



Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Investigación en Física

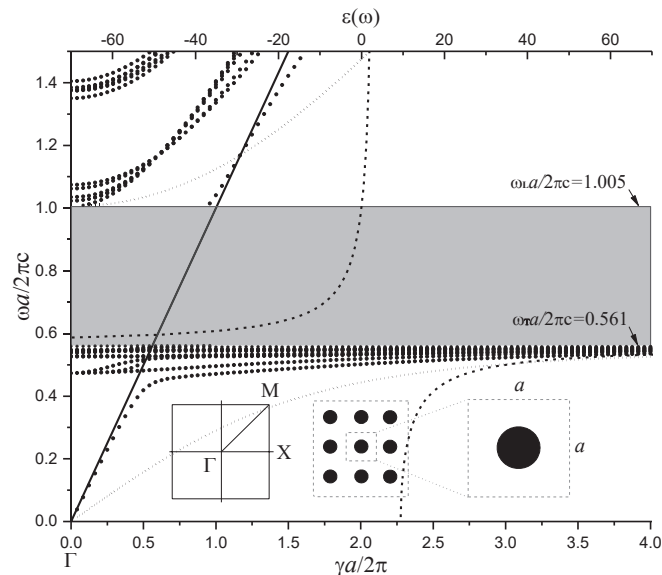
**Estructuras de Bandas Fuera-del-Plano de un Cristal Fotónico 2D Dispersivo y
Difracción de Luz por un Cristal Fotónico 1D Truncado**

Tesis

**Que como parte de los requisitos para obtener el grado de:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

presenta:

Jesús Daniel Valenzuela Sau



Director:

Raúl García Llamas

Hermosillo, Sonora, 2018

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Aprobación de la tesis

Productos obtenidos

-Participación como ponente en el META 2015 *The 6th International Conference on Metamaterials, Photonic Crystals and Plasmonics*, celebrado en *The City College of New York*, en la ciudad de Nueva York, Estados Unidos. El título del trabajo presentado fue *Band Structure of Two-Dimensional Photonic Crystal* (Paper ID 3535) y se presentó en modalidad poster.

-Participación como ponente en el META 2016 *The 7th International Conference on Metamaterials, Photonic Crystals and Plasmonics*, celebrado en *Convention & Exhibition Centre*, en Torremolinos (Málaga), España. El título del trabajo presentado fue *Out-of-plane photonic band structures of two-dimensional photonic crystals: a study of the complete band gap* (Paper ID 4415) y se presentó en modalidad poster.

-Participación como ponente en el LX Congreso Nacional de Física, celebrado en CINTERMEX, en la ciudad de Monterrey, Nuevo León, México. El título del trabajo presentado fue *Out-of-plane dispersive photonic band structure of a honey-comb photonic crystal* (Referencia: 0501) y se presentó en modalidad presentación oral.

-Artículo *Scattering of a Gaussian beam from a row of cylinders with rectangular cross section* en la revista *Journal of the Optical Society of America A* (JOSAA) Vol. 34, No. 8 publicado en Agosto del 2017, páginas 1369-1375.

<https://doi.org/10.1364/JOSAA.34.001369>

-Artículo *Out-of-plane band structure of a two-dimensional dispersive photonic crystal* en la revista *Optics Letters* (OL) Vol. 43, No. 10 publicado en Mayo del 2018, páginas 2360-2363.

<https://doi.org/10.1364/OL.43.002360>

Dedicatoria

Quiero dedicar esta sección al estimado lector, compartiendo el que para mí es el conocimiento más importante de la vida. Cuando Dios hizo al hombre, lo hizo perfecto, y estaban juntos, no había nada que los separara (Génesis 1:27), y le dio un mandamiento, le dijo que podía comer de todo árbol menos del árbol de la ciencia del bien y del mal (Génesis 2:16 y 17), le dijo que si comía de él moriría. No moriría físicamente, sino espiritualmente, sería separado de Dios, pues la paga del pecado es la muerte espiritual (Romanos 6:23). Y tanto el hombre como la mujer comieron del árbol prohibido. Así los dos fueron separados de Dios por causa del pecado, y se hicieron imperfectos y corruptos. Hasta hoy, todos los hombres nacen separados de Dios y con una gran tendencia al mal por causa de ese pecado original (Romanos 5:12). Pero Dios no quiso que el hombre estuviera separado de Él, por lo que hizo lo necesario para quitar el pecado que impedía al hombre estar con Dios y ser su hijo otra vez. Por eso, Dios se hizo hombre en Cristo (Juan 1:1 y 14; 1 Timoteo 3:16; Romanos 9:5), vivió una vida perfecta sin pecar nunca (Hebreos 4:15; Juan 8:46), y dio su vida en la cruz como pago por el pecado que nos separaba de Dios (1 Tesalonicenses 5:10; 2 Corintios 5:14 y 15; 1 Corintios 15:3; Romanos 5:8), y además resucitó al tercer día (Romanos 6:4, 8:34, 14:9; 1 Corintios 15:4). Esta fue la obra de Cristo para quitar el pecado del mundo (Juan 1:29) y así restaurar la relación de Dios con el hombre y darle vida eterna con Él. Esta oportunidad de reconciliación que Dios le dio al hombre fue por amor y se recibe por fe (Juan 3:16), y no hay otra forma de restaurar la relación con Él. Este regalo de Dios se recibe al CREER en la obra de Cristo aceptándola como un regalo (Efesios 2:8 y 9) al sabernos separados de Dios por nuestro pecado (Romanos 3:23). El que cree en Cristo tiene vida eterna (Juan 6:47), es salvo. Para los hombres es imposible hacerse salvos a sí mismos de cualquier otra forma (Mateo 19:25 y 26). Cristo es el único camino a Dios (Juan 14:6). Cristo es la puerta al Cielo (Juan 10:9). Cristo es el que nos da el entendimiento más importante (Juan 8:12). Cristo es el Salvador del Mundo (Juan 4:42).

“Mateo 7:13 y 14 Entrad por la puerta estrecha; porque ancha es la puerta, y espacioso el camino que lleva a la perdición, y muchos son los que entran por ella; porque estrecha es la puerta, y angosto el camino que lleva a la vida, y pocos son los que la hallan.” (La Santa Biblia, antigua versión de Casiodoro de Reina, revisada por Cipriano de Valera, revisión de 1960)

El autor

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Raúl García Llamas, por la guía recibida de su parte durante los cuatro años de mi doctorado, a través de sus consejos y de compartirme de su conocimiento académico y personal. Agradezco también al personal de la oficina del Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora por su apoyo en todo lo concerniente para cumplir con los requisitos del posgrado, muy especialmente a Sandra León, siempre amable y atenta para resolver mis dudas y eventualidades. Agradezco de igual forma al jurado revisor de este trabajo de tesis, los doctores Jorge Gaspar, Adalberto Corella, Raúl García, Felipe Pérez y Rafael Méndez, por haber invertido de su valioso tiempo, y por sus comentarios y sugerencias para mejorar este trabajo. Agradezco especialmente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de México por la beca otorgada a un servidor durante este doctorado. Agradezco a mi familia y amigos, pues siempre de alguna forma son de apoyo y ánimo para seguir adelante. Y finalmente, y más importante, agradezco a Dios por todos sus beneficios y cuidados, y por haberme dado la capacidad de llevar a cabo este trabajo.

Resumen

La difracción por una hilera finita de cilindros y las estructuras de bandas fuera-del-plano de un cristal fotónico bi-dimensional dispersivo fueron calculadas en este trabajo. De la ecuación de onda electromagnética derivada de las ecuaciones de Maxwell, y definiendo el inverso de la constante dieléctrica como una serie de Fourier y el campo magnético como una onda de Bloch, se obtienen las ecuaciones de eigenvalores para cristales fotónicos uni- y bi-dimensionales para resolver los dos problemas. En el caso de la difracción, se considera un cristal fotónico uni-dimensional truncado haciendo frontera con dos medios semi-infinitos homogéneos. Los modos del cristal infinito son calculados cuando la fracción de llenado tiende a cero con el método de expansión de ondas planas para hacer una expansión multimodal en el cristal truncado, y los campos se proponen como expansiones tipo Rayleigh-Fourier y como tipo Burckhardt-Fourier en los medios homogéneos y en el cristal truncado, respectivamente. Se aplican condiciones en las fronteras y se obtiene la matriz de difracción que se resuelve para obtener los órdenes de difracción. El vector de Poynting es usado para calcular la potencia del haz difractado. En los resultados, se presenta el esparcimiento integrado total en transmisión y reflexión por un cilindro y por una hilera de cilindros, encontrando anomalías tipo Rayleigh para diferentes ángulos de incidencia, y un comportamiento de película delgada homogénea, respectivamente. Intensidades del campo fueron mostradas en ambos casos y el haz gaussiano incidente se consideró perpendicular al eje de los cilindros. La conservación de la energía, la fórmula del cuarto de onda de películas delgadas y la sección transversal de un cilindro cuadrado fueron consideradas para la validación de los resultados. Para el segundo problema, se resuelve la ecuación de eigenvalores para cristales fotónicos bi-dimensionales con propagación fuera-del-plano con un algoritmo numérico en conjunto con el método de expansión de ondas planas. El método iterativo para cristales fotónicos dispersivos fue el algoritmo usado y la constante dieléctrica fue modelada con una fórmula matemática. Los resultados fueron obtenidos para una red cuadrada de cilindros de sección transversal circular de óxido de magnesio dispersivo en vacío a partir de los puntos de alta simetría Γ y X. Se encontró que para las frecuencias más bajas los modos se doblan drásticamente al horizonte cuando la constante dieléctrica alcanza un valor positivo muy alto. Para las frecuencias arriba de la frecuencia circular fonónica óptica longitudinal donde la constante dieléctrica tiene valores positivos muy bajos, ocurre una degeneración de modos en la ventana de transparencia y algunos modos se comportan cercanos a la línea de luz. Para la validación de estos resultados, estructuras de bandas fuera-del-plano sin dispersión y en-el-plano con dispersión fueron reproducidas de publicaciones previas con buen acuerdo.

*Cristales Fotónicos, Difracción, Dispersión, Electromagnetismo

Abstract

The diffraction from a finite row of cylinders and the out-of-plane photonic bands structures of a two-dimensional dispersive photonic crystal were calculated in this work. From the electromagnetic wave equation derived from the Maxwell's equations, and by defining the inverse of the dielectric constant as a Fourier series and the magnetic field as a Bloch wave, the eigenvalue equations for one- and two-dimensional photonic crystals are obtained for solving the two problems. In the case of the diffraction, it is considered a truncated one-dimensional photonic crystal between two semi-infinite homogeneous media. The modes of the infinite crystal are calculated when the filling fraction tends to zero with the plane wave expansion method for making a multimodal expansion in the truncated crystal, and the fields are proposed as Rayleigh-Fourier and as Burckhart-Fourier expansions in the homogeneous media and in the truncated crystal, respectively. Boundary conditions are applied and the scattering matrix is solved to obtain the diffracted orders. The Poynting's vector is used to calculate the power of the diffracted beam. In the results, the total integrated scattering in transmission and reflection is presented for one cylinder and a row of cylinders, finding Rayleigh anomalies for different angles of incidence and a homogeneous thin film behavior, respectively. Field intensities were shown in both cases and the incident Gaussian beam was considered perpendicular to the axes of the cylinders. The energy conservation, the quarter-wave thickness formula used in the thin film area, and the cross section of a square cylinder were used to validate these results. For the second problem, the eigenvalue equation for two-dimensional photonic crystals with out-of-plane propagation was solved with a numerical algorithm in conjunction with the plane wave expansion method. The dispersive photonic crystal iterative method was the used algorithm and the dielectric constant was modeled with a mathematical formula. The results were obtained for a square lattice of circular cross section dispersive magnesium oxide rods in vacuum starting in the high symmetry points Γ and X. It was found that the modes bend drastically to the horizon as the value of the dielectric constant reach a very positive peak for the lowest frequencies. For the frequencies above the longitudinal optical phonon circular frequency where the dielectric constant has very low positive values, a degeneration of modes occurs in the transparency window and some modes behaves close to the line of light. For the validations of these results, no dispersive out-of-plane and dispersive in-plane bands structures were reproduced from previous publications with good agreement.

*Photonic Crystals, Diffraction, Dispersion, Electromagnetism

Índice

Resumen	iv
Abstract	v
Introducción	1
Antecedentes	4
Capítulos	
1. Cálculo Electromagnético	8
1.1 Los modos electromagnéticos en cristales fotónicos.....	8
1.1.1 Las ecuaciones de Maxwell.....	8
1.1.2 La ecuación de onda.....	9
1.1.3 El medio.....	11
1.1.4 La función dieléctrica.....	13
1.1.5 El campo electromagnético.....	13
1.1.6 La ecuación de eigenvalores.....	14
1.1.7 El cristal fotónico 1D.....	16
1.1.8 El cristal fotónico 2D.....	18
1.2 La difracción por un cristal fotónico 1D truncado.....	22
1.2.1 Las expansiones de los campos.....	22
1.2.1.1 En el medio de incidencia.....	23
1.2.1.2 En el cristal.....	24
1.2.1.3 En el medio de transmisión.....	24
1.2.2 Las condiciones en la frontera.....	25
1.2.3 La matriz de difracción.....	26
1.2.4 El vector de Poynting.....	29
2. Resultados Numéricos	30
2.1 La difracción por un cristal fotónico 1D.....	30
2.1.1 Un cilindro por celda.....	31
2.1.2 Una hilera de cilindros por celda.....	33
2.2 Estructuras de bandas fuera-del-plano de un cristal fotónico 2D dispersivo.....	37
2.2.1 El método.....	37
2.2.2 Estructura de bandas fuera-del-plano sin dispersión.....	39
2.2.3 Estructura de bandas en-el-plano con dispersión.....	41
2.2.4 Los resultados.....	42
Conclusiones	46
Referencias	48
Apéndice I. Series de Fourier y las Expansiones Burckhardt-F. y Rayleigh-F	51
Apéndice II. La primera zona de Brillouin	53
Apéndice III. Los coeficientes de Fourier	57
Apéndice IV. Sección transversal por un cilindro cuadrado	60
Apéndice V. Estructuras de bandas no dispersivas en- y fuera-del-plano	61

Listado de figuras y descripción breve

Figura 1. Cortes de cristales fotónicos uni- bi- y tri- dimensionales.....	12
Figura 2. Corte paralelo al plano x - y de un cristal fotónico 1D.....	17
Figura 3. Corte paralelo al plano x - y de un cristal fotónico 2D.....	19
Figura 4. Incidencia oblicua de un haz gaussiano sobre un cristal fotónico 1D truncado.....	22
Figura 5. Detalles de cristales fotónicos 1D infinito y truncado.....	31
Figura 6. Esparcimiento integrado total por un cilindro.....	32
Figura 7. Módulo cuadrado del campo magnético del esparcimiento por un cilindro.....	33
Figura 8. Esparcimiento integrado total por 2 hasta 13 cilindros.....	34
Figura 9. Módulo cuadrado del campo magnético del esparcimiento por 11 cilindros.....	36
Figura 10. Diagrama de flujo del MICFD.....	38
Figura 11. Estructura de bandas fotónicas fuera-del-plano no dispersiva.....	41
Figura 12. Estructura de bandas fotónicas TM dispersiva.....	42
Figura 13. Estructura de bandas fotónicas fuera-del-plano dispersiva desde Γ	43
Figura 14. Estructura de bandas fotónicas fuera-del-plano dispersiva desde X.....	45
Figura II.1. Primera zona de Brillouin de una red cuadrada.....	55
Figura II.2. Primera zona de Brillouin de una red triangular.....	56
Figura III.1. Detalle de aproximación a una celda unitaria en red cuadrada.....	57
Figura IV.1. Sección transversal por un cilindro cuadrado.....	60
Figura V.1. Estructura de bandas fotónicas TE de una red triangular.....	61
Figura V.2. Estructura de bandas fotónicas fuera-del-plano ajustada.....	62

Introducción

En este trabajo, se presentará un fundamento teórico electromagnético y resultados numéricos del cálculo de la difracción de un haz gaussiano por un cristal fotónico uni-dimensional y las estructuras de bandas fuera-del-plano de un cristal fotónico bi-dimensional dispersivo.

Originalmente, el objetivo era investigar la difracción de luz por estructuras periódicas o cristales fotónicos truncados. La metodología utilizada requería de resolver la ecuación de eigenvalores de un cristal fotónico infinito para después utilizar los eigenvectores y eigenvalores obtenidos para expandir el campo en el cristal truncado haciendo frontera con otro u otros medios homogéneos. Para hacer esta expansión, se necesitan todos los vectores de onda, tanto reales como imaginarios, asociados una frecuencia específica. En el caso de los cristales uni-dimensionales, la matemáticas permiten la obtención directa de estos datos, pero en el caso de los cristales bi- y tri-dimensionales no es así, en estos casos se obtienen todas las frecuencias asociadas a un vector de onda, justo al revés, y por lo tanto se requiere de una herramienta numérica para encontrar los datos necesarios. En el proceso para calcular la difracción por un cristal fotónico bi-dimensional, se estudió por separado la propagación fuera-del-plano y la dispersión, y al hacer una revisión bibliográfica, no se encontró un estudio que tratara simultáneamente ambos temas, por lo que se decidió investigar también este problema.

En los antecedentes, se presenta la revisión bibliográfica de algunas publicaciones previas especificando los aportes específicos de interés de cada una de ellas.

En el capítulo uno, se calcula la solución de los modos para cristales fotónicos uni- y bi-dimensionales. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell, se encuentra la ecuación de onda electromagnética para un medio inhomogéneo. Se establece la estructura de un cristal fotónico para los tres tipos de periodicidad, uni- bi y tri-dimensional. Después, debido a la periodicidad en el espacio de un cristal fotónico, la función dieléctrica del medio se expande en series de Fourier, y el campo se propone como una onda de Bloch, la cual se obtiene de la multiplicación de una onda plana por una función periódica. Se sustituye la expresión del

inverso de la función dieléctrica y la del campo en la ecuación de onda para desarrollarla hasta obtener la ecuación de eigenvalores general para los cristales fotónicos. A continuación, se trata el caso de los cristales fotónicos uni-dimensionales ó 1D, y el de los cristales fotónicos bi-dimensionales ó 2D, obteniendo sus ecuaciones de eigenvalores específicas, cuyas soluciones se aplicarán para el caso de la difracción y de la dispersión, respectivamente. Posteriormente, se abordará el problema de la difracción de un haz gaussiano en polarización transversal magnética por un cristal fotónico 1D truncado haciendo frontera con dos medios homogéneos semi-infinitos, modelando una película delgada inhomogénea. Se proponen los campos en los medios homogéneos como expansiones tipo Rayleigh-Fourier, y en el cristal fotónico truncado como una expansión multimodal tipo Burckhardt-Fourier. Se aplicaran condiciones en la frontera hasta llegar a la matriz de difracción que se resuelve para obtener los órdenes refractados y difractados. Y se definirá el vector de Poynting para el cálculo del esparcimiento integrado total.

