UNIVERSIDAD DE SONORA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Posgrado en Matemáticas

Generalizaciones del Lema de Fatou y Optimalidad en Costo Promedio de Procesos de Decisión de Markov

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestra en Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Luz Esmeralda Almada Valenzuela

Director de tesis: Dr. Fernando Luque Vásquez

Hermosillo, Sonora, México, 30 de julio de 2020

SINODALES

Dr. Raquiel Rufino López Martínez
Universidad Veracruzana

Dr. Fernando Luque Vásquez
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Óscar Vega Amaya
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios, gracias a ti estoy aquí hoy y he logrado todo esto.

Gracias a mi familia, por su cariño y apoyo incondicional; a mis padres, sin ellos no sería quien soy ahora, les estoy inmensamente agradecida por todo; a mis hermanos, saben que los adoro, gracias por no ser solo mis hermanos sino también mis amigos.

Muchas gracias a mi director de tesis y profesor Dr. Fernando Luque, por el tiempo dedicado a la preparación y revisión de este trabajo, que a pesar de la distancia debido a la pandemia se logro llevar a cabo.

Gracias a mis sinodales por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo, por sus observaciones y comentarios tan acertados.

Y por último pero no menos importante, gracias a mis amigos y compañeros, ustedes han hecho de este viaje toda una aventura.

Índice general

Introducción

El Lema de Fatou en su versión clásica, establece que la integral del límite inferior de una sucesión de funciones no negativas no es mayor que el límite inferior de la sucesión de integrales de las funciones. Este resultado tiene múltiples aplicaciones en áreas de análisis matemático, probabilidad, procesos estocásticos, entre otras. En algunas aplicaciones considerar una sola medida no es suficiente y es necesario considerar sucesiones de medidas de probabilidad o sucesiones de medidas que convergen en algún sentido a una medida. Para este caso, existen resultados que extienden el Lema de Fatou cuando se tiene una sucesión de medidas que converge débilmente, fuertemente o en la variación total.

El objetivo de este trabajo es analizar resultados recientes que generalizan el Lema de Fatou cuando la sucesión de medidas converge débilmente. Además presentaremos una aplicación a los procesos de control markovianos; centrándonos en la existencia de políticas óptimas para un problema de control óptimo en costo promedio.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se analizan los resultados cuando se tiene un espacio de medida fijo y para sucesiones de medidas que convergen fuertemente. Finalmente, el capítulo concluye mostrando, mediante un ejemplo, que la desigualdad de Fatou no necesariamente se cumple cuando la sucesión de medidas converge débilmente.

En el Capítulo 2, se presenta una generalización del Lema de Fatou por medio del concepto de *límite inferior generalizado* de una sucesión de funciones. Así mismo se establecen condiciones bajo las cuales se tiene la desigualdad de Fatou correspondiente cuando la sucesión de medidas converge débilmente. Igualmente se introducen condiciones necesarias para obtener la igualdad del límite inferior y el límite inferior generalizado de una sucesión de funciones.

Finalmente en el último capítulo se aplican los resultados obtenidos a procesos de control de Markov en espacios de Borel con criterio de costo promedio. Específicamente, bajo condiciones adecuadas en el modelo de control, se obtiene la desigualdad de optimalidad y se demuestra la existencia de políticas estacionarias óptimas.

La teoría desarrollada en el presente trabajo se basa, principalmente, en los artículos [4–8].

Capítulo 1

Lema de Fatou clásico y convergencia de medidas

1.1. Introducción

La versión clásica del Lema de Fatou establece que si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones no negativas definidas en un espacio de medida $(\mathbb{S}, \Sigma, \mu)$, entonces la integral del límite inferior de la sucesión no es mayor que el límite inferior de las integrales de las funciones, es decir,

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n d\mu. \tag{1.1}$$

Llamaremos a (1.1) desigualdad de Fatou y veremos que también se cumple bajo alguna de las siguientes condiciones:

- la sucesión de funciones es acotada por abajo por una función integrable;
- la sucesión de las partes negativas de las funciones es uniformemente integrable.

En algunas ocasiones, trabajar con resultados que consideran una sola medida no es suficiente, pues muchos problemas en teoría de probabilidad y sus aplicaciones, como veremos en el Capítulo 3, tratan con sucesiones de medidas que convergen en algún sentido a una medida μ. Por lo tanto, es conveniente extender el Lema de Fatou para sucesiones de funciones y sucesiones de medidas. Por supuesto, los resultados dependerán del tipo de convergencia de la sucesión de medidas. En este sentido, además del Lema de Fatou, en este capítulo abordaremos los tipos de *convergencia débil*, y *convergencia fuerte*. Asimismo se estudian también las relaciones que hay entre estos tipos de convergencia.

1.2. Lema de Fatou para funciones acotadas inferiormente.

Dado un espacio medible $(\mathbb{S},\Sigma)$ denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{S})$ la familia de todas las medidas finitas no negativas en $(\mathbb{S},\Sigma)$ y por $\mathbb{P}(\mathbb{S})$ la familia de todas las medidas de probabilidad en $(\mathbb{S},\Sigma)$. Cuando $\mathbb{S}$ sea un espacio métrico siempre consideraremos $\Sigma := \mathcal{B}(\mathbb{S})$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ es la σ- álgebra de Borel en $\mathbb{S}$. $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales y $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty,+\infty]$ es el conjunto de los números reales extendidos. Si A es un subconjunto de $\mathbb{S}$, $\mathbf{I}_A$ representa la función indicadora de A.

La integral $\int_{\mathbb{S}} f(s)\mu(ds)$ de una función medible $f:\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}$ con respecto a una medida μ está definida si

$$\text{mín}\{\int_{\mathbb{S}} f^{+}(s)\mu(ds), \int_{\mathbb{S}} f^{-}(s)\mu(ds)\} < +\infty, \tag{1.2}$$

donde $f^{+}(s) = \text{máx}\{f(s),0\}$ y $f^{-}(s) = -\,\text{mín}\{f(s),0\}$, $s\in\mathbb{S}$. Si se cumple (1.2) entonces la integral se define como

$$\int_{\mathbb{S}} f(s)\mu(ds) := \int_{\mathbb{S}} f^{+}(s)\mu(ds) - \int_{\mathbb{S}} f^{-}(s)\mu(ds).$$

Para $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{S})$ consideremos el espacio vectorial $L_1(\mathbb{S};\mu)$ de todas las funciones medibles $f:\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}$, cuyos valores absolutos tienen integrales finitas, esto es, $f\in L_1(\mathbb{S};\mu)$ si $\int_{\mathbb{S}} |f(s)|\mu(ds) < +\infty$.

A continuación presentamos el Lema de Fatou para funciones acotadas inferiormente.

Teorema 1.2.1 (Lema de Fatou). *Sea $(\mathbb{S},\Sigma,\mu)$ espacio de medida y $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles. Si existe $g\in L_1(\mathbb{S};\mu)$ tal que $f_n\geq g$ para todo $n\geq 1$, entonces se cumple la desigualdad (1.1).*

Demostración. Puesto que $f_n\geq g$, tenemos que $f_n-g\geq 0$. Entonces aplicando el Lema de Fatou clásico a la sucesión $\{f_n-g\}$ se sigue que

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty}(f_n-g)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{S}}(f_n-g)d\mu$$

por lo tanto

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu - \int_{\mathbb{S}} g d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{S}} f_n d\mu - \int_{\mathbb{S}} g d\mu,$$

de donde se sigue (1.1). ∎

Corolario 1.2.2. *Sea* $(\mathbb{S}, \Sigma, \mu)$ *espacio de medida y* $\{f_n\}$ *sucesión de funciones medibles. Si* $g \in L_1(\mathbb{S}; \mu)$ *y* $f_n \leq g$ *para todo* $n \geq 1$*, entonces*

$$\int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n d\mu$$

Demostración. Se sigue aplicando directamente el Teorema 1.2.1 a la sucesión $\{-f_n\}$. ■

Ahora bien, si en el Teorema 1.2.1 en lugar de una sola función g consideramos una sucesión de funciones $\{g_n\}_{n\geq 1}$, podemos modificar un poco las condiciones para obtener la misma desigualdad. Esto lo vemos en el siguiente corolario.

