *Soft* se deben considerar los efectos longitudinales y transversales en la propagación. Por lo tanto, la norma más conveniente para evaluar la contribución *soft* es la de Coulomb, donde las únicas componentes diferentes de cero para el propagador efectivo están dadas por[1][13]:

$$\Delta^{00}(Q) = \Delta_l(\omega, q) \quad (2.52)$$

$$\Delta^{ij}(Q) = \Delta_t(\omega, q)(\delta^{ij} - \hat{q}^i \hat{q}^j) \quad (2.53)$$

donde  $\hat{q}$  es el vector unitario del momento transferido y,

$$\Delta_l(\omega, q)^{-1} = q^2 - \frac{3}{2}m_\gamma^2 \left[ \frac{\omega}{q} \ln \frac{\omega + q}{\omega - q} - 2 \right], \quad (2.54)$$

$$\Delta_t(\omega, q)^{-1} = \omega^2 - q^2 + \frac{3}{2}m_\gamma^2 \left[ \frac{\omega(\omega^2 - q^2)}{2q^3} \ln \frac{\omega + q}{\omega - q} - \frac{\omega^2}{q^2} \right]. \quad (2.55)$$

Para escribir la pérdida de energía *Soft* vamos a partir de la ecuación (2.8), donde de manera similar a la *Hard* y con la aproximación de la energía,

$$E'_k = E_k - \hat{k} \cdot \vec{q}, \quad (2.56)$$

la expresión queda de la siguiente forma,

$$\left[ -\frac{dEp}{dx} \right]_{soft} = \frac{\pi}{4vE_p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 E_k} n_F(E_k) \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 E'_k} [1 - n_F(E'_k)] \delta(\omega - \hat{k} \cdot \vec{q}) \frac{1}{2} \omega \sum_s |\mathcal{M}|^2 \Theta(q^* - q), \quad (2.57)$$

donde ya hemos simplificado. Además, aplicando la aproximación de la energía (2.56) el argumento de la función delta es diferente al argumento en la función delta de la región *Hard* y la función paso ahora está limitando el cálculo a la región *Soft*.

Para el cálculo de la amplitud, vamos a utilizar la misma notación que utilizamos en el caso *Hard* así como la misma convención de momentos para las partículas del proceso. Siguiendo las reglas de Feynman, la amplitud *Soft* es de la siguiente forma:

$$i\mathcal{M} = e^2[\bar{U}(K')\gamma^\mu V(K)\Delta^{\mu\nu}(Q)V(P)\gamma^\nu \bar{U}(P')] \quad (2.58)$$

Sustituyendo el propagador efectivo de las ecuaciones (2.52) y (2.53),

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= e^2\Delta_l(Q)\bar{U}(K')\gamma^0 V(K)v(P)\gamma^0 \bar{U}(P') \\ &+ e^2\Delta_t(Q)(\delta^{ij} - \hat{q}^i\hat{q}^j)\bar{U}(K')\gamma^i V(K)V(P)\gamma^j \bar{U}(P') \end{aligned} \quad (2.59)$$

El conjugado de la amplitud es:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}^* &= e^2\Delta_l^*(Q)\bar{V}(K)\gamma^0 U(K')u(P')\gamma^0 \bar{V}(P) \\ &+ e^2\Delta_t^*(Q)(\delta^{mn} - \hat{q}^m\hat{q}^n)\bar{V}(K)\gamma^m U(K')U(P')\gamma^n \bar{V}(P) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Calculamos el cuadrado y sumamos sobre el espín (ver apéndice D.1). El resultado es,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{2} [|\Delta_l(Q)|^2 \text{Tr}[(\mathcal{P}' + M)\gamma^0(\mathcal{P} - M)\gamma^0] \text{Tr}[\mathcal{K}'\gamma^0 \mathcal{K}\gamma^0] \\ &+ |\Delta_t(Q)|^2 (\delta^{ij} - \hat{q}^i\hat{q}^j)(\delta^{mn} - \hat{q}^m\hat{q}^n) \text{Tr}[(\mathcal{P}' + M)\gamma^i(\mathcal{P} - M)\gamma^m] \text{Tr}[\mathcal{K}'\gamma^j \mathcal{K}\gamma^n] \\ &+ \Delta_l\Delta_t^*(\delta^{mn} - \hat{q}^m\hat{q}^n) \text{tr}[(\mathcal{P}' + M)\gamma^0(\mathcal{P} - M)\gamma^m] \text{Tr}[\mathcal{K}'\gamma^0 \mathcal{K}\gamma^n] \\ &+ \Delta_l^*\Delta_t(\delta^{ij} - \hat{q}^i\hat{q}^j) \text{Tr}[(\mathcal{P}' + M)\gamma^i(\mathcal{P} - M)\gamma^0] \text{Tr}[\mathcal{K}'\gamma^j \mathcal{K}\gamma^0]] \end{aligned} \quad (2.61)$$

Desarrollando las trazas se determina el primer término de la ecuación (2.61), como

$$|\mathcal{M}_1|^2 = |\Delta_l|^2 2(E'_k E_k + \vec{k}' \cdot \vec{k}). \quad (2.62)$$

Una vez que desarrollamos las deltas de Kronecker, el segundo término resulta de la siguiente forma (ver apéndice D.2),

$$\frac{1}{2} \sum_s |\mathcal{M}_2|^2 = 16|\Delta_t|^2 [2(\vec{p} \cdot \vec{k}' - \hat{q} \cdot \vec{p}\hat{q} \cdot \vec{k}')(\vec{p} \cdot \vec{k} - \hat{q} \cdot \vec{p}\hat{q} \cdot \vec{k}) + (\hat{q} \cdot \vec{p}\hat{q} \cdot \vec{p} - p^2)(E'_k E_k - \vec{k}' \cdot \vec{k})]. \quad (2.63)$$

Ahora, si realizamos el álgebra para los términos cruzados (ver apéndice D.3), el primer término cruzado es el siguiente,

$$\frac{1}{2} \sum_s |\mathcal{M}_3|^2 = 8\Delta_l\Delta_t^* [2E_p E'_k (\vec{p} \cdot \vec{k} - \hat{q} \cdot \vec{p}\hat{q} \cdot \vec{k}) + 2E_p E_k (\vec{p} \cdot \vec{k}' - \hat{q} \cdot \vec{p}\hat{q} \cdot \vec{k}')], \quad (2.64)$$



con el mismo procedimiento, el segundo término cruzado es,

$$|\mathcal{M}_4|^2 = 8\Delta_t^* \Delta_t [2E_p E'_k (\vec{p} \cdot \vec{k} - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}) + 2E_p E_k (\vec{p} \cdot \vec{k}' - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}')]. \quad (2.65)$$

Finalmente, sumamos cada uno de los resultados para obtener el cuadrado de la amplitud total:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s |\mathcal{M}|^2 &= 16e^4 [|\Delta_t|^2 (E_k E'_k - \vec{k}' \cdot \vec{k}) E_p^2 \\ &+ |\Delta_t|^2 [2(\vec{p} \cdot \vec{k}' - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}') (\vec{p} \cdot \vec{k} - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}) + (\hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{p} - p^2) (E'_k E_k - \vec{k}' \cdot \vec{k})] \\ &+ 2Re[\Delta_t \Delta_t^*] E_p [E'_k (\vec{p} \cdot \vec{k} - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}) + E_k (\vec{p} \cdot \vec{k}' - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}')] ] \end{aligned} \quad (2.66)$$

La expresión (2.57) debe ser integrada respecto a  $k$  y  $k'$ . Si analizamos el comportamiento de la amplitud  $|\mathcal{M}|^2$  bajo el intercambio de  $E_k \rightarrow E'_k$  podemos ver que ésta es simétrica. Ahora bien, si analizamos el comportamiento del integrando  $n_F(E_k)[1 - n_f(E'_k)]|\mathcal{M}|^2$  podemos ver que no lo es. Entonces cuando integremos, obtendremos cantidades que se van a cero debido a esta antisimetría. Sin embargo, es posible construir un nuevo integrando  $G_s(E_k, E'_k)$  (ver apéndice D.4) que permita tomar solo los valores diferentes de cero en el resultado de la integración total. La función simetrizada es,

$$G_s^{(-)}(E_k, E'_k) \simeq -\frac{1}{2} \omega n'_F(E_k) |\mathcal{M}|^2 \quad (2.67)$$

Introduciendo el resultado en la ecuación (2.57), obtenemos

$$\left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{soft} = \frac{\pi}{8vE_p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 E_k} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 E'_k} [-n'_F(E_k)] \delta(\omega - \hat{k} \cdot \vec{q}) \frac{\omega^2}{2} \sum_s |\mathcal{M}|^2 \Theta(q^* - q). \quad (2.68)$$

Poniendo el momento  $k'$  en términos del momento transferido y haciendo la aproximación de la energía, la ecuación (2.68) se puede reescribir como

$$\left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{soft} = \frac{\pi}{8vE_p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 E_k} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 (E_k - \hat{k} \cdot \vec{q})} [-n'_F(E_k)] \delta(\omega - \hat{k} \cdot \vec{q}) \frac{\omega^2}{2} \sum_s |\mathcal{M}|^2 \Theta(q^* - q). \quad (2.69)$$

Trabajando en coordenadas esféricas obtenemos

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{soft} &= \frac{\pi}{8vE_p^2} \int \frac{dq}{(2\pi)^3} q^2 \int d\Omega \omega^2 \Theta(q^* - q) \\ &\times \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{q}) \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{E_k} [-n'_F(E_k)] \frac{1}{2} \sum_s |\mathcal{M}|^2. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Simplificaremos la expresión de  $|\mathcal{M}|^2$  usando la ecuación (2.56) y el hecho de que para mo-

mentos transferidos muy pequeños  $\vec{k}' \simeq \vec{k}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s |\mathcal{M}|^2 = & 16e^4 \left[ (E_k - \hat{k} \cdot \vec{q}) E_k + k^2 \right] E_p^2 |\Delta_l|^2 \\ & + \text{Re}[\Delta_l \Delta_t^*] E_p [2E_k + \hat{k} \cdot \vec{q}] [\vec{k} \cdot \vec{p} - \hat{q} \cdot \vec{k} \hat{q} \cdot \vec{p}] \\ & + 2|\Delta_t|^2 [(\vec{k} \cdot \vec{p} - \vec{p} \cdot \hat{q} \hat{q} \cdot \vec{k})^2 - ((E_k - \hat{k} \cdot \vec{q}) E_k - k^2)(p^2 - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{p})] \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$(2.72)$$

Considerando que  $E_k \approx |\vec{k}|$  y que  $E_k \gg \hat{k} \cdot \vec{q}$  obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s |\mathcal{M}|^2 = & 16e^4 \left[ k^2 E_p^2 |\Delta_l|^2 \right. \\ & + \text{Re}[\Delta_l \Delta_t^*] 2E_p k^2 (\hat{k} \cdot \vec{p} - \hat{q} \cdot \hat{k} \hat{q} \cdot \vec{p}) \\ & \left. + 2|\Delta_t|^2 k^2 (\hat{k} \cdot \vec{p} - \vec{p} \cdot \hat{q} \hat{q} \cdot \hat{k})^2 \right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

Recordando que  $\vec{p} = \vec{v} E_p$ , obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s |\mathcal{M}|^2 = & 32E_p^2 k^2 e^4 \left[ |\Delta_l|^2 + \text{Re}[\Delta_l \Delta_t^*] [\hat{k} \cdot \vec{v} - \hat{q} \cdot \hat{k} \hat{q} \cdot \hat{V}] \right. \\ & \left. + |\Delta_t|^2 (\hat{k} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \hat{q} \hat{q} \cdot \hat{k})^2 \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.70),

