



UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Investigación en Física

Dualidades y Matroides en Teorías de Gravedad con distinta Dimensionalidad

Tesis que presenta:

Edgar Alejandro León Espinoza

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias (Física)

Director: Dr. Juan Antonio Nieto García

Co-Director: Dr. Anton Lipovka Kostko

Marzo de 2011

Hermosillo, Sonora

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Universidad de Sonora
Departamento de Investigación en Física
Doctorado en Ciencias (Física)

Tesis de Doctorado:
Dualidades y Matroides en Teorías de
Gravedad con distinta Dimensionalidad.

Por:

Edgar Alejandro León

Asesores:

Dr. Juan Antonio Nieto García

y

Dr. Anton Lipovka

A mi esposa e hijos.

Resumen

En este trabajo estudiamos el papel que juega la dualidad en diferentes contextos, incluyendo la teoría de matroides orientados, modelos de gravitación y cosmología. En primer lugar, abordamos el problema de dos tipos de dualidad en teorías de norma y gravedad linealizada. En particular se discute la posibilidad de unificar la dualidad-S y la dualidad-F en ambas teorías. En segundo lugar, estudiamos diferentes aspectos de gravedad en dos dimensiones con torsión. Encontramos que la métrica correspondiente puede ser asociada con una base de matrices de 2×2 , las cuales a su vez pueden ser ligadas con un matroide orientado de rango 2. En seguida exploramos, desde un punto de vista general, la posibilidad de que el producto directo de dos espacios $M^p \times M^q$ pueda ser relacionado con aspectos duales y cosmología. Por último, analizamos una teoría cosmológica con dimensiones extra.

AGRADECIMIENTOS

A mis asesores, los doctores Juan Antonio Nieto y Anton Lipovka, por su constante apoyo en este proyecto personal que comenzó desde el momento en que inicié los estudios de maestría. Al Dr. Juan Antonio Nieto le agradezco especialmente su asesoramiento y consejos, los cuales no olvidaré y que han sido invaluable para mi desarrollo. Al Dr. Anton Lipovka le agradezco su apoyo de muy distintas maneras, así como su paciencia dentro y fuera de las clases. Ambos tienen mi admiración y respeto.

En segundo lugar a mi familia, por su paciencia y su apoyo incondicional. Especialmente menciono a mi esposa Araceli y mi hermano Andy, ya que me han animado constante y positivamente durante todo el proyecto.

Al Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, DIFUS, por la oportunidad que me ha dado de formarme como físico, y de manera más precisa: A los doctores Julio Saucedo y Alvaro Posada, en general por hacer crecer y modernizar el posgrado de forma tan notable, y en particular por su apoyo hacia mi formación y trabajo. A la doctora Ramona Núñez por su colaboración, apoyo y paciencia en la parte final de este proyecto. A Sandra León por su paciencia y organización, pues gracias a ella pude dedicarme mejor a la parte de la investigación; le tenemos mucho cariño a Sandra. A los doctores G. Campoy, F. Ramos, G. Arreaga, R. García-Llamas, E. Urrutia y J. L. Marín (qepd), por la formación que me otorgaron como estudiante, así como por sus consejos. Al doctor J. Manzanarez, por permitirme convivir con él tanto en la física como en el ajedrez. También me permito incluir aquí a mis excompañeros y amigos C. A. Pereyda y J. J. Cobos, por darme tantos ánimos y por ser receptores de algunas ideas de este trabajo.

Por último -y no menos importante-, a los doctores Jorge Almaral, Joel Calderón y Humberto Castorena, quienes me han apoyado incondicionalmente en la Facultad de Ingeniería Los Mochis de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Todos ustedes tienen mi más sentido agradecimiento.

ÍNDICE

Introducción	1
Capítulo I. Teoría de matroides	3
I.1. De gráficas y matrices a Matroides	3
I.2 Dualidad en Matroides	6
I.3 Matroides Orientados	9
I.4 Lemma de Farkas en Matroides	10
Capítulo II. Dualidad en teorías de norma y gravedad linealizada	13
II.1 Dualidad electromagnética y de rotación	13
II.2 Dualidad-S en electromagnetismo	16
II.3 Dualidad de rotación y dualidad S en gravedad linealizada	18
II.4 Dualidades de rotación y S en un mismo esquema	24
Capítulo III. Gravedad en 2d y teoría de matroides	29
III.1 Breve repaso de la representación matricial de números complejos	29
III.2 De funciones a gravedad 2d con torsión	32
III.3 Gravedad 2d en términos de matroides	33
Capítulo IV. Dualidad en teorías gravitacionales de alta dimensión	39
IV.1 Gravedad en altas dimensiones	39
IV.2 Simplificando el modelo	42
IV.3 Dualidad tipo Farkas en altas dimensiones	44
Capítulo V. Cosmología multidimensional	47
V.1 El modelo	47
V.2 Modelo con dimensiones $D=3$, $d=1$	49
V.3 Caso $D=3$, $d=1$ con materia	50
V.4 Modelo con dimensiones $(1+D+d)$	54
Sumario	56
Referencias	58

Introducción

Las simetrías en la física teórica han jugado un papel fundamental para avanzar en el entendimiento de las leyes que rigen el Universo. Por ejemplo, la simetría de rotación de los campos eléctrico y magnético en las ecuaciones de Maxwell en el vacío, permite aclarar diferentes aspectos de la teoría electromagnética clásica [1][2]. Así mismo, consideraciones de simetría, primero para sistemas de referencia inerciales y después para sistemas no inerciales, le permitieron a Einstein formular las teorías de Relatividad Especial y General [3][4].

Desde un punto de vista matemático, se encontró que las diferentes simetrías en la física podrían ser descritas en términos de la teoría de grupos. De este modo, los grupos de simetría asociados con la mecánica cuántica permitieron determinar invariantes y estados físicos asociados con un Hamiltoniano dado [5]. En el caso de la construcción de la teoría de Yang-Mills, los grupos semi-simples de Lie jugaron un papel primordial. De hecho, el llamado modelo estándar de partículas, el cual está basado en la teoría de Yang-Mills, está descrito en términos del grupo de simetría $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ [6].

De lo anterior se desprende que para entender cada vez mejor el modo en que el Universo funciona, es necesario determinar el grupo de simetrías fundamentales de la naturaleza. Esta idea se ve reflejada en la simetría de dualidad en la teoría de supercuerdas [7]. Originalmente se tenían cinco teorías de supercuerdas (Tipo IA, IIB, $E8 \times E8$, $SO(32)$ y Heterótica), pero el descubrimiento de las dualidades S y T permitió establecer diferentes relaciones entre dichas teorías, sugiriendo la existencia de una teoría subyacente a todas ellas: La teoría M [8][9]. A las relaciones entre las distintas teorías de cuerdas las llamamos dualidades. Algunas conjeturas hacen pensar que las dualidades pueden ser un principio guía fundamental en la búsqueda de unificación [1][2].

Por otro lado, desde la misma creación de la Teoría General de Relatividad, se ha conjeturado la existencia de dimensiones extra como mecanismo de unificación. Las teorías que revivieron y dieron un nuevo auge a las dimensiones extra en gravitación fueron la supergravidad y la teoría de cuerdas [7][8][10]. Bien puede ser que la idea de las dimensiones extra se mantenga

en la física, ya sea porque se compruebe su existencia o porque permita una descripción dual de alguna teoría más fundamental [11].

En este trabajo estudiamos dualidades en gravitación y utilizamos una estructura matemática muy interesante: los matroides [12]. También analizamos teorías de gravedad en distintas dimensiones.

La división de este trabajo es como sigue: En el Capítulo I otorgamos una introducción a la teoría de matroides, en la parte relevante al trabajo presentado. En el Capítulo II estudiamos un tipo de dualidad para gravedad linealizada. El Capítulo III muestra un modelo de gravedad en dos dimensiones, y lo relacionamos con matroides. En el Capítulo IV analizamos un modelo supradimensional, mientras que en el Capítulo V estudiamos un modelo cosmológico con dimensiones extra. Terminamos el trabajo en la sección del Sumario, donde además de resumir las discusiones anteriores, mencionamos futuros desarrollos.

Capítulo I

Teoría de Matroides

La teoría de Matroides generaliza propiedades abstractas de teoría de grafos, álgebra lineal y otros (para una buena introducción ver la Ref. [12]). En lo que sigue mostramos los conceptos e ideas relevantes para este trabajo.

1.1 De gráficas y matrices a Matroides.

Los matroides se pueden clasificar de muy diversas maneras. Algunos pueden ser representados mediante matrices, configuraciones geométricas o grafos, mientras que otros no tienen representación alguna. Nuestro punto de inicio son los matroides con representación gráfica, pues con ella obtenemos fácilmente intuiciones en esta rama de las matemáticas.

Comencemos con un grafo bien conocido; en la figura 1.1 se muestra un grafo que se puede asociar al llamado “problema de los puentes de Königsberg”. El problema, resuelto por Euler en 1736 [13], consistía en encontrar el modo de atravesar los puentes que conectaban cuatro regiones de la ciudad y regresar al punto de partida, atravesando sólo una vez cada uno de los siete puentes. Hoy en día se considera el análisis de Euler como el inicio de la teoría de grafos, así como el de la topología [14][15].

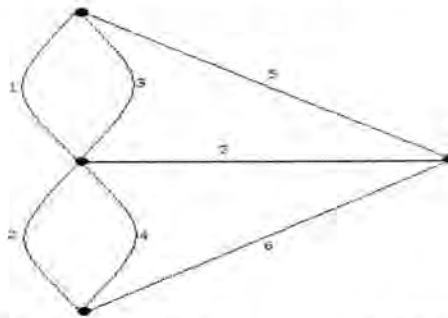


Fig. 1.1. Grafo de G_1 de los puentes de Königsberg.

Además de reconocer que el grafo de la figura 1.1 no es *Euleriano* (recorrer todas las aristas una sola vez), vemos que hay una serie de *ciclos* o circuitos

en el grafo -tales como los formados por las aristas $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{4, 6, 7\}$ -, y otros formados por cuatro aristas. Aquí, se entiende por ciclo el conjunto mínimo de aristas que devuelven al vértice de partida en un recorrido hecho entre aristas adyacentes. Por otra parte, vemos que hay distintos subconjuntos mínimos del conjunto de aristas $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ que mantienen conectados todos los vértices, sin formar ciclos. En el caso de la figura 1.1, dichos subconjuntos mínimos son:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 5, 6\}, \\ \{1, 6, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 5\}, \\ \{3, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}, \{3, 6, 7\}, \{4, 5, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 7\} \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

A cada uno de los anteriores subconjuntos de E contenidos en \mathcal{B} se le llama *árbol generador*. Podemos observar que tales árboles también pueden entenderse como los subconjuntos máximos de aristas sin ciclos. A decir verdad, el par de conjuntos $\{E, \mathcal{B}\}$ forman ya un matroide, donde E es el conjunto de elementos del matroide y \mathcal{B} es el conjunto de *bases* de dicho matroide. Vemos que si sólo tenemos tal par de conjuntos, podemos reconstruir el grafo.

Por último, mencionamos en forma breve cómo se relacionan las bases con los circuitos: Llamamos independiente a cada subconjunto I de las bases. A la familia total de subconjuntos independientes lo denotaremos por \mathcal{I} . Todos los subconjuntos de E que no pertenecen a \mathcal{I} se llaman dependientes. Entonces, los circuitos son los subconjuntos mínimos dependientes. Por otra parte, las bases son los subconjuntos máximos independientes.

Para el caso del grafo en cuestión, sabemos de matemática combinatoria que el número de subconjuntos con tres elementos será $\frac{7!}{4!3!} = 35$; de éstos, veintiuno son bases.

Otra forma de caracterizar un grafo $G = \{V(G), E(G)\}$ es mediante la matriz de incidencia. La componente a_{ij} de tal matriz indica cuantas veces la arista j es incidente al vértice i . Esto es, las columnas etiquetan las aristas y los renglones los vértices. Para el grafo G_1 la matriz de incidencia toma la forma:

$$[a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Tomando las columnas como vectores de la manera usual en álgebra lineal,

obtenemos la dependencia o independencia lineal entre ellos. Vemos entonces que los conjuntos mínimos dependientes corresponden a los circuitos de G_1 mencionados antes, tales como los vectores representados por los pares de columnas 1 y 3, 2 y 4 o por tercias como 1,5 y 7. También podemos ver que las bases en (1.1) corresponden a los conjuntos máximos de vectores independientes en la matriz de incidencia (1.2), y tienen la misma cardinalidad de las bases que la dimensión del espacio vectorial que define la matriz.

Es claro de la discusión anterior que cada grafo posee una representación de matriz, y en la ausencia de lazos esta matriz es representada sobre $GF(2)$ - campo binario-. Sin embargo, una matriz arbitraria también posee propiedades análogas de dependencia que las vistas para el grafo G_1 . Como veremos, tales propiedades son consideradas como el punto de partida para definir en forma general el concepto de matroide. Sin embargo, una vez definido dicho concepto, se establece que existen matroides que no son gráficos ni representables por medio de una matriz.

A continuación formalizaremos matemáticamente estas ideas, así como el modo en que se complementan y generalizan.

Existen diversas formas de definir un matroide. En términos de conjuntos independientes, tenemos que un matroide es un par ordenado de conjuntos (E, \mathcal{I}) , donde \mathcal{I} es una familia de subconjuntos del conjunto finito E , los cuales satisfacen las condiciones:

(Ia) $\emptyset \in \mathcal{I}$. De modo que el conjunto \mathcal{I} no es vacío.

(Ib) Si $I_1 \in \mathcal{I}$ e $I_2 \subseteq I_1$, entonces $I_2 \in \mathcal{I}$. Esto es, cualquier subconjunto de un elemento de \mathcal{I} también es independiente.

(Ic) Si I_1 e I_2 son elementos de \mathcal{I} y $|I_1| = |I_2| + 1$, entonces hay un elemento e en $I_1 - I_2$ tal que $I_2 \cup e$ también pertenece a \mathcal{I} .

Los circuitos son los conjuntos mínimos dependientes. En el caso de grafos, tales conjuntos corresponden a los ciclos o caminos cerrados; en el caso de espacios vectoriales, son los conjuntos mínimos con dependencia lineal, definida en términos de la suma vectorial $\sum_i \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$, i.e. con el mínimo de λ 's distintos de cero. De este modo, el matroide también puede quedar caracterizado por sus circuitos.

Por otra parte, del axioma (Ib) podemos encontrar elementos de \mathcal{I} con cardinalidad máxima. A estos elementos se les denomina bases. En el caso de matroides gráficos, las bases corresponden a los árboles generadores. Para matroides representables, las bases son los conjuntos máximos para los que las

λ 's de la suma anterior son necesariamente cero. Podemos entonces modificar las condiciones anteriores para formar los axiomas matroidales en términos de bases. Teniendo el conjunto de bases \mathcal{B} sobre el conjunto E , el matroide $M(E, \mathcal{B})$ queda definido por:

(Ba) \mathcal{B} no es vacío.

(Bb) Si B_1 y B_2 pertenecen a \mathcal{B} y $e \in B_1 - B_2$, entonces hay un elemento f de $B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - e) \cup f$ también pertenece a \mathcal{B} .

De (Ic) se sigue que todas las bases poseen la misma cardinalidad: el rango del matroide $r(M)$. Para el caso gráfico, el rango corresponde al número máximo de aristas que no contienen ciclos, i.e. al número de elementos de los árboles generadores. En el caso de un grafo conexo con m vértices, el rango es $r([M(G)]) = m - 1$. Igualmente, podemos definir los matroides en términos de su función rango - definida para cada subconjunto de E -, por sus circuitos o por medio de un operador de cerradura, entre otras formas. De hecho, se considera que el gran número de definiciones equivalentes de un matroide es un indicador de la riqueza de la teoría.

I.2 Dualidad en matroides.

Una característica fundamental de la teoría de matroides es la dualidad. Para cada matroide $M(E, \mathcal{B})$ formamos un matroide dual $M^*(E, \mathcal{B}^*)$, donde $\mathcal{B}^* = \{E(M) - B : B \in \mathcal{B}(M)\}$. Los elementos del conjunto \mathcal{B}^* se llaman *cobases*, denotando que son las bases del matroide dual M^* . Se sigue de ahí que la cardinalidad de las bases de M^* es $r(M^*) = |E| - r(M)$.

Lo anterior puede ser aclarado en el caso de un *matroide uniforme*. Éste es definido como un matroide $U_{p,q}$ sobre E de rango $r(U_{p,q}) = p$, con $q = |E|$, que contiene el máximo número de bases posibles para ese rango. Los circuitos para estos matroides tienen $r([U_{p,q}]) + 1$ elementos y el rango de cualquier subconjunto A de E es el menor de $r(M)$ y $|A|$. El número de bases para el matroide $U_{p,q}$ será entonces $\frac{q!}{p!(q-p)!}$. Claramente los factores del denominador son intercambiados para el dual de este matroide, que es de nuevo uniforme, $U_{p,q}^* \cong U_{q-p,q}$. Para $U_{0,n}$, se tiene que el dual es $U_{0,n}^* \cong U_{n,n}$. Es decir, mientras que $U_{0,n}$ contiene sólo el elemento $\{\emptyset\}$ en \mathcal{B} , el matroide $U_{0,n}^*$ contiene como base a E mismo como único elemento en \mathcal{B}^* .

Para matroides gráficos, donde su grafo correspondiente es planar (grafo isomorfo a uno en que las aristas no se cruzan), tenemos que el matroide dual

corresponde a la dualidad geométrica. En efecto, la dualidad geométrica se construye poniendo un vértice en cada región limitada por aristas; la región "exterior" del grafo se toma como una sola región y se unen los vértices con nuevas aristas que crucen sólo una vez a las originales. En la fig. 1.2 se muestra tal construcción para el grafo G1 estudiado antes.

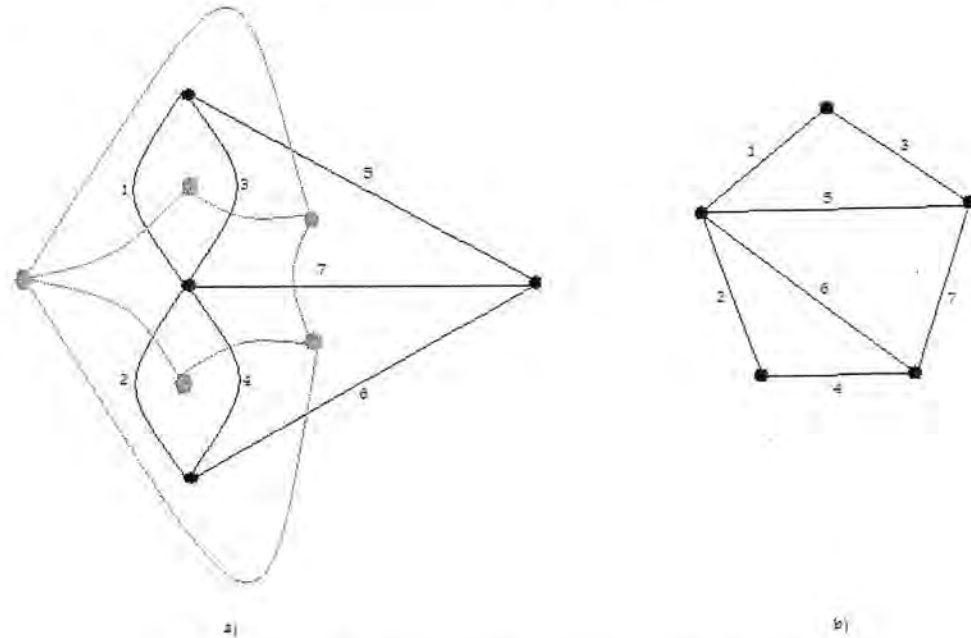


Fig. 1.2. a) G1 y construcción de su dual G1*. b) G1*

Dada la definición anterior del dual, se sigue que $(M^*)^* \cong M$, lo cual es claro en la fig. 1.2, donde las regiones en un grafo se corresponden con los vértices en el dual. También se puede ver la relación de cardinalidad de las bases: cuando en G1 las bases tienen tres elementos, en su dual los árboles generadores poseen cuatro elementos, y el número de estos es el mismo, veintiuno. La matriz de incidencia para este nuevo grafo es:

$$[b_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Un matroide es representable cuando puede expresarse en términos de una matriz A sobre un campo. En este caso, cada vector columna corresponde a un elemento $e \in E$ en el matroide. Es usual denotar por $M[A]$ a un matroide representable. Existe un interés particular cuando el campo corresponde a $GF(t)$, con t una potencia entera de un primo. De lo mencionado para la matriz de incidencia para grafos, se sigue que todo matroide gráfico es representable. Más aún, asumiendo que los lazos cerrados de un grafo (loops) son expresados mediante un vector columna de ceros (dependencia lineal) en la matriz A , se tiene que todo matroide gráfico es binario, i.e. representable sobre $GF(2)$.

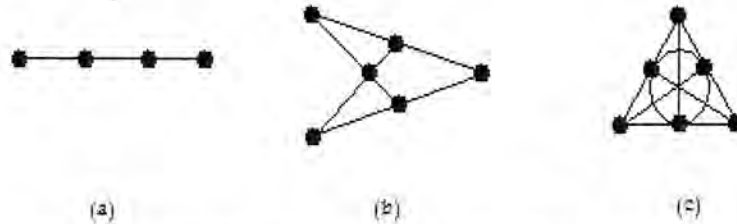
Un matroide que no puede ser representado sobre $GF(2)$ es $U_{2,4}$. Esto se puede ver con el siguiente razonamiento: el espacio generado por las columnas de una matriz representando dicho matroide tiene dimensión dos, pero son cuatro los vectores columna distintos que se generan sobre $GF(2)$; como uno de estos cuatro vectores es $\vec{0}$, sólo tres pueden ser independientes. Dado que en $U_{2,4}$ las cuatro bases son independientes, no puede ser binario, y con ello tampoco gráfico. Sin embargo, el matroide sí es ternario; tiene una representación sobre $GF(3)$ con la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

En realidad, cualquier matroide que sea ambos, binario y ternario, se puede representar sobre cualquier campo $GF(t)$. Los matroides regulares son los representables por una matriz unimodular, i.e. aquella con determinantes en $\{-1, 0, 1\}$ para todas sus submatrices cuadradas. Un matroide resulta ser regular si es representable sobre cualquier campo, y todo matroide gráfico es regular.

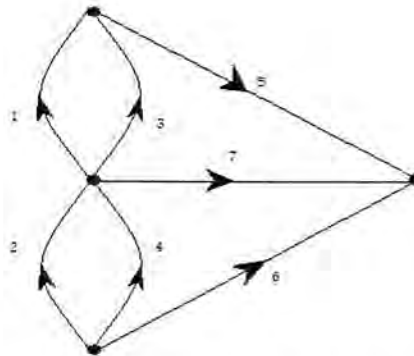
Existe otra representación para matroides, la geométrica. En ella se presentan los elementos de E como puntos y la dependencia se muestra de acuerdo a la dependencia afín que presenten dichos puntos. Por ejemplo, tres puntos en una línea o cuatro puntos en el plano son mínimamente dependientes, y si dos elementos son paralelos (circuito con dos elementos), se sitúan en un mismo punto.

En la figura 1.3 se muestran representaciones geométricas de algunos matroides: (a) el matroide ya mencionado $U_{2,4}$, (b) $M(K_4)$ el matroide sobre el grafo completo K_4 (todos los vértices conectados entre sí por una arista), y (c) el matroide de Fano F_7 , el cual se distingue por su relación con geometría proyectiva y octoniones.



I.3 Matroides Orientados.

En teoría de grafos y redes es importante el estudio de digrafos, que son grafos en los que se asigna una dirección (o signo) a cada arista. Resulta que los digrafos tienen una generalización matroidal. Para entender esto, comencemos de nuevo con el grafo G_1 de la fig. 1.1 y démosle una dirección a cada arista del modo mostrado en la fig. 1.4. Obtenemos el digrafo (grafo dirigido) D_1 . Al grafo G_1 se le llama *grafo subyacente* de D_1 .



En este caso, a dicha orientación se le llama acíclica, pues no se puede seguir los ciclos tomando sólo direcciones positivas en las aristas. El matroide asociado a un digrafo se llama *matroide orientado* [16]. Como dijimos antes, un matroide también puede ser caracterizado totalmente por sus circuitos, los cuales son más fáciles de visualizar en dígrafos. Para cada circuito C del matroide, tenemos elementos positivos y negativos, i.e. $C = (C^+, C^-)$. Un *matroide orientado acíclico* -únicos que trataremos de los orientados- es

aquel que no tiene únicamente circuitos positivos, es decir, el que contiene para todos los circuitos siempre elementos C^+ y C^- . Los negativos de los circuitos (haciendo los cambios $C^+ \rightarrow C^-$ y $C^- \rightarrow C^+$) también pertenecen al conjunto de circuitos \mathcal{C} , que en D1 corresponde a tomar los ciclos en sentido contrario. Una notación conveniente es poner una barra para los elementos C^- de C . Para D1 tenemos los circuitos $1\bar{3}$, $2\bar{4}$, $15\bar{7}$, $2\bar{6}7$, $35\bar{7}$, $4\bar{6}7$, $125\bar{6}$, $145\bar{6}$, $235\bar{6}$, $345\bar{6}$ y los negativos de estos. Otras propiedades de los matroides orientados serán revisadas más adelante.

I.4 Lemma de Farkas en matroides.

Los matroides orientados se pueden caracterizar de distintos modos, tal como sucede para los matroides no orientados. Sin embargo, también poseen cualidades particulares que los vinculan directamente con otros objetos de estudio en matemáticas, como son: topología, conjuntos parcialmente ordenados (posets), polítopos y programación lineal [16]. Dentro de ésta última existe una propiedad llamada Lema de Farkas [17], la cual mencionamos más adelante. Tal propiedad permite considerar una definición alternativa de un matroide orientado. Por tal motivo, a continuación analizamos brevemente dicho Lema.

Primero, consideremos un espacio fibrado tangente $T = (H, V)$ asociado con una variedad M , donde H y V denotan las partes horizontales y verticales de T . Asumimos que $L \subseteq M$ se corresponde con H y que el complemento ortogonal $L \perp$ corresponde a V . Ahora, así como (H, V) determina la estructura de T , el par dual $(L, L \perp)$ determina la estructura del espacio total M . Resulta que se puede introducir el concepto de matroide orientado en términos de $(L, L \perp)$ en lugar de hacerlo sólo en términos del subespacio L mismo. Se puede comprobar que una transición

$$(L, L \perp) \rightarrow (H, V), \quad (1.5)$$

asegura una simetría de dualidad. De hecho, la dualidad es uno de los principales temas de estudio en la teoría de matroides.