En el capítulo dos, primero se presentarán los resultados numéricos de la difracción de un haz gaussiano por un cilindro y por una hilera de hasta trece cilindros, mostrando el esparcimiento integrado total en transmisión y reflexión, y el módulo cuadrado del campo magnético. En el caso del cilindro individual de sección transversal rectangular, se encontraron anomalías tipo Rayleigh cuando se variaba el ángulo de incidencia. Para el caso de la hilera de cilindros, se encontró que al ir incrementando el número de cilindros, ciertos picos en el esparcimiento integrado total se hacían más pronunciados, y se comprobó que la hilera de cilindros se puede considerar una película delgada inhomogénea que satisface aceptablemente la fórmula del ancho de cuarto de onda al predecir la ubicación de estos picos en la longitud de onda. Intensidades del campo fueron mostradas en ambos casos. La trayectoria del haz incidente se consideró perpendicular al eje de los cilindros. La conservación de la energía, la fórmula del cuarto de onda de películas delgadas y la sección transversal de un cilindro cuadrado fueron consideradas para la validación de los resultados. Posteriormente, para el caso de la dispersión, se presenta el método iterativo para cristales fotónicos dispersivos utilizado para calcular estructuras de bandas dispersivas, después se comparan resultados con publicaciones previas de una estructura de bandas fuera-del-plano

de un cristal fotónico 2D no dispersivo y una estructura de bandas en-el-plano de un cristal fotónico 2D dispersivo para validar las estructuras de bandas fuera-del-plano de un cristal fotónico 2D dispersivo en red cuadrada con cilindros de sección transversal circular de óxido de magnesio, una de ellas empezando en el punto de alta simetría Γ y la otra en X. Se encontró que el comportamiento de los modos electromagnéticos propagantes depende grandemente del valor de la constante dieléctrica en función de la frecuencia.

En las conclusiones, se resumen los resultados obtenidos y se destacan las principales aportaciones de este trabajo.

Y en los apéndices se destaca información relevante tanto para la teoría como para los resultados numéricos presentados.

Antecedentes

Desde finales del siglo XIX, se empezó con el estudio de la interacción de las ondas electromagnéticas con obstáculos a partir de las ecuaciones de Maxwell. En 1881, Lord Rayleigh¹ estudio analíticamente, entre otras cosas, el esparcimiento de luz por cilindros infinitos a incidencia normal. La reflexión de ondas electromagnéticas por un alambre fue tratada por W. von Ignatowsky² en 1905. B. Sieger³ trató la difracción de una onda plana en una pantalla de sección transversal elíptica. En 1938⁴, se resolvió analítica y numéricamente la difracción por rendijas y el esparcimiento por cintas para diferentes ángulos de incidencia y longitudes de onda. E. W. Montroll⁵ *et al.*, calcularon el esparcimiento de ondas planas por cilindros, esferoides y discos. J. R. Wait⁶, presentó la solución del esparcimiento de una onda plana que índice oblicuamente sobre un cilindro dieléctrico circular en 1955. En su libro, H. C. Van de Hulst⁷, presentó una solución rigurosa al problema de una onda plana que incide perpendicularmente sobre un cilindro circular. En 1959⁸, se presentaron resultados analíticos y numéricos del esparcimiento y la absorción de cilindros infinitos dieléctricos, y conductivos. El esparcimiento de luz por fibras de araña fue tratado experimentalmente por E. Matijević⁹ *et al.* C. Yeh, calculó la difracción a incidencia normal¹⁰, el esparcimiento a incidencia oblicua¹¹, y la sección transversal de retro esparcimiento¹² por cilindros dieléctricos elípticos. J. R. Wait¹³, a partir de sus cálculos de 1955⁶, propone una nueva solución cuando el radio es muy pequeño comparado con la longitud de onda. M. Kerker¹⁴ *et al.*, presentaron resultados numéricos del esparcimiento por cilindros circulares para incidencia oblicua. En 1966¹⁵, se pudo determinar con precisión el tamaño y el índice de refracción de cilindros circulares a partir del análisis del esparcimiento causado por ellos. Cálculos teóricos y medidas experimentales del esparcimiento de luz a incidencia normal y oblicua por cilindros de vidrio se presentaron en 1969¹⁶. D. Marcuse¹⁷, usó la información de la luz retro esparcida para determinar el radio de cilindros circulares o fibras desnudas. El cálculo del esparcimiento por cilindros dieléctricos de sección transversal arbitraria es presentado por A. Nelson¹⁸ y L. Eyges, y se muestran resultados numéricos para cilindros elípticos y rectangulares. R. D. Birkhoff¹⁹ *et al.*, también determinaron el radio de fibras micrométricas a partir del esparcimiento de luz. La solución exacta al problema del

esparcimiento por un cilindro circular es presentada por C. F. Bohren y D. R. Huffman en su libro²⁰. En 1984, G. L. Stephens²¹, presentó una teoría para el esparcimiento de luz por cilindros circulares de índice de refracción real y complejo. J. J. Graffet²², presentó resultados numéricos del retro esparcimiento de luz por una nube de partículas pequeñas sobre un sustrato dieléctrico. La solución formal del esparcimiento de una onda plana por un arreglo lineal arbitrario de cilindros paralelos y por dos cilindros paralelos fue presentada por V. Twersky²³ en 1952. A su vez, R. V. Row²⁴, hizo un estudio teórico y experimental del esparcimiento por dos cilindros conductivos iguales. En 1970, se presentó una solución exacta para el esparcimiento por un arreglo arbitrario de cilindros circulares paralelos por G. O. Olaofe²⁵, mientras que S. C. Lee²⁶ trató la misma situación física pero para incidencia oblicua en 1990. También D. Felbacq²⁷ *et al.*, trataron el esparcimiento por un arreglo arbitrario de cilindros paralelos pero de sección transversal irregular, mientras que S. C. Chun²⁸ y J. A. Grzesik en 1997, lo hicieron para cilindros circulares radialmente estratificados. L. M. Sanches-Brea²⁹, en el 2004, presentó un modelo para calcular el esparcimiento de luz de un haz gaussiano por un cilindro metálico con un defecto longitudinal. El comportamiento de un haz gaussiano cuando incide oblicuamente sobre diez películas que interaccionan con unas guías de onda fue estudiado por R. Munguía-Arvayo³⁰ *et al.* en 2014. Tamir³¹ *et al.* y Yeh³² *et al.*, estudiaron la propagación de ondas en medios cuya constante dieléctrica era modulada sinusoidalmente en una dimensión, y los primeros también estudiaron la reflexión en la interface entre vacío y dicho medio truncado en 1964 y 1965, respectivamente. La difracción de una onda plana por una rejilla dieléctrica estratificada sinusoidalmente es resuelta por C. B. Burckhardt³³ en 1966, a partir de proponer una expansión multimodal dentro de la rejilla y de aplicar condiciones en la frontera con dos medios homogéneos semi-infinitos. F. G. Kaspar³⁴, y N. E. Glass³⁵ y A. A. Maradudin, también usaron expansiones multimodales y aplicaron condiciones en la frontera para calcular la difracción por un medio inhomogéneo. En 1995, M. G. Moharan³⁶ *et al.*, investigaron la difracción de luz por estructuras tipo rejilla uni-dimensionales.

La difracción por cilindros de sección transversal cuadrada o rectangular ha sido poco tratada y se abordará en este trabajo.

Por otro lado, el estudio de los cristales fotónicos comenzó a finales del siglo XX con la propuesta de E. Yablonovitch³⁷, quien propuso que la emisión espontánea se podía inhibir rigurosamente dentro de una estructura dieléctrica periódica con una banda fotónica prohibida. En 1989, E. Yablonovitch³⁸ and T. J. Gmitter, calcularon la estructura de bandas de un cristal fotónico tri-dimensional y encontraron una banda prohibida. K. M. Ho *et al.*, usaron el método de ondas planas para calcular la estructura de bandas de esferas dieléctricas ordenadas periódicamente en 1990³⁹ y encontraron una banda prohibida completa en la estructura tipo diamante. Estructuras de bandas fueron calculadas para cristales fotónicos bi-dimensionales en red triangular en diferentes configuraciones por M. Plihal y A. A. Maradudin en 1991⁴⁰. R. D. Meade⁴¹ *et al.*, calcularon la estructura de bandas en- y fuera-de-plano de un arreglo de cilindros de vacío ordenados en dieléctrico en red triangular y corroboraron sus resultados experimentalmente en 1992. En 1993⁴², el mismo grupo, presentó la estructura de bandas para cilindros de sección transversal cuadrada y circular en red cuadrada, así como algunos modos electromagnéticos. C. M. Anderson⁴³ and K. P. Giapis, presentaron bandas prohibidas completas incrementadas reduciendo la simetría estructural. En 1999⁴⁴, se mostró que cilindros de sección transversal elíptica ordenados en red rectangular pueden poseer bandas prohibidas completas. Un análisis exhaustivo para diferentes parámetros en cristales fotónicos bi-dimensionales para encontrar bandas prohibidas completas más grandes fue hecho por R. Wang⁴⁵ et al. S. Fotinopoulou⁴⁶ *et al.*, estudiaron teórica y experimentalmente, la propagación de ondas electromagnéticas en cristales fotónicos bidimensionales para diferentes parámetros y ángulos de incidencia en y fuera del plano de periodicidad. L. Zhou^{47,48} *et al.*, calcularon estructuras de bandas para diferentes ángulos de incidencia fuera-del-plano.

La dispersión en los materiales también ha sido tratada en el estudio de los cristales fotónicos bi-dimensionales. V. Kuzmiac *et al.*, calcularon estructuras de bandas dispersivas de cristales fotónicos bi-dimensionales dieléctricos⁴⁹ y metálicos^{50,51}. En el 2000⁵², fueron estudiadas las propiedades dispersivas de fibras de cristal fotónico con huecos elípticos de aire. O. Toader⁵³ y S. John, implementaron un método numérico para calcular estructuras de bandas en-el-plano de cristales fotónicos bi-dimensionales dispersivos para materiales

metálicos y polaritónicos. En 2007⁵⁴ y 2009⁵⁵, se presentaron estructuras de bandas de cristales fotónicos bi-dimensionales de dieléctrico y materiales izquierdos dispersivos, y anisotrópicos dispersivos, respectivamente. A. H. B. Ghasemi⁵⁶ *et al.*, presentaron un estudio teórico para encontrar bandas fotónicas prohibidas en redes cuadradas de cilindros polaritónicos. Una extensión del método de ondas planas fue aplicado por E. Guevara-Cabrera⁵⁷ *et al.* en 2016, para obtener estructuras de bandas de cristales fotónicos dispersivos uni- y bi-dimensionales.

En este trabajo, se abordara conjuntamente el problema de los modos fuera-del-plano de un cristal fotónico bi-dimensional y la dispersión al mismo tiempo, pues no se encontró un estudio así en la bibliografía revisada.

CAPÍTULO 1

CÁLCULO ELECTROMAGNÉTICO

En este capítulo, se presentan los desarrollos teóricos del cálculo de los modos electromagnéticos en cristales fotónicos (CFs) y el cálculo de la difracción por un CF 1D truncado. Los CFs son medios cuya constante dieléctrica tiene periodicidad uni-, bi- o tri-dimensional, que tienen como unidad básica la celda unitaria (CU), que al repetirse en todo el espacio, forma el CF. La CU estará compuesta por dos tipos de medios con constantes dieléctricas ϵ_c y ϵ_e , cuyos subíndices se refieren a *core* (corazón) y a *envelope* (envoltura), respectivamente. La figura 1, muestra el corte de tres CFs, uno de cada tipo de periodicidad.

1.1 Los modos electromagnéticos en cristales fotónicos

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell macroscópicas y considerando un comportamiento armónico en el tiempo de los campos, se obtiene la ecuación de onda electromagnética para un medio inhomogéneo. Se proponen la forma de la función dieléctrica y la del campo para sustituir en la ecuación de onda y obtener la ecuación general de eigenvalores para obtener los modos electromagnéticos en los CFs. Después se tratará específicamente el caso de los CFs 1D y de los 2D considerando propagación fuera-del-plano.

1.1.1 Las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell, en su forma diferencial, para un medio macroscópico en unidades S.I., son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

y

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}. \quad (4)$$

Estas ecuaciones describen el comportamiento y la relación entre los campos eléctrico y magnético, que son generados por densidades de carga ρ , y densidades de corriente \vec{J} . \vec{D} es el desplazamiento eléctrico, \vec{B} es la densidad de flujo magnético, \vec{E} es el campo eléctrico, y \vec{H} es el campo magnético. Todas las magnitudes vectoriales son dependientes de la posición y el tiempo.

La presencia de un campo eléctrico en un material dieléctrico isotrópico de respuesta lineal, tiene el efecto descrito por la ecuación

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (5)$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica del medio. En el vacío $\epsilon = \epsilon_0$.

De manera similar, el efecto de una densidad de flujo magnético en un medio con permeabilidad magnética μ se describe por la ecuación

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (6)$$

La permeabilidad magnética, es el grado de magnetización que un material tiene al estar en presencia de un campo magnético. En este análisis se consideran medios no magnéticos. En el vacío $\mu = \mu_0$.

1.1.2 La ecuación de onda

La ecuación de onda electromagnética asociada a cualquier medio, se deriva de las ecuaciones de Maxwell. Se considera que el campo eléctrico y la densidad de flujo magnético tienen un comportamiento armónico en el tiempo, y se denotan como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})\exp(-i\omega t) \quad (7)$$

y

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r})\exp(-i\omega t). \quad (8)$$

Se considera que no hay densidad de carga presente; $\rho = 0$, y tampoco hay corrientes asociadas al sistema; $\vec{J} = 0$. El medio es no magnético; $\mu = \mu_0$. Se consideran un medio inhomogéneo, dispersivo, y sin absorción, por lo que la permitividad eléctrica; que llamaremos constante dieléctrica, estará en función de la frecuencia y de la posición, y se denotará como $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r}, \omega)$. Considerando estas premisas, las ecuaciones de Maxwell se reescriben como

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon(\vec{r}, \omega)\vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = +i\omega\vec{B}(\vec{r}), \quad (11)$$

y

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = -i\omega\varepsilon(\vec{r}, \omega)\vec{E}(\vec{r}); \quad (12)$$

donde queda implícita la dependencia de ω en \vec{E} y en \vec{B} .

Para obtener la ecuación de onda, primero se despeja $-i\omega\vec{E}(\vec{r})$ de la ecuación (12), y se aplica el rotacional a la ecuación resultante para obtener

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}, \omega)} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \vec{\nabla} \times [-i\omega\vec{E}(\vec{r})]. \quad (13)$$

Se sustituye la ecuación (11) en la (13) y se escribe $\vec{B}(\vec{r})$ en términos de $\vec{H}(\vec{r})$, quedando

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}, \omega)} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \omega^2 \mu_0 \vec{H}(\vec{r}). \quad (14)$$

Finalmente, multiplicando la ecuación (14) por ε_0 y considerando que $c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$, la ecuación de onda electromagnética es

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}, \omega)} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r}). \quad (15)$$

Ahora $\varepsilon(\vec{r}, \omega)$ será la constante dieléctrica relativa.

La ecuación (15), es la ecuación de onda para el campo magnético en un medio inhomogéneo. Para el caso de un medio homogéneo con permitividad eléctrica ε y permeabilidad magnética μ , se obtiene la ecuación

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H}(\vec{r}) + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{H}(\vec{r}) = 0, \quad (16)$$

conocida como ecuación de Helmholtz.

1.1.3 El medio

Un medio inhomogéneo periódico o CF, puede tener periodicidad uni-, bi- o tri-dimensional. La CU es la unidad elemental que al repetirse en todo el espacio forma el CF, y se define longitudinal, superficial y volumétricamente, para CFs 1D, 2D y 3D; respectivamente. Está compuesta por medios de constantes dieléctricas contrastantes, usualmente dos, uno con un valor “alto” ε_c , y otro con un valor “bajo” ε_e . La CU puede formar diferentes tipos de redes, llamadas redes de Bravais. Para el caso tri-dimensional existen catorce redes, para el caso bi-dimensional cinco, mientras que para el caso uni-dimensional solo existe un tipo. La figura 1, muestra los cortes de tres ejemplos de CFs para los tres tipos de periodicidad.

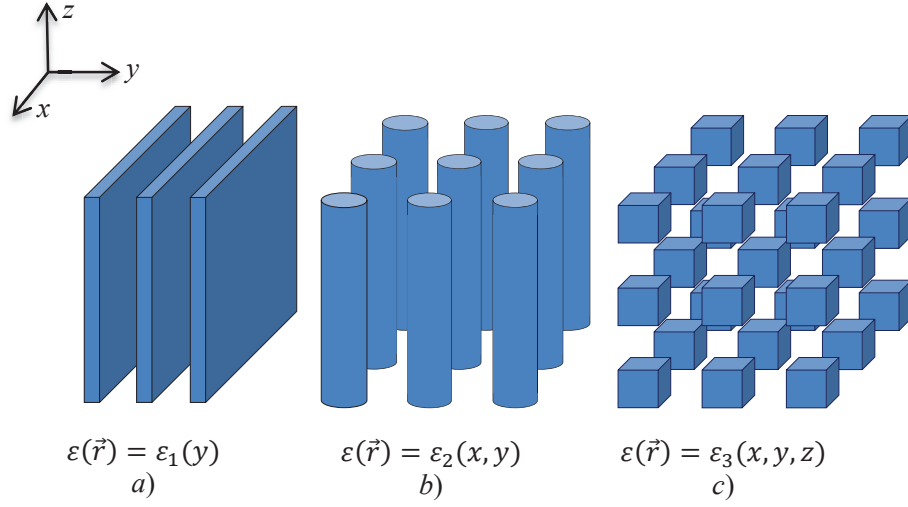


Figura 1. Corte de un CF (a) uni- [(b) bi-] {(c) tri-} dimensional.

El centro de cada CU en los CFs de la figura 1 está dado por

$$\vec{R}_{m,n,o} = \vec{a}_1 m + \vec{a}_2 n + \vec{a}_3 o, \quad (17)$$

con m , n y o números enteros, y donde \vec{a}_1 , \vec{a}_2 y \vec{a}_3 son vectores no colineales del espacio real. En el caso de un CF 1D, n y o son cero. Mientras que para el caso 2D, o es cero. Los vectores \vec{a}_j se expanden como

$$\vec{a}_j = a_{jx} \hat{i} + a_{jy} \hat{j} + a_{jz} \hat{k}, \quad (18)$$

donde los valores de las componentes a_{ji} dependen de la red estudiada. \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} son vectores unitarios ortogonales en la direcciones x , y y z ; respectivamente, y cumplen con la propiedad $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$.

La ubicación del centro de la CU en el espacio recíproco (Ver Apéndice II) está dada por

$$\vec{G}_{p,q,r} = \vec{g}_1 p + \vec{g}_2 q + \vec{g}_3 r, \quad (18)$$

con p , q y r números enteros, y donde \vec{g}_1 , \vec{g}_2 y \vec{g}_3 son los vectores base de la red recíproca. En el caso de un CF 1D, q y r son cero. Mientras que para el caso 2D, r es cero. Los vectores del espacio real y los vectores base de la red recíproca satisfacen la relación

$$\vec{g}_i \cdot \vec{a}_j = 2\pi\delta_{i,j}. \quad (19)$$

1.1.4 La función dieléctrica

Para resolver la ecuación (15), y considerando que los CFs son estructuras periódicas, el inverso de la constante dieléctrica se expande en series de Fourier (Ver Apéndice I), como

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}, \omega)} = \sum_{\vec{G}} [\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{\vec{G}} \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r}), \quad (20)$$

con $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y donde \vec{G} está definido por la red recíproca (Ver Apéndice II).