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{soft} = & \frac{1}{4v} \int \frac{dq}{(2\pi)^3} q^2 \omega^2 \Theta(q^* - q) \int dk k^2 [-n'_F(k)] \int \frac{d\Omega}{4\pi} \delta(\omega - \hat{k} \cdot \vec{q}) \\ & \times 32e^4 \left[ |\Delta_l|^2 + \text{Re}[\Delta_l \Delta_t^*] (\hat{k} \cdot \vec{v} - \hat{q} \cdot \hat{k} \frac{\omega}{q}) + |\Delta_t|^2 (\hat{k} \cdot \vec{v} - \frac{\omega}{q} \hat{q} \cdot \hat{k})^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Las integrales sobre los ángulos de  $\hat{k}$  son [1]:

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \delta(\omega - \hat{q} \cdot \hat{k}) = \frac{1}{2q} \quad (2.75)$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \delta(\omega - \hat{q} \cdot \hat{k}) (\hat{k} \cdot \vec{v} - \frac{\omega}{q} \hat{q} \cdot \hat{k}) = 0 \quad (2.76)$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \delta(\omega - \hat{q} \cdot \hat{k}) (\hat{k} \cdot \vec{v} - \frac{\omega}{q} \hat{q} \cdot \hat{k})^2 = \frac{1}{4q} \left( 1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \left( v^2 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \quad (2.77)$$

Resolviendo la integral respecto a  $k$ , tenemos

$$\int dk k^2 [-n'_F(k)] = \frac{\pi^2 T^2}{6}, \quad (2.78)$$

con esto,

$$\left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{soft} = \frac{e^4 T^2}{12\pi v} \int dq q \Theta(q^* - q) \omega^2 \left[ |\Delta_l|^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \left( v^2 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) |\Delta_t|^2 \right]. \quad (2.79)$$

Recordando la restricción para el momento *Soft* de  $0 < q < q^*$  y utilizando algunas propiedades de la función paso  $\Theta$  (ver apéndice D.5) la ecuación (2.79) se reescribe de la siguiente manera:

$$\left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{soft} = \frac{e^4 T^2}{24\pi v^2} \int_0^{q^*} dq \int_{-vq}^{+vq} d\omega \omega^2 \left[ |\Delta_l|^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \left( v^2 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) |\Delta_t|^2 \right]. \quad (2.80)$$

Para realizar la integral, es necesario introducir la forma de  $\Delta_l$  y  $\Delta_t$ . Para simplificar la expresión de los propagadores efectivos en las ecuaciones (2.54) y (2.55) vamos a considerar que la masa térmica del fotón es muy pequeña. Esta condición nos permite realizar un desarrollo en serie de las funciones  $\Delta_l$  y  $\Delta_t$ ,

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 - x + 2x^2 + \dots \quad (2.81)$$

Así, los propagadores efectivos quedan,

$$\Delta_l(\omega, q) = \frac{1}{q^2} \left[ 1 + \frac{3}{2q^2} m_\gamma^2 \left( \frac{\omega}{q} \ln \frac{\omega+q}{\omega-q} - 2 \right) + \mathcal{O}(m_\gamma^4) \right] \quad (2.82)$$

$$\Delta_t(\omega, q) = \frac{1}{\omega^2 - q^2} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{m_\gamma^2}{\omega^2 - q^2} \left( \frac{\omega(\omega^2 - q^2)}{2q^3} \ln \frac{\omega+q}{\omega-q} - \frac{\omega^2}{q^2} \right) + \mathcal{O}(m_\gamma^4) \right]. \quad (2.83)$$

El cuadrado de estos son,

$$|\Delta_l(\omega, q)|^2 = \frac{1}{q^4} \left[ 1 + \frac{3}{q^2} m_\gamma^2 \left( \frac{\omega}{q} \ln \frac{\omega+q}{\omega-q} - 2 \right) + \mathcal{O}(m_\gamma^4) \right] \quad (2.84)$$

$$|\Delta_t(\omega, q)|^2 = \frac{1}{(\omega^2 - q^2)^2} \left[ 1 - 3 \frac{m_\gamma^2}{\omega^2 - q^2} \left( \frac{\omega(\omega^2 - q^2)}{2q^3} \ln \frac{\omega+q}{\omega-q} - \frac{\omega^2}{q^2} \right) + \mathcal{O}(m_\gamma^4) \right]. \quad (2.85)$$

Tomando los términos independientes de  $m_\gamma$  integramos la expresión (2.80), el resultado es

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{dE_p}{dx} \right] &= \frac{e^4 T^2}{24\pi v^2} \left[ v - (1 - v^2) \tanh^{-1}(v) \right] \ln \frac{q^*}{q_{min}} \\ &= \frac{e^4 T^2}{24\pi} \left[ \frac{1}{v} - \frac{(1 - v^2)}{2v^2} \ln \frac{1+v}{1-v} \right] \ln \frac{q^*}{q_{min}}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

donde  $q_{min}$  regula la divergencia en el límite de  $q = 0$ . El segundo término del propagador que no vamos a despreciar de las ecuaciones (2.84) y (2.85), es donde tenemos términos proporcionales a  $m_\gamma^2$ . Para integrar, hemos hecho el cambio de variable  $x = \omega/q$ , obteniendo lo siguiente,

$$f(x, q) = 3m_\gamma^2 \int_0^{q^*} dq \frac{1}{q^3} \int_{-v}^{+v} dx \frac{x^2}{v^2} \left[ x \ln \frac{x+1}{x-1} - 2 + \frac{1}{2} \frac{v^2 - x^2}{x^2 - 1} \left( x(x^2 - 1) \ln \frac{x+1}{x-1} - x^2 \right) \right]. \quad (2.87)$$

Integramos con respecto a  $q$ ,

$$f(x, q) = \frac{3m_\gamma^2}{2(q_{min}^2 - q^{*2})} \int_{-v}^{+v} dx \frac{x^2}{v^2} \left[ x \ln \frac{x+1}{x-1} - 2 + \frac{1}{2} \frac{v^2 - x^2}{x^2 - 1} \left( x(x^2 - 1) \ln \frac{x+1}{x-1} - x^2 \right) \right] \quad (2.88)$$

Podemos reescribir la contribución *Soft* a la pérdida de energía como

$$\left[ -\frac{dE_p}{dx} \right]_{soft} = \frac{e^4 T^2}{24\pi} \left[ \left( \frac{1}{v} - \frac{(1-v^2)}{2v^2} \ln \frac{1+v}{1-v} \right) \ln \frac{q^*}{q_{min}^*} + F_{soft}(v) \right], \quad (2.89)$$

donde  $q_{min}$  es del orden de  $eT$  y viene de que es la única escala a nuestra disposición en esta región. El término  $F_{soft}(v)$  se define como

$$F_{soft}(v, q) = \frac{3m_\gamma^2}{2v^2(q_{min}^2 - q^{*2})} \left( \frac{5}{3}v - \frac{23}{18}v^3 - \frac{1}{30}v^5 - \left( \frac{5}{3} - \frac{1}{2}v^2 - v^4 - \frac{1}{6}v^6 \right) \arctan(v) \right). \quad (2.90)$$

Debido a que nosotros hemos trabajado en el límite donde la masa del fotón es muy pequeña este resultado, es solo una contribución al de la literatura, donde se reporta un resultado usando la forma completa del propagador efectivo del fotón [1].

Ya que hemos determinado las dos contribuciones a la pérdida de energía, podemos expresarla de manera completa mediante la suma de ambas contribuciones. En el siguiente capítulo trabajaremos en el análisis del resultado total para valores de  $q^*$ .

# Capítulo 3

| Pérdida de energía total en un medio isótropo.

En el capítulo anterior, realizamos el desarrollo de la expresión para las contribuciones *Hard* y *Soft* a la pérdida de energía de un muón atravesando un plasma de QED con una velocidad  $v$ .

En el presente capítulo tomamos estas dos contribuciones y obtenemos la expresión total de la pérdida de energía. También, discutimos sobre cómo ésta depende solamente de la velocidad en la contribución *Hard*, mientras que en la contribución *Soft* tenemos otros parámetros tales como la masa del fotón y el momento transferido, además de la velocidad  $v$ , que afectan su contribución.

El resultado completo para la pérdida de energía  $dE/dx$  del muón, es la suma de las dos contribuciones de las ecuaciones (2.50) y (2.89),

$$\left[ -\frac{dE_p}{dx} \right] = \frac{e^4 T^2}{24\pi} \left[ \left( \frac{1}{v} - \frac{(1-v^2)}{2v^2} \ln \frac{1+v}{1-v} \right) \left( \ln \frac{E}{M} + \ln \frac{1}{e} + F_{hard}(v) \right) + F_{soft}(v) \right], \quad (3.1)$$

podemos ver que la dependencia de  $q^*$  en el logaritmo se cancela cuando sumamos las contribuciones, *Hard* y *Soft*, dejando un logaritmo que depende de  $1/e$ , ésta dependencia indica que  $dE/dx$  recibe una contribución del momento transferido desde la región *Hard*  $T$ , bajando a la región *Soft*  $eT$ . Las funciones  $F_{hard}(v)$  y  $F_{soft}(v)$  están dadas por,

$$F_{hard}(v) = \ln 4 + \frac{3}{2} - \gamma + \frac{\epsilon'}{\epsilon} - \frac{8v^3 + 3(1-v^2) \left[ Li_2 \left( \frac{2}{1-v} \right) - Li_2 \left( \frac{2}{1+v} \right) \right]}{6 \left[ 2v + (1-v^2) \ln \frac{1-v}{1+v} \right]}, \quad (3.2)$$

$$F_{soft}(v, q) = \frac{3m_\gamma^2}{2v^2(q_{min}^2 - q^{*2})} \left( \frac{5}{3}v - \frac{23}{18}v^3 - \frac{1}{30}v^5 - \left( \frac{5}{3} - \frac{1}{2}v^2 - v^4 - \frac{1}{6}v^6 \right) \arctan(v) \right). \quad (3.3)$$

Como pudimos ver en el capítulo anterior, la contribución de la región *Soft* a la pérdida de energía queda dependiendo de la escala  $q^*$  y un valor mínimo de  $q$ . Esto surge de la aproximación que realizamos en la expresión del propagador efectivo del fotón. Esta aproximación deja como resultado una integral que diverge como  $1/q^3$ . Podemos controlar esta divergencia introduciendo una  $q_{min}$  en el límite inferior de la integral respecto al momento transferido. Este límite inferior se tomó de la propuesta de Bjorken en sus cálculos para la pérdida de energía <sup>1</sup>[13].

Otro detalle importante que surge en la discusión de la contribución de la región *Soft* es que la escala  $q^*$  resulta no ser arbitraria del todo, debido a que se realizó la aproximación  $k \simeq k'$ . En

<sup>1</sup>Bjorken fue el primero en estimar de manera perturbativa  $dE/dx$  en un QGP manteniendo solamente la integral logarítmicamente divergente de  $q$  e impuso límites superiores e inferiores para el momento transferido mediante razones físicas.