En seguida describiremos el concepto de vector signado. Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto finito. Un elemento $X \in \{+, -, 0\}^E$ es llamado un vector signado. Las partes positivas, negativas o nulas de X se denotan por X^+ , X^- , X^0 respectivamente. Además, definimos $\text{supp}X \equiv X^+ \cup X^-$. Consideremos dos

conjuntos S y S' de vectores signados. El par (S, S') tiene la propiedad de Farkas, si $\forall e \in E$ se cumple

$$(Fa) \exists X \in S, e \in \text{supp}X \text{ y } X \geq 0$$

o

$$(Fb) \exists Y \in S', e \in \text{supp}Y \text{ y } Y \geq 0$$

pero no ambas. Aquí, $X \geq 0$ significa que X tiene una parte positiva (+) o una entrada nula (0) en cada coordenada. Observe que (S, S') tiene la propiedad de Farkas si y solo si (S', S) la tiene. Sea S un conjunto de vectores signados, y también I e J denoten subconjuntos disjuntos de E . Entonces

$$\tilde{X} | \exists X \in S, X_I = 0, X_J = *, X = \tilde{X} \text{ en } E \setminus (I \cup J), \quad (1.6)$$

es llamado un *menor* de S (que se obtiene de suprimir I y contraer J). Aquí, el símbolo "*" denota un valor arbitrario. Si S y S' son conjuntos de vectores signados sobre E , entonces $(S \setminus I / J, S' \setminus J / I)$ es llamado un menor de (S, S') . De manera similar,

$${}_I S = \{ \tilde{X} | \exists X \in S, X_I = -\tilde{X}_I, X_{E \setminus I} = \tilde{X}_{E \setminus I} \} \quad (1.7)$$

es llamada una *reorientación* de S sobre I . También, $({}_I S, {}_I S')$ es la reorientación de (S, S') sobre I . Además, S es simétrico si $S = -S$, donde $-S$ es el conjunto de vectores signados con orientación opuesta a los vectores signados de S .

Ahora podemos dar una definición de matroides orientados en términos de la propiedad de Farkas. Considérese un conjunto finito $E \neq \emptyset$, y sean S y S' dos subconjuntos de vectores signados. El par (S, S') es llamado un matroide orientado en E , si

(O1) S y S' son simétricos y

(O2) cada reorientación de cada menor de (S, S') tiene la propiedad de Farkas.

De esta definición se sigue que (S', S) también es un matroide orientado, así como lo es cada reorientación y cada menor de (S, S') .

Dos vectores signados X y Y son ortogonales si

$$(X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-) \neq \emptyset \Leftrightarrow (X^+ \cap Y^-) \cup (X^- \cap Y^+) \neq \emptyset. \quad (1.8)$$

Consistentemente, denotamos el complemento ortogonal de S por $S \perp$, y este se define por

$$S \perp = \{Y \mid Y \perp X \text{ para todo } X \in S\}. \quad (1.9)$$

Si $S' \subseteq S \perp$, entonces S y S' a su vez pueden considerarse ortogonales.

Aquí concluimos esta introducción a los conceptos básicos en la teoría de Matroides. Al lector interesado en profundizar en tales conceptos le recomendamos consultar las referencias [12][16][17]. En el siguiente capítulo veremos desarrollos de dualidad para la teoría de gravedad linealizada.

Capítulo II

Dualidad en teorías de norma y gravedad linealizada

La gravedad linealizada ha sido objeto de amplio interés en el estudio de gravedad [3][4]. Tal teoría es el límite de la relatividad general cuando estamos lejos de fuentes de considerable materia y energía. Con ella podemos conocer como primer acercamiento la radiación gravitacional, la pérdida de energía asociada a esta y asociar a tales ondas un espín 2 [18]. En este capítulo desarrollamos dos esquemas de dualidad para gravedad linealizada en un marco común. En primera instancia, en la sección II.1 repasamos brevemente la dualidad electromagnética usual, mientras que en II.2 estudiamos la dualidad S para teorías abelianas. La sección II.3 muestra el modo en que implementamos ambos esquemas para el caso de gravedad linealizada y finalmente en II.4 obtenemos una unificación de ambos esquemas para teorías abelianas y particularmente para gravedad linealizada.

II.1 Dualidad electromagnética y de rotación.

La dualidad electromagnética [1][2], que consiste en el intercambio del campo eléctrico \vec{E} y el campo magnético \vec{B} en la forma $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ y $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, es una invariancia de las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.1b)$$

(De aquí en adelante consideramos la velocidad de la luz como $c = 1$ excepto cuando se indique lo contrario.) En realidad, las ecuaciones (2.1) son invariantes ante transformaciones de rotación $SO(2)$ expresadas como sigue

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \cos \beta \vec{E} + \sin \beta \vec{B} \\ \vec{B}' &= -\sin \beta \vec{E} + \cos \beta \vec{B}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sin embargo, tal dualidad se pierde cuando se introducen fuentes. En efecto, dado que las ecuaciones de Maxwell con fuentes son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_e \quad (2.3a)$$

y

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.3b)$$

se observa que estas ya no son invariantes ante (2.2).

Motivados por las observaciones anteriores, podemos mencionar dos hechos notables. Primero, si se introducen fuentes cargas magnéticas,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_e, \quad (2.4a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{J}_m, \quad (2.4b)$$

entonces se pueden rotar las fuentes en forma similar a (2.2), y por lo tanto reestablecer la invariancia de dualidad. De hecho, se puede demostrar que las ecuaciones (2.4) son invariantes ante las transformaciones [19]

$$\begin{aligned} \vec{E} + i\vec{B} &\rightarrow e^{-i\beta} (\vec{E} + i\vec{B}) \\ \rho_e + i\rho_m &\rightarrow e^{-i\beta} (\rho_e + i\rho_m) \\ \vec{J}_e + i\vec{J}_m &\rightarrow e^{-i\beta} (\vec{J}_e + i\vec{J}_m) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Segundo, dado que de (2.5) se tiene

$$q_e + iq_m \rightarrow e^{-i\beta} (q_e + iq_m), \quad (2.6)$$

la invariancia de la condición de cuantización de Dirac [20] $q_e q_m = nh$, fija el ángulo $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$. Usando este resultado, vemos que las ecuaciones de transformación (2.5) se reducen a

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \vec{B}; & \vec{B} &\rightarrow -\vec{E} \\ \rho_e &\rightarrow \rho_m; & \rho_m &\rightarrow -\rho_e \\ \vec{J}_e &\rightarrow \vec{J}_m; & \vec{J}_m &\rightarrow -\vec{J}_e . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por otra parte, considérense las definiciones $E^i \equiv F^{0i}$, y $B^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}$. En forma tensorial, se tiene:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

donde los índices latinos corren de 1 a 3, los griegos de 0 a 3, y los índices se suben y bajan con la métrica de Lorentz $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Utilizando el tensor $F^{\mu\nu}$ vemos que las ecuaciones (2.1) en el vacío se escriben en la forma

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.9a)$$

$$\partial_\nu {}^*F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.9b)$$

donde ${}^*F^{\mu\nu}$ denota el dual de Hodge, definido como

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

Aquí es útil notar que la dualidad $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ y $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, corresponde a $F^{\mu\nu} \rightarrow {}^*F^{\mu\nu}$ y ${}^*F^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu}$. Esto es consistente con el hecho de que en el espacio de Minkowski, ${}^{**}F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$. Las ecuaciones de Maxwell en presencia de fuentes son

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J_e^\mu \quad (2.11a)$$

y

$$\partial_\nu {}^*F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.11b)$$

Aquí, J_e^μ es el cuadvivector de corriente con componentes (ρ_e, \vec{J}_e) . La ecuación (2.11b) permite escribir

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad (2.12)$$

con A^μ el 4-vector potencial electromagnético con componentes (ϕ, \vec{A}) .

Las ecuaciones (2.11) pueden obtenerse de la acción:

$$S = \frac{1}{4g^2} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x (E^2 - B^2). \quad (2.13)$$

Se puede demostrar que la dualidad de rotación puede implementarse a nivel de la acción (2.13). Sin embargo, en el caso de las rotaciones finitas (2.2), la

acción se ve modificada por un factor de escala, ya que $E'^2 - B'^2 = (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) (E^2 - B^2)$, y por lo tanto no es invariante. De hecho, ante rotaciones infinitesimales

$$\delta F^{\mu\nu} = \beta^* F^{\mu\nu} \quad (2.14)$$

y

$$\delta^* F^{\mu\nu} = -\beta F^{\mu\nu} \quad , \quad (2.15)$$

vemos que la acción (2.13) se transforma como

$$\delta S = \frac{\beta}{2g^2} \int d^4x F^{\mu\nu*} F_{\mu\nu} \quad , \quad (2.16)$$

y consecuentemente, salvo una derivada total, tenemos que $\delta S = 0$, si se toma en cuenta (2.12).

II.2 Dualidad-S en electromagnetismo.

El electromagnetismo es el prototipo de teoría abeliana y los métodos aprendidos en él sirven como base para desarrollos en teorías tipo Yang-Mills. En particular, las teorías abelianas juegan un papel importante para entender el concepto de dualidad-S [1][21][22][23], la cual consiste en relacionar dos teorías, una con constante de acoplamiento fuerte y otra con acoplamiento débil. Para entender esta conexión, comenzaremos añadiendo a la acción (2.13) un término topológico:

$$S = \frac{1}{4g^2} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\theta}{4} \int d^4x F^{\mu\nu*} F_{\mu\nu} \quad . \quad (2.17)$$

El término θ es topológico en el sentido de que si se escribe $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, éste no contribuye a las ecuaciones de movimiento [24]. No obstante, es importante mencionar que a un nivel cuántico parametriza diferentes vacíos.

Si introducimos los tensores auto-dual y anti-auto-dual

$$\pm F^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2}\right)^\pm M_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} F^{\tau\lambda} \quad , \quad (2.18)$$

donde

$$\pm M_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} \mp i\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\tau\lambda}) \quad , \quad (2.19)$$

vemos que la acción (2.17) puede reescribirse como

$$S = \frac{i}{4}(\tau^+) \int d^4x^+ F^{\mu\nu+} F_{\mu\nu} - \frac{i}{4}(\tau^-) \int d^4x^- F^{\mu\nu-} F_{\mu\nu} , \quad (2.20)$$

en donde hemos introducido las constantes de acoplamiento

$$\tau^\pm = \theta \mp \frac{i}{g^2} . \quad (2.21)$$

La integral en el segundo término de (2.17) es un número entero, con un factor de reescalamiento adecuado. De este modo, la teoría es invariante ante cambios $\theta \rightarrow \theta + 1$. Esto es equivalente a considerar la transformación $T: \tau^\pm \rightarrow \tau^\pm + 1$ en la acción (2.20). Como veremos en seguida, también obtenemos una teoría dual a (2.20), en donde se invierte la constante de acoplamiento $S: \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$. De hecho, la transformación más general de τ que incluye las transformaciones T y S como casos particulares es

$$\tau' = \frac{a + c\tau}{b + d\tau} , \quad (2.22)$$

donde las constantes a, b, c, d son enteras y $cb - ad = 1$. Esta transformación preserva el plano superior complejo generado por τ , es decir, τ se transforma como una forma modular ante el grupo $SL(2, Z)$.

Consideremos un tensor generalizado

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - G^{\mu\nu} , \quad (2.23)$$

donde $G^{\mu\nu}$ es una 2-forma auxiliar. Utilizando (2.23) se puede extender la acción (2.20) del siguiente modo [1]:

$$\begin{aligned} S = & \frac{i}{4}(\tau^+) \int d^4x^+ \mathcal{F}^{\mu\nu+} \mathcal{F}_{\mu\nu} - \frac{i}{4}(\tau^-) \int d^4x^- \mathcal{F}^{\mu\nu-} \mathcal{F}_{\mu\nu} \\ & + \frac{i}{4} \int d^4x^+ W^{\mu\nu+} G_{\mu\nu} - \frac{i}{4} \int d^4x^- W^{\mu\nu-} G_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aquí, $W^{\mu\nu}$ está definido en términos de la conexión dual V^α mediante $W_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$. Se puede verificar que la acción (2.24) es invariante ante

$$\begin{aligned} \delta A &= B \\ \delta G &= dB , \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde B es una 1-forma arbitraria, generalizando el caso de la libertad de norma del campo de Maxwell ante $A \rightarrow A - d\epsilon$. Nótese que si sólo se reemplaza F por \mathcal{F} en (2.20), se obtiene una transformación que es trivial y además no se recupera la teoría abeliana original. De ahí que sea necesario introducir la 2-forma W , la cual satisface la condición de cuantización de Dirac

$$\int W \in 2\pi Z . \quad (2.26)$$

Si eliminamos V encontramos que $dG = 0$, de modo que podemos fijar $G = 0$ y (2.24) se reduce a (2.20), es decir, a la teoría abeliana original.

Por otra parte, la invariancia de norma (2.25) permite fijar $A = 0$, de modo que obtenemos

$$\begin{aligned} S = & \frac{i}{4}(\tau^+) \int d^4x^+ G^{\mu\nu+} G_{\mu\nu} - \frac{i}{4}(\tau^-) \int d^4x^- G^{\mu\nu-} G_{\mu\nu} \\ & + \frac{i}{4} \int d^4x^+ W^{\mu\nu+} G_{\mu\nu} - \frac{i}{4} \int d^4x^- W^{\mu\nu-} G_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Integrando G de esta última acción, obtenemos

$$S = \frac{i}{4} \left(-\frac{1}{\tau^+}\right) \int d^4x^+ W^{\mu\nu+} W_{\mu\nu} - \frac{i}{4} \left(-\frac{1}{\tau^-}\right) \int d^4x^- W^{\mu\nu-} W_{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

que es la acción dual, claramente análoga a (2.20) pero con el parámetro τ invertido ($-\frac{1}{\tau}$). En particular, esto significa que para $\theta = 0$ se tiene la transformación $g^2 \rightarrow \frac{1}{g^2}$, donde se invierte el acoplamiento.

II.3 Dualidad de rotación y dualidad-S en gravedad linealizada.

Gravedad linealizada es la teoría que se obtiene al suponer pequeñas desviaciones en la métrica de Minkowski [3]. La métrica se separa en dos componentes, una plana con la forma $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, y la otra, $h_{\mu\nu}$, corresponde a pequeñas desviaciones de esta. La teoría es adecuada para regiones lejanas a fuentes de masa-energía. Específicamente, tenemos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

La dinámica de los sistemas gravitacionales está determinada en última instancia por las ecuaciones de Einstein, a saber

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, R el escalar de curvatura y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía momento. En gravedad linealizada estos tensores se obtienen considerando sólo términos a primer orden en h , donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. El tensor de Riemann está definido como

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}, \quad (2.31)$$

en donde los coeficientes de conexión $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ están relacionados con la métrica por

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}); \quad (2.32)$$

como es usual, las comas representan derivadas parciales, e.g. $g_{\mu\beta,\gamma} \equiv \frac{dg_{\mu\beta}}{dx^\gamma}$. Considerando la aproximación a primer orden en $h_{\mu\nu}$, (2.32) se reduce a

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} (h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}). \quad (2.33)$$

De este modo, el tensor de Riemann resulta

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial_\nu h_{\mu\beta}). \quad (2.34)$$

En general, el tensor de Riemann (2.31) posee las simetrías:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = R_{[\gamma\delta][\alpha\beta]} \\ R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} &= 0 \\ R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

En el caso de gravedad linealizada (2.34), se puede ver que $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es invariante ante las transformaciones de norma

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu. \quad (2.36)$$

Aquí, las funciones ξ son el resultado de considerar la sustitución $h_{\mu\nu}^{\text{new}} = h_{\mu\nu}^{\text{old}} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$, donde se tomó en cuenta la aproximación $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

El tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\mu\alpha}, \quad (2.37)$$

se obtiene directamente de (2.33),

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\alpha}{}^\alpha + h_{\nu,\mu\alpha}{}^\alpha - h_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h_{,\mu\nu}), \quad (2.38)$$

donde $h = h_{\alpha}^{\alpha}$. En forma similar el escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ es

$$R = h_{\alpha\beta, \alpha\beta} - h_{,\beta}^{\beta}. \quad (2.38)$$

De las ecuaciones de Einstein (2.30) se obtiene

$$h_{\mu\alpha, \nu}^{\alpha} + h_{\nu\alpha, \mu}^{\alpha} - h_{\mu\nu, \alpha}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (h_{\alpha\beta, \alpha\beta} - h_{,\beta}^{\beta}) = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

En el vacío, las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.40)$$

Considérese ahora el tensor dual

$${}^*R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\mu\sigma\rho} R^{\sigma\rho}_{\beta\nu}. \quad (2.41)$$

Se puede probar que ${}^*R_{\mu\nu} = {}^*R^{\beta}_{\mu\beta\nu}$ satisface

$${}^*R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.42)$$

Las ecuaciones (2.40) y (2.42) son invariantes ante las transformaciones

$$R'_{\alpha\mu\beta\nu} = \cos \beta R_{\alpha\mu\beta\nu} + \sin \beta {}^*R_{\alpha\mu\beta\nu} \quad (2.43)$$

$${}^*R'_{\alpha\mu\beta\nu} = -\sin \beta R_{\alpha\mu\beta\nu} + \cos \beta {}^*R_{\alpha\mu\beta\nu},$$

las cuales infinitesimalmente se expresan

$$\delta R_{\alpha\mu\beta\nu} = \beta {}^*R_{\alpha\mu\beta\nu} \quad (2.44)$$

y

$$\delta {}^*R_{\alpha\mu\beta\nu} = -\beta R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.45)$$

Por otra parte, se sabe que la versión linealizada de las ecuaciones de Einstein (2.39) puede obtenerse a partir de la acción de Fierz-Pauli [4]:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial^{\alpha} h^{\mu\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\nu} - 2\partial_{\mu} h^{\mu\nu} \partial_{\alpha} h_{\nu}^{\alpha} + 2\partial^{\mu} h \partial_{\nu} h^{\mu\nu} - \partial^{\alpha} h \partial_{\alpha} h). \quad (2.46)$$

Puede esperarse que esta acción se mantenga invariante (en forma similar al caso electromagnético) para variaciones adecuadas $\delta h_{\mu\nu}$, en lugar de variaciones $\delta R_{\alpha\mu\beta\nu}$. Esto se logra si además de considerar $\delta h_{\mu\nu}$ se toman en cuenta variaciones en el correspondiente momento conjugado [25].

Revisaremos ahora la dualidad-S para el caso de gravedad linealizada [26]. Comenzamos notando que el tensor de Riemann (2.34) puede reescribirse [27]

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu A_\nu^{\alpha\beta} - \partial_\nu A_\mu^{\alpha\beta} \quad (2.47)$$

al definir

$$A_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\beta h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\beta}) . \quad (2.48)$$

Esta descripción permite identificar directamente -en gravedad linealizada- el tensor de Riemann como abeliano, con potencial de norma $A_{\mu\alpha\beta} = -A_{\mu\beta\alpha}$. Esto se corrobora al comprobar que $R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ es invariante ante las transformaciones de norma

$$\delta A_{\mu\alpha\beta} = \partial_\mu \lambda_{\alpha\beta} , \quad (2.49)$$

donde $\lambda_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha$.

Definimos $\Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ en la forma

$$\Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \delta_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \delta_\nu^\beta h_\mu^\alpha - \delta_\nu^\alpha h_\mu^\beta + \delta_\mu^\beta h_\nu^\alpha . \quad (2.50)$$

De tal suerte, la acción (2.46) se puede escribir como

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \Omega_{\mu\nu}^{\tau\lambda} R_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} . \quad (2.51)$$

Si agregamos los términos de origen topológico S_T y de constante cosmológica S_C , dados por

$$S_T = \frac{1}{4} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu}^{\tau\lambda} R_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} , \quad (2.52)$$

y

$$S_C = \frac{1}{4} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \Omega_{\mu\nu}^{\tau\lambda} \Omega_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} ; \quad (2.53)$$

entonces se obtiene una forma más general para la acción de gravedad linealizada [29]

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\tau\lambda} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} , \quad (2.54)$$

en donde definimos $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ por

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} . \quad (2.55)$$

Se puede demostrar que (2.54) se puede escribir en la forma desarrollada

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu}^{\tau\lambda} R_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} + 8 \int d^4x h^{\mu\nu} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R) - 8 \int d^4x (h^2 - h^{\mu\nu} h_{\mu\nu}). \quad (2.56)$$

El segundo y tercer término corresponden a la acción de Einstein con constante cosmológica para gravedad linealizada, mientras que el primero es una derivada total (invariante de Euler o término Gauss-Bonnet). La forma precisa con el factor Λ (constante cosmológica) en el último término se obtiene de intercambiar $\Omega \rightarrow \Lambda\Omega$, y considerar el reescalamiento $S \rightarrow \frac{1}{4}\Lambda^{-1}S$.

Para desarrollar una acción que sea S-dual a (2.54), extendemos la acción (2.56) en la forma

$$S = \frac{1}{4}(\tau^+) \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\tau\lambda+} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} - \frac{1}{4}(\tau^-) \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\tau\lambda-} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}, \quad (2.57)$$

donde τ^+ y τ^- son parámetros constantes y distintos. $\pm \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ está dado por

$$\pm \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2}\right)^\pm M_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\tau\lambda}; \quad (2.58)$$

aquí

$$\pm M_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} \mp i \epsilon^{\alpha\beta}{}_{\tau\lambda}). \quad (2.59)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para el caso abeliano, introducimos una 2-forma $G^{\alpha\beta} = G_{\mu\nu}^{\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\nu$ satisfaciendo las mismas simetrías del tensor de Riemann, es decir

$$G_{\mu\nu\alpha\beta} = -G_{\mu\nu\beta\alpha} = -G_{\nu\mu\alpha\beta} = G_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.60)$$

$$G_{\mu\nu\alpha\beta} + G_{\mu\beta\nu\alpha} + G_{\mu\alpha\beta\nu} = 0.$$

La 2-forma G nos permite definir el tensor

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}. \quad (2.61)$$

A partir de este último, formamos la acción extendida

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_E = & \frac{1}{4}(\tau^+) \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{H}_{\mu\nu}^{\tau\lambda} \mathcal{H}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} - \frac{1}{4}(\tau^-) \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{H}_{\mu\nu}^{\tau\lambda-} \mathcal{H}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\tau\lambda} W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} - \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\tau\lambda-} W_{\mu\nu}^{\alpha\beta-} G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\rho}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

donde $W_{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu V_{\nu\alpha\beta} - \partial_\nu V_{\mu\alpha\beta}$ es el tensor dual a $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$, satisfaciendo la condición de cuantización de Dirac $\int W \in 2\pi\mathbf{Z}$. Podemos notar que la función de partición

$$Z = \int d^+ G d^- G dA dh dV e^{-S_E} \quad (2.63)$$

es invariante bajo las transformaciones más generales

$$A \rightarrow A + B \text{ y } G \rightarrow G + dB \quad , \quad (2.64)$$

con $B_\mu^{\alpha\beta}$ siendo una 1-forma arbitraria.

A partir de (2.62) podemos proceder siguiendo dos caminos distintos. Por un lado, podemos ver que la parte de la integral que involucra a V es

$$\int DV \exp\left(\frac{1}{2} \int d^4 x \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} + W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} - \frac{1}{2} \int d^4 x \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} - W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho}\right) . \quad (2.65)$$

Si integramos sobre el potencial dual V , obtenemos una función delta que conduce a la fórmula $dG = 0$. Usando la invariancia de norma (2.64), esta fórmula nos permite fijar G igual a cero. Vemos entonces que (2.62) se reduce a la acción original (2.57). Para la segunda posibilidad, fijamos $A = 0$, de modo que (2.62) se reduce a

$$S_E = \frac{1}{4}(\tau^+) \int dx^4 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} + \mathcal{G}_{\mu\nu}^{\tau\lambda} + \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} - \frac{1}{4}(\tau^-) \int dx^4 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} - \mathcal{G}_{\mu\nu}^{\tau\lambda} - \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \\ + \frac{1}{2} \int d^4 x \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} + W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} - \frac{1}{2} \int d^4 x \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} - W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} . \quad (2.66)$$

Aquí

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{\tau\lambda} \equiv \Omega_{\mu\nu}^{\tau\lambda} - G_{\mu\nu}^{\tau\lambda} . \quad (2.67)$$

Eliminando $G_{\mu\nu}^{\tau\lambda}$ de (2.66), se obtiene la acción dual [26]

$$S_E = \frac{1}{4} \int dx^4 \left[\frac{1}{\tau^+} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} + \mathcal{D}_{\mu\nu}^{\tau\lambda} + \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} - \frac{1}{\tau^-} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} - \mathcal{D}_{\mu\nu}^{\tau\lambda} - \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \right] \quad (2.68)$$

donde

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{\tau\lambda} = W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} . \quad (2.69)$$

Esta es la acción S-dual, donde los parámetros τ^\pm cambian a $\frac{1}{\tau^\pm}$ respecto a la acción original.

II.4 Dualidades de rotación y S en un mismo esquema.

Introduciendo el campo complejo $\vec{E} + i\vec{B}$, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell para el vacío (ver (2.1a) y (2.1b)) como [2]:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + i\vec{B}) = 0, \quad (2.70a)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + i\vec{B}) = i \frac{\partial(\vec{E} + i\vec{B})}{\partial t}. \quad (2.70b)$$

Estas ecuaciones son invariantes bajo la transformación general

$$\vec{E} + i\vec{B} \rightarrow e^{-i\beta} (\vec{E} + i\vec{B}), \quad (2.71)$$

la cual corresponde a (2.2).

Dada la definición (2.18) de los tensores electromagnéticos dual y antidual,

$$\pm F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F^{\mu\nu} \mp i^* F^{\mu\nu}), \quad (2.72)$$

tenemos que, de acuerdo a (2.8) las componentes de ${}^+F^{\mu\nu}$ son

$${}^+F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 - iB_1 & E_2 - iB_2 & E_3 - iB_3 \\ -(E_1 - iB_1) & 0 & i(E_3 - iB_3) & -i(E_2 - iB_2) \\ -(E_2 - iB_2) & -i(E_3 - iB_3) & 0 & i(E_1 - iB_1) \\ -(E_3 - iB_3) & i(E_2 - iB_2) & -i(E_1 - iB_1) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

y el complejo conjugado para ${}^-F^{\mu\nu}$. Entonces las componentes de $\pm F^{\mu\nu}$ son dadas en términos del campo complejo $(\vec{E} \pm i\vec{B})$. Esto deja invariante las ecuaciones de Maxwell ante $\vec{E} \pm i\vec{B} \rightarrow e^{i\beta} (\vec{E} \pm i\vec{B})$, lo que nos sugiere unir los dos mecanismos de dualidad (S y de rotación) dentro de un mismo esquema.

Bajo las rotaciones infinitesimales (2.14) y (2.15), los tensores dual y autodual $\pm F^{\mu\nu}$ cambian como:

$$\delta^+ F^{\mu\nu} = i\beta^+ F^{\mu\nu} \quad (2.74)$$

y

$$\delta^- F^{\mu\nu} = -i\beta^- F^{\mu\nu}. \quad (2.75)$$

Podemos formar una acción "madre" que genere la acción (2.13), así como la acción S-dual a ella:

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{4g^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + V_\mu \partial_\nu^* F^{\mu\nu} \right). \quad (2.76)$$

Al variar (2.76) respecto a V_μ obtenemos la restricción $\partial_\nu^* F^{\mu\nu} = 0$. De esta manera, podemos escribir $F_{\mu\nu}$ como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; esto es, obtenemos la teoría original. En cambio, si variamos (2.76) respecto al campo tensorial $F_{\mu\nu}$, obtenemos:

$$\frac{1}{2g^2} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\alpha V_\beta \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \right) (\partial_\alpha V_\beta - \partial_\beta V_\alpha). \quad (2.77)$$

Además, definiendo

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu, \quad (2.78)$$

así como su tensor dual (de hodge)

$$*W^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\alpha\beta}, \quad (2.79)$$

obtenemos de (2.77) la relación

$$F^{\mu\nu} = g^{2*} W^{\mu\nu}. \quad (2.80)$$

De este modo, el segundo término en el integrando de (2.76) puede reescribirse en la forma

$$V_\mu \partial_\nu^* F^{\mu\nu} \rightarrow -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} *W^{\mu\nu} = -\frac{g^2}{2} *W_{\mu\nu} *W^{\mu\nu}, \quad (2.81)$$

mientras que el primer término resulta

$$\frac{1}{4g^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{g^2}{4} *W_{\mu\nu} *W^{\mu\nu}. \quad (2.82)$$

Insertando las dos relaciones anteriores en la acción (2.76), se obtiene

$$S = \frac{g^2}{4} \int d^4x W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}; \quad (2.83)$$

donde usamos el hecho de que, para una métrica lorentziana se tiene $*W_{\mu\nu} *W^{\mu\nu} = -W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$. Así, vemos que la acción dual (2.83) se puede obtener de (2.13) intercambiando g^2 por $\frac{1}{g^2}$ y F por W .