Para obtener los coeficientes de la ecuación (20), ésta se integra en los límites de la CU, y se utiliza la propiedad de ortogonalidad de las funciones de Fourier para obtener la expresión

$$[\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{\vec{G}} = \frac{1}{A} \int_{-CU}^{+CU} \frac{1}{\varepsilon(\vec{r}, \omega)} \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r}) d\Delta \quad (21)$$

donde A es la longitud, área o volumen de la CU y $d\Delta$ es el diferencial lineal, superficial o volumétrico según sea el tipo de CF. $+CU$ y $-CU$ son los límites de la CU. Y $\varepsilon(\vec{r}, \omega)$ es el valor relativo de la constante dieléctrica. Estos coeficientes se obtuvieron analítica y numéricamente en los CF1D y 2D, respectivamente, en la sección de los resultados (Ver Apéndice III).

1.1.5 El campo electromagnético

Debido a que los CFs son periódicos, los campos en ellos se pueden expresar como ondas de Bloch. El teorema de Bloch-Floquet, establece que una onda de Bloch se obtiene

de la multiplicación de una onda plana por una función periódica con la misma periodicidad del medio en el que se desplaza. De esta manera, el campo magnético se define como

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{H}_{\vec{G}} \exp(i\vec{q}_{\vec{G}} \cdot \vec{r}), \quad (22)$$

donde $\vec{H}_{\vec{G}}$ es un vector perpendicular a $\vec{q}_{\vec{G}} = \vec{q} + \vec{G}$. El vector de propagación de onda \vec{q} varía en la primera zona de Brillouin para los modos electromagnéticos estacionarios, y fuera de ella para los propagantes. Las componentes del vector $\vec{H}_{\vec{G}}$ dependen de la polarización de la onda y del tipo de CF.

1.1.6 La ecuación de eigenvalores

Una ecuación de eigenvalores, es una ecuación que iguala a un operador que actúa sobre una función (eigenfunción), con la misma función multiplicada por una constante (eigenvalor). En este caso, el operador es una matriz, a la cual se le asocian tantos vectores (eigenvectores) como el orden de la matriz. A su vez, cada eigenvector tiene asociado un eigenvalor correspondiente. Al resolver la ecuación de eigenvalores, se obtienen la estructura de bandas de frecuencia y los modos electromagnéticos que presenta un CF.

Para obtener la ecuación de eigenvalores, se resuelve la ecuación (15) sustituyendo en ella las ecuaciones (20) y (22). A continuación se muestra el procedimiento. Primero se aplica el rotacional del campo magnético:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = i \sum_{\vec{G}} (\vec{q}_{\vec{G}} \times \vec{H}_{\vec{G}}) \exp(i\vec{q}_{\vec{G}} \cdot \vec{r}). \quad (23)$$

Se multiplica la ecuación (20); la expansión de $1/\varepsilon(\vec{r})$, por la ecuación (23), y se obtiene

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}, \omega)} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = i \sum_{\vec{G}''} \sum_{\vec{G}'} [\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{\vec{G}''} (\vec{q}_{\vec{G}'} \times \vec{H}_{\vec{G}'}) \exp(i\vec{q}_{\vec{G}''+\vec{G}'} \cdot \vec{r}), \quad (24)$$

donde $\vec{q}_{\vec{G}''+\vec{G}'} = \vec{q} + \vec{G}'' + \vec{G}'$.

Se aplica el rotacional a la ecuación (24), y se llega a la siguiente ecuación:

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}, \omega)} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = i^2 \sum_{\vec{G}''} \sum_{\vec{G}'} [\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{\vec{G}''} [\vec{q}_{\vec{G}''+\vec{G}'} \times (\vec{q}_{\vec{G}'} \times \vec{H}_{\vec{G}'})] \exp(i\vec{q}_{\vec{G}''+\vec{G}'} \cdot \vec{r}). \quad (25)$$

Se sustituyen las ecuaciones (25) y (22) en la ecuación (15), y se obtiene

$$i^2 \sum_{\vec{G}''} \sum_{\vec{G}'} [\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{\vec{G}''} [\vec{q}_{\vec{G}''+\vec{G}'} \times (\vec{q}_{\vec{G}'} \times \vec{H}_{\vec{G}'})] \exp(i\vec{q}_{\vec{G}''+\vec{G}'} \cdot \vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}'} \vec{H}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{q}_{\vec{G}'} \cdot \vec{r}). \quad (26)$$

Se multiplica la ecuación (26) por $\exp[-i(\vec{q} + \vec{G}) \cdot \vec{r}] d\Delta$, y se indica integración, quedando

$$\begin{aligned} i^2 \int_{-cU}^{+cU} \sum_{\vec{G}''} \sum_{\vec{G}'} [\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{\vec{G}''} [\vec{q}_{\vec{G}''+\vec{G}'} \times (\vec{q}_{\vec{G}'} \times \vec{H}_{\vec{G}'})] \exp(i\vec{q}_{(\vec{G}''+\vec{G}')-\vec{G}} \cdot \vec{r}) d\Delta \\ = \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-cU}^{+cU} \sum_{\vec{G}'} \vec{H}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{q}_{\vec{G}'-\vec{G}} \cdot \vec{r}) d\Delta. \end{aligned} \quad (27)$$

Se integra la ecuación (27) utilizando la propiedad de ortogonalidad de las funciones de Fourier, llegando a

$$- \sum_{\vec{G}'} [\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{\vec{G}-\vec{G}'} [\vec{q}_{\vec{G}} \times (\vec{q}_{\vec{G}'} \times \vec{H}_{\vec{G}'})] = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}_{\vec{G}}. \quad (28)$$

Aplicando la regla del doble producto vectorial a la ecuación (28), finalmente se obtiene

$$- \sum_{\vec{G}'} [\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{\vec{G}-\vec{G}'} [\vec{q}_{\vec{G}} (\vec{q}_{\vec{G}'} \cdot \vec{H}_{\vec{G}'}) - \vec{H}_{\vec{G}'} (\vec{q}_{\vec{G}} \cdot \vec{q}_{\vec{G}'})] = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}_{\vec{G}}. \quad (29)$$

La ecuación (29), es la ecuación general para calcular estructuras de bandas fotónicas en CFs 1D, 2D y 3D.

1.1.7 El cristal fotónico uni-dimensional

La ecuación de eigenvalores para un CF 1D se calculará a continuación. Los vectores de la red recíproca, la polarización del campo magnético, y la propagación de onda se definen como

$$\vec{G}_{1D} = \frac{2\pi}{a} m \hat{i}, \quad (30)$$

$$\vec{H}_{\vec{G}} = h_m^{(z)} \hat{k}, \quad (31)$$

y

$$\vec{q} = q_x \hat{i} + q_y \hat{j}, \quad (32)$$

respectivamente, donde q_x varía en la primera zona de Brillouin y q_y es la componente oblicua, que en el caso de los modos estacionarios es cero y en los propagantes es diferente de cero. La figura 2, muestra un corte paralelo al plano x - y de un CF 1D.

Recordando la definición $\vec{q}_{\vec{G}} = \vec{q} + \vec{G}$, se sustituyen las definiciones (30), (31) y (32) en la ecuación (29) para obtener

$$\begin{aligned} & - \sum_{m'} [\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{m-m'} \langle \left[\left(q_x + \frac{2\pi}{a} m' \right) \hat{i} + q_y \hat{j} \right] \left\{ \left[\left(q_x + \frac{2\pi}{a} m \right) \hat{i} + q_y \hat{j} \right] \cdot h_{m'}^{(z)} \hat{k} \right\} \\ & - h_{m'}^{(z)} \hat{k} \left\{ \left[\left(q_x + \frac{2\pi}{a} m \right) \hat{i} + q_y \hat{j} \right] \cdot \left[\left(q_x + \frac{2\pi}{a} m' \right) \hat{j} + q_y \hat{j} \right] \right\} \rangle = \frac{\omega^2}{c^2} h_m^{(z)} \hat{k}. \end{aligned} \quad (33)$$

Calculando los productos punto de la ecuación (33), queda

$$\sum_{m'} [\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{m-m'} \left[\left(q_x + \frac{2\pi}{a} m \right) \left(q_x + \frac{2\pi}{a} m' \right) + q_y^2 \right] h_{m'}^{(z)} \hat{k} = \frac{\omega^2}{c^2} h_m^{(z)} \hat{k}. \quad (34)$$

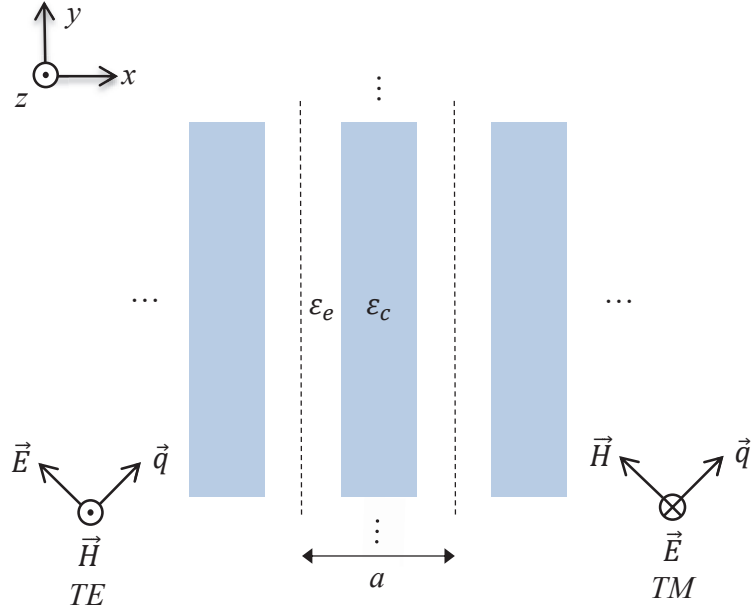


Figura 2. Corte paralelo al plano x - y de un CF 1D. El periodo es a . La CU está delimitada por las dos líneas discontinuas. La constante dieléctrica “alta” (“baja”) en la CU es ϵ_c (ϵ_e). El recuadro inferior izquierdo (derecho) muestra la polarización TE (TM).

Haciendo producto punto con \hat{k} , de la ecuación (34) se obtiene

$$\sum_{m'} [\epsilon_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m'} \left[\left(q_x + \frac{2\pi}{a} m \right) \left(q_x + \frac{2\pi}{a} m' \right) + q_y^2 \right] h_{m'}^{(z)} = \frac{\omega^2}{c^2} h_m^{(z)}. \quad (35)$$

Se integra el lado derecho de la ecuación (35) a la sumatoria del lado izquierdo mediante una Delta de Kronecker, quedando

$$\sum_{m'} \left\{ [\epsilon_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m'} \left[\left(q_x + \frac{2\pi}{a} m \right) \left(q_x + \frac{2\pi}{a} m' \right) + q_y^2 \right] - \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{m,m'} \right\} h_{m'}^{(z)} = 0. \quad (36)$$

Se multiplica la ecuación resultante por $[\eta_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m'}$, la matriz inversa de $[\epsilon_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m'}$, para obtener

$$\sum_{m'} \left[[\eta_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m'} [\varepsilon_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m'} \left(q_x + \frac{2\pi}{a} m \right) \left(q_x + \frac{2\pi}{a} m' \right) + q_y^2 \delta_{m,m'} - [\eta_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m'} \frac{\omega^2}{c^2} \right] h_{m'}^{(z)} = 0, \quad (37)$$

de donde q_y^2 , el cuadrado de la componente oblicua del vector de propagación de onda, se saca de la sumatoria y se define como el eigenvalor correspondiente a cada eigenvector, finalmente llegando a

$$\sum_{m'} [\eta_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m'} \left[\frac{\omega^2}{c^2} - [\varepsilon_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m'} \left(q_x + \frac{2\pi}{a} m \right) \left(q_x + \frac{2\pi}{a} m' \right) \right] h_{m'}^{(z)} = q_y^2 h_m^{(z)}. \quad (38)$$

La ecuación (38), es la ecuación de eigenvalores para obtener la estructura de bandas de un CF 1D. Se da el valor de la componente del vector de onda en la zona irreducible de Brillouin y la frecuencia, y se obtienen los valores reales e imaginarios asociados de la componente oblicua del vector de onda.

1.1.8 El cristal fotónico bi-dimensional

Debido a que un CF 2D puede estar formado por una de diferentes tipos de redes y la propagación del campo electromagnético puede ser en-el-plano y fuera-del-plano, la ecuación de eigenvalores que se calculará a continuación se hará de manera general.

El vector que define la red recíproca se expande como

$$\vec{G}_{2D} = \vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n, \quad (39)$$

donde \vec{g}_1 y \vec{g}_2 dependen del tipo de red. La figura 3, muestra un corte paralelo al plano x - y de un CF 2D.

El vector que define la polarización del campo electromagnético se define como

$$\vec{H}_{\vec{G}} = \hat{v}_{m,n} |\vec{q}_{m,n}| e_{m,n} + \hat{w}_{m,n} h_{m,n}, \quad (40)$$

donde $e_{m,n}$ y $h_{m,n}$, son las componentes eigenvectoriales, y, $\hat{v}_{m,n}$ y $\hat{w}_{m,n}$, son dos polarizaciones ortogonales al vector de propagación de onda que satisfacen la ley de Gauss para el magnetismo; $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$.

El vector de propagación de onda es

$$\vec{q} = q_x \hat{i} + q_y \hat{j} + q_z \hat{k}, \quad (41)$$

donde q_x y q_y , varían en la primera zona irreducible de Brillouin, y q_z es la componente oblicua.

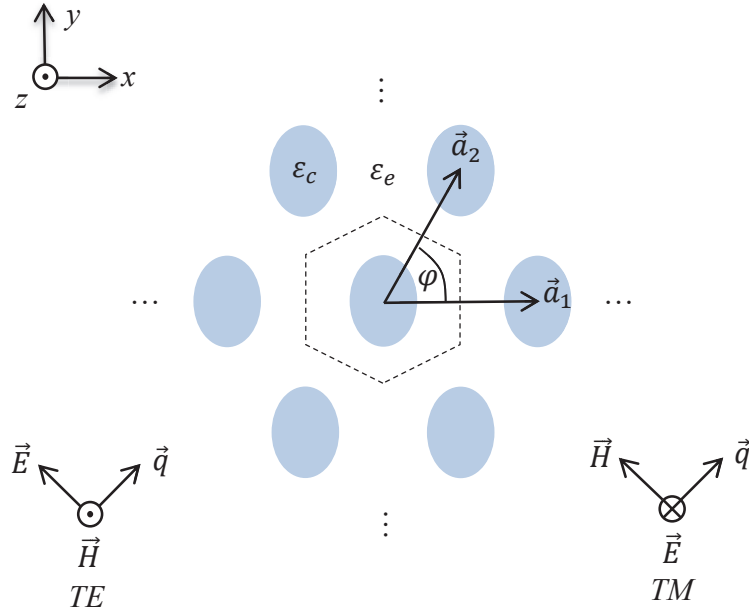


Figura 3. Corte paralelo al plano x-y de un CF 2D de cilindros de dieléctrico (ϵ_c) de sección transversal elíptica ordenados en red triangular en el vacío (ϵ_e). La constante de la red es a . La CU está delimitada en línea discontinua por el hexágono. El recuadro inferior izquierdo (derecho) muestra la polarización TE (TM).

Recordando la definición $\vec{q}_{\vec{G}} = \vec{q} + \vec{G}$, explícitamente se escribe como

$$\vec{q}_{\vec{G}} = \vec{q}_{m,n} = q_{m,n}^{(x)} \hat{i} + q_{m,n}^{(y)} \hat{j} + q_z \hat{k}. \quad (42)$$

Los vectores $\hat{v}_{m,n}$ y $\hat{w}_{m,n}$, se definen como

$$\hat{v}_{m,n} = \frac{q_{m,n}^{(y)}\hat{i} - q_{m,n}^{(x)}\hat{j}}{|q_{m,n}^{(y)}\hat{i} - q_{m,n}^{(x)}\hat{j}|} = \frac{q_{m,n}^{(y)}\hat{i} - q_{m,n}^{(x)}\hat{j}}{|\vec{q}_{m,n}^{\parallel}|} \quad (43)$$

y

$$\hat{w}_{m,n} = \frac{\vec{q}_{m,n} \times \hat{v}_{m,n}}{|\vec{q}_{m,n} \times \hat{v}_{m,n}|} = \frac{[q_{m,n}^{(x)}q_z\hat{i} + q_{m,n}^{(y)}q_z\hat{j} - (q_{m,n}^{(x)}q_{m,n}^{(x)} + q_{m,n}^{(y)}q_{m,n}^{(y)})\hat{k}]}{|\vec{q}_{m,n}^{\parallel}|\vec{q}_{m,n}^{\parallel}}. \quad (44)$$

Se sustituyen las definiciones (40) y (42) en la ecuación (29) para obtener

$$\begin{aligned} - \sum_{m',n'} [\varepsilon_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m',n-n'} \langle (q_{m',n'}^{(x)}\hat{i} + q_{m',n'}^{(y)}\hat{j} + q_z\hat{k}) \{ (q_{m,n}^{(x)}\hat{i} + q_{m,n}^{(y)}\hat{j} + q_z\hat{k}) \\ \cdot (\hat{v}_{m',n'}|\vec{q}_{m',n'}|e_{m',n'} + \hat{w}_{m',n'}h_{m',n'}) \} \\ - (\hat{v}_{m',n'}|\vec{q}_{m',n'}|e_{m',n'} + \hat{w}_{m',n'}h_{m',n'}) [(q_{m,n}^{(x)}\hat{i} + q_{m,n}^{(y)}\hat{j} + q_z\hat{k}) \\ \cdot (q_{m',n'}^{(x)}\hat{i} + q_{m',n'}^{(y)}\hat{j} + q_z\hat{k})] \rangle = \frac{\omega^2}{c^2} (\hat{v}_{m,n}|\vec{q}_{m,n}|e_{m,n} + \hat{w}_{m,n}h_{m,n}). \end{aligned} \quad (45)$$

Haciendo producto punto con $\hat{v}_{m,n}$, sustituyendo las definiciones (43) y (44), realizando las operaciones, y renombrando q_z como γ , la ecuación (45) queda

$$\begin{aligned} \sum_{m',n'} [\varepsilon_{\vec{r},\omega}^{-1}]_{m-m',n-n'} \langle \frac{|\vec{q}_{m',n'}|}{|\vec{q}_{m,n}^{\parallel}||\vec{q}_{m,n}^{\parallel}||\vec{q}_{m',n'}^{\parallel}|} \{ [(q_{m',n'}^{(x)}q_{m',n'}^{(x)} + q_{m',n'}^{(y)}q_{m',n'}^{(y)})|\vec{q}_{m,n}^{\parallel}|^2 \\ + \gamma^2(q_{m',n'}^{(x)}q_{m,n}^{(x)} + q_{m',n'}^{(y)}q_{m,n}^{(y)})] e_{m',n'} \\ + \gamma(q_{m',n'}^{(x)}q_{m,n}^{(y)} - q_{m',n'}^{(y)}q_{m,n}^{(x)})h_{m',n'} \} \rangle = \frac{\omega^2}{c^2} e_{m,n}, \end{aligned} \quad (46)$$

donde si $\gamma = 0$, se tiene el caso de los modos TM (E_z, H_x, H_y) en el plano.