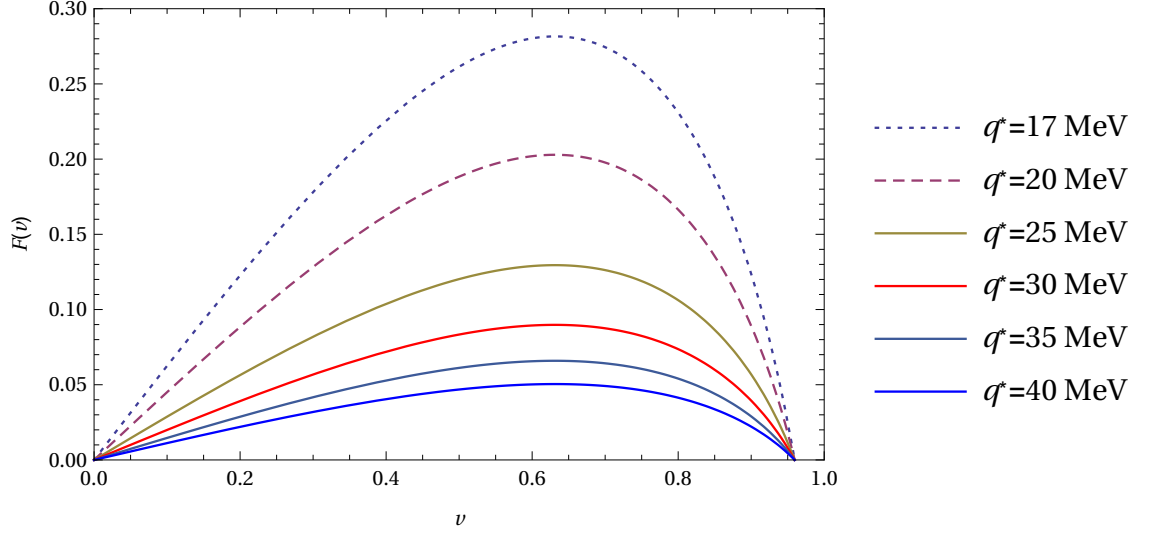


Figura 3.1: Gráfica para  $F'_{Soft}$ ,  $q^* = 17\text{MeV} - 40\text{MeV}$ ,  $q_{min} = 1.7\text{MeV}$  y  $m_\gamma = 1\text{MeV}$ .

esta aproximación lo que se está estableciendo es que el momento transferido  $q$  es tan pequeño que no alcanza a alterar el estado del electrón térmico perteneciente al plasma. Por esta razón es necesario escoger una  $q^*$  lo suficientemente pequeña comparada con la temperatura de equilibrio  $T$  del plasma para que esta aproximación sea válida. En la figura (3.1) tenemos  $F'_{soft}$  en función de  $v$  para distintos valores de  $q^*$ , donde hemos definido

$$F'_{soft}(v) = \frac{F_{soft}}{\left(\frac{1}{v} - \frac{(1-v^2)}{2v^2} \ln \frac{1+v}{1-v}\right)}. \quad (3.4)$$

El valor para la masa térmica del fotón se ha fijado como  $m_\gamma = 1\text{MeV}$ , este valor viene de considerar que la masa es una fracción de la temperatura de equilibrio del plasma. El momento  $q_{min} = 1.7\text{MeV}$  como ya se mencionó, fue establecido por Bjorken. Para generar las diferentes gráficas hemos variado la escala  $q^*$  desde  $17\text{MeV}$  hasta  $40\text{MeV}$ . Mientras más pequeña sea  $q^*$ ,  $F_{Soft}$  se acerca más a la contribución *Soft* dada por la literatura [1]. Continuando con la discusión de la pérdida de energía, en la figura (3.2) tenemos la gráfica de ambas contribuciones  $F_{hard}$  y  $F'_{soft}$  así como la suma de ellas. Podemos ver que la contribución de la región *Hard* tiene un comportamiento casi constante en todo el rango de velocidades y representa el 85.7% de la contribución total. En la gráfica de la contribución *Soft* no se observa este comportamiento lineal debido a la dependencia del momento transferido y la masa térmica del fotón. La contribución en esta región representa el 14.3% del total; éste tiene un comportamiento parecido a los que se presentan en las referencias [1][7] solamente para los valores de  $v$  entre 0.4 y 0.8.

La gráfica de la ecuación (3.1) se muestra en la figura (3.3) junto con el resultado obtenido

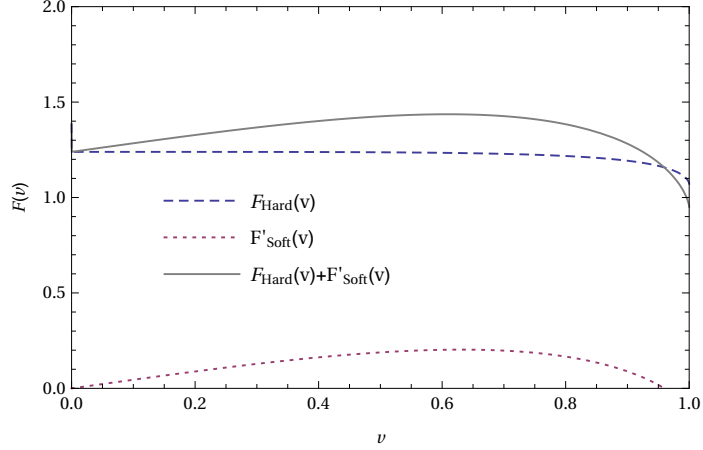


Figura 3.2: Contribución *Soft* y *Hard* en la pérdida de energía, donde  $q^* = 17\text{MeV}$ ,  $q_{\text{min}} = 1.7\text{ MeV}$ , y  $m_\gamma = 1\text{ MeV}$ .

por Bjorken [1]. En ambas curvas de la figura (3.3) se observa un comportamiento similar. Sin embargo nuestros resultados están un 26% sobre el resultado de Bjorken para la velocidad de 0.4 y un 29% para la velocidad de 0.8. Es necesario destacar que en estas gráficas no hemos considerado un límite espacial para el plasma. Si introducimos fronteras en el plasma, podemos encontrar una pérdida de energía máxima y una pérdida de energía mínima, que va a depender de la geometría.

### 3.1. Pérdida de energía a través de un plasma finito.

En este trabajo, consideramos un plasma con geometría circular con radio de 6 fm. Dentro de este plasma, se ha colocado el evento de la producción de un muón masivo a cierta distancia del centro del plasma como se muestra en la figura (3.4). Este esquema es para determinar cuánta energía pierde el muón dependiendo de en qué punto se origina y a qué ángulo realiza su trayectoria para escapar del plasma.

Es necesario tomar la ecuación (3.1) e integrar con respecto a  $x$ . Esto va a generar una función que depende de la velocidad de la partícula, su momento transferido y la masa térmica del fotón:

$$\Delta E = f(v, q, m_\gamma)x \quad (3.5)$$

donde  $f$  es la integral de la pérdida de la energía respecto a la variable de longitud  $x$ . Existe una dependencia lineal de la pérdida de energía con respecto a la trayectoria. Sin embargo, esto no necesariamente tiene que ser así. Podríamos encontrar una dependencia más apegada

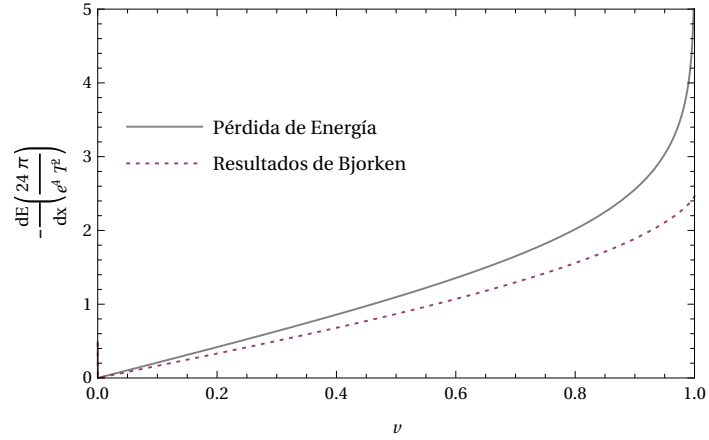


Figura 3.3: Pérdida de energía total del muón en función de su velocidad con  $q^* = 17\text{MeV} - 40\text{MeV}$ ,  $q_{min} = 1.7\text{MeV}$  y  $m_\gamma = 1\text{MeV}$ . La línea continua muestra el resultado que se obtuvo en este trabajo, y la punteada es el resultado de Bjorken[1].

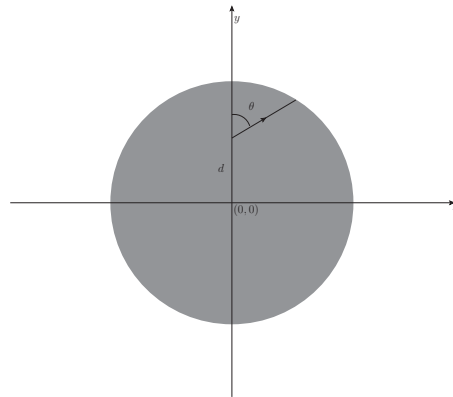


Figura 3.4: Esquema de un plasma con geometría circular. En la figura se muestra un evento generado a una distancia  $d$  del centro del plasma. La distancia  $r$  es la distancia que el muón va a recorrer para escapar del plasma y  $\theta$  es el ángulo al cual sale disparado.



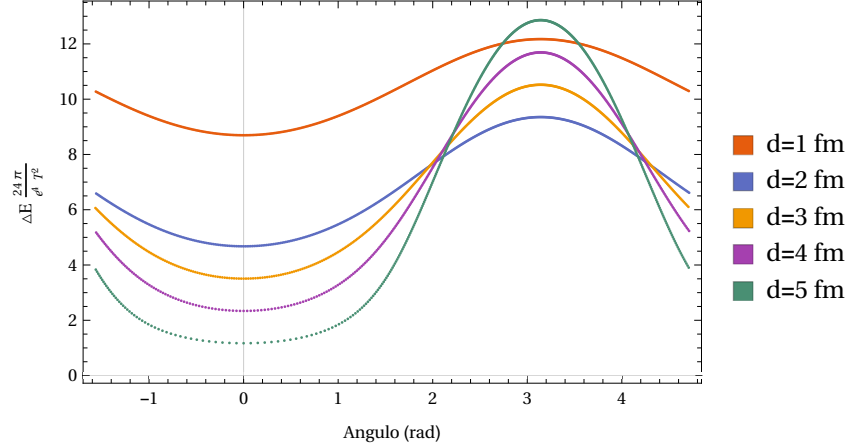


Figura 3.5: Pérdida de energía del muón, que se mueve a una velocidad  $v = 0.5$ , en función la dirección a través del plasma.

a la realidad de los experimentos. Esto se logra considerando un plasma anisótropo. Introducir un factor de anisotropía, requiere de tener consideraciones en la geometría del plasma desde el inicio. Lo que ocasionaría que la dependencia de la pérdida de energía con la trayectoria no sea necesariamente lineal.

En el plasma isótropo que nosotros hemos considerado, evaluar la función  $f$  en las posibles velocidades que el muón puede poseer mientras se traslada a través del plasma, permite determinar la diferencia de energía  $\Delta E$  entre el estado inicial del muón y el estado final al momento de alcanzar la frontera. Para lograr esto, se ha fijado la posición del evento  $e\mu \rightarrow e\mu$  en cualquier punto sobre el eje  $y$  y se ha calculado la distancia de ese punto a la frontera en cualquier dirección, así como se muestra en la figura (3.4). Una vez que se obtienen estos datos, de manera numérica, es posible evaluar en la ecuación (3.5).

En la figura (3.5), se muestra un evento que se produce a una velocidad de  $v = 0.5$  a la cual le corresponde un momento  $p = 60.96 \text{ MeV}$ . Con esta velocidad, tenemos que  $f = 1.19614$ . La gráfica muestra la energía perdida del muón en función de su posición de origen y la dirección de su recorrido a través del plasma. El eje horizontal muestra la dirección angular en radianes y el eje vertical es  $\Delta E$ . En la gráfica color naranja el muón se encuentra más cercano al centro de la región del plasma; mientras que en la gráfica color verde se muestra a un muón que se encuentra más cercano a la frontera de la región del plasma.