Corolario 1.2.3. *Sea* $(\mathbb{S}, \Sigma, \mu)$ *espacio de medida y* $\{f_n\}$ *sucesión de funciones medibles. Entonces la desigualdad (1.1) se cumple si existe una sucesión* $g_n \in L_1(\mathbb{S}; \mu)$ *tal que* $f_n \geq g_n$ *para todo* $n \geq 1$ *y*

$$-\infty < \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n d\mu. \tag{1.3}$$

Demostración. Si una de las siguientes desigualdades

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n d\mu < +\infty, \quad -\infty < \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \tag{1.4}$$

no se cumple, entonces la desigualdad (1.1) se cumple trivialmente. Supongamos ahora que ambas desigualdades en (1.4) se cumplen. La primera desigualdad en (1.4) implica

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n d\mu < +\infty. \tag{1.5}$$

Puesto que $f_n \geq g_n$, del Lema de Fatou para funciones no negativas aplicado a la sucesión $\{f_n - g_n\}_{n\geq 1}$ se sigue que

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} (f_n - g_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} (f_n - g_n) d\mu. \tag{1.6}$$

Las desigualdades (1.3) y (1.5) implican que $-\infty < \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} g_n d\mu < +\infty$. Por lo anterior y la segunda desigualdad de (1.4) podemos aplicar las propiedades del $\liminf$ y $\limsup$ de donde tenemos que

$$\liminf_{n\to\infty} f_n - \limsup_{n\to\infty} g_n \leq \liminf_{n\to\infty} (f_n - g_n) \quad \mu - c.s$$

y de lo siguiente se sigue la desigualdad (1.1),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu - \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} g_n d\mu &\leq \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty}(f_n - g_n)d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} (f_n - g_n)d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n d\mu - \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} g_n d\mu,\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se tiene por (1.6), la tercera se sigue de propiedades del $\liminf$ y la última la obtenemos de (1.3). ■

1.3. Integrabilidad uniforme y la desigualdad de Fatou

Cuando el espacio es de medida finita, podemos extender el Teorema 1.2.1 mediante el concepto de integrabilidad uniforme.

Definición 1.3.1. *Una familia $\{f_t, t \in T\}$ de funciones medibles en $L_1(\mathbb{S};\mu)$ indexada por T es uniformemente integrable (u.i.) si*

$$\lim_{C\to\infty} \sup_{t\in T} \int_{\{|f_t|\geq C\}} |f_t| d\mu = 0.$$

Observación 1.3.2. *Una familia $\{f_t, t \in T\}$ uniformemente integrable es $L_1(\mathbb{S};\mu)$-acotada, i.e., $\sup_{t\in T} \int_{\mathbb{S}} |f_t(s)|\mu(ds) < \infty$. Para ver esto notemos que dado $\epsilon > 0$, existe $C > 0$ suficientemente grande tal que para toda $t \in T$ se cumplen las siguientes desigualdades,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}} |f_t| d\mu &= \int_{\{|f_t|\geq C\}} |f_t| d\mu + \int_{\{|f_t|< C\}} |f_t| d\mu \\ &\leq \epsilon + C\mu(\mathbb{S}).\end{aligned}$$

Con el concepto de integrabilidad uniforme, se establecen otras condiciones en la sucesión de funciones bajo las cuales se cumple la desigualdad de Fatou (1.1). Esto lo enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3. *Sea* $(\mathbb{S}, \Sigma, \mu)$ *un espacio de medida finita y* $\{f_n\} \subseteq L_1(\mathbb{S}; \mu)$. *Si* $\{f_n^-\}$ *es uniformemente integrable, entonces*

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n d\mu$$

Demostración. Observe que para $C > 0$ se tiene,

$$\int_{\mathbb{S}} f_n d\mu = \int_{\{f_n < -C\}} f_n d\mu + \int_{\{f_n \geq -C\}} f_n d\mu$$

Por la integrabilidad uniforme de la sucesión $\{f_n^-\}$, dado $\epsilon > 0$ existe $C > 0$ suficientemente grande tal que $|\int_{\{f_n<-C\}} f_n d\mu| < \epsilon$ para toda $n \geq 1$.

Por otra parte, puesto que $f_n \mathbf{I}_{\{f_n \geq -C\}} \geq -C$ y la función constante igual a $-C$ pertenece a $L_1(\mathbb{S}; \mu)$, del Teorema 1.2.1 obtenemos

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n \mathbf{I}_{\{f_n \geq -C\}} d\mu &\geq \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n \mathbf{I}_{\{f_n \geq -C\}} d\mu \\ &\geq \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu, \end{aligned}$$

donde la ultima desigualdad se sigue del hecho de que $f_n \mathbf{I}_{\{f_n \geq -C\}} \geq f_n$ para toda $n \geq 1$. Por lo tanto

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n d\mu \geq \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu - \epsilon.$$

Puesto que ϵ es arbitrario, concluimos que

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n d\mu.$$

■

La condición de integrabilidad uniforme en el Teorema 1.3.3 es más general que la condición en el Teorema 1.2.1, es decir, las condiciones requeridas en el Teorema 1.2.1 implican la condición del Teorema 1.3.3, esto lo vemos con las siguientes proposiciones.

Proposición 1.3.4. *Sea* $g : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g \in L_1(\mathbb{S}; \mu)$. *Entonces*

$$\lim_{K\to\infty} \int_{\{|g|\geq K\}} |g(s)| \mu(ds) = 0.$$

Demostración. Consideremos que

$$|g(s)| \mathbf{I}_{\{|g|<K\}}(s) \uparrow |g(s)| \quad \text{cuando } K \to \infty,$$

y la igualdad

$$\int_{\{|g|\geq K\}} |g(s)|\mu(ds) = \int_{\mathbb{S}} |g(s)|\mu(ds) - \int_{\{|g|<K\}} |g(s)|\mu(ds).$$

Entonces, del teorema de la convergencia monótona

$$\lim_{K\to\infty} \int_{\{|g|\geq K\}} |g(s)|\mu(ds) = 0.$$

■

Proposición 1.3.5. *Si* $f_n, g : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ *,* $n \in \mathbb{N}$ *son tales que* $f_n \geq g$ *y* $g \in L_1(\mathbb{S};\mu)$ *entonces la sucesión de partes negativas* $\{f_n^-\}$ *es uniformemente integrable.*

Demostración. Puesto que $f_n \geq g$ se tiene que

$$|f_n^-(s)| \leq |g(s)|, \quad \forall s \in \mathbb{S},\ n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto, para todo $K > 0$,

$$\int_{\{|f_n^-|\geq K\}} |f_n^-(s)|\mu(ds) \leq \int_{\{|g|\geq K\}} |g(s)|\mu(ds)\ \forall s\ n \in \mathbb{N}$$

y

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_n^-|\geq K\}} |f_n^-(s)|\mu(ds) \leq \int_{\{|g|\geq K\}} |g(s)|\mu(ds).$$

De la Proposición 1.3.4 se sigue entonces que

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_n^-|\geq K\}} |f_n^-(s)|\mu(ds) = 0$$

y por lo tanto $\{f_n^-\}$ es uniformemente integrable. ■

Además, el siguiente ejemplo muestra que se puede tener integrabilidad uniforme y no cumplirse la condición del Teorema 1.2.1.