Ahora, tomando en cuenta (2.14) y (2.15) para el primer término en (2.76), tenemos

$$\frac{1}{2g^2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = \frac{\beta}{2g^2} F^{\mu\nu*} F_{\mu\nu} = \frac{\beta}{g^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta + A_\nu \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta). \quad (2.84)$$

Esto último es una derivada total:

$$\frac{1}{2g^2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = \frac{\beta}{g^2} \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \partial_\alpha A_\beta), \quad (2.85)$$

de modo que la correspondiente variación en el primer término de (2.76) es cero. También sucede lo mismo para el segundo término, pues de (2.81) unido a (2.80) tenemos:

$$V_\mu \partial_\nu^* F^{\mu\nu} \rightarrow -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* W^{\mu\nu} = -\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.85)$$

Así, cuando tomamos en cuenta las variaciones (2.14) y (2.15), obtenemos clásicamente invarianza para la acción abeliana con término topológico (2.17). Para el caso más general, obtenemos para tales rotaciones infinitesimales en (2.76):

$$\delta S = \frac{\beta}{2g^2} \int d^4x F^{\mu\nu*} F_{\mu\nu} - \frac{\beta \theta}{2} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.86)$$

que en términos de $^+F^{\mu\nu}$ y $^-F^{\mu\nu}$ se lee:

$$\delta S = -\frac{\beta}{2} (\tau^+) \int d^4x \ ^+F^{\mu\nu+} F_{\mu\nu} - \frac{\beta}{2} (\tau^-) \int d^4x \ ^-F^{\mu\nu-} F_{\mu\nu}. \quad (2.87)$$

Así, los términos se invierten ante rotaciones infinitesimales.

Podemos investigar esto mismo de manera no covariante. Primero, vemos que la forma covariante de las transformaciones (2.2) es:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \cos \beta F^{\mu\nu} + \sin \beta \ ^*F^{\mu\nu} \\ \ ^*F^{\mu\nu} &= -\sin \beta F^{\mu\nu} + \cos \beta \ ^*F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Por otro lado, tomando en cuenta las componentes del tensor de Maxwell (2.8), la acción (2.16) en términos de los campos vectoriales \vec{E} y \vec{B} es:

$$S = (-) \frac{1}{2g^2} \int d^4x (E^2 - B^2) - i\theta \int d^4x (\vec{E} \cdot \vec{B}). \quad (2.89)$$

Así que (2.87) corresponde a

$$\delta S = (-) \frac{4}{g^2} \int d^4 x (\vec{E} \cdot \vec{B}) + i\theta \int d^4 x (E^2 - B^2). \quad (2.90)$$

Sin embargo, como vimos antes, las transformaciones del campo complejo $\vec{E} + i \vec{B}$ dadas en (2.71) mantienen invariantes la ecuaciones de Maxwell en el vacío. De manera más precisa, para el caso autodual y anti-autodual, las transformaciones (2.2) corresponden a lo siguiente:

$$\vec{E} \pm i \vec{B} \rightarrow e^{\mp i\beta} (\vec{E} \pm i \vec{B}) \quad (2.91)$$

Obsérvese que los integrandos en la acción anterior (2.89) corresponden a la parte real e imaginaria del cuadrado de $\vec{E} \pm i \vec{B}$,

$$(\vec{E} \mp i \vec{B})^2 = (E^2 - B^2) \mp 2i \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (2.92)$$

De acuerdo con (2.73), la transformación (2.92) se puede expresar como

$$\pm F^{\mu\nu} \rightarrow e^{\pm i\beta} \pm F^{\mu\nu}, \quad (2.93)$$

que infinitesimalmente corresponden a (2.74) y (2.75).

Finalmente, podemos dividir la acción (2.20) en la forma

$$S = S^+ - S^-, \quad (2.94)$$

donde definimos

$$S^+ = \frac{i}{4} (\tau^+) \int d^4 x {}^+ F^{\mu\nu} {}^+ F_{\mu\nu} \quad (2.95)$$

y

$$S^- = \frac{i}{4} (\tau^-) \int d^4 x {}^- F^{\mu\nu} {}^- F_{\mu\nu}. \quad (2.96)$$

La variación de (2.95) y (2.96) se puede escribir

$$\delta S^\pm = \pm 2i\beta \tau^\pm S^\pm. \quad (2.97)$$

Lo anterior puede relacionarse directamente con el hecho de que la transformación para (2.93) es, según (2.92):

$$(\vec{E} \mp i \vec{B})^2 \rightarrow e^{\pm 2i\beta} (\vec{E} \mp i \vec{B})^2. \quad (2.98)$$

Durante la discusión anterior, hemos variado la acción en términos de las rotaciones infinitesimales de los tensores F ; además, la función de partición asociada a la acción (2.94) es invariante ante la transformación $\tau \rightarrow \tau + 1$, tal como mencionamos antes de (2.22).

Para el caso de gravedad linealizada, dadas las transformaciones (2.42), asumimos que el tensor $\Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ definido en (2.49) cambia como:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= \cos \beta \Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \sin \beta \ * \Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \\ \ * \Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= -\sin \beta \Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \cos \beta \ * \Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} ,\end{aligned}\tag{2.99}$$

donde asociamos un dual $\ * \Omega_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \Omega^{\sigma\rho}_{\alpha\beta}$, de manera análoga a (2.40). Tenemos entonces que $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ se transforma infinitesimalmente como

$$\delta \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \beta \ * \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\tag{2.100}$$

y

$$\delta \ * \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = -\beta \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} .\tag{2.101}$$

Para los tensores auto-dual y anti-dual definidos en (2.57) la variación infinitesimal es:

$$\delta^{\pm} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \pm \beta i^{\pm} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} .\tag{2.102}$$

Con lo anterior, obtenemos la variación de la acción (2.56):

$$\delta \mathcal{S} = \frac{\beta i}{2} (\tau^+) \int d^4 x e^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\tau\lambda} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} - \frac{\beta i}{2} (\tau^-) \int d^4 x e^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\tau\lambda} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} .\tag{2.103}$$

Como vimos, se pueden hacer desarrollos de dualidad para el caso de gravedad desde esta perspectiva en gravedad linealizada [27], y que se puede relacionar la dualidad S con una dualidad en la constante cosmológica [28][30][31].

En el siguiente capítulo veremos un desarrollo para gravedad en dos dimensiones.

Capítulo III

Gravedad en 2D y matroides

En el capítulo anterior discutimos distintas conexiones de dualidad para electromagnetismo y gravedad linealizada. En este capítulo analizamos la relación de gravedad en dos dimensiones con álgebras de Clifford y matroides [32].

III.1 Breve repaso de la representación matricial de números complejos.

Comenzamos notando que usualmente los números complejos se escriben como

$$z = x + iy \quad (3.1)$$

donde $i^2 = -1$ y x y y son números reales. Sin embargo, también podemos tener una representación matricial para z con las mismas propiedades de los complejos ante multiplicación y suma [33]:

$$z \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Podemos reescribir la matriz (3.2) en términos de su parte real e imaginaria,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Dado que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ podemos interpretar la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en (3.3) con la unidad imaginaria i . De hecho, también podemos considerar las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ como dos de las cuatro matrices que conforman una base del conjunto de matrices 2×2 que denotamos como

$M(2, R)$. En efecto, cualquier elemento Ω de $M(2, R)$ lo podemos expresar como la suma en términos de estas cuatro matrices base:

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (3.4)$$

en donde

$$x = \frac{1}{2}(a + d), \quad y = \frac{1}{2}(b - c), \quad (3.5)$$

$$r = \frac{1}{2}(a - d), \quad s = \frac{1}{2}(b + c).$$

En forma tensorial, podemos escribir (3.4) como

$$\Omega_{ij} = x\delta_{ij} + y\varepsilon_{ij} + r\eta_{ij} + s\lambda_{ij} \quad , \quad (3.6)$$

donde

$$\delta_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \varepsilon_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (3.7)$$

$$\eta_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

De este modo, considerando esta notación, (3.1) se escribe

$$z_{ij} = x\delta_{ij} + y\varepsilon_{ij} \quad . \quad (3.8)$$

Es claro entonces que, fijando r y s igual a cero en (3.4), un número complejo se puede interpretar como un elemento de $M(2, R)$.

Por otro lado, si asumimos que $ad - bc \neq 0$, i.e. $\det \Omega \neq 0$, entonces obtenemos el grupo $GL(2, R)$, subconjunto de $M(2, R)$. Si se exige que $\det \Omega = 1$, obtenemos el grupo especial $SL(2, R)$. Como vimos anteriormente, este subgrupo contiene las transformaciones T y S vistas en el capítulo anterior en (2.21). Mas aún, $SL(2, R)$ también tiene relevancia en física [34][35][36].

Si ahora consideramos las cuatro funciones $F(x, y, r, s)$, $G(x, y, r, s)$, $H(x, y, r, s)$, y $Q(x, y, r, s)$ para formar la matriz funcional de las cuatro variables $\gamma(x, y, r, s)$,

$$\gamma = \begin{pmatrix} F & G \\ H & Q \end{pmatrix} \quad , \quad (3.9)$$

y definimos las funciones:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(F + Q), & v &= \frac{1}{2}(G - H), \\ w &= \frac{1}{2}(F - Q), & \xi &= \frac{1}{2}(G + H), \end{aligned} \quad (3.10)$$

tenemos que podemos reescribir γ en términos de las bases (3.7):

$$\gamma = u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

o en forma tensorial,

$$\gamma_{ij} = u\delta_{ij} + v\varepsilon_{ij} + w\eta_{ij} + \xi\lambda_{ij}. \quad (3.12)$$

Podemos dividir la matriz γ_{ij} en sus partes simétrica $g_{ij} = g_{ji}$ y anti-simétrica $A_{ij} = -A_{ji}$, de modo que

$$\gamma_{ij}(x, y, r, s) = g_{ij}(x, y, r, s) + A_{ij}(x, y, r, s). \quad (3.13)$$

Para la parte simétrica definida como $g_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij} + \gamma_{ji})$, vemos de (3.11) que es:

$$g_{ij}(x, y, r, s) = u(x, y, r, s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + w(x, y, r, s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \xi(x, y, r, s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

mientras que $A_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij} - \gamma_{ji})$ corresponde a la parte restante,

$$A_{ij}(x, y, r, s) = v(x, y, r, s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Surge una posibilidad interesante si se considera una reducción dimensional en la dependencia de γ , suponiendo $r = s = 0$. En tal caso la dependencia de γ se reduce a dos variables (x, y) , de modo que

$$\gamma_{ij}(x, y) = g_{ij}(x, y) + A_{ij}(x, y), \quad (3.16)$$

con

$$g_{ij} = u(x, y)\delta_{ij} + w(x, y)\eta_{ij} + \xi(x, y)\lambda_{ij} \quad (3.17)$$

y

$$A_{ij} = v(x, y)\varepsilon_{ij}. \quad (3.18)$$

Además, si consideramos las coordenadas isotérmicas donde $w = 0$ y $\xi = 0$ en (3.10), se puede ver que $\gamma(x, y)$ se puede asociar con una estructura compleja, de acuerdo a (3.8) y (3.12). De tal manera, tomando en cuenta la transformación $\gamma_{ij}(x, y) \rightarrow f_{ij}(x, y)$, se tiene

$$f_{ij}(x, y) = u(x, y)\delta_{ij} + v(x, y)\varepsilon_{ij}. \quad (3.19)$$

Como vimos inicialmente, la expresión anterior corresponde a $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Resulta que la existencia de coordenadas isotérmicas está relacionada con las condiciones de Cauchy-Riemann para funciones analíticas [37], a saber $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$.

III.2 De funciones a gravedad 2d con torsión.

La discusión anterior tiene como finalidad relacionar la matriz simétrica $g_{ij}(x, y)$ con gravedad en dos dimensiones. En este caso, se puede identificar la matriz $\gamma_{ij}(x, y)$ en (3.16) con una teoría gravitacional en dos dimensiones, pero con torsión. Primero, consideramos que la derivada covariante para la métrica está dada por

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il} = 0, \quad (3.20)$$

donde se asume que los símbolos de Christoffel Γ_{jk}^i no son necesariamente simétricos en los índices j y k . Si se define la torsión por $T_{ki}^l \equiv \Gamma_{ki}^l - \Gamma_{ik}^l$, entonces de (3.20) se sigue que la forma general para Γ_{jk}^i en términos de la métrica g y torsión T es:

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) - \frac{1}{2}(T_{kji} + T_{ijk} - T_{kij}), \quad (3.21)$$

donde $\Gamma_{kij} = \Gamma_{ki}^l g_{lj}$ y $T_{kij} = T_{ki}^l g_{lj}$.

Por otro lado, considerando la expresión

$$\tilde{\Gamma}_{kij} = \frac{1}{2}(\partial_k \gamma_{ji} + \partial_i \gamma_{jk} - \partial_j \gamma_{ik}), \quad (3.22)$$

y sustituyendo (3.16) en ella, tenemos

$$\frac{1}{2}(\partial_k \gamma_{ji} + \partial_i \gamma_{jk} - \partial_j \gamma_{ik}) = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2}(\partial_k A_{ji} + \partial_i A_{jk} - \partial_j A_{ik}). \quad (3.23)$$

Si comparamos (3.21) y (3.23) vemos que es posible identificar $T_{kji} = \partial_i A_{kj}$, y por lo tanto se encuentra que $\Gamma_{kij} = \tilde{\Gamma}_{kij}$. Sustituyendo (3.18) en (3.23), se obtiene

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2}(v_{,k} \varepsilon_{ji} + v_{,i} \varepsilon_{jk} - v_{,j} \varepsilon_{ik}), \quad (3.24)$$

donde usamos la notación $\partial_k v = v_{,k}$.

El tensor de curvatura de Riemann puede definirse del modo usual en términos de la conexión Γ_{jk}^i como

$$\mathcal{R}^m{}_{kij} = \partial_k \Gamma_{ij}^m - \partial_i \Gamma_{kj}^m + \Gamma_{nk}^m \Gamma_{ji}^n - \Gamma_{ni}^m \Gamma_{jk}^n. \quad (3.25)$$

La teoría gravitacional propuesta puede tener densidad lagrangiana $\mathcal{L} \sim \mathcal{R}^2 + \Lambda$, donde Λ es constante. En tal contexto, hemos mostrado que es pertinente considerar las expresiones de (3.14) a (3.16) como gravedad 2d con torsión.

Desde el punto de vista de una estructura compleja, hay varias cuestiones que surgen del formalismo anterior. Podemos considerar, por ejemplo, los verdaderos grados de libertad para la métrica g_{ij} . En tal caso se puede comenzar con el espacio Teichmüller asociado a ella y determinar de ahí el espacio moduli de tal métrica [38]. Por otra parte, también puede resultar de interés asociar con g_{ji} el teorema de Riemann-Roch [39] o la estructura compleja de ramificación "tame and wild" [40]. En este último caso, uno puede asumir que la parte principal de la métrica se ve como

$$g_{ij}(x, y) = \left(\frac{T_n}{z^n} + \frac{T_{n-1}}{z^{n-1}} + \dots + \frac{T_1}{z} \right) \delta_{ij}. \quad (3.26)$$

En tal caso, las "similaridades" se pueden identificar como solitones asociados a agujeros negros. En este escenario, nuestra formulación 2d de gravedad puede brindar un puente para proveer ideas de estructuras complejas a gravedad 2d con torsión y *vice versa*.

III.3 Gravedad 2d en términos de matroides.

Podemos revisar algunos aspectos de la sección anterior desde un punto de vista de matroides. Consideramos la matriz

$$V_i^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

con el índice μ tomando valores en el conjunto

$$E = \{1, 2, 3, 4\}. \quad (3.28)$$

Se puede ver que los subconjuntos (vectores-columna) de (3.27) $\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2\}$, $\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^3\}$, $\{\mathbf{V}^2, \mathbf{V}^4\}$ y $\{\mathbf{V}^3, \mathbf{V}^4\}$ son bases sobre los reales de la matriz (3.4). Podemos asociar estos subconjuntos con la colección de subconjuntos de E

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}. \quad (3.29)$$

El par $\mathcal{M} = \{E, \mathcal{B}\}$ es un matroide de rango 2, que además es autodual. El hecho de que podamos expresar \mathcal{M} en la forma matricial (3.27) muestra que tal matroide es representable, (ver capítulo I). Más aún, podemos mostrar que este matroide es gráfico y orientable.

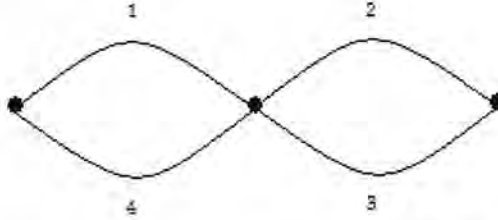


Fig. 3.1. Grafo conexo G_2 correspondiente a $\mathcal{M}(G_2)$.

Podemos ver que el grafo G_2 en la figura 3.1 corresponde a la realización gráfica del matroide \mathcal{M} notando que los árboles maximales que se pueden formar -de eliminar aristas- en G_2 corresponden a los elementos de \mathcal{B} . También podemos codificar la información del matroide anterior mediante su representación geométrica, mostrada en la figura 3.2, donde puntos adyacentes representan aristas paralelas.



Fig. 3.2. Representación geométrica de $\mathcal{M}(G_2)$.

Es posible asociarle una orientación al matroide anterior, introduciendo el concepto de *chirotope* [71], dado por

$$\chi^{\mu\nu} = \varepsilon^{ij} V_i^\mu V_j^\nu. \quad (3.30)$$

Entonces, obtenemos como elementos del chirotope $\chi^{\mu\nu}$ las combinaciones "signadas"

$$12+, \quad 13-, \quad 24-, \quad 34+. \quad (3.31)$$

La relación de esta estructura matroidal con la discusión de la sección anterior se da con la identificación $\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2\} \rightarrow \delta_{ij}$, $\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^3\} \rightarrow \eta_{ij}$, $\{\mathbf{V}^2, \mathbf{V}^4\} \rightarrow \lambda_{ij}$ y $\{\mathbf{V}^3, \mathbf{V}^4\} \rightarrow \varepsilon_{ij}$. Los signos en (3.31) corresponden a los determinantes de las matrices para δ_{ij} , η_{ij} , λ_{ij} y ε_{ij} , que pueden calcularse mediante (3.30).

De este modo, hemos mostrado cómo las bases de $M(2, R)$ dadas por (3.7) admiten una representación de matroides orientados.

Gráficamente, la orientación del matroide induce un digrafo correspondiente a $G2$; tal digrafo acíclico es mostrado en la fig. 3.3. Es posible obtener una descripción acíclica de $G2$. En efecto, podemos partir de un método más general: Formar los circuitos signados $X_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} = \{X^+, X^-\}$, con $X^+ = \{i_k : \chi(i_1 i_2 \dots \hat{i}_k \dots i_{n+1}) = (-1)^{k+1}\}$ y $X^- = \{i_k : \chi(i_1 i_2 \dots \hat{i}_k \dots i_{n+1}) = (-1)^k\}$, donde tenemos que n denota el rango del matroide e \hat{i}_k es un elemento eliminado del conjunto ordenado. Para el matroide $\mathcal{M}(G2)$, obtenemos por ejemplo el circuito signado $X_{123} = (\{2\}, \{3\})$ o simplemente $X_{123} = 2\bar{3}$, donde la barra indica elementos negativos respecto a esta orientación. También es claro que pueden formarse circuitos con la orientación inversa. Las otras tres combinaciones dan $X_{124} = \bar{1}4$, $X_{134} = 1\bar{4}$ y $X_{234} = 2\bar{3}$, y todas corresponden a los únicos dos ciclos en $G2$. (En general se pueden obtener circuitos con $n+1$ elementos o menos dependiendo de los subconjuntos independientes de $\mathcal{M}(G2)$.)

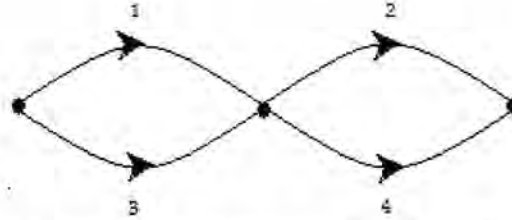


Fig. 3.3. Digrafo $D2$ con circuitos $1\bar{4}$ (o $\bar{1}4$) y $2\bar{3}$ en \mathcal{M} .

Puede ser de interés considerar el mapeo débil $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c$, con

$$\mathcal{B}_c = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}. \quad (3.32)$$

Éste lleva al par reducido $\mathcal{M}_c = \{E, \mathcal{B}_c\}$. Cuando se considera la estructura local tal como en (3.12)-(3.16), se trabaja con la noción de haz fibrado matroidal (véase las referencias [41] y [42]). De este modo tenemos también una relación entre haces fibrados matroidales y gravedad $2d$ con torsión.

Aquí, nos parece útil hacer varias observaciones. Es conocido que las matrices fundamentales correspondientes a δ_{ij} , η_{ij} , λ_{ij} and ε_{ij} dadas en (3.7) forman no sólo una base para $M(2, R)$, sino que además determinan una base para las álgebras de Clifford $C(2, 0)$ y $C(1, 1)$. De hecho, uno tiene los isomorfismos $M(2, R) \simeq C(2, 0) \simeq C(1, 1)$. Más aún, se puede demostrar que $C(0, 2)$ puede construirse usando las matrices fundamentales (3.7) con

productos de Kronecker. Resulta que $C(0, 2)$ es isomorfo al álgebra cuaterniónica H . Como todas las demás álgebras, $C(a, b)$ pueden construirse de los bloques fundamentaales $C(2, 0)$, $C(1, 1)$ y $C(0, 2)$. Lo anterior significa que la conexión analizada de matroides orientados con $M(2, R)$ también brinda un interesante enlace con la estructura de álgebras de Clifford [43].

Otro punto interesante es que el grupo $SL(2, R)$, objeto central en física 2t, puede relacionarse con todo lo anterior al ser un subconjunto de $M(2, R)$. En este caso, se sabe que una teoría de campos no conmutativa de física 2t contiene un principio de simetría de norma, la cual está fundamentada en el grupo no conmutativo $U_*(1, 1)$ [34][35][36]. Este enfoque se origina de la observación de que una teoría de líneas-mundo admite un álgebra de Lie $sl_*(2, R)$ con una simetría de norma actuando en el espacio fase. En este contexto, considerando las coordenadas q y p en el espacio fase, tenemos que los paréntesis de Poisson para dos funciones f y g son

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a}, \quad (3.33)$$

y estos pueden escribirse como

$$\{f, g\} = \varepsilon_{ij} \eta^{ab} \frac{\partial f}{\partial q_i^a} \frac{\partial g}{\partial q_j^b}, \quad (3.34)$$

donde $q_1^a \equiv q^a$ y $q_2^a \equiv p^a$. Es apropiado mencionar que la expresión (3.34) es muy similar a la definición de chirotope.

Recientemente, una generalización de (3.34) fué propuesta en relación a física 2t [44]:

$$\{f, g\} = (g_{ij} \Omega^{ab} + \varepsilon_{ij} \eta^{ab}) \frac{\partial f}{\partial q_i^a} \frac{\partial g}{\partial q_j^b}. \quad (3.35)$$

Aquí Ω^{ab} es una forma simpléctica definida para dimensiones pares. En particular, en cuatro dimensiones Ω_{ab} se puede escoger como

$$\Omega^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Además, con la elección $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, -1, 1)$ hacemos contacto con dimensión $(2+2)$, que es la mínima en física 2t.

Escribiendo $\mathbf{g}'_{ij} = g_{ij}\Omega^{ab} + \varepsilon_{ij}\eta^{ab}$ es

$$\mathbf{g}'_{ij} + \varepsilon_{ij}\boldsymbol{\eta} \quad (3.37)$$

Podemos reconocer en esta expresión la forma típica (3.8) de una estructura compleja, con lo que se puede relacionar también lo anterior con geometría no conmutativa.

Una relación alternativa con física 2t la obtenemos al considerar la signatura $\eta_{ab} = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ y su métrica asociada:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2. \quad (3.38)$$

De hecho, definiendo la matriz

$$x^{ij} = \begin{pmatrix} x^1 & x^3 \\ x^4 & x^2 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

podemos ver que (3.38) puede expresarse como

$$ds^2 = dx^{ij} dx^{kl} \eta_{ik} \eta_{jl}, \quad (3.40)$$

en donde los índices i, j, k, l son 1 o 2 como antes, y η_{ij} se refiere a la tercera matriz definida en (3.7), $\eta_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Notando que en (3.38) las coordenadas "espaciales" x^1, x^2 son los elementos de la diagonal principal y las coordenadas "temporales" x^3, x^4 corresponden a los elementos en la diagonal secundaria principal en (3.39), vemos que x^{ij} puede escribirse en términos de las bases (3.7) como sigue:

$$x^{ij} = X\delta^{ij} + S\varepsilon^{ij} + Y\eta^{ij} + T\lambda^{ij}; \quad (3.41)$$

donde usamos las definiciones

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(x^1 + x^2), & S &= \frac{1}{2}(x^4 - x^3), \\ Y &= \frac{1}{2}(x^1 - x^2), & T &= -\frac{1}{2}(x^3 + x^4), \end{aligned} \quad (3.42)$$

y consideramos la notación $\varepsilon^{ij} = \varepsilon_{kl}\eta^{ik}\eta^{jl}$ y $\lambda^{ij} = \lambda_{kl}\eta^{ik}\eta^{jl}$, donde η^{ij} es la métrica plana inversa 1+1 con componentes η_{ij} .

Finalmente, podemos formar el objeto η_{ijk} mediante la introducción de sus componentes

$$\eta_{1ij} = \delta_{ij}; \quad \eta_{2ij} = \varepsilon_{ij}. \quad (3.43)$$

De tales expresiones y de (3.7) se puede ver que η_{ijk} automáticamente satisface

$$\eta_{ij1} = \eta_{ij}, \quad \eta_{ij2} = \lambda_{ij}. \quad (3.44)$$

Entonces η_{ijk} tiene la notable propiedad de contener todas las matrices base de (3.7). Lo anterior significa que una matriz arbitraria Ω_{ij} puede escribirse como

$$\Omega_{ij} = x^k \eta_{kij} + y^k \eta_{ijk}, \quad (3.45)$$

donde $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $y^1 = r$, $y^2 = s$. Aquí, x, y, r y s son definidas en (3.5). Observe que $\eta_{ijk} = \eta_{jik}$, pero en cambio $\eta_{kij} \neq \eta_{kji}$. Es útil igualmente mencionar que una estructura similar fué propuesta en Ref. [45] en el contexto de gravedad no simétrica [46].