Haciendo producto punto de la ecuación (45) con $\hat{w}_{m,n}$, sustituyendo las definiciones (43) y (44), realizando las operaciones, y renombrando q_z como γ , queda

$$\sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_{\vec{r}, \omega}^{-1}]_{m-m', n-n'} \frac{|\vec{q}_{m', n'}|}{|\vec{q}_{m, n}| |\vec{q}_{m, n}^{\parallel}| |\vec{q}_{m', n'}^{\parallel}|} \left\{ \left[\left(q_{m, n}^{(x)} q_{m', n'}^{(x)} + q_{m, n}^{(y)} q_{m', n'}^{(y)} \right) |\vec{q}_{m, n}|^2 h_{m', n'} - \gamma \left(q_{m', n'}^{(x)} q_{m, n}^{(y)} - q_{m, n}^{(x)} q_{m', n'}^{(y)} \right) |\vec{q}_{m, n}|^2 \right] e_{m', n'} \right\} = \frac{\omega^2}{c^2} h_{m, n} \quad (47)$$

donde si $\gamma = 0$, se tiene el caso de los modos TE (H_z, E_x, E_y) en el plano.

Las ecuaciones acopladas (46) y (47) se resuelven numéricamente para obtener la estructura de bandas fuera-del-plano de un CF 2D; se da el vector de propagación de onda y se obtienen las frecuencias asociadas.

Hasta este punto, se usó la definición de una onda de Bloch y la expansión de Fourier del inverso de la constante dieléctrica para resolver la ecuación de onda para CFs. Se obtuvieron las ecuaciones de eigenvalores para CFs 1D y 2D. Para el caso uni-dimensional, se define el vector de onda en la zona irreducible de Brillouin y la frecuencia y se obtienen las componentes oblicuas complejas del vector de onda asociadas. Y para el caso bi-dimensional, se define un vector de onda dentro o fuera-del-plano y se obtienen las frecuencias reales asociadas.

1.2 La difracción por un cristal fotónico 1D truncado

Conociendo la solución de la ecuación de onda electromagnética para un medio homogéneo y habiendo encontrado una solución numérica para un medio inhomogéneo periódico uni-dimensional, o CF1D, se aborda el problema de la difracción.

Se consideran dos medios semi-infinitos homogéneos, entre ellos uno finito inhomogéneo, y un haz gaussiano que incide oblicuamente en una de las fronteras, como lo muestra la figura 4.

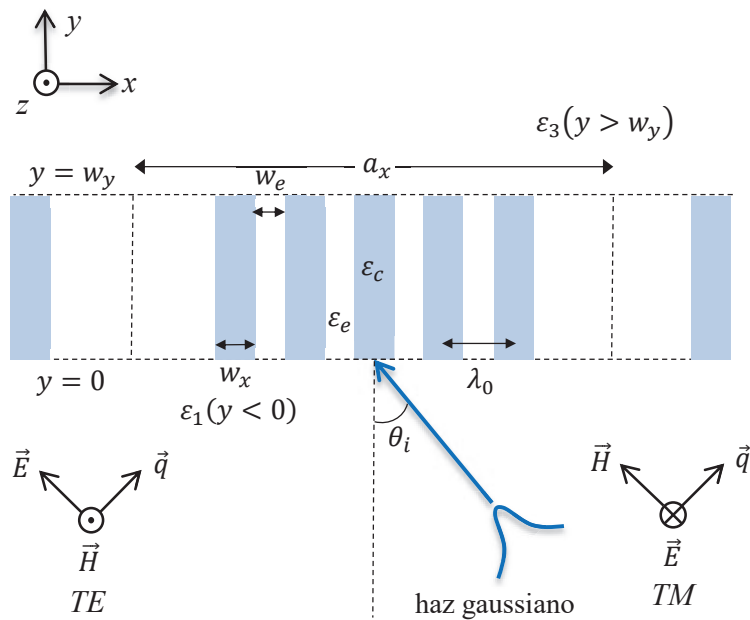


Figura 4. Incidencia oblicua de un haz gaussiano desde un medio semi-infinito homogéneo (ϵ_1) en la frontera con un medio finito inhomogéneo (CF1D truncado). La frontera entre los dos medios está en $y = 0$. En $y = w_y$, el medio inhomogéneo hace frontera con un medio semi-infinito homogéneo (ϵ_3). Todo el sistema es homogéneo en la dirección z .

1.2.1 Las expansiones de los campos

El campo magnético se propone en cada uno de los tres medios para después acoplarlos en las fronteras. Todo el sistema se considera homogéneo en la dirección z .

1.2.1.1 En el medio de incidencia

Se propone el campo en el medio de incidencia homogéneo como una expansión tipo Rayleigh-Fourier considerando un haz gaussiano en polarización TE que incide en la frontera $y = 0$ sobre el CF1D truncado,

$$H_{1z}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{1zt}(\alpha_n) \exp\{i[\alpha_n x + \beta_1(\alpha_n)y]\} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{1zr}(\alpha_n) \exp\{i[\alpha_n x - \beta_1(\alpha_n)y]\}, \quad (48)$$

donde la primera expansión corresponde al haz gaussiano incidente sin difracción y la segunda a su reflexión. Sabiendo que este campo satisface la ecuación (16) de Helmholtz, la componente del vector de onda paralela a la frontera es

$$\alpha_n = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \omega \sin \theta_i + \left(\frac{2\pi}{a_x}\right) n, \quad (49)$$

mientras que la perpendicular es

$$\beta_1(\alpha_n) = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2 - \alpha_n^2}. \quad (50)$$

Los coeficientes de Fourier del haz gaussiano están dados por

$$h_{1zt}(\alpha_n) = \begin{cases} \exp\left[-(\alpha_n - \alpha_0)^2 \frac{w^2}{2}\right] & \text{para } |\alpha_n| \leq \alpha_0 \\ 0 & \text{para } |\alpha_n| > \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \omega \end{cases}. \quad (51)$$

Los coeficientes h_{1zr} son los que se resolverán para conocer el comportamiento del campo en el medio de incidencia.

1.2.1.2 En el cristal

En el CF1D truncado, el campo se define como una expansión Burckhardt³³-Fourier, quedando

$$H_{2z}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n,k}^{(2)} h_k^{(2zt)} \exp\{i[\alpha_n x + \xi_k(y - w_y)]\} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n,k}^{(2)} h_k^{(2zr)} \exp\{i[\alpha_n x - \xi_k(y - w_y)]\}, \quad (52)$$

donde los coeficientes $A_{n,k}^{(2)}$ corresponden a los eigenvectores $h_{m'}^{(z)}$ y los ξ_k a sus eigenvalores q_y^2 correspondientes. El subíndice k corre sobre todos los eigenvalores obtenidos de la ecuación (38). Los coeficientes h_k son los que se calcularán para obtener el campo dentro del cristal.

1.2.1.3 En el medio de transmisión

De igual manera que en el medio de incidencia homogéneo, en el de transmisión el campo se propone como una expansión tipo Rayleigh-Fourier quedando

$$H_{3z}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{3zt}(\alpha_n) \exp\{i[\alpha_n x + \beta_3(y - w_y)]\}, \quad (53)$$

donde la componente perpendicular del vector de onda es

$$\beta_3(\alpha_n) = \sqrt{\mu_3 \varepsilon_3 \omega^2 - \alpha_n^2}. \quad (54)$$

Los coeficientes h_{3zt} se calcularán para obtener el campo en el medio homogéneo de transmisión.

1.2.2 Las condiciones de frontera

Para acoplar las componentes de los campos en los tres medios, es necesario aplicar las condiciones electromagnéticas en las fronteras, que entre dos medios a y b están dadas por

$$\hat{n} \times (\vec{H}_b - \vec{H}_a) = \vec{K}, \quad (55)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_b - \vec{E}_a) = 0, \quad (56)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_b - \vec{D}_a) = \sigma, \quad (57)$$

y

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_b - \vec{B}_a) = 0, \quad (58)$$

donde \hat{n} es un vector normal a la superficie, y \vec{K} y σ son la densidad de corriente y la carga superficiales, respectivamente.

Considerando que no hay densidades de corriente ni cargas superficiales, y aplicando las ecuaciones (55) y (56) en la frontera $y = 0$, se obtiene respectivamente que

$$H_{1z}(x, y) = H_{2z}(x, y) \quad (59)$$

y

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} H_{1z}(x, y) = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} H_{2z}(x, y), \quad (60)$$

donde ε_2 es la constante dieléctrica que depende de la posición en el CF truncado. Similarmente, aplicando las mismas condiciones en la frontera $y = w_y$, se llega a

$$H_{2z}(x, y) = H_{3z}(x, y) \quad (61)$$

y

$$\frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} H_{2z}(x, y) = \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial}{\partial y} H_{3z}(x, y). \quad (62)$$

Las ecuaciones (59), (60), (61) y (62) son las resultantes de aplicar las condiciones en las fronteras considerando las tres formas de los campos. A continuación se utilizarán para calcular la difracción del sistema.

1.2.3 La matriz de difracción

Sustituyendo los campos correspondientes en las ecuaciones (59) y (60), y aplicando las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Rayleigh, respectivamente se llega a

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k}^{(2)} h_k^{(2zt)} \exp(-i\xi_k w_y) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k}^{(2)} h_k^{(2zr)} \exp(+i\xi_k w_y) = h_{1zt}(\alpha_n) + h_{1zr}(\alpha_n) \quad (63)$$

y

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{n-n'} A_{n',k}^{(2)} \xi_k h_k^{(2zt)} \exp(-i\xi_k w_y) \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{n-n'} A_{n',k}^{(2)} \xi_k h_k^{(2zr)} \exp(+i\xi_k w_y) \\ & = \frac{\beta_1(\alpha_n)}{\varepsilon_1} h_{1zt}(\alpha_n) - \frac{\beta_1(\alpha_n)}{\varepsilon_1} h_{1zr}(\alpha_n). \end{aligned} \quad (64)$$

De igual manera, sustituyendo los campos en las ecuaciones (61) y (62) en la frontera $y = w_y$, se obtienen

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k}^{(2)} h_k^{(2zt)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k}^{(2)} h_k^{(2zr)} = h_{3zt}(\alpha_n), \quad (65)$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{n-n'} A_{n',k}^{(2)} \xi_k h_k^{(2zt)} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{n-n'} A_{n',k}^{(2)} \xi_k h_k^{(2zr)} = \frac{\beta_3(\alpha_n)}{\varepsilon_3} h_{3zt}(\alpha_n). \quad (66)$$

Multiplicando la ecuación (65) por $\mp \beta_3(\alpha_n)/\varepsilon_3$ y sumando el resultado a la ecuación (66), respectivamente se obtienen

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{n,k}^{(3-)} h_k^{(2zt)} - \sum_{k=1}^{\infty} M_{n,k}^{(3+)} h_k^{(2zr)} = 0 \quad (67)$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{n,k}^{(3+)} h_k^{(2zt)} - \sum_{k=1}^{\infty} M_{n,k}^{(3-)} h_k^{(2zr)} = \frac{2\beta_3(\alpha_n)}{\varepsilon_3} h_{3zt}(\alpha_n), \quad (68)$$

donde

$$M_{n,k}^{(3\pm)} = M_{n,k}^{(2\pm)} \xi_k \pm \frac{\beta_3(\alpha_n)}{\varepsilon_3} A_{n,k}^{(2)} \quad (69)$$

y

$$M_{n,k}^{(2)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{n-l} A_{l,k}^{(2)}. \quad (70)$$

Con un procedimiento análogo, de las ecuaciones (63) y (64) se obtienen

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{n,k}^{(1-)} \exp(-i\xi_k w_y) h_k^{(2zt)} - \sum_{k=1}^{\infty} M_{n,k}^{(1+)} \exp(+i\xi_k w_y) h_k^{(2zr)} = -\frac{2\beta_1(\alpha_n)}{\varepsilon_1} h_{1zr}(\alpha_n), \quad (71)$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{n,k}^{(1+)} \exp(-i\xi_k w_y) h_k^{(2zt)} - \sum_{k=1}^{\infty} M_{n,k}^{(1-)} \exp(+i\xi_k w_y) h_k^{(2zr)} = \frac{2\beta_1(\alpha_n)}{\varepsilon_1} h_{1zt}(\alpha_n) \quad (72)$$

donde

$$M_{n,k}^{(1\pm)} = M_{n,k}^{(2)} \xi_k \pm \frac{\beta_1(\alpha_n)}{\varepsilon_1} A_{n,k}^{(2)}. \quad (73)$$

Si la ecuación (67) es multiplicada por el inverso de $M_{n,k}^{(3+)}$, cuyos elementos se denotan por $N_{n,k}^{(3+)}$, entonces los coeficientes de reflexión en el CF1D truncado en términos de los de transmisión son

$$h_k^{(2zr)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P_{k,l}^{(3)} h_l^{(2zt)}, \quad (74)$$

donde

$$P_{k,l}^{(3)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_{n,k}^{(3+)} M_{n,l}^{(3-)}. \quad (75)$$

Si la ecuación (74) es sustituida en la (72), entonces la llamada matriz de difracción o esparcimiento es

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}^{(2)} h_k^{(2zt)} = \frac{2\beta_1(\alpha_n)}{\varepsilon_1} h_{1zt}(\alpha_n), \quad (76)$$

donde

$$T_{n,k}^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} M_{n,k}^{(1+)} \exp(-i\xi_k w_y) \delta_{k,l} - M_{n,l}^{(1-)} \exp(+i\xi_k w_y) P_{l,k}^{(3)}. \quad (77)$$

La ecuación (76) representa la solución formal al problema de la difracción. Para obtener los coeficientes $h_k^{(2zt)}$, la ecuación matricial debe ser truncada y resuelta numéricamente. Una vez hecho esto, las ecuaciones (74), (68) y (71) se usan para obtener los coeficientes faltantes.

1.2.4 El vector de Poynting

Para calcular el esparcimiento integrado total (EIT o TIS por sus siglas en inglés) se integra sobre la componente y del vector de Poynting para obtener la potencia normalizada. Para el caso de la reflexión se tiene que

$$P_{1yr} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_1(\alpha_n) |h_{1zr}(\alpha_n)|^2}{P_i}, \quad (78)$$

mientras que para la transmisión

$$P_{3yt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_3(\alpha_n) |h_{3zt}(\alpha_n)|^2}{P_i}, \quad (79)$$

donde

$$P_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_1(\alpha_n) |h_{1zt}(\alpha_n)|^2. \quad (80)$$

La potencia del esparcimiento total integrado de la reflexión y de la transmisión, dadas por las ecuaciones (78) y (79), respectivamente, son llamadas sección-transversal de esparcimiento.

En este capítulo, se presentó el desarrollo teórico para el cálculo de los modos electromagnéticos en CFs uni- y bi-dimensionales, y el cálculo de la difracción de un haz gaussiano por un cristal fotónico uni-dimensional truncado haciendo frontera con dos medios homogéneos semi-infinitos. A continuación, en el capítulo 2, se presentarán los resultados numéricos obtenidos.

CAPÍTULO 2

RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo, se presentarán los resultados obtenidos en el cálculo de la difracción por un CF1D truncado y el cálculo de las estructuras de bandas fuera del plano de un CF2D dispersivo. Para el caso de la difracción, primero se calculará el esparcimiento por un cilindro y después por una hilera de cilindros utilizando la metodología de la sección 1.2. Y para las estructuras de bandas, se implementará un algoritmo numérico resolviendo las ecuaciones acopladas (46) y (47). En ambos cálculos se verificó la fiabilidad de los resultados comparando con publicaciones previas y corroborándolos con fundamentos físicos bien establecidos.

2.1 La difracción por una hilera de cilindros

La representación esquemática del sistema estudiado se muestra en la fig. 5, dos medios semi-infinitos, homogéneos, isotrópicos, no magnéticos, no dispersivos, no absorbentes y lineales, con constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_3 , llenando las regiones $y < 0$ y $y > w_y$, respectivamente, y un medio inhomogéneo para $0 < y < w_y$ con constante dieléctrica $\epsilon_2(x)$ que se puede considerar como una película delgada inhomogénea (ITF, por sus siglas en ingles). El medio inhomogéneo está compuesto por cilindros de sección transversal rectangular con dimensiones w_x y w_y con periodo local λ_0 . Las líneas grises seccionadas indican el periodo a_x del CF1D y los límites de la celda unitaria. La constante dieléctrica de los cilindros y del medio que los rodea es ϵ_c y ϵ_e , respectivamente. Una haz gaussiano sin difracción de ancho w_g incide oblicuamente a un ángulo θ_i desde el medio homogéneo 1 sobre la interface en $y = 0$.

Para obtener resultados numéricos, la ecuación matricial de esparcimiento de dimensión infinita (eq. 73) es truncada a un tamaño de fila de $2N=2048$. Este valor de N es suficiente para alcanzar una variación de 0.05% en la conservación de la energía. Los medios

homogéneos semi-infinitos se consideran no absorbentes y con constante dieléctrica $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$.

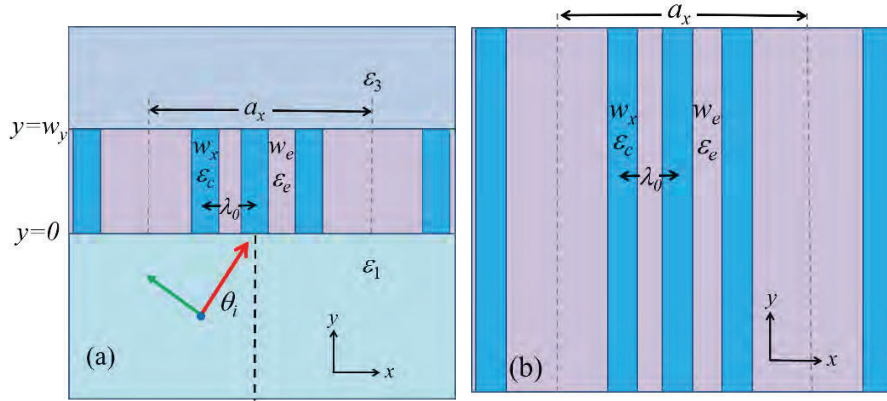


Figura 5. (a) El medio inhomogéneo periódico encerrado está compuesto por una hilera de cilindros igualmente espaciados con constante dieléctrica ε_c , ancho w_x y alto w_y . Éste está entre dos medios homogéneos ópticos diferentes caracterizados por constantes dieléctricas $\varepsilon_1 (y < 0)$ y $\varepsilon_3 (y > w_y)$, respectivamente. El periodo del medio inhomogéneo es a_x . La flecha roja, la verde, y el círculo relleno azul representan la dirección de propagación del haz, el campo eléctrico, y el campo magnético, respectivamente. (b) Un CF1D de periodo a_x formado por tres películas de ancho w_x separadas una distancia w_e rodeadas de un material con constante dieléctrica ε_e en la celda unitaria. El periodo local es λ_0 .

2.1.1 Un cilindro por celda

En el primer caso, se estudió un cilindro por celda unitaria. El ancho del haz gaussiano no difractado en polarización p es $w_g = 32a_0 = 20.3\mu m$ con $a_0 = 633nm$. El cilindro es de sección transversal rectangular de dimensiones $w_x = 0.20a_0 = 127nm$ y $w_y = 0.79a_0 = 500nm$. La constante dieléctrica del cilindro y la del medio a sus lados son $\varepsilon_c = 2.25$ y $\varepsilon_e = 1$, respectivamente. El periodo del CF1D es $a_x = 128a_0 = 81\mu m$. Con esta selección de parámetros, se tiene que $a_x \gg \lambda$ y $w_x, w_y \gg w_x$, y los cilindros se comportan como uno solo, es decir, la comunicación entre un cilindro y sus vecinos es mínima o cero.