En la figura (3.6), se muestra un evento que se produce a una velocidad de  $v = 0.9$  a la cual le corresponde un momento  $p = 218.24 \text{ MeV}$ . Con esta velocidad encontramos que  $f = 2.58976$ . En las figuras (3.5) y (3.6) también se muestra la energía perdida por el muón en función su

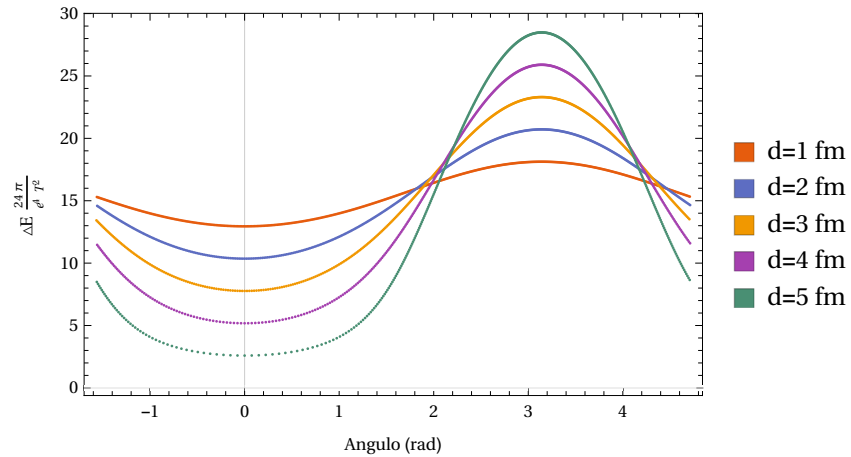


Figura 3.6: Pérdida de energía del muón, que se mueve a una velocidad  $v = 0.9$ , en función la dirección a través del plasma.

posicion y la dirección de su recorrido a través del plasma. En la curva color naranja el muón se encuentra más cerca del centro; mientras que en la curva color verde se muestra a un muón que se encuentra más cerca a la frontera del plasma.

En ambas figuras (3.5) y (3.6), es posible observar que a velocidades diferentes, el comportamiento de la pérdida de energía es similar. Esto se debe a la isotropía y geometría del plasma. Mientras más cerca de la frontera se genere el muón, la pérdida de energía es menor y casi de manera constante alrededor del ángulo 0; mientras se acerca a  $\pi$  la pérdida de energía comienza a aumentar. Este comportamiento se puede observar en ambas imágenes, en la curva color verde. En cambio para un evento generado cerca del origen, la pérdida de energía básicamente es una constante.

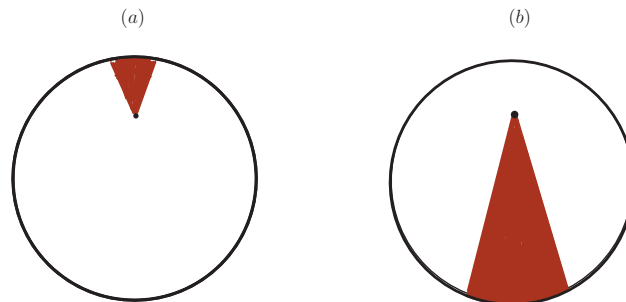


Figura 3.7: La figura (a) muestra el recorrido alrededor del ángulo 0. La figura (b) muestra el recorrido alrededor de l ángulo  $\pi$ . Ambos para un evento generado cerca de la frontera.

Observamos que para ángulos pequeños, figura (3.7) (a), las distancias recorridas son pequeñas, en este caso la pérdida de energía es mínima. Mientras más recorrido tenga el muón a través

del plasma, que es el caso de la figura (3.7) (b) donde se muestran los recorridos alrededor del ángulo  $\pi$ , éste perderá mayor cantidad de energía. Si el muón no es lo suficientemente masivo, puede llegar a ser termalizado por el medio.

### 3.2. Extensión a un plasma de quarks y gluones.

En este capítulo hemos estado analizando el comportamiento de la expresión de la pérdida de energía para un leptón masivo a través de un plasma. Hemos podido decir cómo es el comportamiento de  $dE/dx$  dependiendo de su velocidad, así como de la posición en la cual se genera. Esto, ha sido gracias al método propuesto para determinar esta expresión en la ecuación (3.1).

El mismo método puede utilizarse para calcular la pérdida de energía de un quark masivo pasando a través de un plasma de quarks y gluones. En este caso, el quark masivo pierde energía mediante la dispersión con quarks térmicos. Estos procesos vienen dados por:

$$qQ \longrightarrow qQ \quad (3.6)$$

$$gQ \longrightarrow gQ \quad (3.7)$$

dónde,  $q$  y  $g$  son los quarks y gluones térmicos respectivamente, y  $Q$  es el quark masivo. De la misma manera que en el cálculo del capítulo 2, se introduce una escala de momento arbitrario  $q^*$  para separar las dos regiones del momento transferido en la región *Hard* y la región *Soft*.

La contribución *Hard* y *Soft* para los procesos en (3.6) se determinan utilizando los diagramas de Feynman a nivel árbol y a un lazo que se muestran en la figura (2.1) y (2.2) respectivamente. En estos diagramas, se cambia el propagador fotónico por el propagador del gluón, la constante de acoplamiento " $e$ " para la QED es reemplazada por la constante de acoplamiento, " $g_s$ " de QCD. Además debemos agregar el factor de color para ambas contribuciones, estos son  $2/3$  para la contribución *Hard* y  $4/3$  para la contribución *Soft* [13]. Otra de las cosas que cambiaría en esta última contribución, es que en lugar de colocar la masa térmica del fotón, vamos a colocar la masa térmica del gluón, ésta tiene la siguiente forma [7]:

$$m_g^2 = \left(1 + \frac{n_f}{6}\right) g^2 T^2$$

Debido a la posible interacción entre los bosones de la teoría de QCD, la única contribución a la pérdida de energía  $dE/dx$  que requiere un cálculo adicional es la que viene del vértice de tres gluones. Esta contribuciones se muestran en el diagrama (c) de la figura (3.8). En el caso de QCD, a diferencia de QED, la contribución de los diagramas asociados a la dispersión de

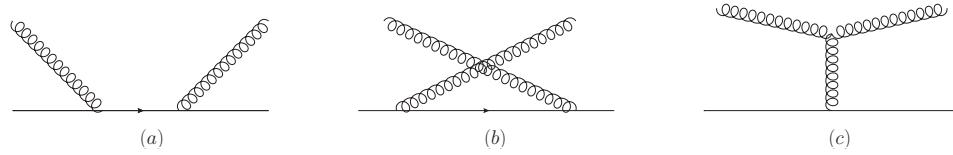


Figura 3.8: Diagramas de Feynman en QCD para los cálculos adicionales. (a) y (b) corresponden a la dispersión de Compton de los gluones y el inciso (c) corresponde al vértice de tres gluones.

Compton en (a) y (b) no se suprime debido a los factores de color. Estos se pueden determinar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram (a)} &= t^a t^b \text{Diagram (c)} \\
 \text{Diagram (b)} &= t^b t^a \text{Diagram (c)}
 \end{aligned}$$

Figura 3.9: Construcción de las amplitudes de dispersión de Compton de los gluones a partir de QED.

El vertice de tres gluones corresponde a una combinación lineal de éstos diagramas. Si suprimimos estas contribuciones, no estaríamos trabajando en QCD de manera completa, por lo tanto debemos incluirlos.

$$\text{Diagram (c)} = \text{Diagram (a)} + \text{Diagram (b)}$$

## Conclusiones

Hemos establecido que para describir fenómenos de altas energías donde introducimos el factor de temperatura, se requiere de un nuevo formalismo llamado Teoría Térmica de Campos. Este formalismo, es la conexión entre la Física Estadística y la Teoría Cuántica de Campos. El formalismo de Matsubara (o de tiempo imaginario) ha permitido visualizar de manera formal dicha conexión entre ambas teorías. Mediante una rotación de Wick en la componente temporal, encontramos que la formulación de la integral de camino, en el espacio Euclidiano, tiene la forma de la función de partición de la Física Estadística. Con esto se estableció que para un proceso de altas energías a temperatura  $T$ , trabajar dentro del formalismo de Matsubara es análogo a realizar los cálculos a temperatura cero, con la diferencia de un factor térmico correspondiente a la distribución de bosones o de fermiones. Gracias a esto, fue posible trabajar en el cálculo de la pérdida de energía en la Teoría Térmica de la Electrodinámica Cuántica de manera perturbativa.

El cálculo de la pérdida de energía se dividió en dos regiones, *Hard* y *Soft*. Ambas contribuciones pudieron realizarse debido a consideraciones tales como, un plasma isótropo. El resultado que obtuvimos de la región *Hard*, es el que se reporta en la literatura. Sin embargo, para obtener el resultado de la región *Soft*, de manera analítica, fue necesario realizar consideraciones diferentes que en la literatura. En este trabajo la masa térmica para el fotón se consideró pequeña. Esto permitió realizar un desarrollo del propagador del fotón alrededor de la masa. El resultado que obtuvimos funciona para un rango de velocidades de propagación del muón a través del plasma. La pérdida de energía total muestra un comportamiento lineal para velocidades pequeñas, pero cuando tenemos velocidades grandes la linealidad desaparece mostrando un comportamiento exponencial. El intervalo de velocidades en donde termina la linealidad, y comienza el comportamiento exponencial, coincide con el intervalo de la contribución en la región *Soft* que vimos en el capítulo 3, confirmando que los resultados que tenemos funcionan bien en ese intervalo de velocidades.

En este trabajo hemos limitado la región del plasma a una circunferencia con lo que encontramos un valor máximo para la energía perdida. Vimos que ésta va a depender de la distancia que el muón recorre para escapar del plasma y de la geometría del plasma. Por último, hemos establecido los cambios necesarios que se deben realizar al cálculo de la pérdida de energía en QED para obtener un resultado que funcione con un plasma de quarks y gluones (QGP).

---

El cálculo de las contribuciones dadas por los diagramas de dispersión de Compton en la figura (3.8) para los gluones, podría ser una extensión a lo que nosotros ya obtuvimos aquí para determinar la pérdida de energía total de un quark pesado pasando a través de un QGP. Finalmente, otra de las extensiones que podemos realizar en este trabajo es tomar un plasma anisótropo. Considerando este medio, podemos introducir una anisotropía mediante la función de distribución térmica. En este caso, la dirección con que se propagaría el muón a través del plasma modificaría el resultado de las contribuciones *Hard* y *Soft*. De tal manera que para una partícula masiva, la pérdida de energía va a depender, además de la velocidad, de dónde se genera el evento. Es decir, la anisotropía, cambiaría la manera de ejecutar las integrales del ángulo sólido para ambas regiones. El resultado de esta consideración, serviría tanto para el plasma de QED como para el de QGP.

# Apéndice A | Desarrollos: Capítulo I

## A.1. Promedio de dos operadores a temperatura finita

Definimos dos operadores arbitrarios de la representación de *Heisemberg* a partir de cualquier operador en la representación de *Schrödinger* de la siguiente manera:

$$A_H(t) = e^{i\mathcal{H}t} A e^{-i\mathcal{H}t} \quad (\text{A.1})$$

$$B_H(t') = e^{i\mathcal{H}t'} B e^{-i\mathcal{H}t'}. \quad (\text{A.2})$$

A continuación, vamos a realizar el promedio del producto entre ambos operadores:

$$\begin{aligned} \langle A_H(t)B_H(t') \rangle &= \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \text{Tr}[\rho(\beta)A_H(t)B_H(t')] \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \text{Tr}[e^{-\beta\mathcal{H}} A_H(t)B_H(t')] \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \text{Tr}[e^{-\beta\mathcal{H}} A_H(t)e^{\beta\mathcal{H}} e^{-\beta\mathcal{H}} B_H(t')] \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \text{Tr}[e^{-\beta\mathcal{H}} e^{i\mathcal{H}t} A e^{-i\mathcal{H}t} e^{\beta\mathcal{H}} e^{-\beta\mathcal{H}} B_H(t')] \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \text{Tr}[e^{i\mathcal{H}(t+i\beta)} A e^{-i\mathcal{H}(t+i\beta)} e^{-\beta\mathcal{H}} B_H(t')] \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \text{Tr}[e^{-\beta\mathcal{H}} B_H(t') A_H(t+i\beta)] \\ &= \langle B_H(t') A_H(t+i\beta) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