El inverso η^{ijk} de η_{ijk} puede establecerse mediante la relación

$$\eta^{ijk} \eta_{ijl} = 2\delta_l^k, \quad (3.46)$$

o de otro modo, con

$$\eta^{kij} \eta_{lij} = 2\delta_l^k. \quad (3.47)$$

Explícitamente, obtenemos las siguientes componentes

$$\eta^{ij1} = \delta^{ij}; \quad \eta^{ij2} = -\varepsilon^{ij}; \quad \eta^{1ij} = \eta^{ij}; \quad \eta^{2ij} = -\lambda^{ij}. \quad (3.48)$$

Tradicionalmente, comenzando con un espacio plano descrito por la métrica η_{ij} , uno puede introducir una métrica curva $g_{\mu\nu} = e_\mu^i e_\nu^j \eta_{ij}$ vía los *zweibeins* e_μ^i [18]. Así, lo último nos motiva a introducir la "métrica" curva de tres índices

$$g_{\mu\nu\lambda} = e_\mu^i e_\nu^j e_\lambda^k \eta_{ijk}. \quad (3.49)$$

Parece interesante desarrollar una teoría gravitacional basada en $g_{\mu\nu\lambda}$. Por un lado, η_{ijk} contiene las cuatro matrices base de (3.7), de las cuales mostramos que están relacionadas con teoría de matroides. Por otro lado, dado que las misma base está también relacionada con álgebras de Clifford, tal teoría gravitacional puede determinar estructuras de espín, necesarias para escenarios supersimétricos, además de que puede proveer un formalismo para objetos extendidos.

Capítulo IV

Dualidad en teorías gravitacionales de alta dimensión

Los modelos extra-dimensionales han sido un interesante objeto de estudio desde su aparición en la física, principalmente como un esquema válido en la búsqueda de unificación [48][11][8]. De hecho, en fechas recientes ha surgido un renovado interés en tales modelos con el crecimiento de la teoría de cuerdas [7][10]. Sin embargo, desde los primeros trabajos al respecto (Nordström, Kaluza and Klein) [48] vemos las técnicas esenciales en la construcción de teorías con dimensiones extra, en particular la idea de compactificación. Aquí analizamos características de dualidad para métricas con una forma particular, pero con dimensiones arbitrarias [47].

IV.1 Gravedad en altas dimensiones

Comenzamos el análisis con una métrica g_{AB} en una variedad M^d de dimensión d , la cual dividiremos en una métrica de dos bloques, tal que $M^d = M^p \times M^q$. El primer bloque en la métrica, de dimensión p , será denotado por $g_{\mu\nu}$, mientras que el segundo bloque, de dimensión $q = d - p$ será g_{ij} , donde índices griegos (α, β, \dots) corren de 0 a $p - 1$, índices latinos (i, j, \dots) van de p a $d - 1$, y por último (A, B, \dots) corren de 0 a $d - 1$. Con tal prescripción, la métrica g_{AB} adquiere la forma [49][50]

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x, y) & 0 \\ 0 & g_{ij}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde por consistencia el cero superior corresponde a una matriz cero de dimensión $(p) \times (d - p)$ y el cero inferior de manera similar es una matriz $(d - p) \times (p)$. Además, x se refiere a las coordenadas en M^p , mientras que y se asocia con M^q .

El tensor de Riemann se define de la manera usual, en términos de la conexión de Christoffel:

$$\mathcal{R}^A_{BCD} = \partial_C \Gamma^A_{DB} - \partial_D \Gamma^A_{CB} + \Gamma^A_{CF} \Gamma^F_{DB} - \Gamma^A_{DF} \Gamma^F_{CB}, \quad (4.2)$$

donde

$$\Gamma_{BC}^A = \frac{1}{2}g^{AF}(g_{BF,C} + g_{CF,B} - g_{BC,F}). \quad (4.3)$$

De (4.3), y usando la distinción en índices $\mu, \nu, \dots etc.$ y $i, j, \dots etc.$, encontramos que los símbolos de Christoffel pueden ser agrupados en seis clases:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu &= \{\mu_{\alpha\beta}\}, \quad \Gamma_{\alpha i}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g_{\alpha\lambda,i}, \quad \Gamma_{ij}^\mu = -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g_{ij,\lambda}, \\ \Gamma_{jk}^i &= \{i_{jk}\}, \quad \Gamma_{j\alpha}^i = \frac{1}{2}g^{il}g_{jl,\alpha}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^i = -\frac{1}{2}g^{ij}g_{\alpha j}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aquí, usamos la notación $\{\mu_{\alpha\beta}\}$ para indicar los símbolos de Christoffel en la reducción dimensional adecuada; por ejemplo $\{\mu_{\alpha\beta}\} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(g_{\alpha\rho,\beta} + g_{\rho\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho})$, pero los índices y sumatorias sólo corren de 0 a $p-1$, mientras que en $\{i_{jk}\}$ las sumatorias correrán de p a $d-1$. Además, las componentes del tensor de Riemann se pueden dividir en clases de índices. Por ejemplo:

$$\mathcal{R}_{\nu\alpha\beta}^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha k}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^k - \Gamma_{\beta k}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^k, \quad (4.5)$$

donde

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\mu + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda. \quad (4.6)$$

Usando (4.4), la relación (4.5) se convierte en

$$\mathcal{R}_{\nu\alpha\beta}^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu + \frac{1}{4}(g^{\mu\lambda}g_{\beta\lambda,k}g^{kl}g_{\alpha\nu,l} - g^{\mu\lambda}g_{\alpha\lambda,k}g^{kl}g_{\beta\nu,l}). \quad (4.7)$$

De manera similar, obtenemos las componentes del tensor de Riemann con índices latinos:

$$\mathcal{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + \frac{1}{4}(g^{im}g_{lm,\lambda}g^{\lambda\tau}g_{kj,\tau} - g^{im}g_{km,\lambda}g^{\lambda\tau}g_{lj,\tau}). \quad (4.8)$$

Para el caso de índices mixtos, tenemos que

$$\mathcal{R}_{\nu j}^\mu = \partial_\nu \Gamma_{ji}^\mu - \partial_j \Gamma_{\nu i}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \Gamma_{ji}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^\mu \Gamma_{\nu i}^\lambda + \Gamma_{\nu k}^\mu \Gamma_{ji}^k - \Gamma_{jk}^\mu \Gamma_{\nu i}^k. \quad (4.9)$$

Definiendo las derivadas covariantes $\mathcal{D}_\nu \Gamma_{ij}^\mu = \partial_\nu \Gamma_{ij}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \Gamma_{ji}^\lambda$ y $\mathcal{D}_j \Gamma_{\nu i}^\mu = \partial_j \Gamma_{\nu i}^\mu - \Gamma_{\nu k}^\mu \Gamma_{ji}^k$, la expresión (4.9) se reduce a

$$\mathcal{R}_{\nu j}^\mu = \mathcal{D}_\nu \Gamma_{ji}^\mu - \mathcal{D}_j \Gamma_{\nu i}^\mu + \Gamma_{j\lambda}^\mu \Gamma_{\nu i}^\lambda - \Gamma_{jk}^\mu \Gamma_{\nu i}^k. \quad (4.10)$$

Entonces, usando (4.4) encontramos

$$\mathcal{R}^\mu{}_{i\nu j} = -\frac{1}{2}\mathcal{D}_\nu g_{ij}{}^{,\mu} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_j(g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu,i}) - \frac{1}{4}g^{\mu\lambda}g_{\lambda\alpha,j}g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\nu,i} + \frac{1}{4}g_{kj}{}^{,\mu}g^{kl}g_{li,\nu}. \quad (4.11)$$

Con un cálculo similar obtenemos que

$$\mathcal{R}^i{}_{\mu j\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{D}_j g_{\mu\nu}{}^{,i} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_\nu(g^{il}g_{lj,\mu}) - \frac{1}{4}g^{il}g_{lk,\nu}g^{km}g_{mj,\mu} + \frac{1}{4}g_{\alpha\nu}{}^{,i}g^{\alpha\lambda}g_{\lambda\mu,j}. \quad (4.12)$$

Por otra parte, del tensor de Ricci

$$\mathcal{R}_{AB} = \mathcal{R}^K{}_{AKB}, \quad (4.13)$$

podemos construir el escalar de curvatura \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} + g^{ij}\mathcal{R}_{ij}. \quad (4.14)$$

Además, podemos escribir explícitamente (4.14) como sigue:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\mathcal{R}^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} + \mathcal{R}^k{}_{\mu k\nu}) + g^{ij}(\mathcal{R}^\alpha{}_{i\alpha j} + \mathcal{R}^k{}_{ikj}). \quad (4.15)$$

Usando la propiedad simétrica $g^{ij}\mathcal{R}^\alpha{}_{i\alpha j} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}^k{}_{\mu k\nu}$, (4.15) puede simplificarse a

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} + g^{ij}\mathcal{R}^k{}_{ikj} + 2g^{\mu\nu}g^{ij}\mathcal{R}_{\mu i\nu j}. \quad (4.16)$$

Si consideramos (4.7), (4.8), (4.11) y (4.12), así como la notación 1R y 2R para los escalares de curvatura en dimensiones p y q , dados por ${}^1R = g^{\mu\nu}R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ y ${}^1R = g^{ij}R^k{}_{ikj}$, vemos que (4.16) implica

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= {}^1R + {}^2R \\ &- \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{ij}g_{\mu\nu,i}g_{\alpha\beta,j} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{ij}g_{\mu\alpha,i}g_{\nu\beta,j} \\ &- \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{ij}g^{kl}g_{ij,\mu}g_{kl,\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{ij}g^{kl}g_{ik,\mu}g_{jl,\nu} \\ &- \frac{1}{2}g^{ij}\mathcal{D}_\mu g_{ij}{}^{,\mu} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_i(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}{}^{,i}) \\ &- \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{ij}g_{\mu\alpha,i}g_{\nu\beta,j} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{ij}g^{kl}g_{ik,\mu}g_{jl,\nu} \\ &- \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{D}_i g_{\mu\nu}{}^{,i} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu(g^{ij}g_{ij}{}^{,\mu}) \\ &- \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{ij}g^{kl}g_{ik,\mu}g_{jl,\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{ij}g_{\mu\alpha,i}g_{\nu\beta,j}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

La última expresión puede simplificarse como se muestra

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} = & \ ^1R + \ ^2R - \mathcal{D}_\mu(g^{ij}g_{ij} \ ^i\mu) - \mathcal{D}_i(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \ ^i) \\
& - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{ij}g_{\mu\nu,i}g_{\alpha\beta,j} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{ij}g_{\mu\alpha,i}g_{\nu\beta,j} \\
& - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{ij}g^{kl}g_{ij,\mu}g_{kl,\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{ij}g^{kl}g_{ik,\mu}g_{jl,\nu}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Por lo tanto, la acción de Einstein-Hilbert es

$$\begin{aligned}
S = \int_M \sqrt{^1g}\sqrt{^2g}\mathcal{R} = \int_M [\sqrt{^1g}\sqrt{^2g} \ ^1R + \sqrt{^1g}\sqrt{^2g} \ ^2R \\
- \sqrt{^1g}\mathcal{D}_\mu(\sqrt{^2g}g^{ij}g_{ij} \ ^i\mu) - \sqrt{^2g}\mathcal{D}_i(\sqrt{^1g}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \ ^i) \\
+ \frac{1}{4}\sqrt{^1g}\sqrt{^2g}(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{ij}g_{\mu\nu,i}g_{\alpha\beta,j} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{ij}g_{\mu\alpha,i}g_{\nu\beta,j} \\
+ g^{\mu\nu}g^{ij}g^{kl}g_{ij,\mu}g_{kl,\nu} - g^{\mu\nu}g^{ij}g^{kl}g_{ik,\mu}g_{jl,\nu})].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Es razonable asumir que a distancias suficientemente grandes, obtenemos que $\int_M \sqrt{^1g}\mathcal{D}_\mu(\sqrt{^2g}g^{ij}g_{ij} \ ^i\mu) = 0$ y $\int_M \sqrt{^2g}\mathcal{D}_i(\sqrt{^1g}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \ ^i) = 0$. Así, vemos que (4.19) puede simplificarse:

$$\begin{aligned}
S = \int_M \sqrt{^1g}\sqrt{^2g}\mathcal{R} = \int_M \sqrt{^1g}\sqrt{^2g} [^1R + ^2R + \\
+ \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{ij}(g_{\mu\nu,i}g_{\alpha\beta,j} - g_{\mu\alpha,i}g_{\nu\beta,j}) + \\
+ \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{ij}g^{kl}(g_{ij,\mu}g_{kl,\nu} - g_{ik,\mu}g_{jl,\nu})].
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Hasta aquí, logramos expandir la acción S en términos de los espacios M^p y M^q . Obsérvese que los últimos dos términos en (4.20) son términos de interacción entre las dos métricas g_{ij} y $g_{\alpha\beta}$.

IV.2 Simplificando el modelo.

Como una aplicación de (4.20), a continuación discutiremos varios ejemplos. Primero, uno puede asumir que $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ y $g_{ij} = g_{ij}(y)$. En tal caso S se reduce a

$$S = \int_M \sqrt{^1g}\sqrt{^2g} (\ ^1R + \ ^2R), \tag{4.21}$$

el cual es un resultado bien conocido.

Se obtienen resultados más interesantes si asumimos que $g_{\mu\nu} = \psi^2(x, y)\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ y $g_{ij} = \varphi^2(x, y)\bar{g}_{ij}(y)$. En este caso, \mathcal{S} se reduce a

$$\mathcal{S} = \int_M \sqrt{{}^1g}\sqrt{{}^2g} [{}^1R + {}^2R +$$

$$+ p(p-1)\psi^{-2}\varphi^{-2}\bar{g}^{ij}\psi_{,i}\psi_{,j} + q(q-1)\psi^{-2}\varphi^{-2}\bar{g}^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}].$$

Dado que los escalares de Ricci 1R y 2R ahora son

$${}^1R = \psi^{-2}[{}^1\bar{R} - (p-1)(p-4)\psi^{-2}\psi_{,\lambda}\psi^{,\lambda} - 2(p-1)\psi^{-1}\nabla_{\lambda}\psi^{,\lambda}]$$

y

$${}^2R = \varphi^{-2}[{}^2\bar{R} - (q-1)(q-4)\varphi^{-2}\varphi_{,i}\varphi^{,i} - 2(q-1)\varphi^{-1}\nabla_i\varphi^{,i}],$$

respectivamente, después de algún reacomodo, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int_M \sqrt{{}^1g}\sqrt{{}^2g} [\psi^{p-2}\varphi^q {}^1\bar{R} + \psi^p\varphi^{q-2} {}^2\bar{R} \\ & - (p-1)(p-4)\psi^{p-4}\varphi^q\psi_{,\lambda}\psi^{,\lambda} - 2(p-1)\psi^{p-3}\varphi^q\nabla_{\lambda}\psi^{,\lambda} \\ & + p(p-1)\psi^{p-2}\varphi^{q-2}\psi_{,i}\psi^{,i}] \\ & - (q-1)(q-4)\psi^p\varphi^{q-4}\varphi_{,i}\varphi^{,i} - 2(q-1)\psi^p\varphi^{q-3}\nabla_i\varphi^{,i} \\ & + q(q-1)\psi^{p-2}\varphi^{q-2}\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}]. \end{aligned}$$

Integrando por partes, (4.25) implica

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int_M \sqrt{{}^1g}\sqrt{{}^2g} [(\psi^{p-2}\varphi^q) {}^1\bar{R} + (\psi^p\varphi^{q-2}) {}^2\bar{R} \\ & + (p-1)(p-2)\psi^{p-4}\varphi^q\psi_{,\lambda}\psi^{,\lambda} + 2q(p-1)\psi^{p-3}\varphi^{q-1}\varphi_{,\lambda}\psi^{,\lambda} \\ & + p(p-1)\psi^{p-2}\varphi^{q-2}\psi_{,i}\psi^{,i} \\ & + (q-1)(q-2)\psi^p\varphi^{q-4}\varphi_{,i}\varphi^{,i} + 2p(q-1)\psi^{p-1}\varphi^{q-3}\varphi_{,i}\psi^{,i} \\ & + q(q-1)\psi^{p-2}\varphi^{q-2}\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}]. \end{aligned}$$

IV.3 Dualidad tipo Farkas en altas dimensiones.

Exploraremos una posible simetría de dualidad en (4.26). Para ello, consideremos el caso especial $\psi = \varphi^{-1}$. En tal caso tenemos

$$\begin{aligned}
 S = & \int_M \sqrt{^1\bar{g}}\sqrt{^2\bar{g}}[(\varphi^{q-p+2})^1\bar{R} + (\varphi^{q-p-2})^2\bar{R} \\
 & + (p-1)(p-2)\varphi^{q-p}\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda} + 2q(p-1)\varphi^{q-p}\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda} \\
 & + p(p-1)\varphi^{q-p-4}\varphi_{,i}\varphi^{,i} \\
 & + (q-1)(q-2)\varphi^{q-p-4}\varphi_{,i}\varphi^{,i} + 2p(q-1)\varphi^{q-p-4}\varphi_{,i}\varphi^{,i} \\
 & + q(q-1)\varphi^{q-p}\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}].
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Esta expresión puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 S = & \int_M \sqrt{^1\bar{g}}\sqrt{^2\bar{g}}[(\varphi^{q-p+2})^1\bar{R} + (\varphi^{q-p-2})^2\bar{R} \\
 & + [(p-1)(p-2) + 2q(p-1) + q(q-1)]\varphi^{q-p}\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda} \\
 & + [(q-1)(q-2) + 2p(q-1) + p(p-1)]\varphi^{q-p-4}\varphi_{,i}\varphi^{,i}].
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Dado que

$$(p-1)(p-2) + 2q(p-1) + q(q-1) = (p+q-1)(p+q-2) \tag{4.29}$$

y también

$$(q-1)(q-2) + 2p(q-1) + p(p-1) = (p+q-1)(p+q-2), \tag{4.30}$$

podemos simplificar (4.28) en la forma

$$S = S_p + S_q, \tag{4.31}$$

donde

$$S_p = \int_M \sqrt{^1\bar{g}}\sqrt{^2\bar{g}}[(\varphi^{q-p+2})^1\bar{R} + (p+q-1)(p+q-2)\varphi^{q-p}\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}] \tag{4.32}$$

y

$$S_q = \int_M \sqrt{1\tilde{g}}\sqrt{2\tilde{g}}[(\varphi^{q-p-2})^2 \tilde{R} + (p+q-1)(p+q-2)\varphi^{q-p-4}\varphi_{,i}\varphi^{,i}]. \quad (4.33)$$

Estamos interesados en la posible invariancia de la acción (4.31) bajo la transformación de dualidad $\varphi \rightarrow \varphi^{-1}$. Aplicando esta transformación a (4.31), se tiene

$$S_p \rightarrow \int_M \sqrt{1\tilde{g}}\sqrt{2\tilde{g}}[\varphi^{p-q-2} \tilde{R} + (p+q-1)(p+q-2)\varphi^{p-q-4}\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}], \quad (4.34)$$

mientras que

$$S_q \rightarrow \int_M \sqrt{1\tilde{g}}\sqrt{2\tilde{g}}[\varphi^{p-q+2} \tilde{R} + (p+q-1)(p+q-2)\varphi^{p-q}\varphi_{,i}\varphi^{,i}]. \quad (4.35)$$

Así, podemos observar que si $p \rightarrow q+2$ y $q \rightarrow p-2$, entonces S_p permanece invariante, pero en cambio

$$S_q = \int_M \sqrt{1\tilde{g}}\sqrt{2\tilde{g}}[\varphi^{p-q+6} \tilde{R} + (p+q-1)(p+q-2)\varphi^{p-q+4}\varphi_{,i}\varphi^{,i}]; \quad (4.36)$$

esto es, S_q no es invariante. De manera similar, si $p \rightarrow q-2$ y $q \rightarrow p+2$, entonces S_q es invariante, mientras que S_p cambia como

$$S_p = \int_M \sqrt{1\tilde{g}}\sqrt{2\tilde{g}}[\varphi^{p-q-6} \tilde{R} + (p+q-1)(p+q-2)\varphi^{p-q-4}\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}], \quad (4.37)$$

lo cual significa que S_p no es invariante. Por lo tanto, tenemos la siguiente situación: bajo la transformación de dualidad $\varphi \rightarrow \varphi^{-1}$, S_p o S_q permanece invariante, pero no ambos, dependiendo de si tenemos $p \rightarrow q+2$ y $q \rightarrow p-2$, ($p \rightleftharpoons q+2$), o si tenemos $p \rightarrow q-2$ y $q \rightarrow p+2$ ($p \rightleftharpoons q-2$), respectivamente.

Esta propiedad de dualidad para la acción (4.31) se asemeja a la propiedad de Farkas en teoría de matroides orientados (ver sección 1.4). En este caso, podemos conjeturar un análogo a la propiedad de Farkas para la acción (4.31):

Para cada transformación $\varphi \rightarrow \varphi^{-1}$,

(Da) $\exists p$ para M_p , tal que S_p es invariante

o

(Db) $\exists q$ para M_q , tal que S_q es invariante,

pero no ambos.

Es interesante escribir (4.31) en la forma alternativa

$$\begin{aligned} S = \int_M \sqrt{^1\tilde{g}}\sqrt{^2\tilde{g}}[\varphi^{q-p}(\gamma^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma^{ij}\tilde{R}_{ij}) \\ + (d-1)(d-2)\varphi^{q-p-2}(\gamma^{\lambda\sigma}\varphi_{,\lambda}\varphi_{,\sigma} + \gamma^{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j})]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Aquí consideramos que $^1\tilde{R} = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu}$, $^2\tilde{R} = \tilde{g}^{ij}\tilde{R}_{ij}$, $\gamma^{\mu\nu} = \varphi^2(x, y)\tilde{g}^{\mu\nu}(x)$ y $\gamma^{ij} = \varphi^{-2}(x, y)\tilde{g}^{ij}(x)$. Esta expresión puede expresarse de manera más compacta:

$$S = \int_M \sqrt{^1\tilde{g}}\sqrt{^2\tilde{g}}\varphi^{q-p}[\gamma^{AB}\tilde{R}_{AB} + (d-1)(d-2)\varphi^{-2}\gamma^{AB}\varphi_{,A}\varphi_{,B}]. \quad (4.44)$$

Es interesante mencionar que no hemos escogido alguna signatura para γ_{AB} , y por lo tanto este análisis puede ser útil en física de 2 tiempos también [34][44]. En seguida vemos un estudio más específico: Cosmología con dimensiones extra.

Capítulo V

Cosmología multidimensional

Un punto común a los distintos enfoques de las teorías extradimensionales es el estudio de los tipos de cosmología que implican. Además de las teorías iniciales con dimensiones compactas [48][11][8], eventualmente emergieron nuevas ideas, tales como la consideración de dimensiones extra no compactas [52][53][54], o algún tipo de compactificación dinámica [55][56][57].

Consideramos que los modelos cosmológicos con dimensiones extra merecen atención, independentemente del enfoque de altas energías del que provenga. Lo que nosotros presentamos aquí es una revisión de modelos cosmológicos con dimensiones extra [58], tales que un número D de dimensiones tienen un radio a desarrollándose en el tiempo, mientras que otras d dimensiones poseen un mismo radio b .

V.1 El modelo.

Consideramos un modelo cosmológico con métrica [59][60][61]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\tilde{g}_{ij}(x)dx^i dx^j + b^2(t)\hat{g}_{ab}(y)dy^a dy^b. \quad (5.1)$$

Los índices (i, j, \dots) corren de 1 a D , mientras que (a, b, \dots) van de $D+1$ a $D+d$. Además, $\tilde{g}_{ij}(x)$ y $\hat{g}_{ab}(y)$ son las métricas para dos espacios homogéneos que dependen sólo de las coordenadas (x^1, \dots, x^D) y $(y^{D+1}, \dots, y^{D+d})$, respectivamente. De aquí en adelante, llamamos a estos espacios espacio- D y espacio- d .

De acuerdo a (5.1), obtenemos los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\beta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda})$ que son distintos de cero:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= a\dot{a}\tilde{g}_{ij}, & \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, & \Gamma_{jk}^i &= \tilde{\Gamma}_{jk}^i, \\ \Gamma_{ab}^0 &= b\dot{b}\hat{g}_{ab}, & \Gamma_{0b}^a &= \frac{\dot{b}}{b}\delta_b^a, & \Gamma_{bc}^a &= \hat{\Gamma}_{bc}^a. \end{aligned} \quad (5.2)$$

aquí $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ y $\hat{\Gamma}_{bc}^a$ se refieren a los símbolos de Christoffel en la dimensión dimensional adecuada. También usamos la misma notación como indicativa de

reducción dimensional. Por ejemplo, así como $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il}(g_{jl,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l})$, tenemos que $\hat{R}_{bcd}^a = \partial_c \hat{\Gamma}_{db}^a - \partial_d \hat{\Gamma}_{cb}^a + \hat{\Gamma}_{cf}^a \hat{\Gamma}_{db}^f - \hat{\Gamma}_{df}^a \hat{\Gamma}_{cb}^f$ y que $\tilde{R} = \tilde{g}^{ij} \tilde{R}_{ij}$. Después de calcular las componentes necesarias del tensor de Riemann $R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\mu + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda$, así como de contraer éste para obtener el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$, obtenemos tres clases de éste último tensor: Para la componente temporal

$$R_{00} = -D \frac{\ddot{a}}{a} - d \frac{\ddot{b}}{b}; \quad (5.3)$$

para las D dimensiones (x^i, x^j, \dots) ,

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \tilde{g}_{ij} \left[a\ddot{a} + (D-1)\dot{a}^2 + d \frac{a}{b} \dot{a}\dot{b} \right]; \quad (5.4)$$

y por último, para las d dimensiones (y^a, y^b, \dots) ,

$$R_{ab} = \hat{R}_{ab} + \hat{g}_{ab} \left[b\ddot{b} + (d-1)\dot{b}^2 + D \frac{b}{a} \dot{a}\dot{b} \right]. \quad (5.5)$$

Mediante otra contracción, el escalar de curvatura es

$$R = 2D \frac{\ddot{a}}{a} + 2d \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{a^2} [\tilde{R} + D(D-1)\dot{a}^2 + dD \frac{a}{b} \dot{a}\dot{b}] + \frac{1}{b^2} [\hat{R} + d(d-1)\dot{b}^2 + dD \frac{b}{a} \dot{a}\dot{b}]. \quad (5.6)$$

Es claro que las relaciones anteriores son simétricas respecto a los espacios D y d, definidos por la métrica en (1.1). De manera más precisa, hay invariancia en las ecuaciones si llevamos a cabo los intercambios $a \leftrightarrow b$ y $D \leftrightarrow d$, así como los cambios que ellos inducen, v.g. $\tilde{R} \leftrightarrow \hat{R}$. Aún más, debido a la homogeneidad en tales subespacios, podemos escribir $\tilde{R}_{ij} = k_1(D-1)\tilde{g}_{ij}$ y $\hat{R}_{ab} = k_2(d-1)\hat{g}_{ab}$, en donde k_1 y k_2 pueden tomar valores en $\{-1, 0, 1\}$.

Con todo esto a la mano, -trabajando en unidades en que $c = G = 1$ - podemos englobar las ecuaciones de Einstein (2.30), en tres grupos:

$$G_{00} = 8\pi T_{00} \rightarrow \quad (5.7)$$

$$\frac{D(D-1)}{2} \left(\frac{\dot{a}^2 + k_1}{a^2} \right) + \frac{d(d-1)}{2} \left(\frac{\dot{b}^2 + k_2}{b^2} \right) + dD \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 8\pi T_{00};$$

$$G_{ij} = 8\pi T_{ij} \rightarrow \left\{ (D-1) \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-2)}{2} \left(\frac{\dot{a}^2 + k_1}{a^2} \right) \right] \right. \quad (5.8)$$

$$\left. + d \left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{(d-1)}{2} \left(\frac{\dot{b}^2 + k_2}{b^2} \right) \right] + d(D-1) \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \right\} a^2 \tilde{g}_{ij} = -8\pi T_{ij};$$

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab} \rightarrow \left\{ (d-1) \left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{(d-2)}{2} \left(\frac{\dot{b}^2 + k_2}{b^2} \right) \right] \right. \\ \left. + D \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-1)}{2} \left(\frac{\dot{a}^2 + k_1}{a^2} \right) \right] + D(d-1) \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \right\} b^2 \hat{g}_{ab} = -8\pi T_{ab}. \quad (5.9)$$

Las dos siguientes secciones están enfocadas en el caso de 3+1 dimensiones espaciales.