La figura 6, muestra la reflexión EIT como función de la energía para varios ángulos de incidencia. Algunos picos aparecen y se percibe que su posición en energía y magnitud dependen del ángulo de incidencia. El ancho típico de los picos es de $0.04eV$ y pueden ser

tan pequeños como 0.001eV , aunque estos últimos no pueden ser observados pues la resolución usada es de 0.01eV . La altura de estos picos es incrementada para ángulos de incidencia θ_i mayores. La explicación de estos picos está asociada a anomalías Rayleigh, que ocurren cuando un modo propagante se convierte en uno evanescente y viceversa. La referencia [18] presenta resultados para cilindros de sección transversal rectangular y la sección transversal de esparcimiento no muestra estos picos, esto puede ser si una baja resolución fue utilizada en su cálculo. Para observar estos picos, la resolución en la energía fue de 0.01eV en estos cálculos. Para validar estos datos, además de la conservación de la energía, la sección trasversal de esparcimiento por un cilindro fue calculada y comparada con los datos presentados en la referencia [18] y una buena concordancia fue encontrada. Ver apéndice IV.

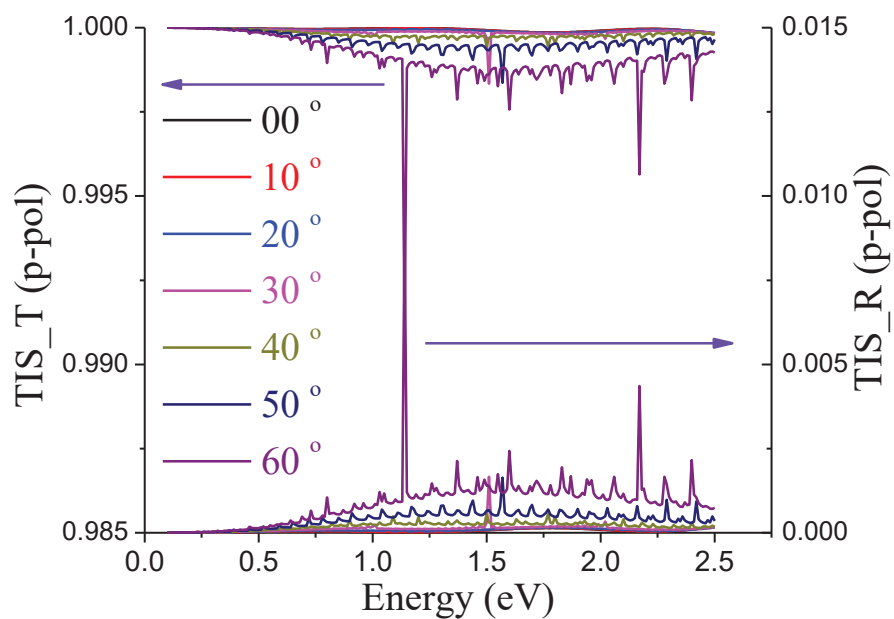


Figura 6. Esparcimiento integrado total para la reflexión (eje derecho) y la transmisión (eje izquierdo) por un cilindro como función de la energía para diferentes ángulos de incidencia. Se observan algunos picos cuyas energías dependen del ángulo de incidencia.

La figura 7, muestra el módulo cuadrado del campo magnético proyectado en el plano x - y . Éste fue calculado a $\hbar\omega = 1.98\text{eV}$ ($\lambda = 626.3\text{nm}$) y a ángulos de incidencia (a) $\theta_i = 0^\circ$ y (b) $\theta_i = 20^\circ$. En ambas figuras, es posible notar el patrón de interferencia producido por el haz incidente y la luz esparcida. Un punto de alta intensidad se localiza casi al centro del cilindro.

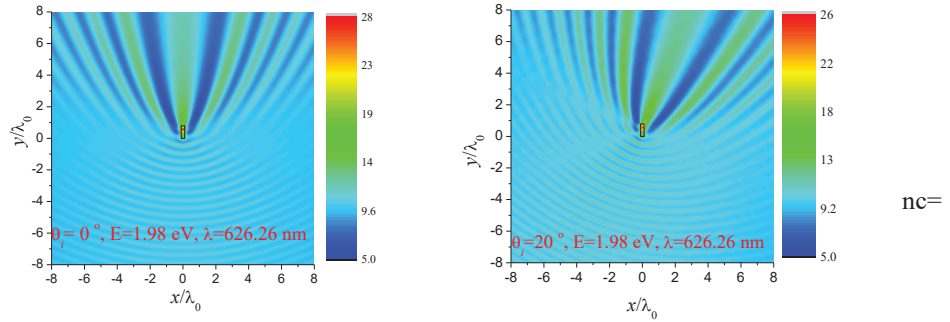


Figura 7. Módulo cuadrado del campo magnético proyectado en el plano x - y para (a) $\theta_i = 0^\circ$ and (b) $\theta_i = 20^\circ$ para una longitud de onda $\lambda = 626.26\text{nm}$. Las líneas negras corresponden a los límites del cilindro.

2.1.2 Una hilera de cilindros por celda

En el segundo caso, se consideran hasta 13 cilindros por celda unitaria. El ancho del haz gaussiano no difractado en polarización p es fijado a $w_g = 32\lambda_0 = 256\mu\text{m}$. Los cilindros son de sección transversal cuadrada de lados $w_x = w_y = 0.436\lambda_0 = 349\text{nm}$. La constante dieléctrica de los cilindros es $\epsilon_c = 5.29$ (este valor es típico de los materiales de alto índice en el visible: ZnS, TiO_2 , etc.) y la del medio de lo rodea es $\epsilon_e = 1$. El periodo local es $\lambda_0 = 0.8\mu\text{m}$.

En la figura 8, se muestra la EIT (transmisión y reflexión) como función de la longitud de onda para incidencia normal. Las diferentes curvas corresponden a diferentes números de cilindros. La roja, azul, magenta, amarillo oscuro, azul marino, púrpura, vino, olivo, naranja, violeta, gris, y gris oscuro corresponden al EIT por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, y 13 cilindros, respectivamente. Tres mínimos (máximos) en la EIT-T (EIT-R) se observan a $E_3 =$

$1.15\text{eV}(\lambda_3 = 1,078.3\text{nm})$, $E_4 = 1.56\text{eV}(\lambda_4 = 794.9\text{nm})$, y $E_6 = 2.31\text{eV}(\lambda_6 = 536.8\text{nm})$, los cuales se incrementan junto con el número de cilindros. Debe notarse que la energía del primer pico es casi el doble que la del tercero. La posición de estos picos (máximos y mínimos) son consecuencia de efectos de interferencia, similarmente a lo que pasa en una película delgada homogénea de ancho w_y , en donde se satisface la fórmula del ancho de cuarto de onda usada en el área de película delgadas [58]: $\lambda_k = 4n_c w_y / k$. Con $k = 3, 4$, y 6 , los valores de las posiciones son $\lambda_3 = 1,070.3\text{nm}$, $\lambda_4 = 802.7\text{nm}$, y $\lambda_6 = 535.1\text{nm}$, respectivamente, donde n_c representa el índice de refracción de los cilindros y $w_y = 349\text{nm}$. Esta fórmula determina la posición de estos picos muy precisamente. Otro pico debería aparecer a $\lambda_5 = 642.2\text{nm}(1.93\text{eV})$, pero no está bien definido.

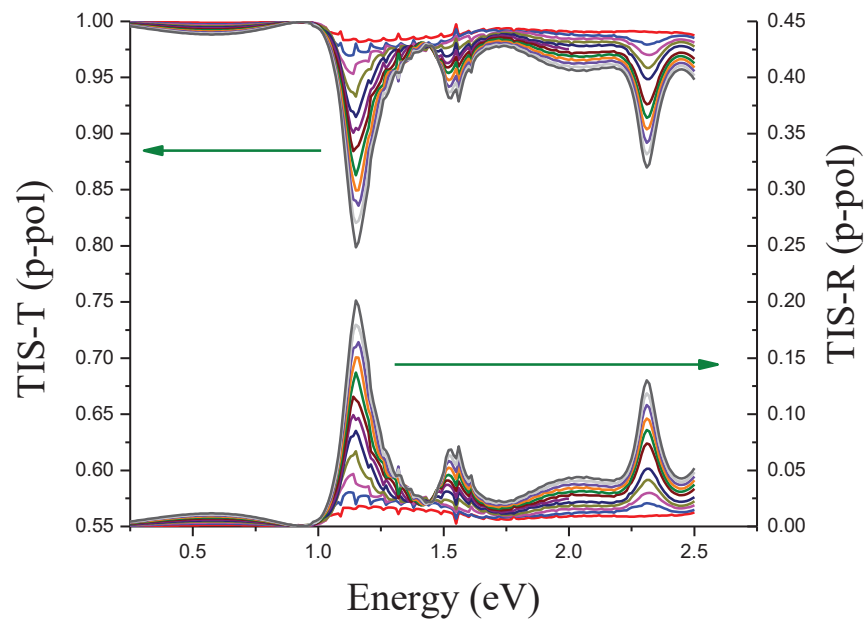


Figura 8. Esparcimiento integrado total para la reflexión (eje derecho) y la transmisión (eje izquierdo) a incidencia normal como función de la energía. Las curvas roja, magenta, amarillo oscuro, azul marino, púrpura, vino, olivo, anaranjado, violeta, gris, y gris oscuro corresponden al esparcimiento por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, y 13 cilindros.

En la figura 9, se presenta el módulo cuadrado del campo magnético proyectado en el plano x - y a incidencia normal para (a) $E = 2.0eV$ y (b) $E = 1.15eV$ dos energías. Para $y < 0$, se observa el patrón de interferencia entre el haz incidente y el reflejado. Este efecto es más preponderante en la figura 9(b) porque la amplitud de la luz reflejada es seis veces la de la figura 9(a). Para $y > 0$, la hilera de cilindros bloquea parcialmente la luz incidente, esto puede ser notado por los colores desplegados. Algunos valores máximos del campo se encuentra dentro de los cilindros. La luz difractada mostrada en la fig. 9(a), muestra características de un sistema periódico o rejilla. Es posible observar los órdenes de difracción producidos en la reflexión a $\theta_r = 129.2^\circ$ y 230.8° y en la transmisión a $\theta_t = 50.8^\circ$ y 309.2° . La intensidad del máximo en la reflexión (transmisión) aumenta (disminuye) en función del número de cilindros.

En las dos secciones anteriores, se calculó la difracción o esparcimiento de un haz gaussiano causado por uno o más cilindros para diferentes ángulos de incidencia, y se validaron los resultados comparando con una publicación previa, con la conservación de la energía y con la concordancia con la fórmula del cuarto de onda usada en el área de películas delgadas.

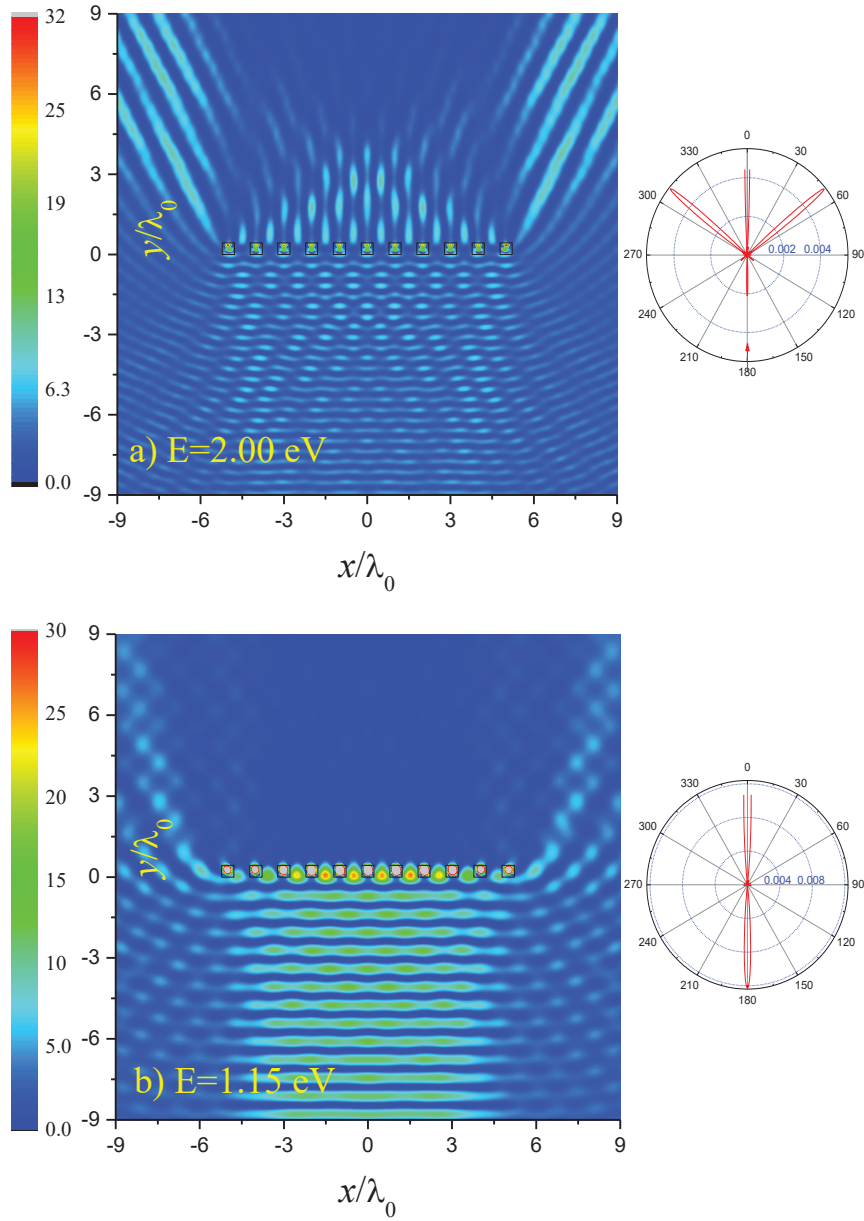


Figura 9. Módulo cuadrado del campo magnético del esparcimiento por 11 cilindros proyectado en el plano x - y a incidencia normal para (a) $\lambda = 620.0nm$ y (b) $\lambda = 1078.3nm$. Las líneas negras corresponden a los límites de los cilindros. La difracción de luz como función del ángulo de incidencia se muestra en los recuadros. Los puntos coloreados con gris oscuro dentro de los cilindros indican la máxima del campo.

2.2 Estructuras de bandas fuera-del-plano de un cristal fotónico 2D dispersivo

En las siguientes secciones se presentará el método utilizado, la comprobación de cálculos con publicaciones previas, y los resultados obtenidos.

2.2.1 El método

El método utilizado para calcular la estructura de bandas de un cristal fotónico 2D dispersivo se denominó *Método Iterativo para Cristales Fotónicos Dispersivos* (MICFD) y se presentará a continuación.

Primero, se selecciona un vector de propagación de onda \vec{q}_1 dentro o fuera del plano y usando las ecuaciones acopladas (46) y (47), el algoritmo empieza calculando las frecuencias ω_k usando la correspondiente $\varepsilon(\omega)$ de la frecuencia normalizada (FN) para el límite más bajo (ω_a) del espectro de frecuencias de interés. Entonces todos los ω_k obtenidos son comparados con ω_a haciendo restas ($\omega_a - \omega_k$). La frecuencia más cercana pero mayor (ω_c) a ω_a es escogida, y el proceso iterativo empieza incrementado (o disminuyendo si es el caso) la FN tratando de empatar con ω_c . Cada iteración es calculada con su correspondiente $\varepsilon(\omega)$. Se sugiere que los ajustes de FN sean $\omega_{adj} = (FN - \omega_c)/50$ para cada iteración. Una vez que la diferencia $FN - \omega_c$ es más pequeña que el límite definido, en este caso menos de 0.001, el valor ω_c y el vector de propagación \vec{q}_1 son guardados como un Punto Electromagnético Dispersivo (PEMD) (ω_c, \vec{q}_1). El ajuste ω_{adj} no debe ser mayor que 0.001 para evitar saltarse PEMDs válidos. La estructura de bandas fotónicas se construye con estos puntos. Los siguientes PEMDs se buscan para frecuencias más altas con el mismo vector de onda hasta llegar al límite superior del espectro de frecuencia de interés (ω_b). Consecuentemente, el procedimiento se repite para otros vectores de onda ($\vec{q}_{2,3,4,\dots}$).

La eficiencia del MICFD es mejor para valores más chicos de ω_{adj} . Además de la convergencia en los cálculos, la precisión del método recae también en que tan pequeña debe ser la diferencia entre la FN y la ω_c .

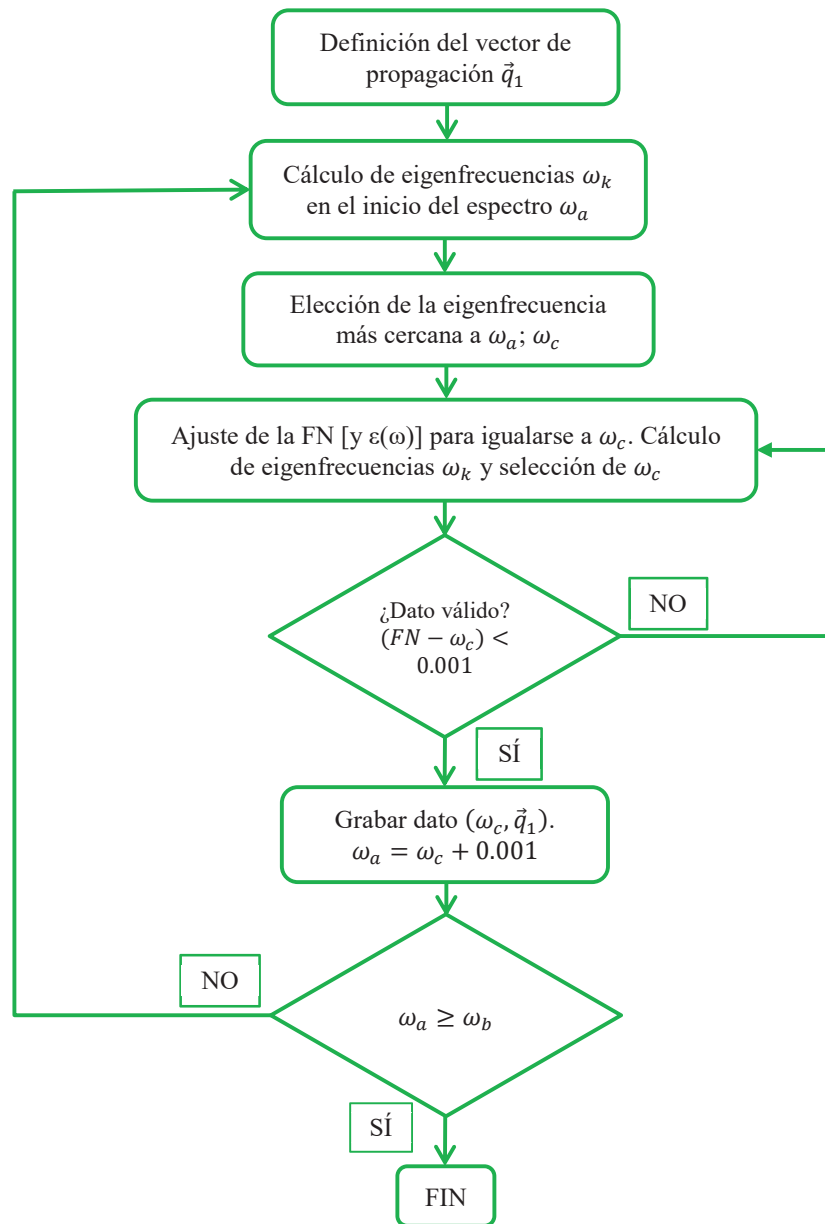


Figura 10. Diagrama de flujo del método iterativo para cristales fotónicos para el cálculo de los puntos electromagnéticos dispersivos para un vector de onda dado \vec{q}_1 en el intervalo de frecuencias entre ω_a y ω_b , donde ω_k son las eigenfrecuencias calculadas para una constante dieléctrica para una FN dada de las cuales ω_c es la más cercana superior a la FN.