## A.2. El operador de densidad de un ensemble como ecuación de evolución temporal a temperatura finita.

Para determinar la ecuación de evolución de  $\rho_1(\tau)$ , es necesario aplicar la derivada parcial respecto a  $\tau$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1(\tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \rho_0^{-1}(\tau)}{\partial \tau} \rho(\tau) + \rho_0^{-1} \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \tau} \\ &= \rho_0^{-1}(\tau) \mathcal{H}_0 \rho(\tau) - \rho_0^{-1}(\tau) \mathcal{H} \rho(\tau) \\ &= \rho_0^{-1}(\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}) \rho_0^{-1}(\tau) \rho_0(\tau) \rho(\tau) \\ &= -\mathcal{H}'_I(\tau) \rho_1(\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

dónde

$$\mathcal{H}'_I(\tau) = \rho_0^{-1}(\tau)\mathcal{H}'\rho_0(\tau) \quad (\text{A.5})$$

### A.3. Teorema de residuos de Cauchy aplicado al propagador térmico.

En esta sección vamos a discutir resultados del Teorema de Residuo para la sumatoria de series. Dada la siguiente sumatoria:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \quad (\text{A.6})$$

Tenemos los siguientes resultados cuando la serie converge:

$$1.- \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum \text{Res}[\pi \cot(\pi z)f(z)] \Upsilon$$

Para todos los polos de  $f(z)$

$$2.- \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \sum \text{Res}[\pi \csc(\pi z)f(z)]$$

Para todos los polos de  $f(z)$

$$3.- \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = - \sum \text{Res}[\pi \tan(\pi z)f(z)]$$

Para todos los polos de  $f(z)$

$$4.- \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = - \sum \text{Res}[\pi \sec(\pi z)f(z)] \text{ para todos los polos de } f(z)$$

Con el fin de reescribir el propagador térmico de la TFT en la ecuación (1.22), vamos a utilizar estas propiedades. De manera general, escogemos:

$$\frac{1}{n^2 + y^2} \quad (\text{A.7})$$

dónde  $y > 0$ . Tomemos entonces

$$\frac{1}{z^2 + y^2} \quad (\text{A.8})$$

que tiene un polo en  $z = \pm yi$  así, utilizando el resultado en 1 tenemos que el residuo en  $z = \pm yi$  se determinará haciendo el límite cuando  $z \rightarrow \pm yi$

$$\text{Res}_1 \lim_{z \rightarrow yi} \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z - yi)(z + yi)} = \frac{\pi \cot(\pi yi)}{2yi} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Res}_2 \lim_{z \rightarrow -yi} \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z - yi)(z + yi)} = \frac{\pi \cot(-\pi yi)}{-2yi} \quad (\text{A.10})$$



Usamos la propiedad de las funciones trigonométricas que dice  $\coth(x) = i \cot(x)$

$$Res_1 = \frac{-\pi \coth(\pi y)}{2y} \quad (\text{A.11})$$

$$Res_2 = -\frac{\pi \cot(\pi y)}{2y} \quad (\text{A.12})$$

Y la suma de los residuos es:

$$Res_T = -\frac{\pi}{y} \coth(\pi y) \quad (\text{A.13})$$

#### A.4. Desarrollo de la autoenergía $\Pi(\vec{p}, p^0)$

Para determinar la ecuación de la autoenergía, partimos de las reglas de Feynman con lo que tenemos la siguiente expresión,

$$\Pi(\vec{p}, p^0) = \frac{g^2}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left(\frac{4n^2\pi^2}{\beta^2}\right) + \omega_k^2} \frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{\beta} + p^0\right)^2 + \omega_{k+p}^2} \quad (\text{A.14})$$

Factorizamos del denominador el término  $\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2$ . Con esto, la ecuación anterior nos queda de la siguiente manera:

$$\Pi(\vec{p}, p^0) = \frac{g^2}{2\beta} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^4 \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{n^2 + (\beta\omega_k/2\pi)^2} \frac{1}{\left(n + \frac{\beta p^0}{2\pi}\right)^2 + (\beta\omega_{k+p}/2\pi)^2} \quad (\text{A.15})$$

Reescribimos el producto de los propagadores térmicos como sigue a continuación y factorizamos

$\frac{1}{\omega_k\omega_{k+p}}$ :

$$\Pi(\vec{p}, p^0) = \frac{g^2}{2\beta} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k\omega_{k+p}} \left[ \frac{1}{n + \frac{\beta\omega_k}{2\pi}i} - \frac{1}{n - \frac{\beta\omega_k}{2\pi}i} \right] \quad (\text{A.16})$$

$$\times \left[ \frac{1}{n + \frac{\beta p^0}{2\pi} + \frac{\beta\omega_{k+p}}{2\pi}i} - \frac{1}{n + \frac{\beta p^0}{2\pi} - \frac{\beta\omega_{k+p}}{2\pi}i} \right]$$

Cancelamos términos iguales:

$$\Pi(\vec{p}, p^0) = \frac{g^2}{2\beta} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2 \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k\omega_{k+p}} \left[ \frac{1}{n + \frac{\beta\omega_k}{2\pi}i} - \frac{1}{n - \frac{\beta\omega_k}{2\pi}i} \right] \times \left[ \frac{1}{n + \frac{\beta p^0}{2\pi} + \frac{\beta\omega_{k+p}}{2\pi}i} - \frac{1}{n + \frac{\beta p^0}{2\pi} - \frac{\beta\omega_{k+p}}{2\pi}i} \right]$$

Evaluamos la sumatoria sobre  $n$  utilizando los resultados del teorema de Residuos, obteniendo lo siguiente:

$$\sum_n \frac{1}{n + ix} \frac{1}{n + iy} = \frac{\pi}{x - y} [\coth(\pi x) - \coth(\pi y)] \quad (\text{A.17})$$

Introduciendo este resultado a la autoenergía, obtenemos

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{p}, p^0) = & \frac{g^2}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{\omega_k} \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right) \frac{1}{\omega_{k+p}^2 - (\omega_k - ip^0)^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega_{k+p}} \coth\left(\frac{\beta(\omega_{k+p} - ip^0)}{2}\right) \frac{1}{\omega_k^2 - (\omega_{k+p} - ip^0)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

vamos a tomar los valores discretos para  $p^0 = \frac{2l\pi}{\beta}$  y la periodicidad de la cotangente hiperbólica, para obtener;

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{p}, p^0) = & \frac{g^2}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{\omega_k} \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right) \frac{1}{\omega_{k+p}^2 - (\omega_k - ip^0)^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega_{k+p}} \coth\left(\frac{\beta\omega_{k+p}}{2}\right) \frac{1}{\omega_k^2 - (\omega_{k+p} - ip^0)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

### A.5. Límites cinématicos de $\Pi(\vec{p}, p^0)$

En esta sección vamos a analizar los límites de la autoenergía  $\Pi$ , primeramente vamos a hacer  $p = 0$  y entonces aplicaremos el límite de  $p^0 \rightarrow 0$ . En el segundo límite, vamos a analizar como es la autoenergía cuando  $p^0 = 0$  y entonces aplicaremos el límite de  $p \rightarrow 0$ .

Si  $\vec{p} = 0$  entonces.

$$\Pi(0, p^0) = \frac{g^2}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4}{\omega_k} \frac{1}{4\omega_k^2 - p^{02}} \coth(\beta\omega_k/2) \quad (\text{A.20})$$

ahora  $p^0 \rightarrow 0$

$$\Pi(0, p^0 \rightarrow 0) = \frac{g^2}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k^3} \coth(\beta\omega_k/2) \quad (\text{A.21})$$

Si ahora tomamos el límite haciendo primero  $p^0 = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{p}, 0) = & \frac{-g^2}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k \omega_{k+p}} \left[ \frac{1}{\omega_k - \omega_{k+p}} \left( \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right) - \coth\left(\frac{\beta\omega_{k+p}}{2}\right) \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\omega_k + \omega_{k+p}} \left( \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right) + \coth\left(\frac{\beta\omega_{k+p}}{2}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

después  $p^0 \rightarrow 0$

$$\Pi(0, 0) = -\frac{g^2}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k^3} \left( \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right) + \frac{\beta\omega_k}{2} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right) \right) \quad (\text{A.23})$$

Así, es importante destacar que en los límites donde  $P^0 \rightarrow 0$ ,  $\vec{p} \rightarrow 0$  y  $\vec{p} \rightarrow 0$ ,  $P^0 \rightarrow 0$  son diferentes, lo que quiere decir que no conmutan [4].

# Apéndice B

| Reglas de Feynman

## B.1. Reglas de Feynman para QED.

1 Notación: a cada línea exterior entrante y saliente le asignaremos un momento  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  y dibujamos una flecha indicando el flujo de momento. A cada línea interna le asociamos un momento  $q_1, q_2, \dots$ , y de nuevo dibujamos una flecha indicando la dirección de flujo de momento, ver la figura (B.1).

2 Líneas Externas: Las líneas externas contribuyen como se muestra en la figura (B.2). Para electrones, positrones y fotones entrantes tenemos que colocar  $U, \bar{V}$  y  $\epsilon_\mu$  respectivamente. Para los salientes tenemos que colocar  $\bar{U}, V$  y  $\epsilon_\mu^*$  respectivamente. Las líneas externas se representan como se muestra en figura (B.2).

3 Vértice: Cada vértice contribuye con un factor,

$$ie\gamma^\mu \tag{B.1}$$

4 Propagador: Cada línea interna contribuye con un factor,

- Electrones y Positrones

$$i \frac{(\not{P} + m)}{P^2 - m^2}$$

- Fotones

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

- Dadas la función  $V$  para una partícula de masa  $m$ , la suma sobre el espín de una amplitud al cuadrado nos da los siguientes resultados

$$\sum_{spin} V(K)\bar{V}(K) = \not{K} + m$$

$$\sum_{spin} V(K')\bar{V}(K') = \not{K} - m$$

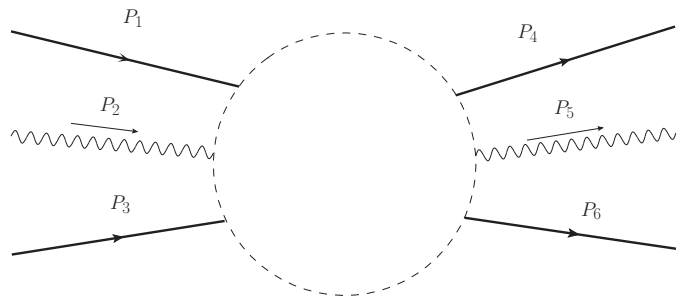


Figura B.1: Diagrama de Feynman con líneas exteriores entrantes y salientes.

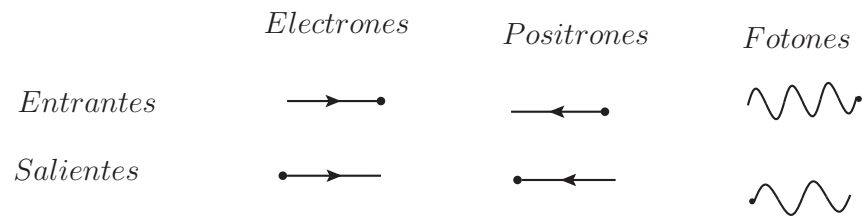


Figura B.2: Líneas externas para electrones, positrones y fotones.

# Apéndice C | Contribución Hard

## C.1. Contribución de dispersión de Compton.

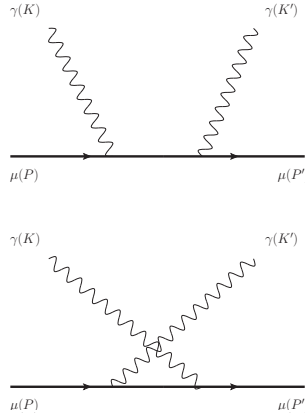


Figura C.1: Dispersión de Compton del fotón.