Ejemplo 1.3.6. *Sea* $\mathbb{S} = (0,1)$*,* μ *la medida de Lebesgue y* $\{f_n\}$ *la sucesión definida por*

$$f_n(s) := \frac{-n}{\log n} \boldsymbol{I}_{(0,1/n)}(s), \quad \textit{para } n \geq 3,$$

donde $\log n$ *es el logaritmo natural. Notemos que la sucesión* $\{f_n\}$ *no es acotada inferiormente por una función integrable, es decir, no existe* $g \in L_1(\mathbb{S};\mu)$ *tal que* $f_n \geq g$*. De lo* *contrario, tendríamos que*

$$g(s) \leq \frac{-n}{\log n} \boldsymbol{I}_{(1/(n+1),1/n)}(s), \qquad s \in (0,1),\ n \geq 3$$

lo que implica

$$|g(s)| \geq \frac{n}{\log n} \boldsymbol{I}_{(1/(n+1),1/n)}(s), \qquad s \in (0,1),\ n \geq 3.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}} |g(s)|\mu(ds) &\geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{\log n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log n} = \infty, \end{aligned}$$

lo cual prueba que, $g \notin L_1(\mathbb{S}, \mu)$.

Ahora probaremos que $\{f_n\}$ es uniformemente integrable. Para $K > 0$ y $n \geq 3$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |f_n(s)| \boldsymbol{I}_{[|f_n| \geq K]}(s)\mu(ds) &= \int_{[0,1]} |\frac{-n}{\log n}| \boldsymbol{I}_{[0,1/n]}(s) \boldsymbol{I}_{[|f_n| \geq K]}(s)\mu(ds) \\ &= \int_{[0,1/n]} \frac{n}{\log n} \boldsymbol{I}_{[|f_n| \geq K]}(s)\mu(ds) \\ &= \frac{1}{\log n} \leq \frac{1}{\log K} \to 0 \end{aligned}$$

cuando $K \to \infty$. Por lo tanto $\{f_n\}$ uniformemente integrable.

El siguiente ejemplo muestra que se cumple la condición (1.3) y la sucesión de partes negativas de las funciones no es uniformemente integrable.

Ejemplo 1.3.7. *Sea $\mathbb{S} = [0,1)$, $\mathcal{B}[0,1)$ y λ la medida de Lebesgue. Consideremos los intervalos*

$$\begin{array}{llllllll} I_{11} = [0,1/2], & & & \\ I_{21} = [0,1/4], & I_{22} = [1/4,1/2], & & \\ I_{31} = [0,1/6], & I_{32} = [1/6,1/3], & I_{33} = [1/3,1/2], & \\ I_{41} = [0,1/8], & I_{42} = [1/8,1/4], & I_{43} = [1/4,3/8], & I_{44} = [3/8,1/2], \\ \quad\vdots & & & \end{array} \tag{1.7}$$

$$I_{n1} = [0, 1/2n], \quad \ldots \quad I_{nk} = [(k-1)/2n, k/2n], \quad \ldots \quad I_{nn} = [(n-1)/2n, 1/2],$$

y defina ahora los intervalos J_m *de la siguiente manera*

$$
\begin{array}{rclrclrcl}
J_1 & = & I_{11}, & & & & & & \\
J_2 & = & I_{21}, & J_3 & = & I_{22}, & & & \\
J_4 & = & I_{31}, & J_5 & = & I_{32}, & J_6 & = & I_{33}, \\
& \vdots & & & & & & &
\end{array}
\tag{1.8}
$$

Nótese que si $\frac{(n-1)n}{2} < m \leq \frac{(n+1)n}{2}$ *entonces existe* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $J_m = I_{nk}$.

Para $m \geq 2$, *sea* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{(n-1)n}{2} < m \leq \frac{(n+1)n}{2}$ *y sea* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $J_m = I_{nk}$. *Definamos* $g_m : [0,1) \to \mathbb{R}$ *por*

$$
g_m(x) := \begin{cases} -n\boldsymbol{I}_{J_m}(x) + 2n(nx - n + 1)\boldsymbol{I}_{[1-1/n,1)}(x) & \textit{si} \quad m \textit{ es par} \\ -n\boldsymbol{I}_{J_m}(x) + 4n(nx - n + 1)\boldsymbol{I}_{[1-1/n,1)}(x) & \textit{si} \quad m \textit{ es impar} \end{cases}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{m\to\infty} g_m(x) &= 0, \\
\liminf_{m\to\infty} g_m(x) &= -\infty\boldsymbol{I}_{[0,1/2]}(x),
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

lo cual implica que,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}} \limsup_{m\to\infty} g_m(x)\lambda(dx) &= 0, \\
\int_{\mathbb{S}} \liminf_{m\to\infty} g_m(x)\lambda(dx) &= -\infty.
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\int_{\mathbb{S}} g_m(x)\lambda(dx) = -1/2 + 1 = 1/2, \quad \textit{si } m \textit{ es par},
$$

$$
\int_{\mathbb{S}} g_m(x)\lambda(dx) = -1/2 + 2 = 3/2, \quad \textit{si } m \textit{ es impar},
$$

por lo tanto

$$
\limsup \int_{\mathbb{S}} g_m(x)\lambda(dx) = 3/2,
$$

$$
\liminf \int_{\mathbb{S}} g_m(x)\lambda(dx) = 1/2.
$$

Entonces la sucesión $\{g_m\}$ *satisface*

$$
0 = \int_{\mathbb{S}} \limsup_{m\to\infty} g_m(x)\lambda(dx) < \liminf \int_{\mathbb{S}} g_m(x)\lambda(dx) = 1/2,
$$

lo cual prueba que se cumple la condición (1.3). Además note que $\{g_m^-\}$ no es uniformemente integrable.

1.4. Convergencia de sucesiones de medidas

Para extender el Lema de Fatou al caso en el que se tiene una sucesión de medidas $\{\mu_n\}$, es necesario conocer el comportamiento de la sucesión cuando $n \to \infty$. Para esto a continuación daremos definiciones de dos tipos de convergencia de medidas: convergencia débil y convergencia fuerte.