Los valores de $\varepsilon(\omega)$ se pueden obtener de datos experimentales o de un modelo matemático. Si se utilizan datos experimentales, la precisión de la estructura de bandas dispersiva dependerá de la cantidad de datos disponibles en el intervalo de frecuencias de interés, y se vuelve necesario el uso de una interpolación lineal para tener el valor de $\varepsilon(\omega)$ para toda frecuencia. La fórmula (81) muestra esta interpolación:

$$n_\omega = \frac{(\lambda_\omega - \lambda_a)(n_b - n_a)}{(\lambda_b - \lambda_a)} + n_a, \quad (81)$$

donde $n_\omega(n_a)[n_b]$ y $\lambda_\omega(\lambda_a)[\lambda_b]$ son los valores nuevos (previos) [siguientes] del índice de refracción y su longitud de onda asociada.

En este trabajo, se utilizó la fórmula matemática para modelar $\varepsilon(\omega)$ deducida en la referencia [55] del modelo unipolar de Lorentz, pero sin absorción:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty \frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega^2 - \omega_T^2}, \quad (82)$$

donde ε_∞ , ω_T , y ω_L son la constante dieléctrica de alta frecuencia y las frecuencias circulares fonónicas ópticas transversal y longitudinal, respectivamente.

Resumiendo, el objetivo básico del MICFD es obtener las intersecciones de las FNs con su correspondiente vector de onda considerando la dependencia en la frecuencia de la constante dieléctrica. Estas intersecciones son los PEMDs.

Para aplicar el método, las ecuaciones acopladas (46) y (47) son truncadas. Los subíndices m y n toman valores desde $-N$ hasta $+N$, y el tamaño de los renglones de la matriz es $(2N + 1)^2$ y $2 * (2N + 1)^2$ para el caso de estructuras de bandas en-el-plano y fuera-del-plano, respectivamente.

2.2.2 Estructura de bandas fuera-del-plano sin dispersión

En la figura 11, se presenta la estructura de bandas fuera-del-plano de un CF2D en red triangular, comparando nuestros cálculos con resultados presentados en la referencia [41].

La línea de luz se presenta como una línea discontinua. El tamaño de la matriz usada para obtener estos resultados fue de 6,050. Los modos de frecuencia se presentan en función de $\gamma a/2\pi$, donde γ es la componente oblicua del vector de onda de propagación. Al incrementarse γ , los modos electromagnéticos tienden a degenerarse en dos modos propagantes individuales para frecuencias más altas. Es claro que no hay muy buen acuerdo entre los dos cálculos. La referencia [41] presenta resultados teóricos y experimentales para un cristal fotónico con los parámetros mencionados en la figura 11. Ellos calcularon la EBF en-el-plano para dicho cristal fotónico y encontraron una banda completa para las frecuencias más bajas. Diseñaron un experimento para probar sus resultados con $a = 1.044cm$ y $r = 0.475a$, esperando una banda entre 12.3 y 14.6GHz. Experimentalmente, la banda apareció entre 13 y 15.5GHz, teniendo un concordancia de 94.4% en promedio para los límites superior e inferior de la banda. Cálculos nuestros usando los mismos parámetros predijeron un banda entre 12.72 y 15.28GHz, teniendo una concordancia de 98.21%. Esta discrepancia en los resultados puede deberse al uso de diferentes radios, $r = 0.475a$, en lugar de $r = 0.48a$ como está afirmado. Para validar nuestros cálculos para un CF2D en red triangular, en el apéndice V, una comparación es presentada entre datos presentados en la referencia [40] y cálculos nuestros para una EBF no dispersiva, y la EBF fuera-del-plano no dispersiva es recalculada con $r = 0.475a$ y comparada con los resultados de la referencia [41]. Un muy buen acuerdo fue encontrado para ambos cálculos. Así, concluimos que nuestra metodología es correcta para los dos casos: EBF en-el-plano ($\gamma = 0$) no dispersiva y EBF fuera-del-plano ($\gamma > 0$) no dispersiva.

El cálculo de los coeficientes de Fourier del inverso de la función dieléctrica para éste y los siguientes casos, se basó en expandir la integral de superficie de la ecuación (21) dividiendo la celda unitaria en rectángulos verticales, haciéndolos cada vez más pequeños hasta alcanzar la convergencia en la estructura de bandas (Ver Apéndice III). Este método es eficaz, siempre y cuando la aproximación sea suficiente, y puede ser utilizado para cualquier forma transversal de cilindro; hexagonal, triangular, etc.

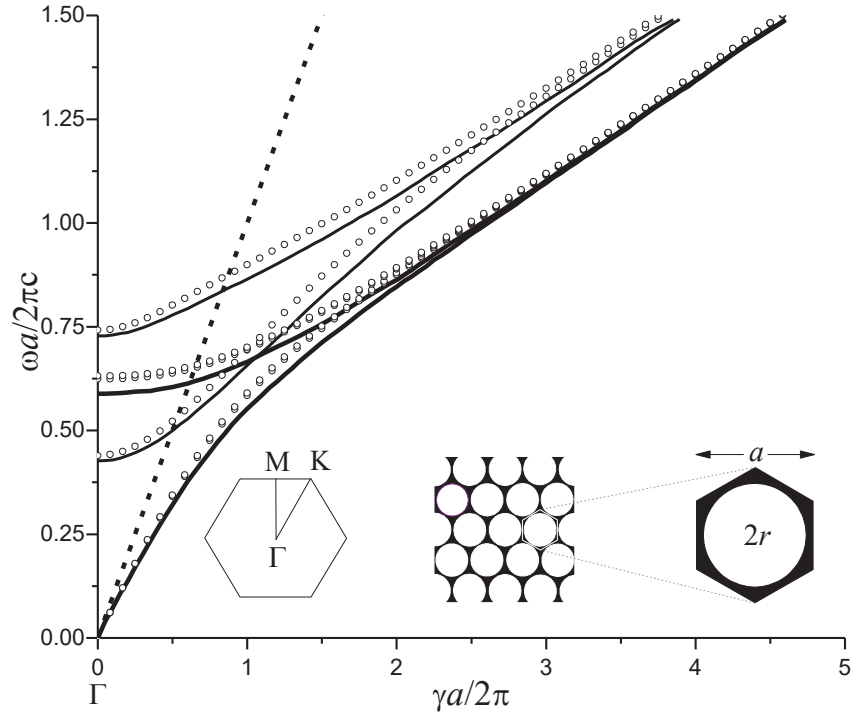


Figura 11. Estructura de bandas fotónicas fuera-del-plano no dispersiva empezando en Γ para las frecuencias más bajas de una red triangular de cilindros de aire de sección transversal circular dentro de un medio con constante dieléctrica $\varepsilon = 13$. Los círculos huecos corresponden a nuestros cálculos y las líneas solidas a los de la referencia [41]. La constante de la red es a . El radio de los cilindros es $r = 0.48a$. Las líneas gruesas corresponden a modos degenerados. El recuadro derecho (centrado) [izquierdo] muestra la CU (un corte transversal del CF) [la primera zona de Brillouin].

2.2.3 Estructura de bandas en-el-plano con dispersión

En la figura 12, se presenta una comparación entre resultados de la referencia [55] y cálculos nuestros pero sin absorción de la EBF TM (H_x , H_y , E_z) en-el-plano de un CF2D dispersivo. La fórmula (82) fue usada para modelar la constante dieléctrica de los cilindros de óxido de magnesio (MgO) de sección transversal circular rodeados de vacío. Los parámetros usados son $\varepsilon_\infty = 2.95$, $\omega_T a/2\pi c = 0.561$, y $\omega_L a/2\pi c = 1.005$. Para valores positivos de $\varepsilon(\omega)$, debajo de $\omega_T a/2\pi c$ y arriba de $\omega_L a/2\pi c$, se encuentra un buen acuerdo entre los dos cálculos, a excepción de algunos puntos; esto podría deberse a una falta de convergencia. En el rango de FNs donde $\varepsilon(\omega)$ tiene valores negativos, esta metodología tiene

un comportamiento errático, presentando en algunos casos lo que parecen ser modos espurios, esto es, varios modos electromagnéticos para el mismo vector de onda donde solo debería haber uno, según la referencia [55]. A pesar de esto y de que no se consideró absorción en nuestros cálculos, se obtuvo un acuerdo aceptable. El tamaño de la matriz usada para obtener los PEMDs donde la $\epsilon(\omega)$ es positiva fue de 2,209, mientras que donde es negativa de 3,025.

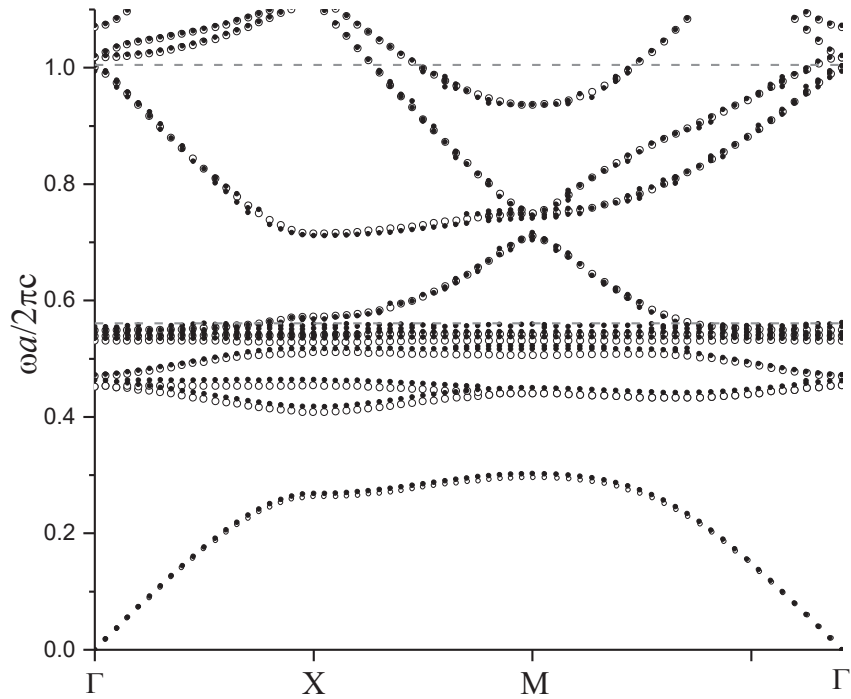


Figura 12. Estructura de bandas fotónicas TM en-el-plano de una red cuadrada de cilindros de óxido de magnesio de sección transversal circular rodeados de vacío. Los círculos rellenos corresponden a nuestros cálculos y los vacíos a los datos de la referencia [55]. El periodo del CF es $a = 14\mu m$. La fracción de llenado es 0.1. Y $\omega_L a/2\pi c = 1.005$ y $\omega_T a/2\pi c = 0.561$ se indican como líneas discontinuas.

2.2.4 Los resultados

Habiendo reproducido resultados fuera-del-plano no dispersivos y en-el-plano dispersivos con buen acuerdo, se aplica el MICFD para calcular las estructuras de bandas fotónicas fuera-del-plano (EBFFs) de un CF2D dispersivo. Se aplica la fórmula (82) y el CF

y sus parámetros son los mismos que en el caso anterior, pero para el caso de los modos fuera-del-plano.

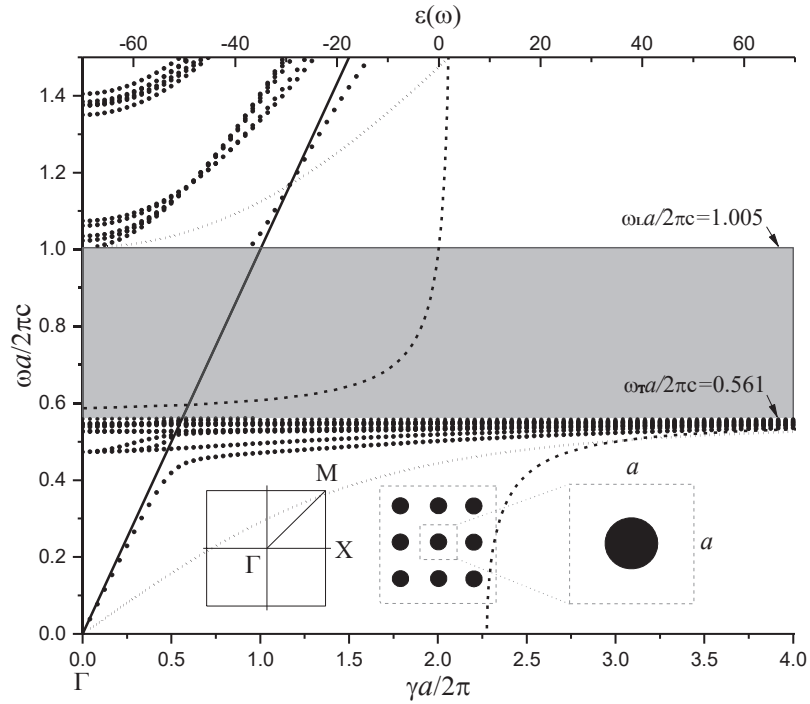


Figura 13. Estructura de bandas fotónicas fuera-del-plano dispersiva empezando en Γ para una red cuadrada de cilindros de óxido de magnesio de sección transversal circular rodeados de vacío. El periodo del CF es $a = 14\mu m$. La fracción de llenado es 0.1. La línea sólida (punteada) [discontinua] representa la línea de luz en el vacío (la línea de luz para valores positivos de $\varepsilon(\omega)$ de un medio de MgO homogéneo dispersivo) [la constante dieléctrica cuyos valores son asociados al eje superior]. El recuadro derecho (centrado) [izquierdo] muestra la CU (un corte transversal del CF) [la primera zona de Brillouin].

En la figura 13, la EBFF se presenta como modos de frecuencia en función de $\gamma a/2\pi$. El error en estos cálculos debajo de $\omega_T a/2\pi c$ se estimó menor a 1.5%, mientras que arriba de $\omega_L a/2\pi c$ 0.01%. Los modos de frecuencia empiezan en el punto de alta simetría Γ , luego γ , la componente oblicua del vector de onda, toma valores desde $\gamma a/2\pi = 0$ a $\gamma a/2\pi = 4$. Al incrementarse γ desde Γ , los modos electromagnéticos propagantes se comportan cercanamente a la línea de luz para valores debajo de $\omega a/2\pi c = 0.3$; esto se debe a la variación relativamente pequeña de $\varepsilon(\omega)$, desde ~ 9.4 a ~ 12 . Para valores de $\omega a/2\pi c$ entre 0.4 y 0.54, los modos de frecuencia empiezan a doblarse horizontalmente debido al rápido

incremento de $\varepsilon(\omega)$, desde ~ 16 a ~ 92 . Una densa cantidad de modos se encuentra entre $\omega a/2\pi c = 0.54$ y 0.559 , esto es consecuencia de que en esta región de frecuencias $\varepsilon(\omega)$ alcanza un pico positivo, 2413 en estos cálculos. Los modos entre ~ 0.57 y ~ 0.99 en la frecuencia normalizada, que corresponde a 12.20 y 21.19THz, donde la constante dieléctrica es negativa, no fueron calculados debido a que no se alcanzó convergencia con esta metodología en el equipo de cómputo disponible. Los modos de frecuencia entre 1.006 y 1.5, donde $\varepsilon(\omega)$ tiene valores desde ~ 0 a ~ 1.9 , muestran comportamiento con baja dispersión, con la singularidad esperada de degeneración de modos en ~ 1.17 donde $\varepsilon(\omega) \sim 1$ (la ventana de transparencia), y la línea de modos que empiezan en $\gamma a/2\pi \sim 0.958$ se comportan cercanos a la línea de luz; esta región puede ser considerada como una aproximación a la red vacía. Finalmente, modos que no se ven en la figura 12 asociados al campo magnético aparecen en Γ para $\omega a/2\pi c = 0.525, 1.034, \text{ y } 1.062$.

La figura 14, muestra una EBFF para el mismo CF que en el caso anterior, pero en este caso, los modos empiezan en el punto de alta simetría X.

El comportamiento de los modos presentados en las figuras 13 y 14 son muy similares. En ambos casos, se presenta degeneración de modos y coincidencia con las líneas de luz del vacío y de la red llena de MgO cuando $\varepsilon(\omega) \sim 1$ en $FN \sim 1.17$. Estos puntos son en $\gamma a/2\pi \sim 1.17$ y ~ 0.60 , y en ~ 1.05 y ~ 0.34 , en la figuras 13 y 14, respectivamente, y pueden ser calculados analíticamente desde la ecuación (16) considerando que la constante dieléctrica es igual a 1, obteniendo la ecuación

$$\left(q_x + \frac{2\pi}{a}m\right)^2 + \left(q_y + \frac{2\pi}{a}n\right)^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (83)$$

de donde llegamos a que

$$\frac{\gamma a}{2\pi} = \sqrt{\left(\frac{\omega a}{2\pi c}\right)^2 - \left\{ \left[\left(\frac{q_x a}{2\pi}\right)^2 + 2\left(\frac{q_x a}{2\pi}\right)m + m^2 \right] + \left[\left(\frac{q_y a}{2\pi}\right)^2 + 2\left(\frac{q_y a}{2\pi}\right)n + n^2 \right] \right\}}. \quad (84)$$

De la ecuación (84), para los modos que empiezan en Γ [X] en la figura 13 [14], haciendo $q_x = 0, q_y = 0, m = 0, \text{ y } n = 0$; $\gamma a/2\pi = 1.17$, y para $q_x = 0, q_y = 0, \text{ y } m = 1 \text{ y } n = 0$,

o viceversa; $\gamma a/2\pi = 0.607$. [$q_x a/2\pi = 0.5$, $q_y = 0$, $m = 0$, y $n = 0$; $\gamma a/2\pi = 1.057$, y para $q_x a/2\pi = 0.5$, $q_y = 0$, $m = 0$, y $n = 1$; $\gamma a/2\pi = 0.344$.]