V.2 Modelo con dimensiones D=3, d=1.

En vacío, fijamos $D = 3$ y $d = 1$ en las ecuaciones (5.7)-(5.9) y obtenemos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k_1}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0, \quad (5.10)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k_1}{a^2} + \frac{\ddot{b}}{b} + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0 \quad (5.11)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k_1}{a^2} = 0. \quad (5.12)$$

La ecuación (5.12) es integrable respecto al radio a [62], lo que resulta en

$$\dot{a}^2 + k_1 = \frac{\Gamma}{a^2}, \quad (5.13)$$

en donde Γ es una constante de integración (con dimensiones de $\frac{[\text{Longitud}]^4}{[\text{Tiempo}]^2}$). La ecuación (5.13) sirve de dos maneras. Primero, nos da el comportamiento del radio a en el tiempo. Segundo, nos permite integrar (5.10) de modo que podamos obtener el radio b como una función de a , aún en el caso en que incluimos materia. En la siguiente sección estudiamos ambos resultados de manera más extensiva. Por el momento, verificamos que en este caso sin materia, obtenemos b como función de a directamente de (5.10) y (5.11), ya que ambos implican que $\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}$, y esto a la vez otorga

$$b = \beta \dot{a}, \quad (5.14)$$

en donde β es una constante positiva para un Universo expandiéndose en el 3-espacio. También es adecuado mencionar que, debido a las ecuaciones (5.12)-(5.14), tenemos

$$\dot{b} = -\frac{\beta\Gamma}{a^3}, \quad (5.15)$$

que significa que cuando β y Γ son positivos, tenemos un radio b decreciente en el tiempo para este caso del vacío. Como veremos más adelante, estos resultados los volvemos a examinar en el caso con presencia de materia.

V.3 Caso D=3, d=1 con materia.

En esta sección revisamos lo que se conoce como un modelo cosmológico tipo Kaluza-Klein, en donde $D = 3$ y $d = 1$. Consideramos un "polvo 5-dimensional", tal como se ve en [62]. En este caso, (5.7) -donde T_{00} corresponde a ρ , el polvo en cinco dimensiones- se puede escribir

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k_1}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \frac{8\pi\mu}{3a^3b}. \quad (5.16)$$

Aquí las identidades de Bianchi $G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ dictan que $\rho = \frac{\mu}{a^3b}$, en donde μ es una constante.

De la ecuación (5.13) obtenemos el comportamiento del radio a para los tres casos en que tenemos curvatura plana ($k_1 = 0$), positiva ($k_1 = 1$) o negativa ($k_1 = -1$) en el 3-espacio:

a) $k_1 = 0$. Aquí Γ es positiva necesariamente, y la integración otorga

$$a = \sqrt{2\sqrt{\Gamma}t}. \quad (5.17)$$

Esto también nos da una evolución del parámetro de Hubble de la forma $H = \frac{1}{2t} = \frac{\sqrt{\Gamma}}{a^2}$. El resultado puede contrastarse con el conocido para los modelos FRW en un Universo dominado por materia, en donde $a \propto t^{\frac{2}{3}}$, $H \propto a^{-\frac{3}{2}}$, y $H \propto \frac{1}{t}$ [63].

b) $k_1 = 1$. En este caso el parámetro Γ es positivo también, y $a(t)$ es

$$a = \left[\Gamma - (\sqrt{\Gamma} - t)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.18)$$

c) $k_1 = -1$. Aquí $\dot{a} = \frac{\sqrt{\Gamma+a^2}}{a}$ y Γ puede ser positivo o negativo. Para Γ positivo, tenemos

$$a = \left[(t + \sqrt{\Gamma})^2 - \Gamma \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.19)$$

Entonces, la imagen cualitativa es la de un Universo en expansión decelerando.

En cambio, si $\Gamma < 0$, tenemos que $a(t)$ está dado por

$$a = [t^2 - \Gamma]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.20)$$

en donde fijamos $t = 0$ como el tiempo en que a es mínimo, $a_{\min} = \sqrt{-\Gamma}$. Resaltamos el hecho de que esta solución no necesita la introducción de una constante cosmológica para un radio a con aceleración.

La figura 1 muestra el comportamiento de $a(t)$ para las tres curvaturas analizadas.

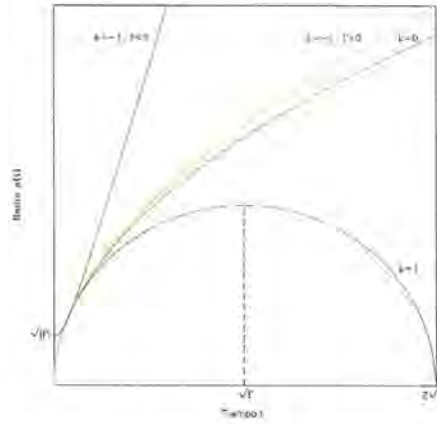


Fig. 1. Evolución del radio $a(t)$ en el tiempo para los tres casos para k (-1, 0 y +1). El cuarto caso, donde $\Gamma < 0$ se muestra en azul.

Es interesante notar que la mera introducción de la dimensión extra -aún en vacío- otorga la ecuación tipo Friedmann (5.13), y que entonces podemos considerar una densidad efectiva $\rho_{eff} = \frac{3\Gamma}{8\pi a^4}$. En el modelo clásico FRW esta densidad corresponde a materia ultrarelativista, relacionada con la presión mediante $p = \rho/3$. Entonces en este modelo $\Gamma < 0$ corresponde a una solución con una presión efectiva negativa. Además, cuando también tomamos en cuenta (5.10), vemos que podemos identificar el término $\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}$ como la densidad efectiva (más precisamente $\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = -\frac{8\pi}{3}\rho_{eff}$).

Para obtener b como función de a , usamos (5.13) y (5.16), que implican

$$\frac{\Gamma}{a^4} + \frac{\Gamma - k_1 a^2}{a^3 b} \frac{db}{da} = \frac{8\pi\mu}{3a^3 b}. \quad (5.21)$$

Esta ecuación puede integrarse para obtener $b = b(a)$. Tenemos tres casos distintos:

$$k = 0 \rightarrow b = \frac{4\pi\mu a}{3\Gamma} + \frac{\alpha}{a}, \quad (5.22)$$

con $\alpha = \text{const.}$ Obsérvese que al hacer la identificación $\alpha = \beta\sqrt{\Gamma}$ en (5.22) obtenemos (5.14) como caso límite cuando $\rho \rightarrow 0$ (lo que implica una corrección al resultado de la Ref. [62]). El segundo caso es

$$k = 1 \rightarrow b = \frac{8\pi\mu}{3a} + \beta\dot{a}, \quad (5.23)$$

en donde $\dot{a} = \frac{\sqrt{\Gamma-a^2}}{a}$ y β es una constante consistente con (5.14). El tercer caso es

$$k = -1 \rightarrow b = -\frac{8\pi\mu}{3a} + \beta\dot{a}. \quad (5.24)$$

Aquí, $\dot{a} = \frac{\sqrt{a^2+\Gamma}}{a}$ y Γ puede ser positivo o negativo, tal como vimos antes.

Podemos ver que el conjunto de soluciones para $b(a)$ dados en (5.22)-(5.24) tienen $b \rightarrow \beta\dot{a}$ como valor límite cuando $\mu \rightarrow 0$, en acuerdo con (5.14). En la figura 2 mostramos de manera esquemática la evolución de b en el tiempo para todos los casos considerados.

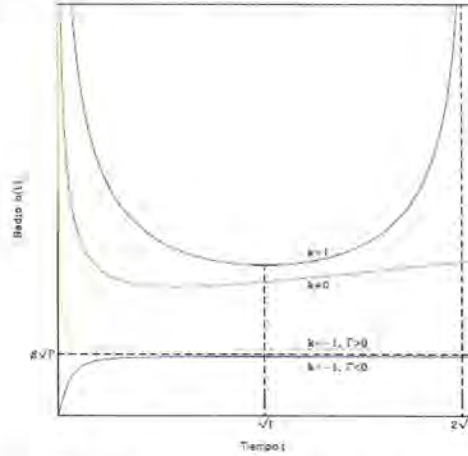


Fig. 2. Evolución esquemática del radio $b(t)$.

Cualitativamente, para los cuatro casos tenemos el siguiente comportamiento: Para $k = 1$, el radio $b \rightarrow \infty$ conforme $a \rightarrow 0$, y tiene un mínimo precisamente cuando $a = a_{\text{max}}$. Esto es una relación muy simétrica. En cambio, cuando $k = 0$, el radio b puede tener un mínimo, pero después termina creciendo indefinidamente, tal como el radio a . Por último, los dos casos para $k = -1$ tienen un comportamiento asintótico en el tiempo, pues cuando $t \rightarrow \infty$, el radio b tiende a $\beta\sqrt{\Gamma}$.

Ahora consideramos una constante cosmológica distinta de cero. En tal caso, el lado derecho de las ecuaciones (5.12) y (5.16) resulta un término extra $-\frac{\Lambda}{3}$. El análogo de (5.13) resulta ser

$$\dot{a}^2 + k_1 = \frac{\Lambda}{6}a^2 + \frac{\Gamma}{a^2}. \quad (5.25)$$

Resolviendo para $a(t)$, obtenemos

$$a^2 = \frac{3k}{\Lambda} + \frac{M}{2}e^{\sqrt{\frac{2\Lambda}{3}}\Delta t} + \frac{1}{M} \left(\frac{9k^2}{2\Lambda^2} - \frac{3\Gamma}{\Lambda} \right) e^{-\sqrt{\frac{2\Lambda}{3}}\Delta t}, \quad (5.26)$$

en donde definimos $M = (a_0^2 - \frac{3k}{\Lambda}) + \sqrt{(a_0^2 - \frac{3k}{\Lambda})^2 + \frac{6\Gamma}{\Lambda} - \frac{9k^2}{\Lambda^2}}$; además, $\Delta t = t - t_0$ y $a_0 = a(t_0)$. La figura 3 muestra el comportamiento de $a(t)$ de forma esquemática para la inclusión de constante cosmológica.

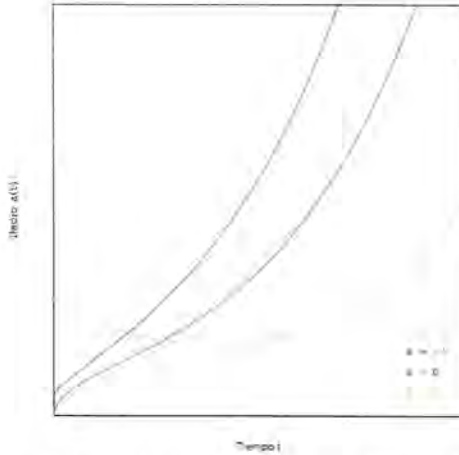


Fig. 3. Evolución de $a(t)$ cuando $\Lambda \neq 0$.

Usando (5.25) y la primera ecuación de Einstein con constante cosmológica, tenemos

$$\frac{\Gamma}{a^4} + \frac{\dot{a}b}{ab} - \frac{\Lambda}{6} = \frac{8\pi\mu}{3a^3b}. \quad (5.27)$$

Tomando b como función de a , tenemos que la solución es

$$b = \frac{8\pi\mu(\Lambda a^2 - 3k)}{3(2\Gamma\Lambda - 3k^2)a} + \beta \frac{\sqrt{\Gamma + \frac{\Lambda}{6}a^4 - ka^2}}{a}, \quad (5.28)$$

Hemos usado la misma constante de integración β remarcando que el caso $\Lambda = 0$ se reduce a los casos estudiados previamente.

V.4 Modelo con dimensiones $(1+D+d)$.

Ahora estudiamos el caso más general, i.e. con dimensionalidad $D + d + 1$. Aquí no pueden definirse soluciones exactas, excepto para cuando se hacen ciertas asunciones (e.g. véase [60]). Sin embargo, hay una relación interesante entre $a(t)$ y $b(t)$. Para verlo definimos tres funciones del tiempo F , G y H , dadas respectivamente por

$$F \equiv \frac{\ddot{a}}{a} + (D-1) \left(\frac{\dot{a}^2 + k_1}{a^2} \right) + d \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}, \quad (5.29)$$

$$G \equiv \frac{\ddot{b}}{b} + (d-1) \left(\frac{\dot{b}^2 + k_2}{b^2} \right) + D \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \quad (5.30)$$

y

$$H \equiv D \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-1)}{2} \left(\frac{\dot{a}^2 + k_1}{a^2} \right) \right] + d \left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{(d-1)}{2} \left(\frac{\dot{b}^2 + k_2}{b^2} \right) \right] + dD \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}. \quad (5.31)$$

En términos de estas, (5.7) en vacío puede escribirse como

$$D \left[F - \frac{\ddot{a}}{a} \right] + d \left[G - \frac{\ddot{b}}{b} \right] = 0. \quad (5.32)$$

También, (5.8) y (5.9) pueden escribirse como

$$H - F = 0 \quad (5.33)$$

y

$$H - G = 0. \quad (5.34)$$

Ambas ecuaciones implican la igualdad

$$F = G. \quad (5.35)$$

Dejando el caso de vacío, consideramos un fluido perfecto para la forma diagonal por bloques de la métrica (5.1). El tensor de energía-momento correspondiente tiene la forma general

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}; \quad (5.36)$$

en donde p y ρ son la presión y la densidad del fluido, respectivamente, mientras que U_μ es el n -vector de velocidad, que tiene como componente cero $U_0 = -1$ en este marco de referencia comóvil definido por (5.1).

Es fácil mostrar que la ecuación de Einstein (5.7) es entonces

$$D \left[F - \frac{\ddot{a}}{a} \right] + d \left[G - \frac{\ddot{b}}{b} \right] = 8\pi T_{00}. \quad (5.37)$$

Igualmente, (5.8) y (5.9) corresponden a

$$H - F = -8\pi p \quad (5.38)$$

y

$$H - G = -8\pi p, \quad (5.39)$$

respectivamente. Estas implican que (5.35) sigue siendo válida. Si asumimos que (5.37) se puede resolver mediante

$$F - \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi}{D+d}\rho \quad (5.40)$$

y

$$G - \frac{\ddot{b}}{b} = \frac{8\pi}{D+d}\rho, \quad (5.41)$$

tenemos que al combinar (5.35), (5.40) y (5.41), entonces resulta

$$a\dot{b} - b\dot{a} = \text{const.} \quad (5.42)$$

Observamos que esta relación es análoga a la conocida forma de relación de dos componentes cartesianas del vector de momento angular.

El análisis que hemos presentado puede ser complementario a los estudios de compactificación dinámica [55][56][57][64], así como en general en los estudios de cosmología con dimensiones extra [?].

SUMARIO

En este trabajo hicimos estudios en teorías de gravitación, tomando como base la Relatividad General. Para ello seguimos tres líneas de investigación: La dualidad en las teorías, la relación de matroides con teorías gravitacionales y teorías gravitacionales con distinta dimensionalidad.

El tema de dualidad se desarrolla básicamente en los capítulos II y IV; mientras que en el capítulo II analizamos dos formas de dualidad (F y S) para la gravedad linealizada, en el Capítulo IV interpretamos la forma en que se puede entender un tipo de dualidad para un espacio con métrica de la forma en diagonal por bloques (4.1). Para ello encontramos transformaciones que mantienen la acción simplificada (4.26) invariante [véase comentarios debajo de (4.33)].

Los matroides aparecen como referencia en el capítulo I, y se usan en los capítulos III y IV. En el Capítulo III aparecen en relación a la forma mostrada para gravedad con torsión en dos dimensiones. Ahí también hacemos notar la conexión con álgebras de Clifford y física de dos tiempos. En el Capítulo IV los matroides aparecen al hacer la analogía del modo de transformarse la acción (4.31) con la propiedad de Farkas para matroides orientados.

Analizamos las teorías de distinta dimensionalidad en los capítulos III, IV y V. En el Capítulo III analizamos una teoría de gravedad en dos dimensiones totales, así como la relación de ese análisis con un espacio cuya signatura es $\eta_{ab} = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. En el tema del Capítulo IV estudiamos espacios con un número arbitrario de dimensiones, mientras que en el Capítulo V consideramos un caso particular, al estudiar modelo cosmológico con dos subespacios homogéneos que poseen radios distintos desarrollándose en el tiempo.

Perspectivas.

Aunque se han realizado trabajos que relacionan los matroides con la teoría de cuerdas [64]-[71], tal estructura también parece ser interesante en otros

enfoques al problema de gravedad cuántica, tales como gravedad cuántica de lazos (LQG) [74][75][76] , triangulaciones causales dinámicas (CDT) y conjuntos causales (Causal Sets) [79][80]. De este modo, podemos analizar relaciones que otorgue la teoría de matroides entre los mencionados enfoques discretos a la gravedad cuántica, así como entre algunos otros escenarios [81][82][83] . Es de esperarse también que la dualidad juegue algún papel ahí, dado el carácter fundamental que la dualidad tiene en la teoría de matroides [12][16][17][84].

Por otra parte, se han encontrado algunas conexiones entre teorías cosmológicas multidimensionales y las álgebras de Kac-Moody [85][86][87]. A la vez, podemos relacionar las matrices de Cartan asociadas a tales álgebras con matroides [85]. De hecho, una de las motivaciones originales para este trabajo era encontrar una conexión entre la teoría de matroides y cosmología. En principio, establecimos una ligera conexión en el contexto de gravity en 2-dimensiones, pero se puede profundizar más en el tema con más dimensiones.

References

- [1] E. Witten, *On S-Duality in Abelian Gauge Theory*; *Selecta Mathematica* **1**, (1995) 383; hep-th/9505186.
- [2] D. I. Olive, *Exact Electromagnetic Duality*, *Nucl. Phys. Proc.Suppl.* **45A**, (1996) 88 [*Nucl. Phys. Proc.Suppl.* **46**, (1996) 1]; hep-th/9508089.
- [3] C. W Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1973).
- [4] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, 1984).
- [5] H. Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (Dover Publications Inc., 1950).
- [6] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley (1995).
- [7] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory, Vol. I and II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [8] M. J. Duff, *M theory (The Theory formerly known as strings)*, *Int. J. Mod. Phys.* **A11**:5623-5642,1996; hep-th/9608117.
- [9] P. K. Townsend, *Four lectures on M-theory*, *Proceedings of the ICTP on the Summer School on High Energy Physics and Cosmology*, June 1996, hep-th/9612121.
- [10] J. Polchinski. *String Theory (Volume I)*. (Cambridge University Press, 2001).
- [11] J. M. Overduin and P. S. Wesson, *Kaluza-Klein Gravity*, *Phys. Rept.* **283**: 303-380 (1997); gr-qc/9805018.
- [12] J. G. Oxley, *Matroid Theory*, (Oxford University Press, New York, 1992).
- [13] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, *Comment. Acad. Sci. U. Petrop* **8**, 128-40 (1736).
- [14] T. Pappas, *Königsberg Bridge Problem & Topology*, *The Joy of Mathematics*. San Carlos, CA: Wide World Publ./Tetra, pp. 124-125 (1989).

- [15] B. Bollobas, *Modern Graph Theory* (Springer, 1998).
- [16] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White and G. Ziegler, *Oriented Matroids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [17] A. Bachem and W. Kern, *Linear Programming Duality* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [18] S. Carroll, *Space Time and Geometry, An Introduction to Special and General Relativity*, (Addison-Wesley, 2004).
- [19] U. Lindström, *Duality for the Non-Specialist*; hep-th/9705122.
- [20] P. A. M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc.(1931) **A133**, 60-72.
- [21] S. Deser and C. Teitelboim, *Duality transformations of Abelian and non-Abelian gauge fields*, Phys. Rev. D **13**, (1976) 15.
- [22] Y. Lozano, *S-Duality in Gauge Theories as a Canonical Transformation*, Phys. Lett. B **364**, (1995) 19; hep-th/9508021.
- [23] A. A. Kehagias, *A canonical approach to S-duality in Abelian gauge theory*; hep-th/9508159.
- [24] J. M. Figueroa-O'Farrill, *Electromagnetic duality for children* (1998); disponible en <http://www.maths.ed.ac.uk/~%7Ejmf/Teaching/Lectures/EDC.pdf>
- [25] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Duality in linearized gravity*, Phys.Rev. **D71** (2005) 024018; gr-qc/0408101.
- [26] J.A. Nieto, *S-Duality for Linearized Gravity*; Phys. Lett. **A262** (1999) 274; hep-th/9910049.
- [27] J.A. Nieto and E. A. León, *Issues of duality in Abelian Gauge Theory and in linearized gravity*, Rev. Mex. Fis. **55**:262-269 (2009); arXiv:0806.3250.
- [28] J. A. Nieto, *Linearized gravity as a gauge theory*, Mod. Phys. Lett. **A 20**, 135 (2005); hep-th/03110
- [29] S. W. Macdowell and Mansouri, *Unified Geometric Theory of Gravity and Supergravity*, Phys. Rev. Lett. **38**, (1977) 739.

- [30] C.M. Hull, *Strongly Coupled Gravity and Duality*, Nucl. Phys. B 583, 237 (2000); hep-th/0004195.83.
- [31] S. Nobbenhuis, *Categorizing Different Approaches to the Cosmological Constant Problem*, Found. Phys. **36** (2006); gr-qc/0411093.
- [32] J. A. Nieto and E. A. Leon, *2d Gravity with Torsion, Oriented Matroids and 2+2 Dimensions*, Braz. J. Phys. **40**: 383-387 (2010); arXiv:1012.3556.
- [33] N. Levinson and R. M. Redheffer, *Complex Variables* (Holden Day, 1970).
- [34] I. Bars, *$U^*(1,1)$ Noncommutative Gauge Theory As The Foundation of 2T-Physics in Field Theory*, Phys. Rev. D **64**, 126001 (2001); hep-th/0106013.
- [35] I. Bars, and S. J. Rey, *Noncommutative $Sp(2,R)$ Gauge Theories - A Field Theory Approach to Two-Time Physics*, Phys. Rev. D **64**, 046005 (2001); hep-th/0104135.
- [36] I. Bars, *Survey of Two-Time Physics*, Class. Quant. Grav. **18** (2001) 3113-3130; hep-th/0008164.
- [37] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I* (Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1978).
- [38] C. Nash, *Differential Topology and Quantum Field Theory* (Academic Press, San Diego 1991).
- [39] G. Springer, *Introduction to Riemann Surfaces*, (Addison-Wesley, Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1957).
- [40] E. Witten, *Mirror Symmetry, Hitchin's Equations, And Langlands Duality*; arXiv:0802.0999.
- [41] L. Anderson, *Matroid bundles and sphere bundles*, en *New Perspectives in Algebraic Combinatorics* (L. J. Billera, A. Björner, C. Greene, R. E. Simion and R. P. Stanley, eds.), MSRI publications 38 (Cambridge University Press, 1999).

- [42] L. Anderson and J. F. Davis, *Mod 2 cohomology of combinatorial Grassmannians*; math/9911158.
- [43] C. Castro, *Noncommutative Branes and Reciprocal Complex Gravity*, to appear in Phys. Lett. **B**. (August 2008, Clark Atlanta University).
- [44] J. A. Nieto, *$SL(2,R)$ -Symmetry and Noncommutative Phase Space in $(2+2)$ Dimensions*; arXiv:0809.3429.
- [45] J. A. Nieto and J. Socorro, *Is nonsymmetric gravity related to string theory?*; hep-th/9610160.
- [46] J. W. Moffat, *Nonsymmetric gravitational theory*, Phys. Lett. **B 355**, 447 (1995); gr-qc/9411006.
- [47] J. A. Nieto and E. A. Leon, *Higher Dimensional Gravity and Farkas Property in Oriented Matroid Theory*; arXiv:0912.2713.
- [48] T. Appelquist, A. Chodos and P. G. O. Freund (eds.), *Modern Kaluza-Klein theories* (Addison-Wesley, Menlo Park, 1987).
- [49] Y. M. Cho, *Higher - Dimensional Unifications of Gravitation and Gauge Theories*, J. Math. Phys. **16**, 2029 (1975).
- [50] Y. M. Cho and P. G. O. Freund, *Nonabelian Gauge Fields in Nambu-Goldstone Fields*, Phys. Rev. **D12**, 1711 (1975).
- [51] M. J. Duff, *Kaluza-Klein theory in perspective*, SISSA (1994); hep-th/9410046.
- [52] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Do We Live Inside a Domain Wall?*, Phys. Lett. **B 125**, 136-138 (1983).
- [53] L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to compactification*, Phys.Rev.Lett. **83**:4690-4693,1999; hep-th/9906064.
- [54] J. Demaret, J.L. Hanquin , M. Henneaux and P. Spindel, *Cosmological Models In Eleven-Dimensional Supergravity*. Nucl.Phys. B **252**:538-560 (1985).
- [55] F. Darabi, *Accelerating universe and dynamical compactification of extra dimensions*, Class. Quant. Grav. **20**:3385-3402 (2003); gr-qc/0301075.

- [56] B. Cuadros-Melgar and E. Papantonopoulos, *The Need of dark energy for dynamical compactification of extra dimensions on the brane*, Phys. Rev. **D72**:064008 (2005); hep-th/0502169.
- [57] S. M. Carroll, M. C. Johnson and L. Randall, *Dynamical compactification from de Sitter space*, JHEP **0911**:094 (2009); arXiv:0904.3115.
- [58] E. A. León, J.A. Nieto, R. Nunez-Lopez and A. Lipovka, *Higher Dimensional Cosmology: Relations among the radii of two homogeneous spaces*; arXiv:1012.3556.
- [59] J. A. Nieto, O. Velarde, C. M. Yee and M. P. Ryan, *Duality Symmetry in Kaluza Klein ($n + D + d$)-Dimensional Cosmological Model*, Int. J. Mod. Phys. **A19**, 2131 (2004); hep-th/0401145.
- [60] D. Sahdev, *Perfect Fluid Higher Dimensional Cosmologies*, Phys. Rev. **D 30**, 2495-2507 (1984).
- [61] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, Redwood City, 1990).
- [62] M. Rosenbaum, M. Ryan, L. Urrutia and R. Matzner, *Singularities in Kaluza-Klein-Friedmann cosmological models*, Phys. Rev. **D 36** 1032 (1987).
- [63] V. A. Rubakov, *Cosmology*, Aronsborg 2006, High-energy physics 197-252 (2007).
- [64] P. K. Townsend and M. N. R. Wohlfarth, *Accelerating Cosmologies from Compactification*, Phys.Rev.Lett. **91**:061302,2003; hep-th/0303097.
- [65] Y. M. Cho, *Unified cosmology*, Phys. Rev. **D 41** (1990) 2462.
- [66] J. A. Nieto, *Matroid Theory and Supergravity*, Rev. Mex. Fis. **44**, 358 (1998); hep-th/9807107.
- [67] J. A. Nieto and M.C. Marin, *Matroid Theory and Chern-Simons*, J. Math. Phys. **41**, 7997 (2000); hep-th/0005117.
- [68] J. A. Nieto, *Searching for a Connection Between Matroid Theory and String Theory*, J. Math. Phys. **45**, 285 (2004); hep-th/0212100.