Definición 1.4.1 (Convergencia débil)**.** *Una sucesión de medidas $\{\mu_n\}$ en un espacio métrico $\mathbb{S}$ converge débilmente a un medida finita μ en $\mathbb{S}$ si para cada función continua y acotada f en $\mathbb{S}$ se tiene que*

$$\int_{\mathbb{S}} f(s)\mu_n(ds) \to \int_{\mathbb{S}} f(s)\mu(ds) \quad \textit{cuando } n \to \infty. \tag{1.10}$$

Observación 1.4.2. *La Definición 1.4.1 implica que $\mu_n(\mathbb{S}) \to \mu(\mathbb{S}) \in \mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, si la sucesión $\{\mu_n\}$ converge débilmente a $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S})$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{\mu_n\}_{n=N}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\mathbb{S})$.*

Definición 1.4.3 (Convergencia fuerte)**.** *Una sucesión de medidas $\{\mu_n\}$ en un espacio medible $(\mathbb{S}, \Sigma)$ converge fuertemente a una medida μ en $(\mathbb{S}, \Sigma)$ si para cada $C \in \Sigma$*

$$\mu_n(C) \to \mu(C) \quad \textit{cuando } n \to \infty.$$

Observación 1.4.4. *Una sucesión de medidas $\{\mu_n\}$ converge fuertemente a una medida finita μ cuando $n \to \infty$ si y solo si (1.10) se cumple para cada función acotada y medible en $\mathbb{S}$.*

En ocasiones trabajar con estas definiciones puede llegar a ser complicado por lo que es de utilidad tener condiciones equivalentes de los diferentes tipos de convergencia. El siguiente teorema, conocido como Teorema de Portmanteau (ver [3]), nos brinda enunciados equivalentes a la definición de convergencia débil.

Teorema 1.4.5. *Sean μ_n y μ medidas finitas en $(\mathbb{S}, \Sigma)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) μ_n converge débilmente a μ;

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f(s)\mu_n(ds) \leq \int_{\mathbb{S}} f(s)\mu(ds)$ *para cada función semi-continua superiormente y acotada superiormente* f*;*

(iii) $\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f(s)\mu_n(ds) \geq \int_{\mathbb{S}} f(s)\mu(ds)$ *para cada función semi-continua inferiormente y acotada inferiormente* f*.*

En [9] podemos encontrar caracterizaciones para la convergencia fuerte similares a las que proporciona el Teorema 1.4.5 para la convergencia débil.

Notemos que de las definiciones y observaciones anteriores se deduce que si una sucesión de medidas $\{\mu_n\}$ en un espacio métrico $\mathbb{S}$ converge fuertemente a una medida finita μ en $\mathbb{S}$, entonces $\{\mu_n\}$ converge débilmente a μ cuando $n \to \infty$. Sin embargo, como veremos en el siguiente ejemplo, una sucesión de medidas puede converger débilmente y no converger fuertemente.

Ejemplo 1.4.6. *Sea* $\mathbb{S} = [0,1]$, $\Sigma = \mathcal{B}[0,1]$, λ *la medida de Lebesgue,* μ_n *la medida definida por*

$$\mu_n(C) := \int_C n\boldsymbol{I}_{[0,1/n]}(s)\lambda(ds), \quad C \in \mathcal{B}[0,1],$$

y $\mu(C) := \delta_0(C)$ *donde* δ_0 *es la medida de Dirac concentrada en* $\{0\}$*, es decir,*

$$\mu(C) = \begin{cases} 1, & si \quad 0 \in C \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Entonces $\{\mu_n\}$ *converge débilmente a* μ*. Para probar lo anterior, sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *una función continua y acotada. Nótese que de la definición de* μ_n *se tiene que la función* $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$g_n(s) = n\boldsymbol{I}_{[0,1/n]}(s)$$

es tal que

$$\mu_n(C) := \int_C g_n(s)\lambda(ds), \quad C \in \mathcal{B}[0,1].$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f(s)\mu_n(ds) &= \int_{[0,1]} f(s)g_n(s)\lambda(ds) \\ &= n\int_{[0,1]} f(s)\boldsymbol{I}_{[0,1/n]}(s)\lambda(ds) \\ &= n\int_{[0,1/n]} f(s)\lambda(ds) = f(s_n), \end{aligned}$$

donde $s_n \in [0, 1/n]$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Note que* $s_n \to 0$*, cuando* $n \to \infty$*; de la continuidad de* f *se sigue que*

$$\int_{[0,1]} f(s)\mu_n(ds) \to f(0) = \int_{[0,1]} f(s)\mu(ds).$$

Por lo tanto, $\{\mu_n\}$ *converge débilmente a* μ*.*

Por otra parte, $\{\mu_n\}$ *no converge fuertemente a* μ *pues* $\mu_n(\{0\}) = 0\ \forall n$ *y* $\mu(\{0\}) = 1$*.*

1.5. Lema de Fatou para sucesiones de medidas

Existen versiones del Lema de Fatou para los casos de convergencia fuerte y convergencia en la variación total cuando se tienen sucesiones de medidas. El resultado correspondiente a la convergencia en la variación total puede verse en Feinberg et al. [10, Teorema 2.1]. En esta sección presentamos el Lema de Fatou para convergencia fuerte y mostraremos con un ejemplo que este resultado no se cumple, en general, para convergencia débil de medidas.

Primero presentamos el Lema de Fatou bajo convergencia fuerte considerando funciones no negativas.

Teorema 1.5.1. *Sea* $(\mathbb{S}, \Sigma)$ *espacio medible,* $\{\mu_n\}$ *una sucesión de medidas que converge fuertemente a la medida* μ*, y* $\{f_n\}$ *sucesión de funciones medibles no-negativas en* $\mathbb{S}$*. Entonces*

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n d\mu_n. \tag{1.11}$$

Demostración. Consideremos $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$. Ahora bien, la convergencia fuerte de μ_n a μ implica que

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi d\mu_n,$$

para cualquier función simple φ. De la definición de la integral $\int_{\mathbb{S}} f d\mu$ es suficiente demostrar que $\int_{\mathbb{S}} \varphi d\mu \leq \liminf \int_{\mathbb{S}} f_n d\mu_n$ para cualquier función simple $\varphi \leq f$.

Supongamos que $\int_{\mathbb{S}} \varphi d\mu < \infty$, entonces φ se anula fuera de un conjunto E de medida finita, i.e. , $\varphi(s) = 0\ \forall s \in E^c$. Sea $\epsilon > 0$ y definamos

$$E_n := \{s : f_k(s) \geq (1-\epsilon)\varphi(s) \quad \text{para todo } k \geq n\}.$$

Notemos que $\{E_n\}$ es una sucesión creciente de conjuntos cuya unión contiene a E, y por tanto $\{E \setminus E_n\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles cuya intersección es vacía. Recordemos que si tenemos una sucesión decreciente $\{A_i\}$ de conjuntos medibles, tal que $\mu(A_1) < \infty$, entonces

$$\mu\left(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Por tanto, existe m tal que $\mu(E \setminus E_m) < \epsilon$. Puesto que $\mu(E \setminus E_m) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(E \setminus E_m)$, podemos escoger $n \geq m$ tal que $\mu_k(E \setminus E_m) < \epsilon$ para $k \geq n$. Además, ya que $E \setminus E_k \subset E \setminus E_m$, tenemos que $\mu_k(E \setminus E_k) < \epsilon$ para $k \geq n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}} f_k d\mu_k &\geq \int_{E_k} f_k d\mu_k \\
&\geq (1-\epsilon) \int_{E_k} \varphi d\mu_k \\
&\geq (1-\epsilon) \int_{E} \varphi d\mu_k - \int_{E\setminus E_k} \varphi d\mu_k \\
&\geq (1-\epsilon) \int_{E} \varphi d\mu_k - M\epsilon,
\end{aligned}$$

donde M es el máximo de φ. Por lo tanto

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_k d\mu_k \geq \int_E \varphi d\mu - \epsilon \left[\int_E \varphi d\mu + M \right].$$

Puesto que ϵ arbitrario, concluimos que

$$\int_{\mathbb{S}} \varphi d\mu = \int_E \varphi d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_k d\mu_k. \tag{1.12}$$

Similarmente se desmuestra (1.12) cuando $\int_{\mathbb{S}} \varphi d\mu = \infty$. ∎

En el siguiente resultado se establecen condiciones bajo las que se cumple la desigualdad de Fatou para convergencia fuerte de medidas y funciones que toman valores positivos y negativos.