Utilizando las reglas de Feynman, la amplitud del primer diagrama de la dispersión de Compton que se muestra en la figura (C.1) es de la siguiente manera,

$$\mathcal{M}_1 = \epsilon_\mu^*(K') \bar{U}(P') (ie\gamma^\mu) i \frac{\not{Q} + M}{Q^2 - M^2} (ie\gamma^\nu) U(P) \epsilon_\nu(K). \quad (\text{C.1})$$

De la misma forma, el segundo diagrama es,

$$\mathcal{M}_2 = \epsilon_\nu(K) \bar{U}(P') (-ie\gamma^\nu) i \frac{\not{Q}' + M}{Q'^2 - M^2} (-ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu^*(K') U(P). \quad (\text{C.2})$$

Reacomodamos

$$\mathcal{M}_1 = -e^2 \epsilon_\nu(K) \epsilon_\mu^*(K') \bar{U}(P') [i\gamma^\mu \frac{\not{Q} + M}{Q^2 - M^2} \gamma^\nu] U(P), \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{M}_2 = -e^2 \epsilon_\mu^*(K') \epsilon_\nu(K) \bar{U}(P') [i\gamma^\nu \frac{\not{Q}' + M}{Q'^2 - M^2} \gamma^\mu] U(P). \quad (\text{C.4})$$

La contribución total es la suma de ambas amplitudes,

$$\mathcal{M} = -ie^2 \epsilon_\nu(K) \epsilon_\mu^*(K') \bar{U}(P') \left[ \frac{1}{Q^2 - M^2} \gamma^\mu \cancel{(P+K)} + M \right] \gamma^\nu + \frac{1}{Q'^2 - M^2} \gamma^\nu \cancel{(P'-K)} + M \gamma^\mu \Big] U(P) \quad (\text{C.5})$$

Así, desarrollando  $Q^2 = (P + K)^2$  y  $Q'^2 = (P' - K)$  obtenemos,

$$\mathcal{M} = -ie^2 \epsilon_\nu(K) \epsilon_\mu^*(K') \bar{U}(P') \left[ \frac{1}{2P \cdot K} \gamma^\mu [(P + K) + M] \gamma^\nu - \frac{1}{2P' \cdot K} \gamma^\nu [(P' - K) + M] \gamma^\mu \right] U(P) \quad (\text{C.6})$$

si aproximamos  $P' \simeq P$  obtenemos:

$$\mathcal{M} = -ie^2 \epsilon_\nu(K) \epsilon_\mu^*(K') \bar{U}(P') \left[ -\frac{2g^{\mu\nu} K}{P \cdot K} \right] U(P). \quad (\text{C.7})$$

Ya que el fotón incidente es térmico, factores de  $K$  en el numerador dan lugar a términos que son suprimidos por  $T$  así que se pueden ignorar.

## C.2. Desarrollo de trazas en la amplitud al cuadrado de la contribución *Hard*.

Tomamos cada una de las trazas que se obtienen a partir de sumar sobre el espín y a continuación, se muestra detalladamente el álgebra que se realiza para cada una de ellas, con el fin de simplificar la expresión del cuadrado de la amplitud. Las trazas que se desarrollan son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\not{K}' \gamma^\mu \not{K} \gamma^\nu] &= 4(K'^\mu K^\nu + K'^\nu K^\mu - g^{\mu\nu} K \cdot K') \\ \text{Tr}[(\not{P}' - M) \gamma_\mu (\not{P}' + M) \gamma_\nu] &= 4(P'_\mu P'_\nu + P'_\nu P'_\mu - g_{\mu\nu} (P \cdot P' + M^2)) \end{aligned}$$

Multiplicando el resultado de las dos trazas, obtenemos el siguiente producto

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\not{K}' \gamma^\mu \not{K} \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{P}' - M) \gamma_\mu (\not{P}' + M) \gamma_\nu] &= 16(K' \cdot PK \cdot P' + K' \cdot P'K \cdot P - K' \cdot K(P \cdot P' + M^2) \\ &\quad + K' \cdot P'K \cdot P + K' \cdot PK \cdot P' - K' \cdot K(P \cdot P' + M^2) \\ &\quad - K' \cdot KP \cdot P' - K' \cdot KP \cdot P' + 4K' \cdot K(P \cdot P' + M^2)) \\ &= 32(K' \cdot PK \cdot P' + K' \cdot P'K \cdot P + K' \cdot KM^2) \end{aligned}$$

## C.3. Álgebra del cuadrado de la amplitud

En esta sección, se muestra el proceso que se utiliza para simplificar la expresión del cuadrado de la amplitud en la contribución *Hard*. Factorizamos  $E_p E'_p$  y expresando  $M^2$  como  $P \cdot P = E_p^2 - \vec{p}^2$

$$\frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 16 \frac{e^4}{Q^4} E_p E'_p \left\{ 2(E_k - \vec{V} \cdot \vec{k})(E'_k - \vec{V} \cdot \vec{k}') + (E_p^2 - \vec{p}^2) \frac{K \cdot K'}{E_p E'_p} \right\}$$

Usamos la definición de la velocidad del muón  $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E_p}$ , para obtener

$$\frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 16 \frac{e^4}{Q^4} E_p E'_p \left\{ 2(E_k - \vec{V} \cdot \vec{k})(E'_k - \vec{V} \cdot \vec{k}') + (E_p^2 - v^2 E_p^2) \frac{K \cdot K'}{E_p E'_p} \right\}$$

De aquí se sigue que:

$$\frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 16 \frac{e^4}{Q^4} E_p E'_p \left\{ 2(E_k - \vec{V} \cdot \vec{k})(E'_k - \vec{V} \cdot \vec{k}') + (1 - v^2) K \cdot K' \frac{E_p}{E'_p} \right\}$$

Antes de continuar, vamos a analizar  $Q$  para escribir el segundo término de la amplitud cuadrada. Por conservación, el cuatromomento  $Q$  está definido como

$$Q = K' - K$$

$$Q^2 = (K' - K)^2$$

Desarrollando el cuadrado obtenemos

$$Q^2 = K^2 + K'^2 - 2K \cdot K'$$

Considerando que  $K^2$  y  $K'^2 \rightarrow 0$

$$Q^2 = -2K \cdot k'$$

De aquí que

$$-\frac{Q^2}{2} = K \cdot K'$$

Para  $E_p$  hacemos la aproximación

$$E'_p \simeq E_p - \vec{V} \cdot \vec{q}$$

Dividimos entre  $E_p$

$$\frac{E_p}{E'_p} = 1 + \frac{\vec{V} \cdot \vec{q}}{E'_p}$$

Esto, nos permite reescribir el cuadrado de la amplitud, como se muestra en la ecuación 2.19.

## C.4. Reescribiendo la delta de Dirac

Utilizando conservación de la energía, así como la aproximación para  $E'_p$  podemos escribir el argumento de la delta en términos de la energía y el momento virtual del fotón y la velocidad del muón.

$$\delta(E_p + E_k - E_p + \vec{V} \cdot \vec{q} - E'_k)$$

$$\delta(E_k - E'_k + \vec{V} \cdot \vec{q})$$

Pero  $-(E_k - E'_k) = (E_p - E'_p) = \omega$  entonces tenemos que

$$\delta(-\omega + \vec{V} \cdot \vec{q})$$

Utilizando la propiedad de la delta que dice  $\delta(x) = \delta(-x)$  obtenemos

$$\delta(\omega - \vec{V} \cdot \vec{q})$$

## C.5. Integral respecto a $\omega$ .

A continuación, se resuelven las integrales respecto a  $\omega$ . De manera general tenemos:

$$R(\omega) = \int d\omega \omega \left[ \frac{3\omega^2}{4} - \frac{v^2}{4} - \frac{1-v^2}{2} \frac{1}{1-\omega^2} + 3y(y+\omega) - (1-v^2) \frac{y(y+\omega)}{1-\omega^2} \right] \quad (\text{C.8})$$

Dividimos la expresión en seis integrales:

$$I_1 = \frac{3}{4} \int d\omega \omega^3 \qquad I_4 = 3y \int d\omega \omega (y + \omega)$$

$$I_2 = -\frac{v^2}{4} \int d\omega \omega \qquad I_5 = -(1-v^2)y^2 \int d\omega \frac{\omega}{1-\omega^2}$$

$$I_3 = -\frac{1-v^2}{2} \int d\omega \omega \frac{1}{1-\omega^2} \qquad I_6 = -(1-v^2)y \int d\omega$$

Los resultados son:

$$I_1 = \frac{3}{16} \omega^4 \qquad I_4 = 3z \left[ \frac{y\omega^2}{2} + \frac{1}{2} \omega^3 \right]$$

$$I_2 = -\frac{v^2}{8} \omega^2 \qquad I_5 = \frac{1}{2} (1-v^2) y^2 \ln(\omega^2 - 1)$$

$$I_3 = \frac{(1-v^2)}{4} \ln(\omega^2 - 1) \qquad I_6 = -(1-v^2)y [\tanh^{-1}(\omega) - \omega]$$

integrals and evaluate each interval of  $\omega$ .



## C.6. Desarrollo de $N$

En los resultados de la integración de la pérdida de energía con respecto a todas las variables de interés, obtenemos en la expresión un resultado con el que sigue:

$$N = \ln \frac{8\pi T}{q^*} + 1 - 12 \ln(A) - \frac{1}{2} \ln(1 - v^2)$$

. Vamos a reescribir este resultado de una manera más conveniente utilizando la siguiente igualdad,

$$\zeta'(2) = \zeta(2)[\gamma + \ln(2\pi) - 12 \ln(A)], \quad (\text{C.9})$$

así, reescribimos  $N$  de la siguiente manera

$$N = \ln \frac{4T}{q^*} + 1 + \ln(2\pi) - 12 \ln(A) - \frac{1}{2} \ln(1 - v^2) \quad (\text{C.10})$$

De donde identificamos el término  $\ln(2\pi) - 12 \ln(A)$ , que se puede despejar de la ecuación C.9:

$$\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \gamma = \ln(2\pi) - 12 \ln(A)$$

dónde  $\zeta(x)$  es la función zeta de Riemann y  $\gamma$  es la constante de Euler.

## C.7. Álgebra del resultado final en la integración de la ecuación (2.47)

Tomamos el resultado final de la integración con respecto a  $\omega$  y a  $q$ , para simplificarlo. Desarrollamos detalladamente los pasos como sigue:

$$\begin{aligned} (I + J) = & \pi^2 T^2 \left[ \frac{1}{12} \left( 1 - \gamma + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right) \left( 2v + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \left( -\frac{1-v}{1+v} \right) + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \left( -\frac{1-v}{1+v} \right) \right) \right. \\ & + \left( -\frac{1}{6}v + \frac{1}{6}(1 - v^2) \tanh^{-1}[v] \right) \ln(q^*) + \frac{1}{36}v(3 - 4v^4) + \frac{1}{12}v \left( \ln \left( \frac{4T}{1+v} \right) + \ln \left( \frac{4T}{1-v} \right) \right) \\ & + \frac{1}{24}(1 - v^2) \left( \ln \left( \frac{4T}{1+v} \right) \ln \left( \frac{1-v}{1+v} \right) + \ln \left( \frac{4T}{1-v} \right) \ln \left( \frac{1-v}{1+v} \right) \right) \\ & + \frac{1}{48}(1 - v^2) \left( \ln T + \ln \left( \frac{1-v}{1+v} \right) - \ln T - \ln \left( \frac{1+v}{1-v} \right) \right) \\ & \left. - \frac{1}{24}(1 - v^2) \left( \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1-v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1+v} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I + J) = & \pi^2 T^2 \left[ \frac{1}{12} \left( 1 - \gamma + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right) \left( 2v + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \left( \frac{(1 - v)^2}{(1 + v)^2} \right) \right) \right. \\
& + \frac{1}{6} \left( -v + (1 - v^2) \tanh^{-1}[v] \right) \ln(q^*) + \frac{1}{36} v(3 - 4v^4) + \frac{1}{12} v \left( \ln(4T)^2 - \ln(1 - v^2) \right) \\
& + \frac{1}{24} (1 - v^2) \left( \ln(4T)^2 - \ln(1 - v^2) \right) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) + \frac{1}{48} (1 - v^2) \ln \left( \frac{(1 - v)^2}{(1 + v)^2} \right) \\
& \left. - \frac{1}{24} (1 - v^2) \left( \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 - v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 + v} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I + J) = & \pi^2 T^2 \left[ \frac{1}{12} \left( 1 - \gamma + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right) \left( 2v + (1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) \right) \right. \\
& - \frac{1}{6} \left( v - (1 - v^2) \tanh^{-1}[v] \right) \ln(q^*) + \frac{1}{36} v(3 - 4v^4) \\
& + \frac{1}{12} \left( v + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) \right) \left( 2 \ln(4T) - \ln(1 - v^2) \right) + \frac{1}{24} (1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) \\
& \left. - \frac{1}{24} (1 - v^2) \left( \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 - v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 + v} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Usando la propiedad de la tangente hiperbólica:

$$\tanh^{-1}[x] = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1 - x}{1 + x}$$

$$\begin{aligned}
(I + J) = & \pi^2 T^2 \left[ \frac{1}{6} \left( 1 - \gamma + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right) \left( v + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) \right) \right. \\
& - \frac{1}{6} \left( v + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) \right) \ln(q^*) + \frac{1}{36} v(3 - 4v^4) \\
& + \frac{1}{12} \left( v + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) \right) \left( 2 \ln(4T) - \ln(1 - v^2) \right) + \frac{1}{24} (1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) \\
& \left. - \frac{1}{24} (1 - v^2) \left( \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 - v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 + v} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Juntamos términos:

$$\begin{aligned}
(I + J) = & \frac{\pi^2 T^2}{6} \left[ \left( v + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) \right) \left( 1 - \gamma + \frac{\epsilon'}{\epsilon} - \ln(q^*) + \ln 4T - \frac{1}{2} \ln(1 - v^2) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{6} v(3 - 4v^2) + \frac{1}{4} (1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) - \frac{1}{4} (1 - v^2) \left( \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 - v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 + v} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I + J) = & \frac{\pi^2 T^2}{6} \left[ \left( v + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) \right) \left( 1 - \gamma + \frac{\epsilon'}{\epsilon} - \ln(q^*) + \ln 4T - \frac{1}{2} \ln(1 - v^2) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left( v + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right) \right) - \frac{2}{3} v^3 - \frac{1}{4} (1 - v^2) \left( \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 - v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 + v} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$(I + J) = \frac{\pi^2 T^2}{6} \left[ \left( v + \frac{1}{2}(1 - v^2) \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right) \left( \ln \frac{4T}{q^*} + \frac{3}{2} - \gamma + \frac{\epsilon'}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln(1 - v^2) \right) - \frac{2}{3} v^3 - \frac{1}{4}(1 - v^2) \left( \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 - v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{2}{1 + v} \right) \right) \right]$$

Este resultado es el que se introduce en la expresión para la contribución *Hard*, en el capítulo 2.

# Apéndice D | Contribución *Soft*.

## D.1. Desarrollo del cuadrado de la amplitud *Soft*.

Para desarrollar las trazas de la amplitud al cuadrado utilizamos:

$$tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (D.1)$$

Tomamos la expresión de la amplitud al cuadrado y la separamos en sus componentes temporal y espacial, con lo que obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 = & e^4 [|\Delta_t(Q)|^2 [\bar{u}(P')u(P')\gamma^0 v(P)\bar{v}(P)\gamma^0] [\bar{u}(K')u(K')\gamma^0 v(K)\bar{v}(K)\gamma^0] \\ & + |\Delta_t(Q)|^2 (\delta^{ij} - \hat{q}^i \hat{q}^j) (\delta^{mn} - \hat{q}^m \hat{q}^n) [\bar{u}(P')u(P')\gamma^i \bar{v}(P)v(P)\gamma^m] [\bar{u}(K')u(K')\gamma^j v(K)\bar{v}(K)\gamma^n] \\ & + \Delta_t \Delta_t^* (\delta^{mn} - \hat{q}^m \hat{q}^n) [\bar{u}(P')u(P')\gamma^0 v(P)\bar{v}(P)\gamma^m] [\bar{u}(K')u(K')\gamma^0 v(K)\bar{v}(K)\gamma^n] \\ & + \Delta_t^* \Delta_t (\delta^{ij} - \hat{q}^i \hat{q}^j) [\bar{u}(P')u(P')\gamma^i v(P)\bar{v}(P)\gamma^0] [\bar{u}(K')u(K')\gamma^j v(K)\bar{v}(K)\gamma^0] \end{aligned}$$

Sumamos sobre el espín utilizando la propiedad de los espinores que se muestra en el apéndice B para obtener las siguientes trazas.

$$\begin{aligned} tr[\mathcal{K}'\gamma^0 \mathcal{K}\gamma^0] &= 4(E'_k E_k + \vec{k}' \cdot \vec{k}) \\ tr[(\mathcal{P}' + M)\gamma^0 (\mathcal{P} - M)\gamma^0] tr[\mathcal{K}'\gamma^0 \mathcal{K}\gamma^0] &= 4(E'_p E_p + \vec{p}' \cdot \vec{p}) - 4M^2 \\ tr[(\mathcal{P}' + M)\gamma^i (\mathcal{P} - M)\gamma^m] &= 4(p'_i p_m - P'_\alpha P^\alpha g^{im} + p'_m p_i - M^2 g^{im}) \\ tr[\mathcal{K}'\gamma^j \mathcal{K}\gamma^n] &= 4(k'_j k_n - K'_\alpha K^\alpha g^{jn} + k'_n k_j) \\ tr[(\mathcal{P}' + M)\gamma^0 (\mathcal{P} - M)\gamma^m] &= 4(p'_0 p_m - P'_\alpha P^\alpha g^{0m} + p'_m p_0 - M^2 g^{0m}) \\ tr[\mathcal{K}'\gamma^0 \mathcal{K}\gamma^n] &= 4(k'_0 k_n - K'_\alpha K^\alpha g^{0n} + k'_n k_0) \\ tr[(\mathcal{P}' + M)\gamma^i (\mathcal{P} - M)\gamma^0] &= 4(p_0 p'_i - P'_\alpha P^\alpha g^{0i} + p_i p'_0 - M^2 g^{i0}) \\ tr[\mathcal{K}'\gamma^j \mathcal{K}\gamma^0] &= 4(k_0 k'_j - K'_\alpha K^\alpha g^{0j} + k_j k'_0) \end{aligned}$$

## D.2. Desarrollo de $|\mathcal{M}_2|^2$

Ahora, tomamos el término al cuadrado que depende de las deltas de Kroneker y lo desarrollamos:

$$|\mathcal{M}_2|^2 = 16\Delta_t^2(\delta^{ij} - \hat{q}^i \hat{q}^j)(\delta^{mn} - \hat{q}^m \hat{q}^n)(p'_i p_m - (P'_\alpha P^\alpha + M^2)g^{im} + p'_m p_i) \\ \times (k'_j k_n - K'_\alpha K^\alpha g^{jn} + k'_n k_j)$$

Desarrollamos el primer paréntesis con la delta y hacemos la aproximación  $P' \simeq P$ :

$$|\mathcal{M}_2|^2 = 16|\Delta_t|^2(\delta^{ij} - \hat{q}^i \hat{q}^j)[(p_i p_m - (P_\alpha P^\alpha + M^2)g^{im} + p_m p_i) \\ \times (k'_j k_m - K'_\alpha K^\alpha g^{jm} + k'_m k_j) \\ - \hat{q}^m \hat{q}^n (p_i p_m - (P_\alpha P^\alpha + M^2)g^{im} + p_m p_i) \\ \times (k'_j k_n - K'_\alpha K^\alpha g^{jn} + k'_n k_j)],$$

desarrollamos la última delta de Kroneker y hacemos el álgebra necesaria:

$$|\mathcal{M}_2|^2 = 16|\Delta_t|^2[(2p_i p_m - (P_\alpha P^\alpha + M^2)g^{im})(k'_i k_m - K'_\alpha K^\alpha g^{im} + k'_m k_i) \\ - \hat{q}^m \hat{q}^n (2p_i p_m - (P_\alpha P^\alpha + M^2)g^{im})(k'_i k_n - K'_\alpha K^\alpha g^{in} + k'_n k_i) \\ - \hat{q}^i \hat{q}^j (2p_i p_m - (P_\alpha P^\alpha + M^2)g^{im})(k'_j k_m - K'_\alpha K^\alpha g^{jm} + k'_m k_j) \\ + \hat{q}^i \hat{q}^j \hat{q}^m \hat{q}^n (2p_i p_m - (P_\alpha P^\alpha + M^2)g^{im})(k'_j k_n - K'_\alpha K^\alpha g^{jn} + k'_n k_j)] \\ = 16|\Delta_t|^2[4\vec{p} \cdot \vec{k}' \vec{p}' \cdot \vec{k} - 2K'_\alpha K^\alpha p^2 - 2(P_\alpha P^\alpha + M^2)\vec{k} \cdot \vec{k}' + (P_\alpha P^\alpha + M^2)K'_\alpha K^\alpha \\ - \hat{q}^m \hat{q}^n (2\vec{p}' \cdot \vec{k}' p_m k_n - K'_\alpha K^\alpha p_m p_m + 2\vec{p}' \cdot \vec{k}' p_m k'_n) \\ + \hat{q}^m \hat{q}^n (P_\alpha P^\alpha + M^2)(k'_m k_n - K'_\alpha K^\alpha g^{mn} + k'_n k_m) \\ - \hat{q}^i \hat{q}^j (2p_i k'_j \vec{p}' \cdot \vec{k}' - 2K'_\alpha K^\alpha p_i p_j + 2\vec{p}' \cdot \vec{k}' p_i k_j) \\ + \hat{q}^i \hat{q}^j (P_\alpha P^\alpha + M^2)(k'_j k_i - K'_\alpha K^\alpha g^{ij} + k'_i k_j) \\ + \hat{q}^i \hat{q}^j \hat{q}^m \hat{q}^n (2p_i k'_j p_m p_m - 2K'_\alpha K^\alpha p_i p_m g^{jn} + 2p_i p_m k'_m k_j) \\ - \hat{q}^i \hat{q}^j \hat{q}^m \hat{q}^n (P_\alpha P^\alpha + M^2)(g^{im} k'_j k_n - K'_\alpha K^\alpha g^{im} g^{in} + g^{im} k'_n k_j)],$$

reescribimos los términos en forma vectorial:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_2|^2 = & 16|\Delta_t|^2 [4\vec{p} \cdot \vec{k}' \vec{p} \cdot \vec{k} - 2K'_\alpha K^\alpha p^2 - 2(P_\alpha P^\alpha + M^2)\vec{k}' \cdot \vec{k} \\
& + (P_\alpha P^\alpha + M^2)K'_\alpha K^\alpha - 2\vec{p} \cdot \vec{k}' \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k} + 2K'_\alpha K^\alpha \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{p} \\
& - 2\vec{p} \cdot \vec{k} \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}' + 2(P_\alpha P^\alpha + M^2)(2\hat{q} \cdot \vec{k} \hat{q} \cdot \vec{k}' - K'_\alpha K^\alpha) \\
& - 2\hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}' \vec{p} \cdot \vec{k} + 2K'_\alpha K^\alpha \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{p} - \vec{p} \cdot \vec{k}' \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k} \\
& + 4\hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}' \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k} - 2K'_\alpha K^\alpha \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{p}].
\end{aligned}$$

Reacomodamos y eliminamos términos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_2|^2 = & 16|\Delta_t|^2 [4(\vec{p} \cdot \vec{k}' - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}')(\vec{p} \cdot \vec{k} - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}) + 2(\hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{p} - p^2)K'_\alpha K^\alpha \\
& (P_\alpha P^\alpha + M^2)(2\vec{k}' \cdot \vec{k} - K'_\alpha K^\alpha - \vec{k} \cdot \hat{q} \vec{k} \cdot \hat{q} + K'_\alpha K^\alpha - \vec{k} \cdot \hat{q} \vec{k} \cdot \hat{q} \\
& - \vec{k} \cdot \hat{q} \vec{k} \cdot \hat{q} + K'_\alpha K^\alpha - \vec{k} \cdot \hat{q} \vec{k} \cdot \hat{q} + \vec{k} \cdot \hat{q} \vec{k} \cdot \hat{q} - K'_\alpha K^\alpha + \vec{k} \cdot \hat{q} \vec{k} \cdot \hat{q})],
\end{aligned}$$

de aquí obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_2|^2 = & 16|\Delta_t|^2 [4(\vec{p} \cdot \vec{k}' - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}')(\vec{p} \cdot \vec{k} - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}) + 2(\hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{p} - p^2)K'_\alpha K^\alpha \\
& (P_\alpha P^\alpha + M^2)(2\vec{k}' \cdot \vec{k} - 2\vec{k} \cdot \hat{q} \vec{k}' \cdot \hat{q})]
\end{aligned}$$

Si tomamos en cuenta que el ángulo entre el vector  $\vec{k}$  y el vector  $\hat{q}$  es muy pequeño, y expresamos el producto punto como:

$$\vec{k} \cdot \hat{q} \vec{k}' \cdot \hat{q} = |k'| |k|, \quad (\text{D.2})$$

entonces podemos reescribir de la siguiente manera este resultado:

$$|k'| |k| \simeq \vec{k}' \cdot \vec{k} \quad (\text{D.3})$$

Con esto, podemos ver que el último término se hace cero y obtenemos la expresión (2.63).