- [69] J. A. Nieto and M. C. Marin, *Search for a "Gravitoid" Theory*, Int. J. Mod. Phys. **A18** (2003) 5261-5276; hep-th/0302193.
- [70] J. A. Nieto, *Matroids and p-branes*, Adv. Theor. Math. Phys. **8**, 177 (2004); hep-th/0310071.
- [71] J. A. Nieto, *Chirotope Concept in Various Scenarios of Physics*, Rev. Mex. Fis. E **51**, 5 (2005); hep-th/0407093.
- [72] J. A. Nieto, *Toward a connection between the oriented matroid theory and supersymmetry*; hep-th/0510185.
- [73] J.A. Nieto, *Maximal supersymmetry in eleven-dimensional supergravity revisited and chirotopes*; hep-th/0603139.
- [74] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, 2004).
- [75] J. Brunnemann and D. Rideout, *Oriented Matroids – Combinatorial Structures Underlying Loop Quantum Gravity*, Class. Quant. Grav. **27**:205008 (2010); arXiv:1003.2348.
- [76] J. A. Nieto, *Oriented matroid theory and loop quantum gravity in (2+2) and eight dimensions*; arXiv:1004.5372.
- [77] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, *Quantum gravity, dynamical triangulations and higher derivative regularization*, Nucl. Phys. **B 393**:601-632 (1993); hep-th/9208032.
- [78] R. Loll, *Discrete approaches to quantum gravity in four-dimensions*, Living Rev. Rel. **1**:13 (1998); gr-qc/9805049.
- [79] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer and R. Sorkin, *Space-Time as a Causal Set*, Phys. Rev. Lett. **59**:521-524 (1987).
- [80] J. Henson, *The Causal Set approach to quantum gravity*; gr-qc/0601121.
- [81] T. Konopka, F. Markopoulou and L. Smolin, *Quantum Graphity*; hep-th/0611197.
- [82] E. Verlinde, *On the Origin of Gravity and the Laws of Newton*; arXiv:1001.0785.

- [83] J. A. Nieto, *Qubits and chirotopes*, Phys. Lett. **B 692**:43-46 (2010); arXiv:1004.5372.
- [84] A. Sokal, *The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids*, en *Surveys in Combinatorics, 2005*, edited by Bridget S. Webb (Cambridge University Press, 2005); math/0503607.
- [85] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, (Cambridge University Press, 1990).
- [86] J. Demaret, J. L. Hanquin, M. Henneaux and P. Spindel, *Cosmological Models In Eleven-Dimensional Supergravity*, Nucl. Phys. **B 252**:538-560 (1985).
- [87] M. Henneaux, M. Leston, D. Persson and P. Spindel, *Geometric Configurations, Regular Subalgebras of $E(10)$ and M-Theory Cosmology*, JHEP 0610:021 (2006); hep-th/0606123.

ANEXOS.

Artículos publicados y aceptados para publicación.

Date: Feb 06, 2011
To: "Edgar Alejandro Leon" alejandroleon1@hotmail.com
From: "Mod. Phys. Lett. A (MPLA)" mpla@wspc.com.sg
Subject: Your Submission: MPLA-D-10-00406
Ref.: Ms. No. MPLA-D-10-00406
HIGHER DIMENSIONAL COSMOLOGY: RELATIONS AMONG THE RADII OF
TWO HOMOGENEOUS SPACES
Modern Physics Letters A

Dear Mr. Leon,

I am pleased to inform you that your work has now been accepted for publication in
Modern Physics Letters A.

It was accepted on Feb 06, 2011

Thank you for submitting your work to this journal.

With kind regards

E H Chionh
Editorial Office
Modern Physics Letters A

HIGHER DIMENSIONAL COSMOLOGY: RELATIONS AMONG THE RADII OF TWO HOMOGENEOUS SPACES

E. A. LEÓN,* R. NÚÑEZ-LÓPEZ and A. LIPOVKA

*Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, 83000, Hermosillo
 Sonora, México.*

**ealeon@posgrado.cifus.uson*

J. A. NIETO

*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa, 80010,
 Culiacán Sinaloa, México.*

nieto@uas.uasnet.mx

Received Day Month Year

Revised Day Month Year

We study a cosmological model in $1+D+d$ dimensions where D dimensions are associated with the usual Friedman-Robertson-Walker type metric with radio $a(t)$ and d dimensions corresponds to an additional homogeneous space with radio $b(t)$. We make a general analysis of the field equations and then we obtain solutions involving the two cosmological radii, $a(t)$ and $b(t)$. The particular case $D=3$, $d=1$ is studied in some detail.

Keywords: Higher dimensional gravity; Cosmology.

1. Introduction

Extra-dimensional models have been subject of interest since its appearance in physics, mainly as a basis for unification models.^{1,2} In fact, although there has been renewed interest in such models through the development of string theory, the very first works on the subject (Nordström, Kaluza and Klein) contained already the essential techniques for building theories in higher dimensions, particularly the idea of compactification.¹

Different approaches to the problem eventually arose (two nice reviews are Refs. 1 and 2), as well as considerations regarding the possibility of noncompact extra dimensions,^{5,6} or any type of dynamical compactification.⁷⁻¹¹ All possibilities studied had ultimately as common point the cosmological implications of the theory.¹² This is because the cosmological scales may amplify any particular effect of a model with extra dimensions.

However, the extra-dimensional cosmological model appropriate to any particular approach relies on some assumptions by itself. This in turn permit us to observe that the study of cosmological models with extra dimensions deserves attention by

itself. In this context, we review a cosmological model with extra dimensions, as it was presented in Ref. 5, such that D dimensions have an evolving radius a and d dimensions have another evolving radius b .¹³ Specifically, we consider a higher dimensional cosmological model with metric^{12,13}

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\tilde{g}_{ij}(x)dx^i dx^j + b^2(t)\hat{g}_{ab}(y)dy^a dy^b. \quad (1)$$

Here, indices (i, j, \dots) run from 1 to D , while (a, b, \dots) run from $D+1$ to $D+d$. Also, $\tilde{g}_{ij}(x)$ and $\hat{g}_{ab}(y)$ are the metrics for two homogeneous spaces that depend only on the co-moving coordinates (x^1, \dots, x^D) and $(y^{D+1}, \dots, y^{D+d})$, respectively. From here on, these spaces will be called D -space and d -space, with an obvious connotation. With the prescriptions given above, Einstein equations in vacuum (cf. Appendix) are

$$D(D-1)\frac{\dot{a}^2}{a^2} + D(D-1)\frac{k_1}{a^2} + d(d-1)\frac{\dot{b}^2}{b^2} + d(d-1)\frac{k_2}{b^2} + 2dD\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0; \quad (2)$$

$$(D-1)\left\{\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-2)}{2}\left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k_1}{a^2}\right]\right\} + d\left\{\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{(d-1)}{2}\left[\frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{k_2}{b^2}\right]\right\} + d(D-1)\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0; \quad (3)$$

$$(d-1)\left\{\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{(d-2)}{2}\left[\frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{k_2}{b^2}\right]\right\} + D\left\{\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-1)}{2}\left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k_1}{a^2}\right]\right\} + D(d-1)\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0. \quad (4)$$

The structure of this article is as follows: In this section (I) we have presented the model, and shown the corresponding Einstein equations. Next two sections are focused in the particular case of 3 + 1 spatial dimensions. In section II the vacuum case is presented briefly, while Section III deals with the inclusion of matter. We solve there a as function of time, as well as b as function of a . Section III ends with the general solutions when $\Lambda \neq 0$. Then, we present in section IV an interesting result where radii a and b are related in a form that resembles a conserved "angular momentum". Finally, we present a summary of the work and make some final comments in section V.

In resume, the main results of this study are: first, we obtain the behaviour of $a(t)$ and $b(a)$ for the two cases in which the cosmological constant is zero or nonzero, and secondly we show a general relation between the two radii in the presence of matter, reminiscent of the conservation of classical angular momentum. We start the analysis with a special case, where $D = 3$ and $d = 1$.^{14,15}

2. D=3, d=1 Dimensional Model

By setting $D = 3$ and $d = 1$, equations (2)–(4) are, respectively

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k_1}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0, \quad (5)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k_1}{a^2} + \frac{\ddot{b}}{b} + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0 \quad (6)$$

and

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k_1}{a^2} = 0. \quad (7)$$

Equation (7) can be integrated respect to a by mean of a change of variable,¹⁴ resulting

$$\dot{a}^2 + k_1 = \frac{\Gamma}{a^2}, \quad (8)$$

where Γ is a integration constant. Equation (8) serves two purposes. The first is to give the behaviour of a in time. Second, it permit us to integrate (5) in order to obtain radius b as a function of a , even with the inclusion of matter. We review both results more extensively in next section. By the moment, we verify that in this case -where $\rho = 0$ -, we obtain b as function of a directly from (5) and (7), since both together imply $\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}$, and this in turn yields

$$b = \beta\dot{a}, \quad (9)$$

where β is a positive constant for a expanding Universe in 3-space. We mention that, by virtue of (7)–(9) we have that

$$\dot{b} = -\frac{\beta\Gamma}{a^3}, \quad (10)$$

i.e., with β and $\Gamma > 0$ we have a decreasing radius b in time for this vacuum case. As we will see, all this results are limit cases of a more general result, when matter is included.

3. D=3, d=1 Model with Matter

In this section, we review a Kaluza-Klein cosmological model where $D = 3$ and $d = 1$, with a “five-dimensional dust”, as seen in Ref. 14. In this case, (A.6) of the Appendix, where T_{00} corresponds to ρ , the five-dimensional density, can be written as

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k_1}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \frac{8\pi\mu}{3a^3b}. \quad (11)$$

Here, Bianchi identities $G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ gave $\rho = \frac{\mu}{a^3b}$, were μ is a constant. First, from equation (8) we obtain the behaviour of radius a for the cases of zero ($k_1 = 0$), positive ($k_1 = 1$) or negative curvature ($k_1 = -1$) in 3-space:

a) $k_1 = 0$. In this case Γ is necessarily positive, and the integration yields

$$a = \sqrt{2\sqrt{\Gamma}t}. \quad (12)$$

This gives the evolution of the Hubble parameter as $H = \frac{1}{2t} = \frac{\sqrt{\Gamma}}{a^2}$. The result can be contrasted with that of the FRW model in a matter dominated Universe, where $a \propto t^{\frac{2}{3}}$, $H \propto a^{-\frac{3}{2}}$, and $H \propto \frac{1}{t}$.¹⁶

b) $k_1 = 1$. Here Γ is strictly positive too, and $a(t)$ is

$$a = \left[\Gamma - (\sqrt{\Gamma} - t)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

c) $k_1 = -1$. Here $\dot{a} = \frac{\sqrt{\Gamma+a^2}}{a}$ and Γ can be positive or negative. For $\Gamma > 0$, we have

$$a = \left[(t + \sqrt{\Gamma})^2 - \Gamma \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Thus, the qualitative picture is a decelerating (expanding-) Universe.

If $\Gamma < 0$, the behaviour of a in time is given by

$$a = [t^2 - \Gamma]^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

where we set $t = 0$ as the time when a reaches a minimum $a_{\min} = \sqrt{-\Gamma}$ (units where $c = 1$). We stress the fact that this solution doesn't need the introduction of a cosmological constant for an accelerating radius a . Fig. 1 shows the behaviour of $a(t)$ for the different cases just analysed.

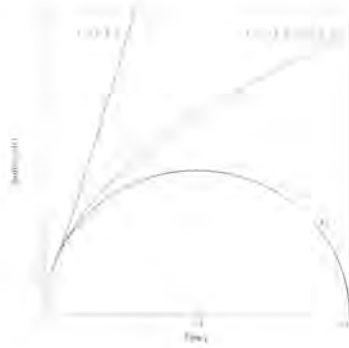


Fig. 1. Evolution of radius $a(t)$ in time for the three cases of k (-1, 0 and +1). The fourth case, with $\Gamma < 0$ is shown in blue.

It is interesting to note that the mere introduction of the extra dimension -even in vacuum- gives the Friedmann type equation (8), and then we can consider an effective density $\rho_{eff} = \frac{3\Gamma}{8\pi a^4}$. In the classical FRW model this density corresponds to ultra-relativistic matter, related with pressure by $p = \rho/3$. Then in this model

$\Gamma < 0$ corresponds to a solution with an effective negative pressure. Note also that according to (5), we may also identify the term $\frac{\dot{a}b}{ab}$ as the effective density (more precisely $\frac{\dot{a}b}{ab} = -\frac{8\pi}{3}\rho_{eff}$).

By using (5) and (11), we obtain

$$\frac{\Gamma}{a^4} + \frac{\Gamma - k_1 a^2}{a^3 b} \frac{db}{da} = \frac{8\pi\mu}{3a^3 b}. \quad (16)$$

This can be integrated to obtain $b = b(a)$. We have three different cases:

$$k = 0 \rightarrow b = \frac{4\pi\mu a}{3\Gamma} + \frac{\alpha}{a}, \quad (17)$$

with $\alpha = const$. Observe also that making the identification $\alpha = \beta\sqrt{\Gamma}$ in (17) we obtain (9) as limit case when $\rho \rightarrow 0$ (contrast for instance with Ref. 14).

$$k = 1 \rightarrow b = \frac{8\pi\mu}{3a} + \beta\dot{a}, \quad (18)$$

where $\dot{a} = \frac{\sqrt{\Gamma - a^2}}{a}$ and β is a constant consistent with (9). The third case is

$$k = -1 \rightarrow b = -\frac{8\pi\mu}{3a} + \beta\dot{a}. \quad (19)$$

Here, $\dot{a} = \frac{\sqrt{a^2 + \Gamma}}{a}$ and Γ can be positive or negative as we saw before.

We can see that the set of solutions for $b(a)$ given in (17)–(19) yield for $\mu \rightarrow 0$ the limit value $b \rightarrow \beta\dot{a}$, in agreement with (9). We show in Fig. 2 the schematic evolution of b in time for the four cases considered.

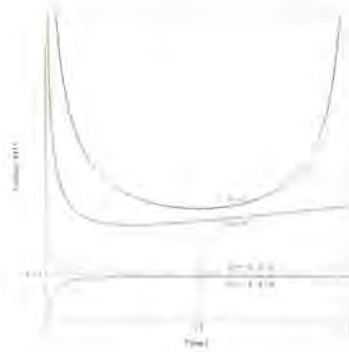


Fig. 2. Schematic evolution of radius $b(t)$.

Now consider a nonvanishing cosmological constant; in this case, in the LHS of equations (7) and (11) results an extra term $-\frac{\Lambda}{3}$. The analogue of (8) turns out to be

$$\dot{a}^2 + k_1 = \frac{\Lambda}{6}a^2 + \frac{\Gamma}{a^2}. \quad (20)$$

Solving for $a(t)$, we obtain

$$a^2 = \frac{3k}{\Lambda} + \frac{M}{2} e^{\sqrt{\frac{2\Lambda}{3}} \Delta t} + \frac{1}{M} \left(\frac{9k^2}{2\Lambda^2} - \frac{3\Gamma}{\Lambda} \right) e^{-\sqrt{\frac{2\Lambda}{3}} \Delta t}, \quad (21)$$

where we have defined $M = (a_0^2 - \frac{3k}{\Lambda}) + \sqrt{(a_0^2 - \frac{3k}{\Lambda})^2 + \frac{6\Gamma}{\Lambda} - \frac{9k^2}{\Lambda^2}}$; also $\Delta t = t - t_0$ and $a_0 = a(t_0)$. Fig. 3 shows the schematic behaviour for the evolution of $a(t)$.

Fig. 3. Evolution of radius $a(t)$ in time when $\Lambda \neq 0$.

By using (20) and the first Einstein equation with cosmological constant, we have

$$\frac{\Gamma}{a^4} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\Lambda}{6} = \frac{8\pi\mu}{3a^3b}. \quad (22)$$

Taking b as function of a , the result is

$$b = \frac{8\pi\mu(\Lambda a^2 - 3k)}{3(2\Gamma\Lambda - 3k^2)a} + \beta \frac{\sqrt{\Gamma + \frac{\Lambda}{6}a^4 - ka^2}}{a}. \quad (23)$$

We have used the same integration constant β stressing the fact that $\Lambda = 0$ reduces to the previous cases.

4. (1+D+d)-Dimensional Model

Now we turn to the general case $D + d + 1$. In this case it cannot be defined exact solutions for the model, except for some assumptions (e.g. see Ref. 13). Here, we remark a general relation between $a(t)$ and $b(t)$. We define three functions of time F , G and H , given by

$$F \equiv \frac{\ddot{a}}{a} + (D-1) \left(\frac{\dot{a}^2 + k_1}{a^2} \right) + d \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}, \quad (24)$$

$$G \equiv \frac{\ddot{b}}{b} + (d-1) \left(\frac{\dot{b}^2 + k_2}{b^2} \right) + D \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \quad (25)$$

and

$$H \equiv D \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-1)}{2} \left(\frac{\dot{a}^2 + k_1}{a^2} \right) \right] + d \left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{(d-1)}{2} \left(\frac{\dot{b}^2 + k_2}{b^2} \right) \right] + dD \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}. \quad (26)$$

In terms of them, (2) can be written as

$$D \left[F - \frac{\ddot{a}}{a} \right] + d \left[G - \frac{\ddot{b}}{b} \right] = 0. \quad (27)$$

Also, (3) and (4) can be written respectively as

$$H - F = 0 \quad (28)$$

and

$$H - G = 0. \quad (29)$$

Both equations imply that

$$F = G. \quad (30)$$

Now we consider a perfect fluid in higher dimensions, such that the energy-momentum tensor takes the form

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}; \quad (31)$$

here p and ρ are the pressure and the density of the fluid respectively, and U_μ is the n -velocity vector, which has component $U_0 = -1$ in this comoving coordinate frame defined by (1).

It is easy to show that the first Einstein equation, namely (A.6) of the Appendix, is

$$D \left[F - \frac{\ddot{a}}{a} \right] + d \left[G - \frac{\ddot{b}}{b} \right] = 8\pi T_{00}. \quad (32)$$

Also, (A.7) and (A.8) corresponds to

$$H - F = -8\pi p \quad (33)$$

and

$$H - G = -8\pi p, \quad (34)$$

respectively, implying that (30) still holds. If we assume (32) to be solvable by

$$F - \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi}{D+d} \rho \quad (35)$$

and

$$G - \frac{\ddot{b}}{b} = \frac{8\pi}{D+d} \rho. \quad (36)$$

by combining (30), (35) and (36), then results

$$a\dot{b} - b\dot{a} = \text{const.}, \quad (37)$$

which is analogue to the definition of classical angular momentum.

5. Final comments

In this work we studied a general model with D dimensions related by the same evolving radius a , and d dimensions with evolving radius b . From the introduction of the vacuum case with 3+1 spatial dimensions in section II, we have shown in section III the evolution in time of a and b for the case of a five-dimensional dust. In this part we have followed closely Ref. 14 and we have included the case with non-vanishing cosmological constant. We can mention that in the process we have obtained the correct expression (17) for $b = b(a)$ in the flat case $k = 0$ -instead of the second expression in equation (10) of Ref. 9- that gives as limiting case (9). Also, we remark again the special case $k < 0, \Gamma < 0$ where the solution implies an accelerated rate of expansion for $a(t)$, without the introduction of a cosmological constant, for instance. Further, we have obtained the general solutions when Λ is taken into account, both for $a(t)$ and $b(a)$. In section IV we have obtained an interesting relation in the form of eq. (37) for radii a and b , valid for a special distribution of matter in the two homogeneous spaces. Our analysis can be complementary in the study of dynamical compactification, ⁷⁻⁹ and in general for extra dimensional models.¹⁷⁻²¹

Acknowledgements

E. A. León gratefully acknowledge a PhD fellowship by CONACyT. J.A. Nieto would like to thank both the Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora and the Mathematical, Computational and Modeling Science Center at the Arizona State University for the hospitality, where part of this work was developed.

Appendix A. Einstein equations of the Cosmological Model

Here, we follow closely Ref. 5. According to the notation in the text, from (1.1) we obtain the nonvanishing Christoffel symbols $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\beta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda})$,

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\tilde{g}_{ij}, \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i, \quad (A.1)$$

$$\Gamma_{ab}^0 = b\dot{b}\tilde{g}_{ab}, \Gamma_{0b}^a = \frac{\dot{b}}{b}\delta_b^a, \Gamma_{bc}^a = \hat{\Gamma}_{bc}^a;$$

where $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ and $\hat{\Gamma}_{bc}^a$ refers to Christoffel symbols in the adequate dimensional reduction. We use the same notation as indicative of dimensional reduction; for instance, just as $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il}(g_{jl,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l})$, we have $\hat{R}_{bcd}^a = \partial_c\hat{\Gamma}_{db}^a - \partial_d\hat{\Gamma}_{cb}^a + \hat{\Gamma}_{cf}^a\hat{\Gamma}_{db}^f - \hat{\Gamma}_{df}^a\hat{\Gamma}_{cb}^f$ and $\tilde{R} = \tilde{g}^{ij}\tilde{R}_{ij}$. After calculating the needed components of the Riemann tensor $R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}$ and contracting it as $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$, we

obtain three classes for the non-zero Ricci tensor components: for the time component,

$$R_{00} = -D\frac{\ddot{a}}{a} - d\frac{\ddot{b}}{b}; \quad (\text{A.2})$$

for the D dimensions (x^i, x^j, \dots) ,

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \tilde{g}_{ij} \left[a\ddot{a} + (D-1)\dot{a}^2 + d\frac{a}{b}\dot{a}\dot{b} \right]; \quad (\text{A.3})$$

and for the d dimensions (x^a, x^b, \dots)

$$R_{ab} = \hat{R}_{ab} + \hat{g}_{ab} \left[b\ddot{b} + (d-1)\dot{b}^2 + D\frac{b}{a}\dot{a}\dot{b} \right]. \quad (\text{A.4})$$

With another contraction, the curvature scalar is

$$R = 2D\frac{\ddot{a}}{a} + 2d\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{a^2}[\tilde{R} + D(D-1)\dot{a}^2 + dD\frac{a}{b}\dot{a}\dot{b}] + \frac{1}{b^2}[\hat{R} + d(d-1)\dot{b}^2 + dD\frac{b}{a}\dot{a}\dot{b}]. \quad (\text{A.5})$$

Of course, all the results calculated above are symmetric respect to the D-dimensional and d-dimensional subspaces defined by the metric (1.1). More precisely, we obtain the same tensors if we perform the interchange $a \leftrightarrow b$ and $D \leftrightarrow d$, as well as the changes they induce, v.g. $\tilde{R} \leftrightarrow \hat{R}$. Furthermore, due to the homogeneity in the mentioned subspaces, we can write $\tilde{R}_{ij} = k_1(D-1)\tilde{g}_{ij}$ and $\hat{R}_{ab} = k_2(d-1)\hat{g}_{ab}$, where k_1 and k_2 can take values in $\{-1, 0, 1\}$.

With all this at hand, -working in units where $c = G = 1$ - we can express the following sets of Einstein equations, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$:

$$G_{00} = 8\pi T_{00} \rightarrow$$

$$\frac{D(D-1)}{2} \left(\frac{\dot{a}^2 + k_1}{a^2} \right) + \frac{d(d-1)}{2} \left(\frac{\dot{b}^2 + k_2}{b^2} \right) + dD\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 8\pi T_{00}; \quad (\text{A.6})$$

$$G_{ij} = 8\pi T_{ij} \rightarrow \left\{ (D-1) \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-2)}{2} \left(\frac{\dot{a}^2 + k_1}{a^2} \right) \right] \right. \\ \left. + d \left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{(d-1)}{2} \left(\frac{\dot{b}^2 + k_2}{b^2} \right) \right] + d(D-1)\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \right\} a^2 \tilde{g}_{ij} = -8\pi T_{ij}; \quad (\text{A.7})$$

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab} \rightarrow \left\{ (d-1) \left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{(d-2)}{2} \left(\frac{\dot{b}^2 + k_2}{b^2} \right) \right] \right. \\ \left. + D \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-1)}{2} \left(\frac{\dot{a}^2 + k_1}{a^2} \right) \right] + D(d-1)\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \right\} b^2 \hat{g}_{ab} = -8\pi T_{ab}. \quad (\text{A.8})$$

References

1. T. Appelquist, A. Chodos and P. G. O. Freund (eds.), *Modern Kaluza-Klein theories* (Addison-Wesley, 1987).
2. J. M. Overduin and P. S. Wesson, *Phys. Rept.* **283**: 303-380 (1997); e-Print: gr-qc/9805018.
3. M. J. Duff, "Kaluza-Klein Theory in Perspective" *Talk given at The Oskar Klein Centenary Symposium*, Stockholm, Sweden, 19-21 Sep 1994; e-Print: hep-th/9410046.
4. J. Polchinski, *String Theory*. (Cambridge University Press, 2001), Vol. 1.
5. V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **125**, 136-138 (1983).
6. L. Randall, R. Sundrum, *Phys.Rev.Lett.* **83**:4690-4693 (1999); e-Print: hep-th/9906064.
7. F. Darabi, *Class.Quant.Grav.* **20**:3385-3402 (2003); e-Print: gr-qc/0301075.
8. S. M. Carroll, M. C. Johnson and L. Randall, *JHEP*, 0911:094 (2009); e-Print: arXiv:0904.3115.
9. B. Cuadros-Melgar, E. Papantonopoulos, *Phys.Rev.* **D72**:064008 (2005); e-Print: hep-th/0502169.
10. P. K. Townsend and M. N. R. Wohlfarth, *Phys.Rev.Lett.* **91**:061302 (2003); e-Print: hep-th/0303097.
11. U. Bleyer, A. Zhuk, *Class. Quant. Grav.* **12**:89-100 (1995).
12. J. A. Nieto, O. Velarde, C. M. Yee and M. P. Ryan, *Int. J. Mod. Phys.* **A19**, 2131 (2004); hep-th/0401145.
13. D. Sahdev, *Phys. Rev.* **D30**, 2495-2507 (1984).
14. M. Rosenbaum, M. Ryan, L. Urrutia and R. Matzner, *Phys. Rev.* **D36**, 1032-1035 (1987).
15. E.W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, 1990).
16. V. A. Rubakov, *Aronsborg 2006, High-energy physics*, 197-252 (2007).
17. J. Demaret, J.L. Hanquin, M. Henneaux, P. Spindel, *Nucl.Phys.* **B252**:538-560 (1985).
18. Y. M. Cho, *Phys. Rev.* **D41**:2462 (1990).
19. F. Dahia, E.M. Monte, C. Romero, *Mod. Phys. Lett.* **A18**:1773-1782 (2003); e-Print: gr-qc/0303044.
20. N. Ohta, *Prog. Theor. Phys.* **110**:269-283 (2003); e-Print: hep-th/0304172.
21. V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov, *Class. Quant. Grav.* **18**:R87-R152 (2001); e-Print: hep-th/0110274.

2d Gravity With Torsion, Oriented Matroids And 2+2 Dimensions

J.A. Nieto*

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa, 80010, Culiacán Sinaloa, México.

E.A. León†

Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, 83000, Hermosillo Sonora, México

(Received on 14 October, 2009)

We find a link between oriented matroid theory and 2d gravity with torsion. Our considerations may be useful in the context of noncommutative phase space in a target spacetime of signature (2+2) and in a possible theory of gravity ramification.

Keywords: 2d-gravity, 2t physics, 2+2 dimensions.

As it is known, the theory of matroids is a fascinating topic in mathematics [1]. Why should not be also interesting in some scenarios of physics? We are convinced that matroid theory should be an essential part not only of physics in general, but also of M-theory. In fact, it seems that the duality concept that brought matroid theory from a matrix formalism in 1935, with the work of Whitney (see Ref. [2] and references therein), is closely related to the duality concept that brought M-theory from string theory in 1994 (see Refs. [3-11] for connections between matroids and various subjects of high energy physics and gravity). These observations are some of the main motivations for the proposal [12] of considering oriented matroid theory as the mathematical framework for M-theory. In this paper, we would like to report new progress in our quest of connecting matroid theory with different scenarios of high energy physics and gravity. Specifically, we find a connection between matroids and 2d gravity with torsion and 2 + 2 dimensions. In the route we find many new directions in which one can pursue further research, such as tame and wild ramification [13], nonsymmetric gravitational theory (see Ref. [14] and references therein) and Clifford algebras (see Ref. [15] and references therein). We believe that our results may be of particular interest not only for physicists but also for mathematicians.