Teorema 1.5.2. *Sea (S, Σ) espacio medible, $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}(\mathbb{S})$ una sucesión de medidas que converge fuertemente a $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S})$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en $\mathbb{S}$. Entonces se cumple la desigualdad (1.11) si existe una sucesión de funciones medibles $\{g_n\}_{n\geq 1}$ en $\mathbb{S}$ tal que $f_n \geq g_n$ para todo $n \geq 1$ y*

$$-\infty < \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n d\mu_n. \tag{1.13}$$

Demostración. Si al menos una de las siguientes desigualdades

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{S}} f_n d\mu_n < +\infty, \quad -\infty < \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \tag{1.14}$$

no se cumple, entonces la desigualdad (1.11) se cumple trivialmente. Ahora, supondremos que (1.14) se cumple. La primera desigualdad en (1.14) y (1.13) implican

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{S}} g_n d\mu_n < +\infty. \tag{1.15}$$

Al aplicar el Teorema 1.5.1 a la sucesión $\{f_n - g_n\}_{n\geq 1}$ de funciones medibles no negativas, obtenemos

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty}(f_n - g_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{S}}(f_n - g_n) d\mu_n. \tag{1.16}$$

Las desigualdades (1.13) y (1.15) implican que

$$-\infty < \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} g_n d\mu < +\infty. \tag{1.17}$$

Por (1.17) y la segunda desigualdad de (1.14) podemos aplicar las propiedades del $\liminf$ y $\limsup$ de donde tenemos que

$$\liminf_{n\to\infty} f_n - \limsup_{n\to\infty} g_n \leq \liminf_{n\to\infty}(f_n - g_n) \quad \mu - c.s$$

y

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu - \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} g_n d\mu \leq \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty}(f_n - g_n) d\mu. \tag{1.18}$$

Las siguientes desigualdades y (1.17) implican (1.11)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu - \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} g_n d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{S}}(f_n - g_n) d\mu_n \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{S}} f_n d\mu_n - \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{S}} g_n d\mu_n \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{S}} f_n d\mu_n - \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} g_n d\mu,
\end{aligned}$$

donde la primer desigualdad se tiene por (1.18) y (1.16), la segunda se sigue de las propiedades del límite inferior y la última la obtenemos de (1.13) y (1.17). ■

Los resultados anteriores dan generalizaciones del Lema de Fatou cuando tenemos una sucesión de medidas que converge fuertemente. El siguiente ejemplo muestra que este resultado no se cumple si la convergencia de las medidas es débil.

Ejemplo 1.5.3. *Sea* $\mathbb{S} = [0,1]$*,* $\mu_n(A) = \delta_{1/n}(A)$*,* $\mu(A) = \delta_0(A)$ *para* $A \in \mathcal{B}([0,1])$ *y* $f_n(s) = f(s) = \boldsymbol{I}_{\{0\}}(s)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *y* $s \in [0,1]$*. Si* $g \in C[0,1]$*, tenemos que*

$$\int_{\mathbb{S}} g(s)\mu_n(ds) = g(1/n) \to g(0) = \int_{\mathbb{S}} g(s)\mu(ds),$$

es decir μ_n *converge débilmente a* μ*. Sin embargo,*

$$1 = \int_{\mathbb{S}} f(s)\mu(ds) > \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f(s)\mu_n(ds) = 0.$$

Es decir (1.11) no se cumple.

Como mencionamos al principio de la sección, también existen versiones del Lema de Fatou cuando se tiene convergencia en la variación total, la cual es un tipo de convergencia de medidas que implica tanto la convergencia débil como la fuerte, en [10] se muestran los resultados con convergencia en la variación total.

En el Capítulo 2 trabajaremos con convergencia débil de medidas y veremos qué tipo de condiciones deben cumplirse para tener una desigualdad de Fatou.

Capítulo 2

Lema de Fatou para convergencia débil de medidas

2.1. Introducción

En el capítulo anterior vimos que cuando tenemos una sucesión de medidas $\{\mu_n\}$ que converge débilmente a μ no podemos asegurar que se cumpla la desigualdad del Lema de Fatou (1.11). En este capítulo veremos que es posible obtener una version del Lema de Fatou cuando se tiene convergencia débil de medidas. Para lograr esto es necesario introducir diferentes conceptos, uno de los más importantes, es el concepto de *límite inferior generalizado* el cual definiremos a continuación.

Definición 2.1.1. *[Límite inferior generalizado] Sea $\mathbb{S}$ un espacio métrico y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $f_n : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Sean*

$$F_n(s) := \inf_{k \geq n} f_k(s) \quad y \quad \underline{F}_n(s) := \sup_{\delta > 0} \inf_{s' \in B_\delta(s)} F_n(s')$$

Definimos el límite inferior generalizado de $\{f_n\}$ como

$$\begin{aligned} \underline{\hat{f}}(s) = \liminf_{n \to \infty, s' \to s} f_n(s') &:= \lim_{n \to \infty} \underline{F}_n(s) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sup_{\delta > 0} \inf_{s' \in B_\delta(s)} \inf_{k \geq n} f_k(s') \\ &= \sup_n \sup_{\delta > 0} \inf_{s' \in B_\delta(s)} \inf_{k \geq n} f_k(s'). \end{aligned}$$

donde $B_\delta(s)$ es la bola abierta en $\mathbb{S}$ de radio δ con centro en s.

Definición 2.1.2. *Sea $\mathbb{S}$ un espacio métrico, $f : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$. Definimos las funciones $\underline{f} : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ y $\bar{f} : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ de la siguiente manera*

$$\underline{f}(s) := \liminf_{s' \to s} f(s') = \sup_{\delta > 0} \inf_{s' \in B_\delta(s)} f(s'),$$

$$\bar{f}(s) := \limsup_{s' \to s} f(s') = \inf_{\delta > 0} \sup_{s' \in B_\delta(s)} f(s').$$

Llamamos a $\underline{f}(s)$ y $\bar{f}(s)$ la envolvente inferior y superior de f, respectivamente.

Se sigue que $\underline{F}_n(s)$ de la Definición 2.1.1 es la *envolvente inferior* de F_n. La envolvente inferior $\underline{f}$ de una función f es una función semi-continua inferiormente, de hecho es la función semi-continua inferiormente más grande dominada por f (ver Apéndice A). En otras palabras, $\underline{f}$ es una función semi-continua inferiormente que satisface las siguientes dos condiciones:

(I) $f \geq \underline{f}$,

(II) $\underline{f} \geq g$ para cualquier función semi-continua inferiormente g tal que $f \geq g$.

Entonces, si f es semi-continua inferiormente $\underline{f} = f$. Análogamente, para la envolvente superior se tiene que $\bar{f}$ es la función semi-continua superiormente mas pequeña que domina a f.

Volviendo a la definición de límite inferior generalizado, se puede demostrar que si

$$h(s) = \sup_{\delta > 0} \sup_{n} \inf_{k \geq n} \inf_{s' \in B_\delta(s)} f_k(s'),$$
$$g(s) = \inf\{\liminf_{n \to \infty} f_n(s_n) : s_n \to s\}.$$

entonces

$$\underline{\hat{f}}(s) = h(s) = g(s).$$

Es decir, existen diferentes maneras en las que podemos escribir el límite inferior generalizado. Esta última función fue introducida por primera vez por Serfozo [18].