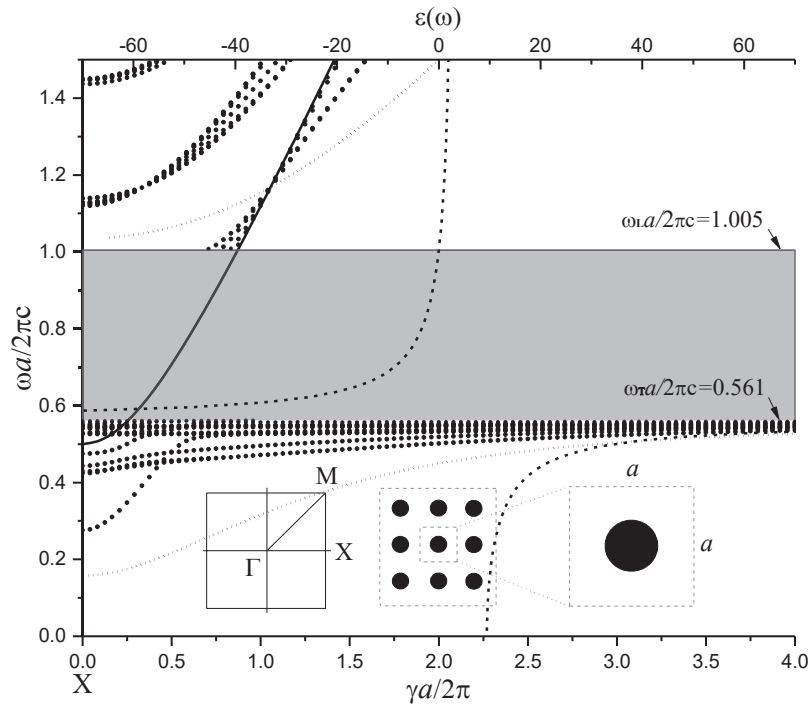


Figura 14. Estructura de bandas fotónicas fuera-del-plano dispersiva empezando en X para una red cuadrada de cilindros de óxido de magnesio de sección transversal circular rodeados de vacío. El periodo del CF es $a = 14\mu m$. La fracción de llenado es 0.1. La línea sólida (punteada) [discontinua] representa la línea de luz en el vacío (la línea de luz para valores positivos de $\varepsilon(\omega)$ de un medio de MgO homogéneo dispersivo) [la constante dieléctrica, cuyos valores son asociados al eje superior]. El recuadro derecho (centrado) [izquierdo] muestra la CU (un corte transversal del CF) [la primera zona de Brillouin].

En las cuatro secciones anteriores, se presentó el método utilizado para calcular las estructuras de bandas de un CF2D dispersivo, se corroboraron resultados fuera-del-plano sin dispersión y en-el-plano con dispersión de publicaciones previas, y se encontró buena concordancia, y por último, se presentaron las estructuras de bandas fotónicas fuera-del-plano de un CF2D dispersivo de cilindros de óxido de magnesio ordenados en red cuadrada.

CONCLUSIONES

Se calculó la difracción de un haz gaussiano en polarización TM por un cristal fotónico 1D truncado haciendo frontera con dos medios homogéneos. El cristal fue tratado como una película delgada inhomogénea con periodo a_x y ancho w_y y se usó el método de expansión de ondas planas para obtener sus eigenfrecuencias y eigenvectores cuando w_y tiende a infinito para hacer una expansión multimodal tipo Burckhardt-Fourier del campo en el cristal truncado. Se usaron expansiones tipo Rayleigh-Fourier en los medios homogéneos. En el primer caso, se estudió la difracción por un cilindro de sección transversal rectangular de índice de refracción bajo. La reflexión del EIT mostró algunos picos con dependencia angular y energética asociados a anomalías Rayleigh. En el segundo caso, fueron considerados hasta trece cilindros de sección transversal cuadrada e índice de refracción alto, separados una distancia cercana a la de la longitud de onda. El EIT-R mostró picos similares al caso de un cilindro que se incrementaban en magnitud de pico con el número de cilindros, y lo opuesto ocurrió para el EIT-T. Se demostró que estos picos pueden ser predichos con la fórmula del cuarto de onda usada en el área de películas delgadas. En ambos casos fueron presentadas intensidades del campo esparcido.

Por otro lado, se calcularon las estructuras de bandas fuera-del-plano a partir de los puntos de alta simetría Γ y X de un cristal fotónico 2D dispersivo de cilindros de óxido de magnesio ordenados en red cuadrada en vacío utilizado el método iterativo para cristales fotónicos dispersivos. Una estructura de bandas fuera-del-plano no dispersiva y una estructura de bandas en-el-plano dispersiva fueron reproducidas con buen acuerdo de publicaciones previas para la validación de los resultados. El comportamiento de los modos propagantes resultó tener alta dependencia del valor de la constante dieléctrica. Para las frecuencias más bajas, se encontró que los modos se doblan drásticamente al horizonte cuando la constante dieléctrica se incrementa a un valor muy positivo. Los modos donde la constante dieléctrica es negativa, para las frecuencias intermedias, no fueron calculados por falta de convergencia en el equipo de cómputo utilizado. Para la región arriba de la frecuencia circular fonónica óptica longitudinal, que puede considerarse una aproximación a la red vacía pues la constante dieléctrica tiene valores entre ~ 0 y ~ 1.9 , algunos modos se comportan cercanos a sus

respectivas líneas de luz, y aparecen puntos de degeneración de modos en las ventanas de transparencia que pueden ser calculados analíticamente con la ecuación (84). El método utilizado resultó ser preciso cuando la constante dieléctrica es positiva para obtener las estructuras de bandas en- y fuera-del-plano dispersivas, y se requiere de una modificación a la metodología o de equipo de cómputo más capaz para obtener convergencia cuando la constante dieléctrica es negativa.

REFERENCIAS

1. Lord Rayleigh, "On the electromagnetic theory of the light," *Philos. Mag.* 12, 81–101 (1881).
2. W. von Ignatowsky, "Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht," *Ann. Phys.* 323, 495–522 (1905).
3. B. Sieger, "Die Beugung einer ebenen elektrischen Welle an einem Schirm von elliptischem Querschnitt," *Ann. Phys.* 332, 626–664 (1908).
4. P. M. Morse and P. L. Rubenstein, "The diffraction of waves by ribbons and by slits," *Phys. Rev.* 54, 895–898 (1938).
5. E. W. Montroll and R. W. Hart, "Scattering of plane waves by soft obstacles. II. Scattering by cylinders, spheroids, and disks," *J. Appl. Phys.* 22, 1278–1289 (1951).
6. J. R. Wait, "Scattering of plane waves from a circular dielectric cylinder at oblique incidence," *Can. J. Phys.* 33, 189–195 (1955).
7. H. C. Van de Hulst, *Light Scattering by Small Particles* (Dover, 1957), pp. 300–305.
8. B. K. Larkin and S. W. Churchill, "Scattering and absorption of electromagnetic radiation by infinite cylinders," *J. Opt. Soc. Am.* 49, 188–190 (1959).
9. E. Matijevic, R. H. Ottewill, and M. Kerker, "Light scattering by infinite cylinders. spider fibers," *J. Opt. Soc. Am.* 51, 115–116 (1961).
10. C. Yeh, "The diffraction of waves by a penetrable ribbon," *J. Math. Phys.* 4, 65–71 (1963).
11. C. Yeh, "Scattering of obliquely incidence light wave by elliptical fibers," *J. Opt. Soc. Am.* 54, 1227–1231 (1964).
12. C. Yeh, "Backscattering cross section of a dielectric elliptical cylinder," *J. Opt. Soc. Am.* 55, 309–314 (1965).
13. J. R. Wait, "The long wavelength limit in scattering from a dielectric cylinder at oblique incidence," *Can. J. Phys.* 43, 2212–2215 (1965).
14. M. Kerker, D. Cooke, W. A. Farone, and R. A. Jacobsen, "Electromagnetic scattering from an infinite circular cylinder at oblique incidence. I. Radiance function for $m=1.46$," *J. Opt. Soc. Am.* 56, 487–491 (1966).
15. W. A. Farone and M. Kerker, "Light scattering from long submicron glass cylinders at normal incidence," *J. Opt. Soc. Am.* 56, 481–487 (1966).
16. D. D. Cooke and M. Kerker, "Light scattering from long submicron thin glass cylinders at oblique incidence," *J. Opt. Soc. Am.* 59, 43–48 (1969).
17. D. Marcuse, "Light scattering from unclad fibers: ray theory," *Appl. Opt.* 14, 1528–1532 (1975).
18. A. Nelson and L. Eyges, "Electromagnetic scattering from dielectric rods of arbitrary cross section," *J. Opt. Soc. Am.* 66, 254–259 (1976).
19. R. D. Birkhoff, J. C. Ashley, H. H. Hubbell, and L. C. Emerson, "Light scattering from micron size fiber," *J. Opt. Soc. Am.* 67, 564–569 (1977).
20. C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (Wiley, 1983), pp. 194–213.
21. G. L. Stephens, "Scattering of plane waves by soft obstacles: anomalous diffraction theory for circular cylinders," *Appl. Opt.* 23, 954–956 (1984).

22. J. J. Greffet, "Backscattering of s-polarized light from a cloud of small particles above a dielectric substrate," *Waves Random Media* 1, S65–S73 (1991).
23. V. Twersky, "Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders and by two cylinders," *J. Appl. Phys.* 23, 407–414 (1952).
24. R. V. Row, "Theoretical and experimental study of electromagnetic scattering by two identical conducting cylinders," *J. Appl. Phys.* 26, 666–675 (1955).
25. G. O. Olaofe, "Scattering by an arbitrary configuration of parallel circular cylinders," *J. Opt. Soc. Am.* 60, 1233–1236 (1970).
26. C. S. Lee, "Dependent scattering of an obliquely incident plane wave by a collection of parallel cylinders," *J. Appl. Phys.* 68, 4952–4957 (1990).
27. D. Felbacq, G. Tayeb, and D. Maystre, "Scattering by a random set of parallel cylinders," *J. Opt. Soc. Am. A* 11, 2526–2538 (1994).
28. S. Lee and J. A. Grzesik, "Light scattering by closed spaced parallel cylinders embedded in a semi-infinite dielectric medium," *J. Opt. Soc. Am. A* 15, 163–173 (1998).
29. L. M. Sanchez-Brea, "Diffraction of cylinders with longitudinal surface structure," *J. Opt. Soc. Am. A* 21, 1102–1108 (2004).
30. R. Munguía-Arvalo, R. García-Llamas, and J. Gaspar-Armenta, "Bloch modes at the surface of a photonic crystal interacting with a waveguide," *J. Opt. Soc. Am. A* 31, 1588–1594 (2014).
31. T. Tamir, H. C. Wang, and A. A. Oliner, "Wave propagation in sinusoidally stratified dielectric media," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 12, 323–335 (1964).
32. C. C. Yeh, K. F. Casey, and Z. A. Kaprielian, "Transverse magnetic wave propagation in sinusoidally dielectric stratified media," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 13, 297–302 (1965).
33. C. B. Burckhardt, "Diffraction of a plane wave at a sinusoidally stratified dielectric grating," *J. Opt. Soc. Am.* 56, 1502–1508 (1966).
34. F. G. Kaspar, "Diffraction by thick, periodically stratified gratings with complex dielectric constant," *J. Opt. Soc. Am.* 63, 37–45 (1973).
35. E. Glass and A. A. Maradudin, "Diffraction of light by a periodically modulated dielectric half-space," *Phys. Rev. B* 29, 1840–1847 (1984).
36. M. G. Moharam, E. B. Grann, D. A. Pommet, and T. K. Gaylord, "Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings," *J. Opt. Soc. Am. A* 12, 1068–1076 (1995).
37. E. Yablonovitch, "Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics," *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059 (1987).
38. E. Yablonovitch, and T. J. Gmitter, "Photonic Band Structure: The Face-Centered-Cubic Case," *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1950 (1989).
39. K. M. Ho, C. T. Chan, and C. M. Soukoulis, "Existence of a Photonic Band Gap in Periodic Dielectric Structures," *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3152 (1990).
40. M. Plihal, and A. A. Maradudin, "Photonic band structures of two-dimensional systems: The triangular lattice," *Phys. Rev. B* **44**, 8565 (1991).
41. R. D. Meade, K. D. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos, "Existence of a photonic band gap in two dimensions," *Appl. Phys. Lett.* **61**, 495 (1992).
42. R. D. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer, and J. D. Joannopoulos, "Nature of the photonic band gap: some insights from a field analysis," *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 328 (1993).

43. C. M. Anderson, and K. P. Giapis, "Larger Two-Dimensional Photonic Band Gaps," *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2949 (1996).
44. M. Qiu, and S. He, "Large complete band gap in two-dimensional photonic crystals with elliptic air holes," *Phys. Rev. B.* **60**, 10610 (1999).
45. R. Wang, X. H. Wang, B. Y. Gu, and G. Z. Yang, "Effects of shapes and orientation of scatterers and lattice symmetries on the photonic band gap in two-dimensional photonic crystals," *J. Appl. Phys.* **90**, 4307 (2001).
46. S. Foteinopoulou, A. Rosenberg, M. M. Sigalas, and C. M. Soukoulis, "In- and out-of-plane propagation of electromagnetic waves in low index contrast two dimensional photonic crystals," *J. Appl. Phys.* **89**, 824 (2001).
47. L. Zhou, M. Hu, F. Jia, C. Liao, Z. Feng, and X. Feng, "Effect on Bandgap of Two-dimensional Square Photonic Crystal with Different Incidence Angle," *Acta Photonica Sinica* **37**, 2213 (2008).
48. L. Zhou, M. Hu, K. Zhang, and X. Chen, "Band Structure of 2D Air-hole-type Triangular Photonic Crystal with Oblique Incidence," *Science & Technology Review* **29**, 46 (2011). V. Kuzmiak, A. A. Maradudin, and A. R. McGurn, "Photonic band structures of two-dimensional systems fabricated from rods of a cubic polar crystal," *Phys. Rev. B* **55**, 4298 (1997).
49. V. Kuzmiak, and A. A. Maradudin, "Photonic band structures of one- and two-dimensional periodic systems with metallic components in the presence of dissipation," *Phys. Rev. B* **55**, No. 12, 7427 (1997).
50. V. Kuzmiak, and A. A. Maradudin, "Distribution of electromagnetic field and group velocities in two-dimensional periodic systems with dissipative metallic components," *Phys. Rev. B* **58**, 7230 (1998).
51. M. J. Steel, and R. M. Osgood, Jr., "Elliptical-hole photonic crystal fibers," *Opt. Lett.* **26**, 229 (2001).
52. O. Toader, and S. John, "Photonic band gap enhancement in frequency-dependent dielectrics," *Phys. Rev. E* **70**, 046605 (2004).
53. A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, and J. A. Gaspar-Armenta, "Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive left-handed materials and dielectrics in the unit cell," *J. Opt. Soc. Am. B* **24**, 3091 (2007).
54. M. Luo, and Q. H. Liu, "Accurate determination of band structures of two-dimensional dispersive anisotropic photonic crystals by the spectral element method," *J. Opt. Soc. Am. A* **26**, 1598 (2009).
55. A. H. B. Ghasemi, S. Mandegarian, H. Kebriti, and H. Latifi, "Bandgap generation and enhancement in polaritonic cylinder square-lattice photonic crystals," *J. Opt.* **14**, 055103 (2012).
56. E. Guevara-Cabrera, M.A. Palomino-Ovando, B. Flores-Desirena, and J. A. Gaspar-Armenta, "Dispersive photonic crystals from the plane wave method," *Physica B* **484**, 53 (2016).
57. R. Petit, ed., *Electromagnetic Theory of Gratings* (Springer, 1980).
58. H. A. Macleod, *Thin-Film Optical Filters* (Institute of Physics, 1986).
59. Mary L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (John Wiley & Sons, 1983) Segunda edición. Página 313.

APÉNDICE I

SERIES DE FOURIER

Una serie de Fourier, es una serie infinita que converge a una función periódica haciendo una combinación de onda senoidales simples, es decir, descompone cualquier función periódica en la suma de un conjunto de funciones oscilantes senos y cosenos.

Una función es periódica si repite sus valores en intervalos regulares o periodos, cumpliéndose en una dimensión que

$$f(x) = f(x + a), \quad (\text{I.1})$$

donde a es el periodo. Esto se debe cumplir para toda x .

Para que una función pueda representarse como una serie de Fourier, debe cumplir las condiciones de Dirichlet⁵⁹:

- Debe ser periódica de periodo 2π .
- Debe ser mono-valuada entre $-\pi$ y π .
- Debe tener un número finito de valores máximos y mínimos en un periodo.
- Debe tener un número finito de discontinuidades en un periodo.
- La integral del valor absoluto de la función en un periodo debe ser finita.

Si se satisfacen las condiciones de Dirichlet, la serie de Fourier de una función $f(x)$ con periodo a , se puede escribir como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{a}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{a}nx\right) \right], \quad (\text{I.2})$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de la serie de Fourier de la función $f(x)$.

Las series de Fourier se pueden expresar en notación compleja utilizando la identidad de Euler;

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (\text{I.3})$$

donde i es la unidad imaginaria. De esta manera, la serie de Fourier en notación compleja es

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n \exp\left(+i \frac{2\pi}{a} nx\right), \quad (\text{I.4})$$

donde los coeficientes f_n están dados por

$$f_n = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a} nx\right). \quad (\text{I.5})$$

EXPANSIONES BURCKHARDT-FOURIER Y RAYLEIGH-FOURIER

La expansión Burckhardt³³-Fourier consiste en utilizar los eigenvectores y eigenvalores obtenidos de la solución del cristal fotónico 1D infinito; donde se da una frecuencia específica y se obtienen los vectores de onda reales e imaginarios asociados, para expandir el campo en el cristal fotónico 1D truncado. Los coeficientes desconocidos que multiplican a los eigenvectores (ver Ec. 52) son las variables a encontrar. A su vez, la expansión Rayleigh-Fourier consiste básicamente en expandir el campo que satisface la ecuación de Helmholtz en el medio homogéneo como una serie de Fourier (ver Ec. 53). Los coeficientes desconocidos de ambas expansiones serán calculados al aplicar las condiciones en la frontera.

APÉNDICE II

LA PRIMERA ZONA DE BRILLOUIN

La primera zona de Brillouin es una celda en el origen del espacio recíproco (red recíproca); la transformada de Fourier de la función de onda del espacio real (red real). Dentro de esta zona, se localiza la zona irreducible de Brillouin, donde se encuentran las soluciones de los campos en todo el espacio.

Los vectores base del espacio recíproco se usan para delimitar la primera zona de Brillouin trazándoles una línea transversal a la mitad desde el origen hacia la vecindad con las celda más próximas.

A partir de los vectores base del espacio real se encuentran los vectores base del espacio recíproco son la relación

$$\vec{g}_j \cdot \vec{a}_k = 2\pi\delta_{j,k}, \quad (\text{II.1})$$

donde \vec{a}_k es un vector base del espacio real, y \vec{g}_j es un vector base del espacio recíproco.

El caso más simple es el de la red uni-dimensional. El vector del espacio real es

$$\vec{a}_1 = a_x \hat{i}, \quad (\text{II.2})$$

y de la relación (II.1), el del espacio recíproco es

$$\vec{g}_1 = \frac{2\pi}{a_x} \hat{i}. \quad (\text{II.3})$$

Para una red cuadrada bi-dimensional, los vectores base del espacio real son

$$\vec{a}_1 = a_x \hat{i}, \quad (\text{II.4})$$

y

$$\vec{a}_2 = a_y \hat{j}. \quad (\text{II.5})$$

De la relación (II.1), se llega al sistema de ecuaciones

$$g_{1x}a_{1x} + g_{1y}a_{1y} = 2\pi, \quad (\text{II.6})$$

$$g_{1x}a_{2x} + g_{1y}a_{2y} = 0, \quad (\text{II.7})$$

$$g_{2x}a_{1x} + g_{2y}a_{1y} = 0, \quad (\text{II.8})$$

y

$$g_{2x}a_{2x} + g_{2y}a_{2y} = 2\pi. \quad (\text{II.9})$$

Conociendo las componentes de los vectores de la red real, de las ecuaciones (II.6-II.9), los vectores base de la red recíproca para una red cuadrada bi-dimensional son

$$\vec{g}_1 = \frac{2\pi}{a_x} \hat{i} \quad (\text{II.10})$$

y

$$\vec{g}_2 = \frac{2\pi}{a_y} \hat{j}. \quad (\text{II.11})$$

Para estos dos casos, la primera zona de Brillouin abarca desde $-\pi/a_x$ hasta $+\pi/a_x$ en el eje x en la red uni-dimensional, y en la bi-dimensional también desde $-\pi/a_y$ hasta $+\pi/a_y$ en el eje y . La figura II.1, muestra la primera zona de Brillouin y la variación del vector de onda de Bloch \vec{q} en la zona irreducible para la red cuadrada bi-dimensional.