In order to achieve our goal we first show that a 2×2 -matrix function in two dimensions can be interpreted in terms of a metric associated with 2d gravity with torsion. Let us start by writing a complex number z in the traditional form [16]

$$z = x + iy, \quad (1)$$

where x and y are real numbers and $i^2 = -1$. However, there exist another, less used, way to write a complex number, namely [17]

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad (2)$$

In this case the product of two complex numbers corresponds to the usual matrix product. These two representations of

complex numbers can be linked by writing (2) as

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Since $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ one finds from (1) and (3) that the matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ can be identified with the imaginary unit i .

It turns out that the matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ can be considered as two of the matrix bases of general real 2×2 matrices which we denote by $M(2, R)$. In fact, any 2×2 matrix Ω over the real can be written as

$$\begin{aligned} \Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(a+d), & y &= \frac{1}{2}(b-c), \\ r &= \frac{1}{2}(a-d), & s &= \frac{1}{2}(b+c). \end{aligned} \quad (5)$$

Let us rewrite (4) in the form

$$\Omega_{ij} = x\delta_{ij} + y\epsilon_{ij} + r\eta_{ij} + s\lambda_{ij}, \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \epsilon_{ij} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \eta_{ij} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \lambda_{ij} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Considering this notation, we find that (1) becomes

$$z_{ij} = x\delta_{ij} + y\epsilon_{ij}. \quad (8)$$

Comparing (6) and (8), we see that (8) can be obtained from (6) by setting $r = 0$ and $s = 0$. If $ad - bc \neq 0$, that is if $\det \Omega \neq$

*Electronic address: nieto@uas.uasnet.mx

†Electronic address: ealeon@posgrado.cifus.uson.mx

0, then the matrices in $M(2, R)$ can be associated with the group $GL(2, R)$. If we further require $ad - bc = 1$, then one gets the elements of the subgroup $SL(2, R)$. It turns out that this subgroup is of special interest in 2t physics [18-20].

Now, consider the following four functions $F(x, y, r, s), G(x, y, r, s), H(x, y, r, s)$ and $Q(x, y, r, s)$, and construct the matrix

$$\gamma = \begin{pmatrix} F & G \\ H & Q \end{pmatrix}. \tag{9}$$

By setting

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(F + Q), & v &= \frac{1}{2}(G - H), \\ w &= \frac{1}{2}(F - Q), & \xi &= \frac{1}{2}(G + H), \end{aligned} \tag{10}$$

we get that γ can be written as

$$\begin{aligned} \gamma &= u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &+ \xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{11}$$

or

$$\gamma_{ij} = u\delta_{ij} + v\epsilon_{ij} + w\eta_{ij} + \xi\lambda_{ij}. \tag{12}$$

We can always decompose the matrix γ_{ij} in terms of its symmetric $g_{ij} = g_{ji}$ and antisymmetric $A_{ij} = -A_{ji}$ parts. In fact, we have

$$\gamma_{ij}(x, y, r, s) = g_{ij}(x, y, r, s) + A_{ij}(x, y, r, s). \tag{13}$$

From (11) or (12) we find that we can write $g_{ij}(x, y, r, s)$ in the form

$$\begin{aligned} g_{ij}(x, y, r, s) &= u(x, y, r, s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ w(x, y, r, s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \xi(x, y, r, s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{14}$$

while

$$A_{ij}(x, y, r, s) = v(x, y, r, s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

An interesting possibility emerges by dimensional reduction of the variables r and s , that is by setting in (13) $r = 0$ and $s = 0$. We have

$$\gamma_{ij}(x, y) = g_{ij}(x, y) + A_{ij}(x, y), \tag{16}$$

with

$$g_{ij}(x, y) = u(x, y)\delta_{ij} + w(x, y)\eta_{ij} + \xi(x, y)\lambda_{ij} \tag{17}$$

and

$$A_{ij}(x, y) = v(x, y)\epsilon_{ij}. \tag{18}$$

Of course, according to (8) the expressions (16), (17) and (18) can be associated with a complex structure. This observation can be clarified by using isothermal coordinates in which $w = 0$ and $\xi = 0$. In this case (16) is reduced to

$$f_{ij}(x, y) = u(x, y)\delta_{ij} + v(x, y)\epsilon_{ij}, \tag{19}$$

where we wrote $\gamma_{ij}(x, y) \rightarrow f_{ij}(x, y)$ in order to emphasize this reduction. In the traditional notation, (19) becomes $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. It turns out that the existence of isothermal coordinates is linked to the Cauchy-Riemann conditions for u and v , namely $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ and $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ [16].

One of the main reason for the above discussion comes from the question: is it possible to identify the symmetric matrix $g_{ij}(x, y)$ with 2d gravity? Assuming that this is the case the next question is then: what kind of gravitational theory describes $\gamma_{ij}(x, y)$? In what follows we shall show that $\gamma_{ij}(x, y)$ can be identified not only with a nonsymmetric gravitational theory in two dimensions but also with 2d gravity with torsion. First, consider the covariant derivative of the metric tensor

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il} = 0. \tag{20}$$

Here, we assume that the symbols Γ_{ki}^l are not necessarily symmetric in the two indices k and i . In fact, if we define the torsion as $T_{ki}^l \equiv \Gamma_{ki}^l - \Gamma_{ik}^l$, one finds that the more general solution of (20) is

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) - \frac{1}{2}(T_{kji} + T_{ijk} - T_{kij}), \tag{21}$$

where $\Gamma_{kij} = \Gamma_{ki}^l g_{lj}$ and $T_{kij} = T_{ki}^l g_{lj}$.

On the other hand, if we consider the expression

$$\frac{1}{2}(\partial_k \gamma_{ji} + \partial_i \gamma_{jk} - \partial_j \gamma_{ik}), \tag{22}$$

by substituting (16) into (22) one gets

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_k \gamma_{ji} + \partial_i \gamma_{jk} - \partial_j \gamma_{ik}) &= \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_k A_{ji} + \partial_i A_{jk} - \partial_j A_{ik}). \end{aligned} \tag{23}$$

Comparing (23) and (21) one sees that if one sets $T_{kji} = \partial_i A_{kj}$ the expression (23) can be identified with the connection Γ_{kij} which presumably describes 2d gravity with torsion. Since A_{ij} can always be written as (18) we discover that (23) yields

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2}(v_{,k}\epsilon_{ji} + v_{,i}\epsilon_{jk} - v_{,j}\epsilon_{ik}). \tag{24}$$

Here, we used the notation $\partial_k v = v_{,k}$.

The curvature Riemann tensor can be defined as usual

$$\mathcal{R}_{kij}^m = \partial_i \Gamma_{kj}^m - \partial_j \Gamma_{ki}^m + \Gamma_{ni}^m \Gamma_{kj}^n - \Gamma_{nj}^m \Gamma_{ki}^n. \quad (25)$$

The proposed gravitational theory, which may be interesting in string theory, can have a density Lagrangian \mathcal{L} of the form $\mathcal{L} \sim \mathcal{R}^2 + \Lambda$ [21], where Λ is a constant. In this context, we have proved that it makes sense to consider the nonsymmetric metric of the form (16)-(18) as a 2d gravity with torsion.

From the point of view of complex structure there are a number of interesting issues that arises from the above formalism. One may be interested, for instance, in considering the true degrees of freedom for the metric g_{ij} . In this case one may start with the Teichmuller space associated with the metric g_{ij} and then to determine the Moduli space of such a metric [22]. Another possibility is to consider similarities. In this case one may be interested to associate with the metric g_{ji} either the Riemann-Roch theorem [23] or the tame and wild ramification complex structure [13]. In the later case one may assume that the principal part of the metric g_{ij} looks like

$$g_{ij}(x, y) = \left(\frac{T_n}{z^n} + \frac{T_{n-1}}{z^{n-1}} + \dots + \frac{T_1}{z} \right) \delta_{ij}. \quad (26)$$

In this case the similarities can be identified with solitons associated with black holes. In this scenario our constructed route to 2d gravity with torsion provides a bridge which may bring many ideas from complex structure to 2d gravity with torsion and *vice versa*.

Let us now study some aspects of the above formalism from the point of view of matroid theory. Consider the matrix

$$V_i^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

with the index A taking values in the set

$$E = \{1, 2, 3, 4\}. \quad (28)$$

It turns out that the subsets $\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2\}$, $\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^3\}$, $\{\mathbf{V}^2, \mathbf{V}^4\}$ and $\{\mathbf{V}^3, \mathbf{V}^4\}$ are bases over the real of the matrix (27). One can associate with these subsets the collection

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}, \quad (29)$$

which can be understood as a family of subsets of E . It is not difficult to show that the pair $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ is a 2-rank self-dual matroid. The fact that we can express \mathcal{M} in the matrix form (27) means that this matroid is representable (or realizable) [1]. Moreover, one can show that this matroid is graphic and orientable. In the later case the corresponding chirotope [1] is given by

$$\chi^{AB} = \epsilon^{ij} V_i^A V_j^B. \quad (30)$$

Thus, we get, as nonvanishing elements of the chirotope χ^{AB} , the combinations

$$12+, 13-, 24-, 34+. \quad (31)$$

The relation of this matroid structure with of our previous discussion comes from the identification $\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2\} \rightarrow \delta_{ij}$, $\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^3\} \rightarrow \eta_{ij}$, $\{\mathbf{V}^2, \mathbf{V}^4\} \rightarrow \lambda_{ij}$ and $\{\mathbf{V}^3, \mathbf{V}^4\} \rightarrow \epsilon_{ij}$. The signs in (31) correspond to the determinants of the matrices δ_{ij} , η_{ij} , λ_{ij} and ϵ_{ij} , which can be calculated using (30). Therefore, what we have shown is that the bases of $M(2, R)$ as given in (4) (or (7)) admit an oriented matroid interpretation. It may be of some interest to consider the weak mapping $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c$ with

$$\mathcal{B}_c = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \quad (32)$$

leading to the reduced pair $\mathcal{M}_c = (E, \mathcal{B}_c)$. When the local structure is considered as in (14)-(18), one needs to rely in the matroid fiber bundle notion (see Refs. [24] and [25] and references therein). Therefore, we have found a link which connect matroid fiber bundle with 2d gravity with torsion.

It is worth mentioning the following observations. It is known that the fundamental matrices $\delta_{ij}, \eta_{ij}, \lambda_{ij}$ and ϵ_{ij} given in (7) not only form a basis for $M(2, R)$ but also determine a basis for the Clifford algebras $C(2, 0)$ and $C(1, 1)$. In fact one has the isomorphisms $M(2, R) \sim C(2, 0) \sim C(1, 1)$. Moreover, one can show that $C(0, 2)$ can be constructed using the fundamental matrices (7) and Kronecker products. It turns out that $C(0, 2)$ is isomorphic to the quaternion algebra H . Since all the others $C(a, b)$'s can be constructed from the building blocks $C(2, 0)$, $C(1, 1)$ and $C(0, 2)$, this means that our connection between oriented matroid theory and $M(2, R)$ also establishes an interesting link with the Clifford algebra structure (see Ref. [15], and references therein).

Let us make some final remarks. The above links also apply to the subgroup $SL(2, R)$ which is the main object in 2t physics. In this case it is known that noncommutative field theory of 2t physics [18-20] (see also Ref. [26]) contains a fundamental gauge symmetry principle based on the noncommutative group $U_*(1, 1)$. This approach originates from the observation that a world line theory admits a Lie algebra $sl_*(2, R)$ gauge symmetry acting on phase space [18]. In this context, consider the coordinates q and p in the phase-space. The Poisson bracket

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a}, \quad (33)$$

can be written as

$$\{f, g\} = \epsilon_{ij} \eta^{ab} \frac{\partial f}{\partial q_i^a} \frac{\partial g}{\partial q_j^b}, \quad (34)$$

where $q_1^a \equiv q^a$ and $q_2^a \equiv p^a$, with a and b running from 1 to n . It worth mentioning that the expression (34) is very similar to the the definition of a chirotope (see Ref. [8] and references therein).

Recently, a generalization of (34) was proposed [27], namely

$$\{f, g\} = (g_{ij}\Omega^{ab} + \varepsilon_{ij}\eta^{ab}) \frac{\partial f}{\partial q_i^a} \frac{\partial g}{\partial q_j^b} \tag{35}$$

Here, Ω^{ab} is skew-simplectic form defined in even dimensions. In particular, in four dimensions Ω_{ab} can be chosen as

$$\Omega_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Here, by choosing $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, -1, 1)$ we make contact with (2+2)-dimensions which is the minimal 2t physics theory (see Refs. [28–31]).

Let us write the factor in (35) $g_{ij}\Omega^{ab} + \varepsilon_{ij}\eta^{ab}$ in the form

$$g'_{ij} + \varepsilon_{ij}\eta, \tag{37}$$

with $g'_{ij} = g_{ij}\Omega$. We recognize in (37) the typical form (18) for a complex structure. This proves that oriented matroid theory is also connected not only with (2+2)-physics but also with noncommutative geometry.

An alternative connection with 2t physics can be obtained by considering the signature $\eta_{ab} = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$, and its associated metric:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2. \tag{38}$$

In fact, by defining the matrix

$$x^{ij} = \begin{pmatrix} x^1 & x^3 \\ x^4 & x^2 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

it can be seen that (38) can be expressed as

$$ds^2 = dx^{ij} dx^{kl} \eta_{ik} \eta_{jl}, \tag{40}$$

where the indices i, j, k, l run from 1 to 2 as before, and η_{ij} stands for the third matrix defined in (7), namely $\eta_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. As before, noticing that in (38) the "spatial" coordinates x^1, x^2 are the elements of the main diagonal and the "time" coordinates x^3, x^4 corresponds to the main skew diagonal in (39), x^{ij} can be written in terms of the bases (7) as follows:

$$x^{ij} = X\delta^{ij} + S\varepsilon^{ij} + Y\eta^{ij} + T\lambda^{ij}; \tag{41}$$

where we used the definitions

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(x^1 + x^2), & S &= \frac{1}{2}(x^4 - x^3), \\ Y &= \frac{1}{2}(x^1 - x^2), & T &= -\frac{1}{2}(x^3 + x^4), \end{aligned} \tag{42}$$

and considered the notation $\varepsilon^{ij} = \varepsilon_{kl}\eta^{ik}\eta^{jl}$ and $\lambda^{ij} = \lambda_{kl}\eta^{ik}\eta^{jl}$, where η^{ij} is the inverse flat 1+1 metric, and has the same components as η_{ij} .

Finally, consider the three index object η_{ijk} with components

$$\eta_{1ij} = \delta_{ij}, \quad \eta_{2ij} = \varepsilon_{ij}. \tag{43}$$

From these expressions and (7) it can be checked that η_{ijk} automatically satisfies

$$\eta_{ij1} = \eta_{ij}; \quad \eta_{ij2} = \lambda_{ij}. \tag{44}$$

Therefore η_{ijk} has the remarkable property of containing all the matrices in (7). This means that an arbitrary matrix Ω_{ij} can be written as

$$\Omega_{ij} = x^k \eta_{kij} + y^k \eta_{ijk}, \tag{45}$$

where $x^1 = x, x^2 = y$ and $y^1 = r, y^2 = s$. Here, x, y, r and s are defined in (5). Observe that $\eta_{ijk} = \eta_{jik}$, but $\eta_{kij} \neq \eta_{kji}$. It is worth mentioning that a similar structure was proposed in Ref. [14] in the context of nonsymmetric gravity [32].

The inverse η^{ijk} of η_{ijk} can be defined by the relation

$$\eta^{ijk} \eta_{ijl} = 2\delta_l^k, \tag{46}$$

or

$$\eta^{kij} \eta_{ijl} = 2\delta_l^k. \tag{47}$$

Explicitly, we obtain the components

$$\eta^{1ij} = \delta^{ij}; \quad \eta^{2ij} = -\varepsilon^{ij}; \quad \eta^{ij1} = \eta^{ij}; \quad \eta^{ij2} = -\lambda^{ij}. \tag{48}$$

Traditionally, starting with a flat space described by the metric η_{ij} , one may introduce a curved metric $g_{\mu\nu} = e_\mu^i e_\nu^j \eta_{ij}$ via the zweibeins e_μ^i . So, this motivate us to introduce the three-index curved metric

$$g_{\mu\nu\lambda} = e_\mu^i e_\nu^j e_\lambda^k \eta_{ijk}. \tag{49}$$

It seems very interesting to try to develop a gravitational theory based in $g_{\mu\nu\lambda}$, for at least two reasons. First, the η_{ijk} contains the four basic matrices (7), which we proved are linked to matroid theory. Therefore this establishes a bridge between matroids and $g_{\mu\nu\lambda}$. Thus, a gravitational theory based in $g_{\mu\nu\lambda}$ may provide an alternative gravitoid theory (see Ref. [4]). Secondly, since the matrices (7) are also linked to Clifford algebras, such a gravitational theory may determine spin structures, which are necessary for supersymmetric scenarios. These and another related developments will be reported elsewhere [33].

Acknowledgments

J. A. Nieto would like to thank to M. C. Marín for helpful comments. This work was partially supported by PROFAPI 2007 and PIFI 3.3.

- [1] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White and G. Ziegler, *Oriented Matroids*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [2] J.G. Oxley, *Matroid Theory*, (Oxford Science Publications, Oxford University Press, New York, 1992).
- [3] J.A. Nieto, Rev. Mex. Fis. **44**, 358 (1998); e-Print: hep-th/9807107.
- [4] J.A. Nieto and M.C. Marín, J. Math. Phys. **41**, 7997 (2000); hep-th/0005117.
- [5] J.A. Nieto, J. Math. Phys. **45**, 285 (2004); hep-th/0212100.
- [6] J.A. Nieto and M.C. Marín, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 5261 (2003); hep-th/0302193.
- [7] J.A. Nieto, Adv. Theor. Math. Phys. **8**, 177 (2004); hep-th/0310071.
- [8] J.A. Nieto, Rev. Mex. Fis. E **51**, 5 (2005); hep-th/0407093.
- [9] J.A. Nieto, "Toward a connection between the oriented matroid theory and supersymmetry"; hep-th/0510185.
- [10] J.A. Nieto, "Maximal supersymmetry in eleven-dimensional supergravity revisited and chirotopes", hep-th/0603139.
- [11] P. Guha, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **1**, 795 (2004).
- [12] J.A. Nieto, Adv. Theor. Math. Phys. **10**, 747 (2006); hep-th/0506106.
- [13] E. Witten, "Mirror Symmetry, Hitchin's Equations, And Langlands Duality", arXiv:0802.0999.
- [14] J. A. Nieto and J. Socorro, "Is nonsymmetric gravity related to string theory?", hep-th/9610160.
- [15] C. Castro, Phys. Lett. B **668**, 442 (2008).
- [16] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, (Graduate Texts in Mathematics 1978 Springer-Verlag New York)
- [17] N. Levinson and R. M. Redheffer, *Functions Complex Variables*, (Holden Day, 1970).
- [18] I. Bars, Phys. Rev. D **64**, 126001 (2001); hep-th/0106013.
- [19] I. Bars, and S. J. Rey, Phys. Rev. D **64**, 046005 (2001); hep-th/0104135.
- [20] I. Bars, Class. Quant. Grav. **18** (2001) 3113; hep-th/0008164.
- [21] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, Ann. Phys. **197**, 1 (1990).
- [22] C. Nash, *Differential Topology and Quantum Field Theory*, (Academic Pr. San Diego 1991).
- [23] G. Springer, *Introduction to Riemann Surfaces*, (Addison-Wesley, Publishing Company, Inc., reading, Massachusetts USA 1957).
- [24] L. Anderson, New Perspectives in Geom. Com. **38**, 1 (1999).
- [25] L. Anderson, J. F. Davis, "Mod 2 cohomology of combinatorial Grassmannians", arXiv:math/9911158.
- [26] V. M. Villanueva, J. A. Nieto, L. Ruiz, J. Silvas, J. Phys. A **38**, 7183 (2005); hep-th/0503093.
- [27] J. A. Nieto, "SL(2,R)-Symmetry and Noncommutative Phase Space in (2+2) Dimensions", arXiv:0809.3429.
- [28] J. A. Nieto, Nuovo Cim. B **120**, 135 (2005); hep-th/0410003.
- [29] J. A. Nieto, Mod. Phys. Lett. A **22**, 2453 (2007); hep-th/0606219.
- [30] M. Carvalho and M. W. de Oliveira Phys. Rev. D **55**, 7574 (1997); hep-th/9612074.
- [31] M. A. De Andrade, O. M. Del Cima and L. P. Colatto, Phys. Lett. B **370**, 59 (1996); hep-th/9506146.
- [32] J. W. Moffat, Phys. Lett. B **355**, 447 (1995).
- [33] E. A. Leon and J. A. Nieto, work in progress, DIFUS, Universidad de Sonora (2009).

Issues of duality in abelian gauge theory and in linearized gravity

J.A. Nieto^{a,b} and E.A. León^b

^aFacultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa,
80010, Culiacán Sinaloa, México,
e-mail: nieto@uas.uasnet.mx

^bDepartamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora,
83000, Hermosillo Sonora, México,
e-mail: ealeon@posgrado.cifus.uson.mx

Recibido el 5 de noviembre de 2008; aceptado el 4 de agosto de 2009

We start by describing two of the main proposals for duality in abelian gauge theories, namely F (ield strength)-duality approach and the S -duality formalism. We then discuss how F -duality and S -duality can be applied to the case of linearized gravity. By emphasizing the similarities and differences between these two types of dualities we explore the possibility of combining them in just one duality formalism.

Keywords: S -duality; linearized gravity; abelian gauge theory.

Comenzamos describiendo dos propuestas principales de dualidad en teorías abelianas de norma, a saber el enfoque de dualidad-(del campo) F y el formalismo de dualidad- S . De ahí, discutimos como la dualidad- F y la dualidad- S pueden implementarse para el caso de gravedad linealizada. Haciendo énfasis en las similitudes y diferencias entre estos dos tipos de dualidad, exploramos la posibilidad de combinarlos en un sólo formalismo de dualidad.

Descriptores: Dualidad- S ; gravedad linealizada; teoría abeliana de norma.

PACS: 04.60.-m, 11.25.Tq, 11.15.-q, 11.30.Ly

1. Introduction

Duality in linearized gravity [1] has been a topic of considerable interest [2-29]. There are at least two physical reasons for this increasing interest of the topic. The first possibility arises from the hope of determining the strong coupling limit for linearized gravity (see Refs. 1 and 2) via the analogue of the S -duality concept [30] in gauge field theories. In fact, just as in a dual gauge theory the coupling exchange $g^2 \rightarrow 1/g^2$ describes a basic dual symmetry, one may expect a dual gravitational theory with either one of the exchanges $l_p^2 \rightarrow 1/l_p^2$ [2] or $\Lambda \rightarrow 1/\Lambda$ [1,26], where l_p is the Planck length and Λ is the cosmological constant.

The second motivation comes from the idea of implementing a dual symmetry of the linearized gravitational field equations at the level of the corresponding action [5]. Such a dual symmetry is the gravitational analogue of the corresponding electromagnetic dual symmetry provided by the electric and magnetic field strengths. In this case, the Riemann tensor and its dual play the role of the electric and magnetic fields strengths, respectively. This dual gravitational approach has its origins in the old observation [31] that in the case of electromagnetism, this kind of dual symmetry can be implemented at the level of the action if the infinitesimal transformations are applied canonically to the gauge field rather than to the corresponding field strength.

From the above comments we observe that while in the S -duality approach [30] emphasis is placed on the coupling exchange, in the case of the canonical approach attention is focused on the dual transformation of the field strength. Both generalized approaches have, however, a common ori-

gin, namely the dual symmetry of the Maxwell equations discovered by Dirac himself [32-33]. Since linearized gravity can be understood as an abelian gauge theory [26] one becomes motivated to see whether there is a kind of dual theory for gravity in which both coupling and field strength dual exchanges are equally important. In order to find such a dual gravitational theory we first need to analyze carefully the differences between the F -duality (field strength duality) and S -duality in an abelian gauge field theory. For this purpose in Secs. 2 and 4 we briefly discuss the F -duality approach of Refs. 31 and 5, respectively. In Secs. 3 and 5, we briefly review the S -duality theory for abelian gauge fields proposed in Ref. 30 and the S -duality theory for linearized gravity described in Ref. 1, respectively. With these reviews at hand in Secs. 6 and 7, we propose a unified duality theory for abelian gauge field theory and linearized gravity, respectively. Finally, in Sec. 8 we make some final remarks.

2. F -duality for an abelian gauge field theory

In this section, we summarize the main duality ideas of the approach proposed in Ref. 31. Consider the field strength $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ and its dual

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (1)$$

where $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ is the completely antisymmetric Levi-Civita density in a Minkowski spacetime. The source-free Maxwell equations are

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad (2)$$

and

$$\partial_\nu^* F^{\mu\nu} = 0, \tag{3}$$

It is straightforward to see that these field equations are invariant under the transformation

$$\delta F^{\mu\nu} = \beta^* F^{\mu\nu} \tag{4}$$

and

$$\delta^* F^{\mu\nu} = -\beta F^{\mu\nu}, \tag{5}$$

where β is an arbitrary constant. Here we used the fact that $**F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$.

Since

$$F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = \beta F^{\mu\nu*} F_{\mu\nu}, \tag{6}$$

the action

$$S_I = \frac{1}{2} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{7}$$

is not invariant under (4) unless we write

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{8}$$

which means solving (3). The authors of Ref. 31 pointed out that this contradictory invariance can be solved if one considers consistent canonical variations of the potential δA_μ instead of variations of the field strength $\delta F_{\mu\nu}$. With the idea of emphasizing the invariance of the action (7) at the level of the field strength $F_{\mu\nu}$ according to (4), we shall refer to this approach as F -duality formalism.

3. S -duality for an abelian gauge field theory

Here, we shall briefly review the S -duality formalism for an abelian gauge theory (see Ref. 30). Our starting point is the action

$$S_{II} = \frac{1}{2g^2} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\theta}{2} \int d^4x F^{\mu\nu*} F_{\mu\nu}. \tag{9}$$

Here, it is assumed that $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. The θ -term is topological and, of course, classically it can be dropped from (9). This implies that in this case (9) can be reduced to the action (7). However, if our goal is to quantize the theory described by (9), it becomes necessary to keep the θ -term. Observe that in contrast to the formalism of Sec. 2, in this approach emphasis is placed on the role played by of the constants g^2 and θ .