Observación 2.1.3. *Algunas características interesantes respecto al límite inferior generalizado son las siguientes:*

(i) $\underline{\hat{f}}(s) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(s)$*, por lo tanto, la igualdad*

$$\underline{\hat{f}}(s) = \liminf_{n\to\infty} f_n(s)$$

es equivalente a que

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(s) \leq \underline{\hat{f}}(s). \tag{2.1}$$

(ii) $\underline{\hat{f}}(s)$ *es semi-continua inferiormente.*

Observación 2.1.4. *De manera similar uno puede definir el límite superior generalizado* $\limsup_{n\to\infty, s'\to s}$. *En este caso tenemos que*

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') &:= \lim_{n\to\infty}(\limsup_{s'\to s}(\sup_{k\geq n} f_k(s'))), \\
&= \lim_{n\to\infty}(\inf_{\delta>0} \sup_{s'\in B_\delta(s)} (\sup_{k\geq n} f_k(s'))), \\
&= \inf_n \inf_{\delta>0} \sup_{s'\in B_\delta(s)} \sup_{k\geq n} f_k(s').
\end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos para comparar el límite inferior y el límite inferior generalizado, los cuales fueron tomados de [15].

Ejemplo 2.1.5. *Sea* $\mathbb{S} = \mathbb{R}$.

(a) Si $f_n(s) = nse^{-2n^2s^2}$, *entonces*

$$\underline{\hat{f}}(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-1\backslash 2} & si \quad s = 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

mientras que $\liminf_{n\to\infty} = 0$.

(b) Si $f_n(s) = nse^{ns}$, *entonces*

$$\underline{\hat{f}}(s) = \begin{cases} 0 & si \quad s < 0 \\ -\frac{1}{e} & si \quad s = 0 \\ +\infty & si \quad s > 0 \end{cases}$$

mientras que

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(s) = \begin{cases} 0 & si \quad s \in (-\infty, 0] \\ +\infty & si \quad s \in (0, \infty). \end{cases}$$

(c) Si $f_n(s) = \sin(ns)$, *entonces* $\underline{\hat{f}}(s) = \liminf_{n\to\infty} f_n(s) = -1$.

2.2. Lema de Fatou generalizado

El Teorema 2.2.1 que veremos a continuación, presenta una desigualdad similar a la del Lema de Fatou para convergencia débil de medidas de probabilidad y funciones no negativas f_n.

Teorema 2.2.1 (Lema de Fatou generalizado)**.** *Sea* $\mathbb{S}$ *un espacio métrico arbitrario,* $\{\mu_n\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{S})$ *una sucesión que converge débilmente a* $\mu \in \mathbb{P}(\mathbb{S})$ *y* $\{f_n\}$ *sucesión de funciones medibles no-negativas en* $\mathbb{S}$ *con valores en* $\overline{\mathbb{R}}$. *Entonces*

$$\int_{\mathbb{S}} \underline{\hat{f}}(s)\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds), \tag{2.2}$$

donde $\underline{\hat{f}}(s) = \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')$ *de la Definición 2.1.1.*

Observación 2.2.2. *Si* $f_n(s) = f(s)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la función* f *es no-negativa y semicontinua inferiormente, entonces* $\liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') = f(s)$ *y el Teorema 2.2.1 implica que*

$$\int_{\mathbb{S}} f(s)\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f(s)\mu_n(ds), \tag{2.3}$$

si μ_n *converge débilmente a* μ. *Este resultado también se sigue del Teorema 1.4.5 para una función* f *semi-continua inferiormente y acotada.*

Demostración del Teorema 2.2.1. Primero demostraremos el teorema para funciones f_n uniformemente acotadas por arriba. Sea $f_n(s) \leq K < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $s \in \mathbb{S}$, y defina $F_n(s) := \inf_{m\geq n} f_m(s)$. Las funciones $\underline{F}_n : \mathbb{S} \to [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ son semi-continuas inferiormente (ver Definición 2.1.2). Adicionalmente, para $s \in \mathbb{S}$

$$\underline{F}_n(s) \uparrow \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') \text{ cuando } n \to \infty. \tag{2.4}$$

Del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} \underline{F}_n(s)\mu(ds). \tag{2.5}$$

Puesto que la función $\underline{F}_n$ es semi-continua inferiormente en $\mathbb{S}$ y acotada, y μ_m converge débilmente a μ cuando $m \to +\infty$, de (2.3) se sigue que

$$\int_{\mathbb{S}} \underline{F}_n(s)\mu(ds) \leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{S}} \underline{F}_n(s)\mu_m(ds), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Puesto que $\{\underline{F}_n\}$ es una sucesión monótona no decreciente, se sigue que

$$\liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{S}} \underline{F}_n(s)\mu_m(ds) \leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{S}} \underline{F}_m(s)\mu_m(ds), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

De (2.5), (2.6),(2.7) y el hecho que $\underline{F}_m \leq f_m$ para $m \geq 1$ se sigue (2.2). Entonces, hemos demostrado el teorema para el caso en que las funciones f_n son uniformemente acotadas.

Ahora bien, considere una sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de funciones medibles no negativas en $\mathbb{S}$ con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Para $m > 0$ sea $f_n^m(s) := min\{f_n(s), m\}$, $s \in \mathbb{S}$. Puesto que las funciones f_n^m son uniformemente acotadas por arriba,

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n^m(s')\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n^m(s)\mu_n(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds).$$

Entonces, del Lema de Fatou clásico

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds) \leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n^m(s')\mu(ds),$$

lo cual implica (2.2). ■

Para que el lema de Fatou con convergencia débil de medidas se cumpla para funciones que toman valores negativos, es necesario imponer condiciones a las partes negativas de la sucesión $\{f_n\}$. En general el resultado no se cumple, como lo vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.3. *Sea $\mathbb{S}$ el intervalo $(0, 1]$ con la σ- álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{S})$. Para cada número natural n defina la medida de probabilidad*

$$\mu_n(A) = \sqrt{n}\lambda(A \cap [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]) + (2 - \frac{1}{\sqrt{n}})\lambda(A \cap [\frac{1}{2}, 1]), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$$

donde λ es la medida de Lebesgue en $(0, 1]$. Sea f la función continua en $\mathbb{S}$ definida por $f(s) := -s^{-1}$. La sucesión de medidas de probabilidad $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ converge fuertemente (y por lo tanto débilmente) a la medida de probabilidad μ, donde $\mu(A) = 2\lambda(A \cap [\frac{1}{2}, 1])$,

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ y

$$\int f(s)\mu(ds) = -2\log 2, \quad \int f(s)\mu_n(ds) = -\log 2\left(\sqrt{n} + 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \geq 1.$$

Entonces

$$\int f(s)\mu(ds) > \lim_{n\to\infty} \int f(s)\mu_n(ds) = -\infty.$$

El siguiente teorema extiende el Teorema 2.2.1 a funciones que pueden tomar valores negativos.

Teorema 2.2.4. *Sea $\mathbb{S}$ un espacio métrico arbitrario, $\{\mu_n\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{S})$ una sucesión que converge débilmente a $\mu \in \mathbb{P}(\mathbb{S})$, y $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles en $\mathbb{S}$ con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces la desigualdad (2.2) se cumple si existe una sucesión de funciones medibles con valores reales $\{g_n\}$ en $\mathbb{S}$, tal que $f_n(s) \geq g_n(s)$ para todo $n \geq 1$, $s \in \mathbb{S}$ y*

$$-\infty < \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mu_n(ds). \tag{2.8}$$

Demostración. Primero notamos que si al menos una de las siguientes desigualdades

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds) < +\infty, \quad -\infty < \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds). \tag{2.9}$$

no se cumple entonces (2.2) se tiene trivialmente.