### D.3. Desarrollo de $|\mathcal{M}_3|^2$

Ahora, vamos a desarrollar el álgebra necesaria para determinar la forma del término cruzado en el cuadrado de la amplitud, tomando en cuenta las mismas aproximaciones que en la sección

anterior. Tomamos el término cruzado y realizamos las operaciones correspondientes:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_3|^2 &= |\Delta_l \Delta_t^*| (\delta^{mn} - \hat{q}^m \hat{q}^n) \text{tr}[(\mathcal{P}' + M)\gamma^0(\mathcal{P} - M)\gamma^m] \text{tr}[\mathcal{K}'\gamma^0 \mathcal{K}\gamma^n] \\
&= 16|\Delta_l \Delta_t^*| (2p_0 p_m - (P_\alpha P^\alpha + M^2)g^{0m})(k'_0 k_m - K'_\alpha K^\alpha g^{0m} + k'_m k_0) \\
&\quad - \hat{q}^m \hat{q}^n (2p_0 p_m - (P_\alpha P^\alpha + M^2)g^{0m})(k'_0 k_n - K'_\alpha K^\alpha g^{0n} + k'_n k_0) \\
&= 16|\Delta_l \Delta_t^*| [2E_p E'_k \vec{p} \cdot \vec{k} - 2p^2 K'_\alpha K^\alpha + 2E_p E_k \vec{p} \cdot \vec{k}' \\
&\quad - (P_\alpha P^\alpha + M^2)(2\vec{k}' \cdot \vec{k} - K'_\alpha K^\alpha) \\
&\quad - \hat{q}^m \hat{q}^n (2E_p E'_k p_m k_n - 2K'_\alpha K^\alpha p_n p_m + 2k'_n p_m E_p E_k) \\
&\quad + \hat{q}^m \hat{q}^n (P_\alpha P^\alpha + M^2)(k'_m k_n - K'_\alpha K^\alpha g^{mn} + k'_n k_m)] \\
&= 16|\Delta_l \Delta_t^*| [2E_p E'_k \vec{p} \cdot \vec{k} - 2p^2 K'_\alpha K^\alpha + 2E_p E_k \vec{p} \cdot \vec{k}' \\
&\quad - (P_\alpha P^\alpha + M^2)(2\vec{k}' \cdot \vec{k} - K'_\alpha K^\alpha - 2\hat{q} \cdot \vec{k}' \hat{q} \cdot \vec{k} + K'_\alpha K^\alpha) \\
&\quad 2E_p E'_k \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k} + 2K'_\alpha K^\alpha \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{p} - 2\hat{q} \cdot \vec{k}' \hat{q} \cdot \vec{p} E_p E_k] \\
&= 16|\Delta_l \Delta_t^*| [2E_p E'_k (\vec{p} \cdot \vec{k} - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}) + 2E_p E_k (\vec{p} \cdot \vec{k}' - \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{k}') \\
&\quad - 2p^2 K'_\alpha K^\alpha + 2K'_\alpha K^\alpha \hat{q} \cdot \vec{p} \hat{q} \cdot \vec{p} - (P_\alpha P^\alpha + M^2)(2\vec{k}' \cdot \vec{k} - 2\hat{q} \cdot \vec{k}' \hat{q} \cdot \vec{k})]
\end{aligned}$$

Si tomamos el segundo término cruzado y realizamos el mismo procedimiento, obtenemos un resultado similar. Dónde podemos notar que el último término para ambas expresiones, se hace cero utilizando la ecuación (D.3) como en el caso de la amplitud  $|\mathcal{M}_2|^2$ .

#### D.4. Desarrollo de función par para la distribución térmica.

En esta sección vamos a analizar el comportamiento del integrando en la ecuación 2.57

$$G(E'_k, E_k) \equiv n_F(E_k)[1 - n_F(E'_k)]|\mathcal{M}|^2$$

, haciendo  $E_k \rightarrow E'_k$  y  $E'_k \rightarrow E_k$ . Con este cambio obtenemos:

$$G(E_k, E'_k) = n_F(E'_k)[1 - n_F(E_k)]|\mathcal{M}|^2$$

podemos ver que ,  $G$  no es simétrico ante el cambio de  $E_k$  y  $E'_k$ .

Sin embargo, es posible construir una función que si lo sea. Para lograrlo, existen dos posibilidades:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad G_s^{(-)}(E_k, E'_k) &= \frac{G(E'_k, E_k) - G(E_k, E'_k)}{2} \\
G_s^{(-)}(E_k, E'_k) &= \frac{n_F(E_k) - n_F(E_k)n_F(E'_k) - n_F(E'_k) + n_F(E'_k)n_F(E_k)}{2} |\mathcal{M}|^2 \\
G_s^{(-)}(E_k, E'_k) &= \frac{n_F(E_k) - n_F(E'_k)}{2} |\mathcal{M}|^2 \\
\text{(b)} \quad G_s^{(+)}(E_k, E'_k) &= \frac{G(E'_k, E_k) + G(E_k, E'_k)}{2} \\
G_s^{(+)}(E_k, E'_k) &= \frac{n_F(E_k) - n_F(E_k)n_F(E'_k) + n_F(E'_k) - n_F(E'_k)n_F(E_k)}{2} |\mathcal{M}|^2 \\
G_s^{(+)}(E_k, E'_k) &= \frac{n_F(E_k) + n_F(E'_k)}{2} |\mathcal{M}|^2 + n_F(E'_k)n_F(E_k) |\mathcal{M}|^2
\end{aligned}$$

Dónde podemos despreciar el término cruzado debido a las condiciones que impusimos a la temperatura del plasma.

$$G_s^{(+)}(E_k, E'_k) = \frac{n_F(E_k) + n_F(E'_k)}{2} |\mathcal{M}|^2$$

Con la opción (a), el factor de la distribución térmica puede expandirse a orden de  $\omega$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F(E'_k) &\equiv \frac{n_F(E_k) - n_F(E'_k)}{2} = F(E_k) + \frac{dF(E'_k)}{dE'_k} \Big|_{E_k} E'_k - E_k + \dots \\
&\simeq -\frac{1}{2} \frac{1}{(e^{E_k/T} + 1)^2} \frac{E'_k - E_k}{T} \\
&\simeq -\frac{1}{2} \omega n'_F(E_k)
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Así

$$G_s^{(-)}(E_k, E'_k) \simeq -\frac{1}{2} \omega n'_F(E_k) |\mathcal{M}|^2$$

## D.5. Función paso

En la expresión 2.79, la integral respecto a  $q$  es de la siguiente manera

$$\int_0^{q^*} dq q \Theta(q^* - q) \tag{D.5}$$

para poder trabajar con algunas propiedades de la función paso, es necesario hacer el cambio de variable  $x = q^* - q$ . Este cambio nos permite escribir la integral de la siguiente manera:

$$\int_0^{q^*} dq (q^* - x) \Theta(x) \tag{D.6}$$



una de las propiedades de la función paso establece que:

$$\int_0^x \Theta(y) dy = x\Theta(x) \quad (\text{D.7})$$

Usando esta propiedad en la ecuación D.6, obtenemos:

$$q^{*2}\Theta(q^*) - \int_0^{q^*} dx x\Theta(x) \quad (\text{D.8})$$

Debido a la condición del momento en la región *soft*, el primér término es cero, así que nos quedamos con la siguiente expresión:

$$- \int_0^{q^*} dx x\Theta(x) \quad (\text{D.9})$$

Si volvemos a la variable de  $q$ , obtenemos:

$$- \int_0^{q^*} dq (q^* - q)\Theta(q^* - q) \quad (\text{D.10})$$

Ahora, multiplicamos por un  $\frac{v}{v}$  que nos permite redefinir la función paso y sacamos un signo menos:

$$\frac{1}{v} \int_0^{q^*} dq (vq - vq^*)\Theta(vq^* - vq) \quad (\text{D.11})$$

usando la propiedad (D.7), tenemos:

$$\frac{1}{v} \int_0^{q^*} dq \int_{-\infty}^{vq} \Theta(\omega - vq) d\omega \quad (\text{D.12})$$

para que la función  $\Theta$  sea igual a 1,  $\omega - vq$  debe ser siempre mayor que 0, así la integral es:

$$\frac{1}{2v} \int_0^{q^*} dq \int_{-vq}^{vq} d\omega \quad (\text{D.13})$$

# Bibliografía

- [1] Eric H. Thoma, Markus H. Thoma, *Energy loss of a heavy fermion in a hot QED plasma.*, Department of physics and astronomy, Northwestern University, Nuclear Science Division, Lawrence Berkeley Laboratory.
- [2] Faqir C Khanna , Adolfo P C Malbouisson, Jorge M C Malbouisson, Ademir E Santana, *Thermal Quantum Field Theory Algebraic Aspects and Applications*, Capítulo 1: Elements of Thermodynamics
- [3] Yuhao Yang, Supervised by Dr. Tim Evans, *An Introduction to Thermal Field Theory*, Thesis degree, Master of Science in Quantum Fields and Fundamental Forces, Department of Physics, Imperial College London. September 23, 2011.
- [4] Ashock Das, *Finite Temperature Field Theory*, World Scientific Publishing Company (1997)
- [5] Yui-Cheng Huang, *Field Theory in the Imaginary-Time Formulation*, [arXiv:1311.1990](https://arxiv.org/abs/1311.1990) [hep-ph] Aug. 20, 2014.
- [6] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory at Finite Temperature: An Introduction*, [arXiv:0005272](https://arxiv.org/abs/0005272) [hep-ph]
- [7] Michelle Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000
- [8] Markus H. Thoma, *What can we learn from electromagnetic plasmas about the quark-gluon plasma?*, Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik, P.O. Box 1312, 85741 Garching, Germany, [arXiv:0809.1507](https://arxiv.org/abs/0809.1507) [hep-ph]
- [9] University of Maryland, Chapter 2: Quark-Gluon Plasma and the Early Universe, [http : //www.physics.umd.edu/courses/Phys741/xji/chapter2.pdf](http://www.physics.umd.edu/courses/Phys741/xji/chapter2.pdf)
- [10] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Segunda edición, Cambridge University Press.

- 
- [11] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995).
- [12] Paul Romatshke, Michael Strickland, *Energy loss of a heavy fermion in an anisotropic QED plasma*, Phys. Rev. D **69** (2004).
- [13] Eric Braaten, Markus H. Thoma, *Energy loss of a heavy quark in the quark-gluon plasma*, Phys. Rev. D (Rapid Comm.) **44** (1991).