Now, by introducing the (anti) self-dual field strengths

$$\pm F^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2}\right)^\pm N_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} F^{\tau\lambda}, \tag{10}$$

where

$$\pm N_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} \mp i \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\tau\lambda}), \tag{11}$$

with $\delta_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} = \delta_\tau^\alpha \delta_\lambda^\beta - \delta_\tau^\beta \delta_\lambda^\alpha$ denoting a generalized delta, one can prove that the action (9) can be written as

$$S_{III} = \frac{1}{2} (\tau^+) \int d^4x^+ F^{\mu\nu+} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\tau^-) \int d^4x^- F^{\mu\nu-} F_{\mu\nu}, \tag{12}$$

where τ^+ and τ^- are two different constant parameters given by

$$\tau^+ = \frac{1}{g^2} + i\theta \tag{13}$$

and

$$\tau^- = \frac{1}{g^2} - i\theta. \tag{14}$$

The fact that the parameters τ^+ and τ^- are complex means that, in addition to the field strength duality transformation,

$$\delta^\pm F^{\alpha\beta} = \pm i\beta^\pm F^{\alpha\beta}, \tag{15}$$

one can in principle implement, for $a, b, c, d \in Z$, the more general duality transformation

$$\tau' = \frac{a + c\tau}{b + d\tau}. \tag{16}$$

Observe that (16) generalizes the coupling duality transformation

$$g^2 \rightarrow \frac{1}{g^2}. \tag{17}$$

In fact, it is known that the modular group described by (16) can be generated by the elements $T : \tau \rightarrow \tau + 1$ and $S : \tau \rightarrow -1/\tau$ (see Sec. 1.4.3 of Ref. 34). So, if the vacuum angle θ vanishes, the S -symmetry yields precisely the transformation (17).

The next step is to write a meaningful action which may allow us to transfer information from the action (9) to its associated dual action. First, one considers the generalized field strength

$$H^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - G^{\mu\nu}, \tag{18}$$

where $G^{\mu\nu}$ is an auxiliary two-form. Secondly, one introduces the dual field strength $W_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$, where V_μ is a one-form vector gauge field. The generalized action is then written as [30]

$$S_{IV} = \frac{1}{2} (\tau^+) \int d^4x^+ H^{\mu\nu+} H_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\tau^-) \int d^4x^- H^{\mu\nu-} H_{\mu\nu} + \int d^4x^+ W^{\mu\nu+} G_{\mu\nu} - \int d^4x^- W^{\mu\nu-} G_{\mu\nu}. \tag{19}$$

This action is invariant under the transformations

$$\delta A = B, \quad \delta G = dB, \tag{20}$$

where B is any one-form. If we eliminate V from (19), we see that $dG = 0$ and therefore we can set $G = 0$. Hence from (18) we see that $H^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$ and consequently the action (19) is reduced to (12). On the other hand the gauge

invariance (20) allows us to set $A = 0$ and therefore the action (19) becomes

$$S_{IV} = \frac{1}{2}(\tau^+) \int d^4x^+ G^{\mu\nu+} G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\tau^-) \int d^4x^- G^{\mu\nu-} G_{\mu\nu} + \int d^4x^+ W^{\mu\nu+} G_{\mu\nu} - \int d^4x^- W^{\mu\nu-} G_{\mu\nu}. \quad (21)$$

Finally, after eliminating $\pm G$ one finds that (21) leads to

$$S_V = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\tau^+}\right) \int d^4x^+ W^{\mu\nu+} W_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\tau^-}\right) \int d^4x^- W^{\mu\nu-} W_{\mu\nu}, \quad (22)$$

which is the dual action. We observe that the coupling constant τ transforms as $-1/\tau$. Actually, when quantum topological effects are considered, the τ transformation can be extended to the more general duality transformation given in (16) (see Ref. 30).

4. F-duality for linearized gravity

The Riemann tensor for linearized gravity is given by

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\beta h_{\nu\alpha} - \partial_\mu\partial_\alpha h_{\nu\beta} - \partial_\nu\partial_\beta h_{\mu\alpha} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\beta}). \quad (23)$$

Here, the object $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ can be understood as a small deviation from the full metric $g_{\mu\nu}$, namely

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (24)$$

where

$$(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (25)$$

is the Minkowski flat metric. The vacuum Einstein equations are

$$R_{\nu\beta} = 0, \quad (26)$$

where $R_{\nu\beta} = \eta^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta}$ is the linearized Ricci tensor.

Let us now introduce the dual tensor

$${}^*R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} R_{\alpha\beta}^{\sigma\rho}. \quad (27)$$

We observe that due to the Bianchi identity

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0,$$

we have that ${}^*R_{\nu\beta} = \eta^{\mu\alpha} {}^*R_{\mu\nu\alpha\beta}$ satisfies the dual field equation

$${}^*R_{\nu\beta} = 0 \quad (28)$$

or

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \eta^{\mu\alpha} R_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} = 0. \quad (29)$$

It is not difficult to see that both field equations (26) and (28) are invariant under the infinitesimal rotations

$$\delta R_{\mu\nu\alpha\beta} = \beta^* R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (30)$$

and

$$\delta^* R_{\mu\nu\alpha\beta} = -\beta R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (31)$$

where β is again a constant. Comparing the development of Sec. 2 with the present section, we observe that these transformations are completely analogous to the expressions (4) and (5). Thus, it is expected that the Pauli-Fierz action

$$S_{V_I} = 4 \int d^4x (\partial^\alpha h^{\mu\nu} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\alpha h_\nu^\alpha + 2\partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial^\alpha h \partial_\alpha h), \quad (32)$$

where $h = h_\alpha^\alpha$ is not invariant under (30) and (31) unless we describe an infinitesimal canonical transformation in terms of the potential $\delta h_{\mu\nu}$ instead of the field strengths $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ and ${}^*R_{\mu\nu\alpha\beta}$. Actually, the $SO(2)$ rotations are achieved by means of two superpotentials; one is associated with $h_{\mu\nu}$ and the other with its canonical conjugate momenta (see Ref. 5 for details).

5. S-duality for linearized gravity

Let us start by observing that the curvature Riemann tensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ for linearized gravity, given in (23), can be written as

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu A_{\nu\alpha\beta} - \partial_\nu A_{\mu\alpha\beta}, \quad (33)$$

where

$$A_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\beta h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\beta}). \quad (34)$$

The expression (33) immediately suggests that $\overleftarrow{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$ can be seen as an abelian field strength with $A_{\mu\alpha\beta} = -A_{\mu\beta\alpha}$ as the gauge potential. In fact, as mentioned in Refs. 1 and 26, this interpretation is reinforced by noticing that $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ is invariant under the gauge transformation

$$\delta A_{\mu\alpha\beta} = \partial_\mu \lambda_{\alpha\beta}, \quad (35)$$

where $\lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}$ is an arbitrary two-form. Now, it is not difficult to prove that, up to surface term, the action (32) can be written as [1]

$$S_{VII} = \frac{1}{2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \Omega_{\mu\nu}^{\tau\lambda} R_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}. \quad (36)$$

Here, $\Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ is given by

$$\Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \delta_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta h_\nu^\alpha - \delta_\nu^\alpha h_\mu^\beta + \delta_\nu^\beta h_\mu^\alpha. \quad (37)$$

Suppose we add to the action (36) the topological term

$$S_T = \frac{1}{4} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu}^{\tau\lambda} R_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \quad (38)$$

and the cosmological constant term

$$S_C = \frac{1}{4} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \Omega^{\tau\lambda} \Omega_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}. \quad (39)$$

What we obtain is the generalized action [1];

$$S_{VIII} = \frac{1}{4} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} Q_{\mu\nu}^{\tau\lambda} Q_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}, \quad (40)$$

where $Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ is defined by

$$Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta}. \quad (41)$$

Moreover, it is not difficult to prove that the action (40) is reduced to (see Ref. 1 for details)

$$\begin{aligned} S_{VIII} = & \frac{1}{4} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu}^{\tau\lambda} R_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \\ & + 8 \int d^4x h^{\mu\nu} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R) \\ & - 8 \int d^4x (h^2 - h^{\mu\nu} h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (42)$$

We recognize in the second and third terms of (42) the Pauli-Fierz action for linearized gravity with a cosmological constant, while the first term is a total derivative (Euler topological invariant or Gauss-Bonnet term). Note that the usual cosmological factor Λ in the third term can be derived simply by changing $\Omega \rightarrow a^2 \Omega$, where a is a constant, and rescaling the total action $S_{VII} \rightarrow \frac{1}{4} \Lambda^{-1} S_{VII}$, with $\Lambda = a^2$.

In order to develop an S -dual linearized gravitational action we generalize the action (40) as follows;

$$\begin{aligned} S_{IX} = & \frac{1}{2} (\lambda^+) \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} Q_{\mu\nu}^{\tau\lambda} Q_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \\ & + \frac{1}{2} (\lambda^-) \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} Q_{\mu\nu}^{\tau\lambda} Q_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}, \end{aligned} \quad (43)$$

where λ^+ and λ^- are two different constant parameters (playing the analogue role of the parameters τ^+ and τ^- in the Maxwell case) and $Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ is given by

$$\pm Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2}\right) \pm N_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} Q_{\mu\nu}^{\tau\lambda}, \quad (44)$$

where

$$\pm N_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\tau\lambda}^{\alpha\beta} \mp i \varepsilon_{\tau\lambda}^{\alpha\beta}). \quad (45)$$

It turns out that ${}^+Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ is self-dual, while ${}^-Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ is anti self-dual curvature tensors. Therefore, the action (43) describes self-dual and anti-self-dual linearized gravity.

Following the steps of section 3 let us introduce a two-form G and use it for defining

$$H_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \equiv Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}. \quad (46)$$

We assume that $G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ satisfies the same indices symmetry properties as $R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$, namely

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu\alpha\beta} = & -G_{\mu\nu\beta\alpha} = -G_{\nu\mu\alpha\beta} = G_{\alpha\beta\mu\nu}, \\ G_{\mu\nu\alpha\beta} + & G_{\mu\beta\nu\alpha} + G_{\mu\alpha\nu\beta} = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Now, let us consider the extended action

$$\begin{aligned} S_X = & \frac{1}{2} (\lambda^+) \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} H_{\mu\nu}^{\tau\lambda} H_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \\ & + \frac{1}{2} (\lambda^-) \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} H_{\mu\nu}^{\tau\lambda} H_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \\ & + \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} \\ & - \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho}, \end{aligned} \quad (48)$$

where $W_{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu V_{\nu\alpha\beta} - \partial_\nu V_{\mu\alpha\beta}$ is the dual field strength satisfying the Dirac quantization law

$$\int W \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (49)$$

It is not difficult to see that, beyond the gauge invariance $A \rightarrow A - d\lambda$, $G \rightarrow G$, the partition function

$$Z = \int d^+G d^-G dA dh dV e^{-S_X} \quad (50)$$

is invariant under

$$A \rightarrow A + B \quad \text{and} \quad G \rightarrow G + dB, \quad (51)$$

where $B_{\mu\alpha\beta} = -B_{\mu\beta\alpha}$ is an arbitrary tensor.

Starting from (48) one can proceed in two different ways. For the first possibility, we note that the path integral that involves V is

$$\begin{aligned} \int DV \exp \left(\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} \right. \\ \left. - \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

Integrating over the dual connection V , we get a delta function setting $dG = 0$. Thus, using the gauge invariance (51), we may gauge G to zero, reducing (48) to the original action (43). Therefore, the actions (48) and (43) are, in fact, classically equivalent.

For the second possibility, we note that the gauge invariance (51) enables us to fix a gauge with $A = 0$. (It is important to note that, at this stage, we are considering $A_{\mu\alpha\beta}$ and $h_{\mu\nu}$ as independent fields.) The action (48) is then reduced to

$$\begin{aligned} S_X = & \frac{1}{2} (\lambda^+) \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_{\mu\nu}^{\tau\lambda} P_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \\ & + \frac{1}{2} (\lambda^-) \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_{\mu\nu}^{\tau\lambda} P_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \\ & + \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} \\ & - \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} G_{\tau\lambda}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho}, \end{aligned} \quad (53)$$

where

$$P_{\mu\nu}^{\tau\lambda} \equiv \Omega_{\mu\nu}^{\tau\lambda} - G_{\mu\nu}^{\tau\lambda}. \tag{54}$$

By eliminating $G_{\mu\nu}^{\tau\lambda}$ in (53), we get the dual action

$$S_{XI} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\lambda^+} \right) \int dx^A \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} + \Xi_{\mu\nu}^{\tau\lambda} + \Xi_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \\ + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\lambda^-} \right) \int dx^A \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} - \Xi_{\mu\nu}^{\tau\lambda} - \Xi_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} \varepsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}. \tag{55}$$

Here, $\Xi_{\mu\nu}^{\tau\lambda}$ means

$$\Xi_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta}. \tag{56}$$

Observe that the complex parameter λ has been exchanged by $-1/\lambda$ as expected.

6. A relation between F -duality and S -duality for an abelian gauge field

One of our main goals is to establish, in section 7, a possible link between the F -duality and the S -duality for linearized gravity. But we shall first investigate a possible connection between F -duality and S -duality in the context of an abelian gauge field theory.

As we mentioned in Sec. 2, the Maxwell action (7) is not invariant under the infinitesimal transformations (4) and (5) in spite of the fact that field Eqs. (2) and (3) are. This problem can be overcome if one solves (3) in terms of the relation

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{57}$$

and considers canonical variations of the potential δA_μ instead of variations of the field strength $\delta F_{\mu\nu}$. In turn, in order to maintain duality invariance at the level of the corresponding canonical action, this forces us to introduce what is called superpotential (see Refs. 5 and 28 for details). However, in this case we are already using the field equations (3) which, in principle, cannot be obtained from the original action (7). This means that the action (7) needs to be properly modified in such a way that the field equations (3) are a consequence of an extended action. The procedure is well known: one introduces an auxiliary vector field Lagrange multiplier V^μ and writes the new action as

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} V_\mu \partial_\nu F_{\alpha\beta}. \tag{58}$$

Here, of course we are not assuming the form (57) for $F_{\mu\nu}$, otherwise the second term in (58) is identically zero. In fact, starting with (58) one can proceed in two different ways. In the first case, varying V_μ one obtains the field equation (3) which has the solution (57). Substituting (57) into the second term of (58) one sees that the action (7) is recovered. In the second case, it is first convenient to make an integration by parts obtaining (up to the surface term)

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \tag{59}$$

where $W_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ and then solving for $F_{\mu\nu}$. In this way, we obtain the relation

$$F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\alpha\beta} = -{}^*W^{\mu\nu}, \tag{60}$$

which can be used to get the dual action

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}. \tag{61}$$

Observe that if one assumes (57), then the second term in (59) is identically zero. An important change in this procedure arises if one assumes a nontrivial topology. In this case, the solution (57) to (3) is no longer true. But the correct expression is

$$F_{\mu\nu} \rightarrow H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - G_{\mu\nu}, \tag{62}$$

where the two-form G is a “string” field associated with a nontrivial topology, so that $dG = 0$. This phenomenon can be emphasized if instead of starting with the action (59) one considers the action

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \{ H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu} H_{\alpha\beta} \}, \tag{63}$$

with

$$H_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}. \tag{64}$$

Note that by assuming the relation (62) the action (63) is reduced to

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \{ H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu} G_{\alpha\beta} \}. \tag{65}$$

This development leads to the conclusion that, rather than looking for the invariance of the action (7) under the infinitesimal transformation (4), one should consider invariance of the action (63) or (65) under such transformations. But one may recognize that the action (65) has exactly the same form as the expression (19) (see Sec. 3) which was considered in the context of S -duality approach. The main difference between (65) and (19) is that in (19) one considers ${}^\pm H^{\mu\nu}$, ${}^\pm W_{\mu\nu}$ and ${}^\pm G_{\alpha\beta}$ rather than $H^{\mu\nu}$, $W_{\mu\nu}$ and $G_{\alpha\beta}$ as in (65). Further the parameters ${}^\pm \tau$ are considered in (19), while in (65) this is not the case. This means that (65) can be considered as a particular case of (19). And in this context one should expect that invariance of (19) leads to a reduced invariance of (65). Indeed, the transformation (20), namely $\delta A = B$, $\delta G = dB$, where B is any one-form, also leaves the action (65) invariant. It is interesting to note that the infinitesimal transformation (4) can be considered as a particular case of (20) as soon as one also assumes the transformation $\delta G = \beta^* F$ for the “string” field G . One of our conclusions is that in order to implement the transformation (4) at the level of the action of Maxwell theory, one needs to introduce an auxiliary field G and consider (63) or (65) as starting point rather than (7).

Let us use the notation $D = dB$. From (64) we then observe that

$$\delta H_{\mu\nu} = \delta F_{\mu\nu} - \delta G_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} - D_{\mu\nu}, \quad (66)$$

which is of course identically equal to zero. But writing $\delta H_{\mu\nu}$ as in (66) suggests we should consider (4) $\delta F_{\mu\nu} = \beta^* F_{\mu\nu}$ as a particular case with $D_{\mu\nu} = \beta^* F_{\mu\nu}$ and $\delta G_{\mu\nu} = \beta^* F_{\mu\nu}$. In fact, this possibility seems to have passed unnoticed before, in the context of S -duality formalism. Perhaps this is because the invariance of (66) was written in terms of δA_μ rather than in terms of $\delta F_{\mu\nu}$. It is true that δA_μ implies $\delta F_{\mu\nu}$ but the converse is not in general true; unless one considers nonlocal formalism in the sense $\delta A = d^{-1}D$, which in the case of the variation $\delta F_{\mu\nu} = \beta^* F_{\mu\nu}$ means $\delta A = B = \beta d^{-1}F$. It is tempting to assume that from the canonical point of view this is equivalent to introducing what is called superpotential [5, 31]. In other words, our conjecture is that the "string" field G and the superpotential are closely related [35].

7. Duality and S duality in linearized gravity

An application of the prescription of the previous section to the case of linearized gravity is straightforward. From (46) one sees that $H_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ remains invariant under the transformations

$$\delta Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = D_{\mu\nu}^{\alpha\beta}, \quad \delta G_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = D_{\mu\nu}^{\alpha\beta}. \quad (67)$$

Here, $D_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ is an arbitrary two-form with the property $D = dB$, where B is any "one-form". This implies that the action (48) is invariant under (67).

As a particular case of (67) one writes

$$\delta Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \beta^* Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}. \quad (68)$$

This corresponds to considering $D_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \beta^* Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$. The expression (68) refers of course to infinitesimal rotations and therefore we have found a mechanism to make the extended action (48) invariant under such rotations. Again, one can try to relate (68) to the gauge field $A_{\nu\alpha\beta}$ according to (33), but this would imply a nonlocal variation $\delta A = \beta d^{-1}Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$. It is intriguing that with this procedure we do not even need to consider the perturbation $h_{\mu\alpha}$ as in the canonical method of Ref. 5. However, one should expect that if the action (48) is written in a canonical form, a link would have to be found between what is called a superpotential in Ref. 5 and the auxiliary field $G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$.

8. Discussion and final comments

In this work we have shown that the F -duality is indeed contained in the S -duality formalism as proposed in Ref. 30. One of the advantages of this identification is that it is not necessary to rely on canonical formalism in order to implement duality invariance at the level of the action. In a sense,

S -duality provides the route that it is necessary to follow in the case of the F -duality program. In fact, S -duality establishes that duality can be achieved at the level of the action by adding a θ term to the Maxwell action and by introducing an auxiliary two-form G . It turns out that this is also true for linearized gravity, as we have pointed out in Sec. 7.

These results also suggest we consider the coupling parameter τ in the F -duality formalism. This is because the partition function $Z(\tau)$ in the S -duality approach has the property

$$Z(\tau) = Z\left(-\frac{1}{\tau}\right) \quad \text{or} \quad Z(\lambda) = Z\left(-\frac{1}{\lambda}\right),$$

as can be deduced from our discussion of Secs. 3 and 5, respectively. In fact, writing symbolically

$$Z(\tau) = \int \exp(iS_{IV}), \quad (69)$$

where S_{IV} is given in (19), for the case of Maxwell theory and

$$Z(\lambda) = \int \exp(iS_X), \quad (70)$$

where S_X is given in (48), for the case of linearized gravity, from the results of Sec. 3 we may establish that (69) has the two limits

$$\int \exp(iS_{III}) \leftarrow \int \exp(iS_{IV}) \rightarrow \int \exp(iS_V), \quad (71)$$

(where S_{III} and S_V are given by (12) and (22), respectively), while from the discussion of Sec. 5 we may establish that (70) gives

$$\int \exp(iS_{IX}) \leftarrow \int \exp(iS_X) \rightarrow \int \exp(iS_{XI}), \quad (72)$$

(where S_{IX} and S_{XI} are given by (43) and (55), respectively). Therefore, one finds that (71) and (72) imply the symmetries $Z(\tau) = Z(-1/\tau)$ and $Z(\lambda) = Z(-1/\lambda)$, respectively.

It has been shown [30] that $Z(\tau)$ also contains the symmetry $Z(\tau) = Z(\tau + 1)$ thereby showing that $Z(\tau)$ is symmetric under the full group $SL(2, Z)$. So, it may appear interesting to see whether F -duality formalism may also be connected with the transformation $\tau \rightarrow \tau + 1$. In what follows we shall outline this possibility.

First we note that, if we consider the infinitesimal transformations (4) and (5), we find that the self-dual (antiseif-dual) field strength transforms as

$$\delta^\pm F^{\alpha\beta} = \pm i\beta^\pm F^{\alpha\beta}. \quad (73)$$

Therefore, we discover that the action (12) transforms as

$$\delta S_{III} = i\beta \left\{ (\tau^+) \int d^4x^+ F^{\mu\nu+} F_{\mu\nu} - (\tau^-) \int d^4x^- F^{\mu\nu-} F_{\mu\nu} \right\}. \quad (74)$$

In this case we have left the parameters τ^+ and τ^- unchanged. However, we can obtain similar result if we leave the field strength $F^{\alpha\beta}$ unchanged and we require the parameters τ^+ and τ^- transform as follows:

$$\tau'^+ = \tau^+ + i\beta\tau^+, \quad \tau'^- = \tau^- - i\beta\tau^-. \quad (75)$$

An interesting possibility arises if one considers the particular cases $\beta = \frac{1}{\tau^+}$ or $\beta = \frac{1}{\tau^-}$, leading in any case to the result

$$\tau'^+ = \tau^+ + i, \quad \tau'^- = \tau^- - i, \quad (76)$$

which is similar to the expected form $\tau \rightarrow \tau + 1$.

The result (74) means that the action (12) is not invariant under (73) or (75). However, if one considers the transformations (76), this is not necessarily true for the associated partition function $Z = Z(\tau^\pm)$, namely

$$Z(\tau^\pm) = \int \exp(iS_{III}).$$

In fact the reason for this is that, using (76), one discovers that the expression (74) becomes

$$\delta S_{III} = i \left\{ \int d^4x^+ F^{\mu\nu+} F_{\mu\nu} - \int d^4x^- F^{\mu\nu-} F_{\mu\nu} \right\}, \quad (77)$$

which can be reduced to the θ term

$$\delta S_{III} = \theta \int d^4x F^{\mu\nu*} F_{\mu\nu}. \quad (78)$$

Since from (13) we have $\tau = 1/g^2 + i\theta$, one obtains $\delta\tau = i\delta\theta$ and therefore the prescription (76) implies $\delta\theta = 1$, which means

$$\theta \rightarrow \theta + 1. \quad (79)$$

So, by assuming the smallest possible value for

$$\int d^4x F^{\mu\nu*} F_{\mu\nu},$$

one may recognize that the term $\exp(\delta S_{III})$ leaves the partition function $Z = Z(\tau^\pm)$ invariant.

In Refs. 36 to 38 it is also discussed a kind of F -duality from the point of view of field equations rather than actions. For new directions of research, it may be interesting to establish the precise relations of such references with our formalism.

Finally, in Refs. 30 and 39 it is explained that the action (12) is invariant mod $2\pi n$, not only under the change $\tau \rightarrow \tau + 1$ when M is a spin manifold, but also under the change $\tau \rightarrow \tau + 2$ for any closed four manifold M . It may be interesting for further research to explore what this means in both scenarios, Maxwell theory and linearized gravity.

Acknowledgments

J.A. Nieto would like thank to L. Ruiz and J. Silvas for helpful comments. This work was partially supported by grants PIFI 3.2 and 3.3.

1. J.A. Nieto, *Phys. Lett. A* **262** (1999) 274.
2. C.M. Hull, *Nucl. Phys. B* **583** (2000) 237.
3. U. Ellwanger, (Gravitational S -duality realized on NUT-Schwarzschild and NUT-de Sitter metrics).
4. H. Casini, R. Montemayor, and L.F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 065011.
5. M. Henneaux and C. Teitelboim *Phys. Rev. D* **71**, (2005) 024018.
6. A. C. Petkou, "Holography, duality and higher-spin theories" (Presented at Workshop on Higher Spin Gauge Theories, Brussels, Belgium, 12-14 May 2004).
7. U. Ellwanger, "Vanishing cosmological constant via gravitational S -duality", (hep-th/0410265).
8. S. Deser and D. Seminara, *Phys. Lett. B* **607** (2005) 317.
9. K.M. Ajith, E. Harikumar, and M. Sivakumar, *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 5385.
10. V.C. de Andrade, A.L. Barbosa, and J.G. Pereira, *Int. J. Mod. Phys. D* **14** (2005) 1635.
11. S. Deser and D. Seminara, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 081502.
12. H. Nicolai, "Gravitational billiards, dualities and hidden symmetries", ed. A. Ashtekar (Invited contribution to the volume "100 Years of Relativity Spacetime Structure: Einstein and Beyond").
13. A. Kleinschmidt and H. Nicolai, *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 4457.
14. B. Julia, J. Levie, and S. Ray, *JHEP* **0511** (2005) 025.
15. B.L. Julia, "Electric-magnetic duality beyond four dimensions and in general relativity", (Presented at 23rd International Conference of Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Tianjin, China, 20-26 Aug 2005. Published in "Tianjin 2005, Differential geometry and physics" 266).
16. C.W. Bunster, S. Cnockaert, M. Henneaux, and R. Portugues, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 105014.
17. S. Cnockaert, "Higher spin gauge field theories: Aspects of dualities and interactions", (Ph.D. Thesis).
18. A.J. Nurmagambetov, *SIGMA* **2** (2006) 020.
19. U. Ellwanger, *Class. Quant. Grav.* **24** (2007) 785.
20. S. de Haro and P. Gao, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 106008.
21. R.G. Leigh and A.C. Petkou, *JHEP* **0711** (2007) 079.
22. M.A. Vasiliev, *Nucl. Phys. B* **793**, 469 (2008).
23. M. Henneaux, D. Persson, and P. Spindel "Spacelike Singularities and Hidden Symmetries of Gravity", (arXiv:0710.1818).

24. A.J. Nurmagambetov, *SIGMA* **4** (2008) 022.
25. E.A. Bergshoeff, M. de Roo, S.F. Kerstan, A. Kleinschmidt, and F. Riccioni, "Dual Gravity and Matter", (arXiv:0803.1963).
26. J.A. Nieto, *Mod. Phys. Lett. A* **20** (2005) 135.
27. F. Riccioni and P. West, *JHEP* **0904**, (2009) 051.
28. G. Barnich and C. Troessaert, *JHEP* **0901** (2009) 030.
29. I. Bakas, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 065013.
30. E. Witten, *Selecta Math.* **1** (1995) 383.
31. S. Deser and C. Teitelboim, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 1592.
32. P.A.M. Dirac, *Phys. Rev.* **74** (1948) 817.
33. P.A.M. Dirac, *Int. J. Theor. Phys.* **17** (1978) 235.
34. J.M. Figueroa-O'Farrill, "Electromagnetic duality for children" (1998); <http://www.maths.ed.ac.uk/~7Ejmf/Teaching/Lectures/EDC.pdf>
35. J.A. Nieto, "Connection between the superpotential and G "string" field in linearized gravity", (work in progress. ECFM-UAS,2009).
36. C.M. Hull, *JHEP* **0109** 027 (2001).
37. P. de Medeiros and C.M. Hull, *Commun. Math. Phys.* **235** (2003) 255.
38. P. de Medeiros and C.M. Hull, *JHEP* **0305** (2003) 019.
39. S. Gukov and E. Witten, *Gauge Theory, Ramification, And The Geometric Langlands Program*, (hep-th/0612073).