Supongamos que se cumple (2.9). Entonces, de la primera desigualdad tenemos que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mu_n(ds) < +\infty \tag{2.10}$$

y las desigualdades (2.8) y (2.10) implican

$$-\infty < \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) < +\infty. \tag{2.11}$$

Por (2.11) y la segunda desigualdad de (2.9) podemos aplicar las propiedades del límite superior e inferior de donde obtenemos

$$\liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') - \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s) \leq \liminf_{n\to\infty, s'\to s} (f_n(s') - g_n(s')) \quad \mu - c.s \tag{2.12}$$

y

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds) - \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) \leq \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} (f_n(s') - g_n(s'))\mu(ds). \tag{2.13}$$

Aplicamos el Lema de Fatou generalizado (Teorema 2.2.1) a la sucesión $\{f_n - g_n\}_{n\geq 1}$ de funciones medibles no negativas y obtenemos

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} (f_n(s') - g_n(s'))\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} (f_n(s) - g_n(s))\mu_n(ds). \tag{2.14}$$

Ahora, de propiedades del límite inferior se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} (f_n(s) - g_n(s))\mu_n(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds) - \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mu_n(ds). \tag{2.15}$$

Finalmente (2.2) se sigue de las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds) &- \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds) - \liminf_{n\to\infty} \int_{S} g_n(s)\mu_n(ds) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds) - \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds), \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de (2.13)-(2.15), y la segunda se tiene de (2.8) y (2.11). ∎

Observación 2.2.5. *Si $f_n(s) \geq K > -\infty$ para todo $s \in \mathbb{S}$ y $n = 1, 2, \ldots,$ entonces la hipótesis (2.8) se sigue para $g_n(s) = K$ para todo $s \in \mathbb{S}$, $n = 1, 2, \ldots$. Por tanto, el Teorema 2.2.4 implica que el lema de Fatou para convergencia débil de medidas es válido si las funciones f_n son uniformemente acotadas por abajo. Este hecho también se deduce del Teorema 2.2.1.*

Observación 2.2.6. *Del Teorema 2.2.1 se tiene que, para funciones $\{g_n\}_{n\geq 1}$ uniformemente acotadas por arriba, la hipótesis (2.8) en el Teorema 2.2.4 es equivalente a*

$$\int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mu_n(ds) > -\infty \tag{2.16}$$

En efecto, aplicando el lema de Fatou para funciones uniformemente acotadas por abajo a $\{-g_n\}_{n\geq 1}$ (ver Observación 2.2.5) obtenemos la desigualdad

$$\int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mu_n(ds)$$

la cual, junto con (2.8) implica (2.16).

Las observaciones anteriores nos llevan al siguiente corolario del Teorema 2.2.4.

Corolario 2.2.7. *Sea $\mathbb{S}$ un espacio métrico arbitrario, $\{\mu_n\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{S})$ una sucesión que converge débilmente a $\mu \in \mathbb{P}(\mathbb{S})$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en $\mathbb{S}$ con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces la desigualdad (2.2) se cumple si existe una función medible acotada por arriba $g : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f_n(s) \geq g(s)$, para todo $n \geq 1$, $s \in \mathbb{S}$ y*

$$-\infty < \int_{\mathbb{S}} \bar{g}(s)\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g(s)\mu_n(ds). \tag{2.17}$$

donde $\bar{g}$ es la envolvente superior de g (ver Definicion 2.1.2).

Ya vimos el Lema de Fatou para el caso de sucesiones de medidas de probabilidad que convergen débilmente y sucesiones de funciones acotadas por abajo por una sucesión de funciones que satisfacen la desigualdad (2.8). Ahora bien, en el Teorema 2.2.11 estableceremos el Lema de Fatou para convergencia débil de medidas y funciones cuya parte negativa satisface una condición de integrabilidad uniforme.

Primeramente definiremos el concepto de integrabilidad uniforme con respecto a una sucesión de medidas, así como también el concepto de *asintóticamente uniformemente integrable.*

Definición 2.2.8. *La sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles con valores en $\overline{\mathbb{R}}$ se le llama*

- *uniformemente integrable (u.i.) con respecto a una sucesión de medidas $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}(\mathbb{S})$ si*

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n\geq 1} \int_{\{|f_n|\geq K\}} |f_n| d\mu_n = 0; \tag{2.18}$$

- *asintóticamente uniformemente integrable (a.u.i.) con respecto a una sucesión de medidas $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}(\mathbb{S})$ si*

$$\lim_{K\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\{|f_n|\geq K\}} |f_n| d\mu_n = 0. \tag{2.19}$$

Para una medida fija, la definición de una sucesión de funciones u.i. es consistente con la definición clásica de una familia $\mathcal{H}$ de funciones uniformemente integrable respecto a la medida. Diremos que una función f es (a.)u.i. con respecto a $\{\mu_n\}$ si la sucesión $\{f, f, \ldots\}$ es (a.)u.i.con respecto a $\{\mu_n\}$. Una función f es u.i. con respecto a una familia $\mathcal{N}$ de medidas si

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{N}} \int_{\{|f|\geq K\}} |f| d\mu = 0.$$

Ejemplo 2.2.9. *Siguiendo con el Ejemplo 1.4.6, consideremos nuevamente* $\mathbb{S} = [0, 1]$ *con* $\Sigma = \mathcal{B}[0, 1]$, λ *la medida de Lebesgue,* μ_n *la medida definida por*

$$\mu_n(C) := \int_C n\boldsymbol{I}_{[0,1/n]}(s)\lambda(ds), \quad C \in \mathcal{B}[0, 1]$$

y $\mu(C) := \delta_0$, *donde* δ_0 *es la medida de Dirac concentrada en* $\{0\}$. *Sea* $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *la función definida por*

$$f_n(s) := \sum_{i=1}^{\infty} i\boldsymbol{I}_{[1/n(1-1/2^{i-1}),1/n(1-1/2^i)]}(s). \tag{2.20}$$

Para $K > 0$ *(sin pérdida de generalidad tomemos* K *entero) y* $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} |f_n(s)|\boldsymbol{I}_{[|f_n|>K]}(s)\mu_n(ds) &= \sum_{i=K}^{\infty} i\mu_n[1/n(1-1/2^{i-1}), 1/n(1-1/2^i)] \\
&= \sum_{i=K}^{\infty} in\lambda[1/n(1-1/2^{i-1}), 1/n(1-1/2^i)] \\
&= \sum_{i=K}^{\infty} i(\frac{1}{2^i}) \to 0.
\end{aligned}$$

cuando $K \to \infty$, *pues la serie* $\sum(i/2^i)$ *converge. Por lo tanto* $\{f_n\}$ *es u.i. con respecto a* $\{\mu_n\}$.

El siguiente lema establece una relación entre la integrabilidad uniforme y la integrabilidad uniforme asintótica. Esto es de utilidad pues en algunos casos es más fácil verificar que la sucesión de funciones es asintóticamente uniformemente integrable que uniformemente integrable. La prueba del Lema 2.2.10 se presenta en el Apéndice (ver Teorema B.0.2).