Para el caso de una red triangular bi-dimensional, los vectores base en el espacio real son

$$\vec{a}_1 = a \hat{i} \quad (\text{II.12})$$

y

$$\vec{a}_2 = a \cos \varphi \hat{i} + a \sin \varphi \hat{j}. \quad (\text{II.13})$$

donde $\varphi = 60^\circ$ (para una red cuadrada $\varphi = 90^\circ$).

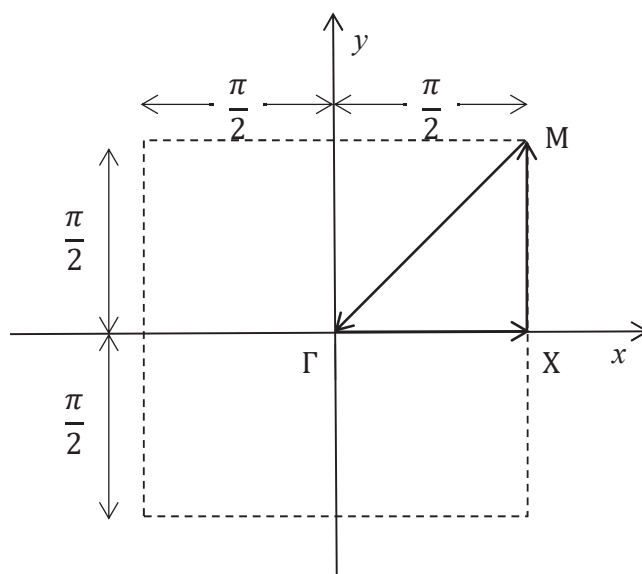


Figura II.1. Primera zona de Brillouin de una red cuadrada, mostrando la variación del vector de onda de Bloch \vec{q} , empezando en el origen Γ , luego a X, después a M, y finalmente de regreso a Γ .

Siguiendo el procedimiento anterior, se llega a que los vectores base del espacio recíproco son

$$\vec{g}_1 = \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (\sin \varphi \hat{i} - \cos \varphi \hat{j}) \quad (\text{II.14})$$

y

$$\vec{g}_2 = \frac{2\pi}{a \sin \varphi} \hat{j} \quad (\text{II.15})$$

La figura II.2, muestra la primera zona de Brillouin y la variación del vector de onda de Bloch \vec{q} en la zona irreducible para la red triangular bi-dimensional.

Las zonas irreducibles presentadas en ambos casos corresponderían a CFs formados por cilindros de sección transversal circular.

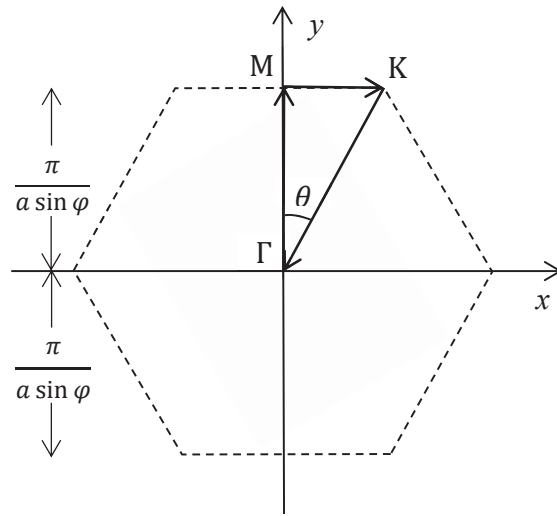


Figura II.2. Primera zona de Brillouin de una red triangular, mostrando la variación del vector de onda de Bloch \vec{q} , empezando en el origen Γ , luego a M, después a K, y finalmente de regreso a Γ . $\varphi = 60^\circ$. $\theta = 30^\circ$.

APÉNDICE III

LOS COEFICIENTES DE FOURIER $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$

Los coeficientes de Fourier del inverso de constante dieléctrica para los CF2D de este trabajo se calcularon numéricamente. A partir de la ecuación (21), considerando que se trata de una red cuadrada bi-dimensional, se obtiene la expresión

$$[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = \frac{1}{a_x} \frac{1}{a_y} \int_{-\frac{a_x}{2}}^{\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{a_y}{2}}^{\frac{a_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_2(x,y)} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy, \quad (\text{III.1})$$

en donde los límites de las integrales son los límites de la CU. Para resolver la expresión (III.1), el área que abarcan las integrales se descompone en áreas más pequeñas como lo muestra la figura III.1.

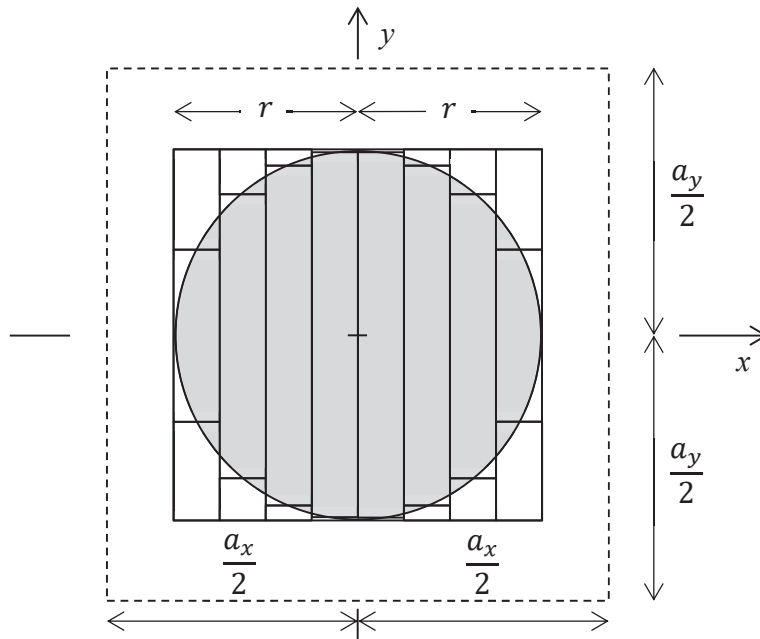


Figura III.1. Detalle de aproximación a la CU cuadrada con cilindro de sección transversal circular de radio r ; la cuál es contenida en el periodo a del medio inhomogéneo. Las constantes dieléctricas son ε_c y ε_e , para el cilindro y el medio exterior, respectivamente.

La CU se descompone en una serie de rectángulos en los cuales se valúan las integrales de la expresión (III.1). El círculo se delimita en un cuadrado que se divide en rectángulos longitudinales para aproximarse a la forma del círculo, verticalmente se divide en tres partes, y horizontalmente, en tantas partes según se quiera hacer una aproximación más exacta al círculo; que en el caso de la figura es de 8 partes, para cuestiones de visualización, formando un total de 24 rectángulos. La aproximación mínima de este trabajo fue de 384 rectángulos. Para el caso del área entre el cuadrado que delimita al círculo y los límites de la CU, se usan 4 rectángulos simples para cubrirla exactamente, como lo muestran las integrales (III.2).

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{-\frac{a_x}{2}}^{+\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{a_y}{2}}^{-r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \right. \\
 & \quad + \int_{-\frac{a_x}{2}}^{-r} \int_{-r}^{+r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
 & \quad + \int_{+r}^{+\frac{a_x}{2}} \int_{-r}^{+r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
 & \quad \left. + \int_{-\frac{a_x}{2}}^{+\frac{a_x}{2}} \int_{+r}^{+\frac{a_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \right] \tag{III.2}
 \end{aligned}$$

Las integrales (III.3), muestran el caso para un círculo dividido 32 partes en el eje horizontal con un total de 96 integrales de área. El primer término de cada tres corresponde al área del círculo con constante dieléctrica ε_c , mientras que los dos siguientes corresponden a las áreas superior e inferior entre el círculo y el cuadrado que lo delimita con constante dieléctrica ε_e . Por falta de espacio, solo se incluyeron las tres primeras secciones de 32 en total.

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{-r}^{-\frac{15}{16}r} \int_{-\frac{\sqrt{63}}{32}r}^{+\frac{\sqrt{63}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_y}ny\right) dx dy \right. \\
& + \int_{-r}^{-\frac{15}{16}r} \int_{+\frac{\sqrt{63}}{32}r}^{+r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_y}ny\right) dx dy \\
& + \int_{-r}^{-\frac{15}{16}r} \int_{-r}^{-\frac{\sqrt{63}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_y}ny\right) dx dy \\
& + \int_{-\frac{15}{16}r}^{-\frac{14}{16}r} \int_{-\frac{\sqrt{183}}{32}r}^{+\frac{\sqrt{183}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_y}ny\right) dx dy \\
& + \int_{-\frac{15}{16}r}^{-\frac{14}{16}r} \int_{+\frac{\sqrt{183}}{32}r}^{+r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_y}ny\right) dx dy \quad (\text{III.3}) \\
& + \int_{-\frac{15}{16}r}^{-\frac{14}{16}r} \int_{-r}^{-\frac{\sqrt{183}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_y}ny\right) dx dy \\
& + \int_{-\frac{14}{16}r}^{-\frac{13}{16}r} \int_{-\frac{\sqrt{295}}{32}r}^{+\frac{\sqrt{295}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_y}ny\right) dx dy \\
& + \int_{-\frac{14}{16}r}^{-\frac{13}{16}r} \int_{+\frac{\sqrt{295}}{32}r}^{+r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_y}ny\right) dx dy \\
& \left. + \int_{-\frac{14}{16}r}^{-\frac{13}{16}r} \int_{-r}^{-\frac{\sqrt{295}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_y}ny\right) dx dy + \dots \right]
\end{aligned}$$

APÉNDICE IV

SECCIÓN TRANSVERSAL POR UN CILINDRO CUADRADO

La figura IV.1, muestra la comparación entre una curva en la figura 7 en la referencia [18] y los datos obtenidos con el formalismo propuesto en este trabajo mostrando un buen acuerdo. Para calcular esta sección transversal, el haz especular de transmisión fue sustraído de la ecuación (79). Para obtener estos resultados, la ecuación matricial de esparcimiento de dimensión infinita fue truncada a $2N = 1,024$. Las constantes dieléctricas de los medios semi-infinitos homogéneos es $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1.0$. El ancho del haz gaussiano no difractado en polarización p se fijó a $w_g = 8a_0 = 6.4\mu m$, con $a_0 = 800nm$. El cilindro es de sección transversal cuadrada de lados $w_x = w_y = 0.5a_0 = 400nm$. La constante dieléctrica del cilindro es $\varepsilon_c = 2.0$. El periodo es $a_x = 64a_0 = 51.2\mu m$.

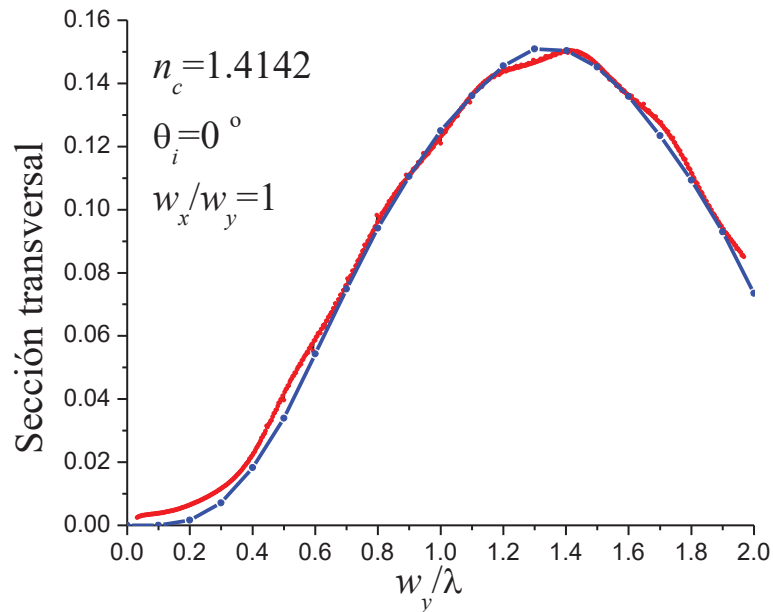


Figura IV.1. Sección transversal en unidades arbitrarias para incidencia normal de un cilindro cuadrado. La curva azul corresponde a los datos tomados de la figura 7 en la referencia [18] y la roja a los nuestros.

APÉNDICE V

ESTRUCTURAS DE BANDAS NO DISPERSIVAS EN- Y FUERA-DEL-PLANO

Se presenta la reproducción de resultados publicados previos para validar nuestros cálculos de las figuras 11, 13 y 14. En la figura V.1, se presenta la comparación entre datos presentados en la referencia [40] y nuestros cálculos para un CF2D de cilindros de dieléctricos ordenados en red triangular en vacío. Se dibujan los modos TE en-el-plano no dispersivos, y se encontró un muy buen acuerdo para un tamaño de renglón de matriz de 841.

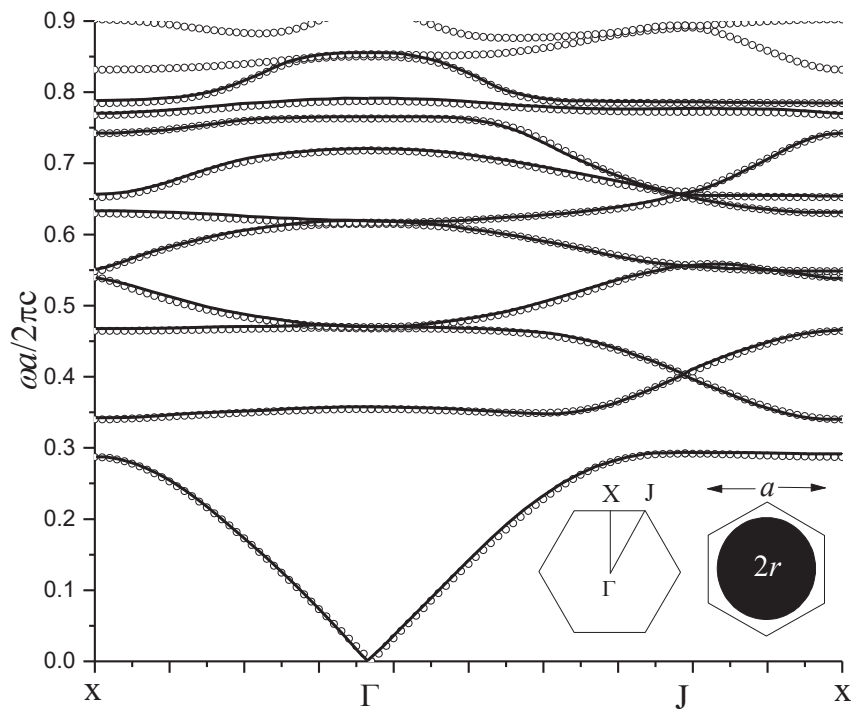


Figura V.1. Estructura de bandas fotónicas TE en el plano de una red triangular de cilindros de dieléctrico con $\epsilon = 14$ de sección transversal circular rodeados de vacío. Las líneas sólidas corresponden a los datos presentados en la referencia [40], mientras que los círculos a los nuestros. La constante de la red es a . La fracción de llenado es 0.431. El recuadro izquierdo muestra la primera zona de Brillouin, mientras que el derecho la CU.

En la figura V.2, se presenta la comparación entre datos presentados en la referencia [41] y nuestros cálculos para una red triangular de cilindros de vacío de sección transversal circular rodeados de dieléctrico. Se dibujan los modos fuera-del-plano no dispersivos

empezando en Γ para las frecuencias más bajas, y el radio de los cilindros es 0.475 en lugar de 0.48. Esta pequeña diferencia en el radio causa cambios significativos en la estructura fotónica, como puede verse al comparar las figuras 11 y V.2. Un error no intencionado pudo haber ocurrido con este parámetro en la referencia [41]. Así, un muy buen acuerdo se encuentra para un tamaño de renglón de matriz de 6,050. Los resultados de las figuras V.1 y V.2 validan los resultados de la figura 11, así como los de las figuras 11 y 12 validan las figuras 13 y 14.

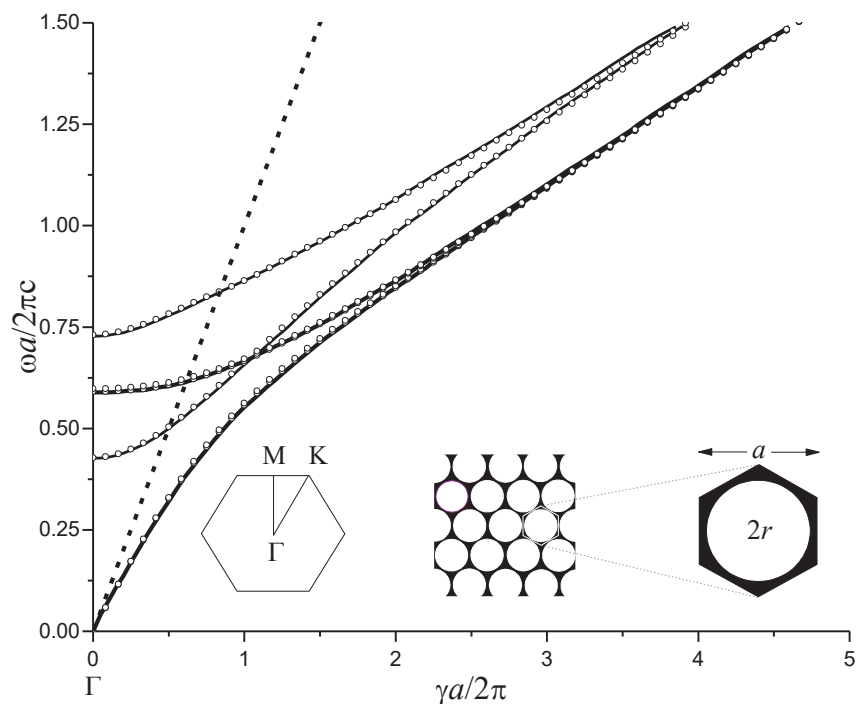


Figura V.2. Estructura de bandas fotónicas fuera-del-plano no dispersiva empezando en Γ para las frecuencias más bajas de una red triangular de cilindros de aire de sección transversal circular en un medio con constante dieléctrica $\epsilon = 13$. Las líneas sólidas corresponden a los datos presentados en la referencia [41], y los círculos a nuestros datos. Las líneas gruesas corresponden a modos degenerados. La constante de la red es a . El radio de los cilindros es $0.475a$. El recuadro derecho muestra la CU, el central un corte transversal del CF, y el izquierdo la primera zona de Brillouin.