Lema 2.2.10. *Sea* $(\mathbb{S}, \Sigma)$ *un espacio medible,* $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}(\mathbb{S})$ *una sucesión de medidas y* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles en* $\mathbb{S}$ *con valores en* $\overline{\mathbb{R}}$. *Entonces* $\{f_n\}$ *es a.u.i.*

con respecto a $\{\mu_n\}$ *si y solo si existe* $N \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $\{f_{n+N}\}_{n\geq 1}$ *es u.i. con respecto a* $\{\mu_{n+N}\}_{n\geq 1}$.

Presentamos ahora el teorema para el caso de una sucesión de medidas finitas y una sucesión de funciones con parte negativa uniformemente integrable.

Teorema 2.2.11. *Sea* $\mathbb{S}$ *un espacio métrico,* $\{\mu_n\}$ *una sucesión de medidas que convergen débilmente a* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S})$ *y* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles en* $\mathbb{S}$ *con valores en* $\overline{\mathbb{R}}$ *tal que* $\{f_n^-\}$ *es a.u.i. con respecto a* $\{\mu_n\}$*. Entonces*

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds). \tag{2.21}$$

Demostración. Fijemos un $K > 0$ arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds) \geq & \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mathbf{I}_{\{f_n > -K\}}(s)\mu_n(ds) \\ & + \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mathbf{I}_{\{f_n \leq -K\}}(s)\mu_n(ds).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Probaremos que la siguiente desigualdad se cumple :

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mathbf{I}_{\{f_n > -K\}}(s)\mu_n(ds) \geq \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds). \tag{2.23}$$

En efecto, si $\mu(\mathbb{S}) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mathbf{I}_{\{f_n > -K\}}(s)\mu_n(ds) &\geq -K \lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{S}) \\ &= 0 \\ &= \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds),\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho que $\mu_n(\mathbb{S}) \to \mu(\mathbb{S}) = 0$ cuando $n \to \infty$. Por otra parte, si $\mu(\mathbb{S}) > 0$, entonces el Teorema 2.2.4 aplicado a $\{\hat{f}_n\}_{n\geq 1} := \{f_{n+N}\}_{n\geq 1}$, $\hat{g}_n \equiv -K$, $\hat{\mu}_n(C) := \frac{\mu_{n+N}(C)}{\mu_{n+N}(\mathbb{S})}$ y $\hat{\mu}(C) := \frac{\mu(C)}{\mu(\mathbb{S})}$, para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, implica

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mathbf{I}_{\{f_n > -K\}}(s)\mu_n(ds) \geq \\ &\qquad \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mathbf{I}_{\{f_n > -K\}}(s')\mu(ds).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Observemos que $\{\hat{\mu}_n\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{S})$ converge débilmente a $\hat{\mu} \in \mathbb{P}(\mathbb{S})$ y que

$$f_n(s)\mathbf{I}_{\{f_n > -K\}} \geq f_n(s) \tag{2.25}$$

para todo $s \in \mathbb{S}$ pues $K > 0$. Entonces, (2.23) se sigue de (2.24) y (2.25) .

Las desigualdades (2.22) y (2.23) implican que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds) \geq &\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds) \\ &+ \lim_{K\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mathbf{I}_{\{f_n \leq -K\}}(s)\mu_n(ds),\end{aligned}$$

que es equivalente a (2.21) pues $\{f_n^-\}$ es a.u.i. con respecto a $\{\mu_n\}$. ∎

El siguiente corolario del teorema anterior extiende el Teorema 2.2.4 a medidas finitas.

Corolario 2.2.12. *Sea $\mathbb{S}$ un espacio métrico, $\{\mu_n\}$ una sucesión de medidas en $\mathbb{S}$ que converge débilmente a $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S})$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en $\mathbb{S}$ con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces la desigualdad (2.21) se cumple si existe una sucesión de funciones medibles $\{g_n\}$ en $\mathbb{S}$ con valores en $\mathbb{R}$ tal que $f_n(s) \geq g_n(s)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{S}$ y*

$$-\infty < \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mu_n(ds). \tag{2.26}$$

Demostración.
El Teorema 2.2.11 aplicado a la sucesión de funciones no negativas $\{f_n - g_n\}_{n\geq 1}$, implica

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds) - \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) &\leq \int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} (f_n(s') - g_n(s'))\mu(ds) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} (f_n(s) - g_n(s))\mu_n(ds) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds) - \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mu_n(ds) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds) - \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds).\end{aligned}$$

donde la primera y tercera desigualdad se siguen de propiedades del ínfimo y supremo, la última desigualdad se sigue de (2.26). ∎

En conclusión bajo convergencia débil de medidas, tenemos versiones del Lema de Fatou con una desigualdad donde el límite inferior generalizado es requerido. En el siguiente resultado resumimos las condiciones suficientes que se han establecido para obtener la desigualdad (2.2).

Teorema 2.2.13. *Sea* $\mathbb{S}$ *espacio métrico,* $\{\mu_n\}$ *una sucesión de medidas en* $\mathbb{S}$ *que convergen débilmente a* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S})$ *y* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles en* $\mathbb{S}$ *con valores en* $\overline{\mathbb{R}}$*. Supongamos que una de las siguientes condiciones se cumple:*

(i) $\{f_n^-\}$ *es a.u.i. con respecto a* $\{\mu_n\}$*;*

(ii) existe una sucesión de funciones medibles $\{g_n\}$ *en* $\mathbb{S}$ *con valores en* $\mathbb{R}$ *tal que* $f_n(s) \geq g_n(s)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $s \in \mathbb{S}$ *y*

$$-\infty < \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mu_n(ds). \tag{2.27}$$

Entonces se cumple la desigualdad (2.2).

La condición (ii) del teorema anterior implica bajo ciertas condiciones que la sucesión $\{f_n^-\}$ es a.u.i. con respecto a $\{\mu_n\}$; ver Teorema B.0.3 en Apéndice. Sin embargo, en general estas dos condiciones no son equivalentes.

El siguente ejemplo demuestra que la condición (ii) no implica que $\{f_{n+N}^-\}_{n\geq 1}$ es u.i. para algún $N \in \mathbb{N}$. Además, en [5, Ejemplo 3.1] podemos encontrar un ejemplo donde $\{f_n^-\}$ es u.i con respecto a $\{\mu_n\}$ pero la condición (ii) del Teorema 2.2.13 no se cumple.

Ejemplo 2.2.14. *Consideremos* $\mathbb{S} := [-1, 1]$ *con la métrica euclidiana estándar. Sea* $\mu_n = \mu$*,* $n = 1, 2, \ldots,$ *la medida de Lebesgue en* $\mathbb{S}$ *y para* $n = 1, 2, \ldots,$ $s \in \mathbb{S}$

$$f_n(s) = \begin{cases} -n & si \quad s \in [-1/n, 0) \\ n & si \quad s \in (0, 1/n] \\ 0 & \quad otro\ caso \end{cases}$$

Entonces $\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\boldsymbol{I}_{\{f_n(s)\leq -K\}}\mu(ds) = -1$ *para cada* $K > 0$*, lo que implica que* $\{f_n^-\}_{n\geq 1}$ *no es a.u.i. Por lo tanto* $\{f_{n+N}^-\}_{n\geq 1}$ *no es u.i. para cada* $N \in \mathbb{N}_0$*; ver Lema 2.2.10.*

Además, puesto que $\int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds) = \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu(ds) = 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, tenemos que (2.27) se cumple para* $\mu_n = \mu$ *con* $g_n = f_n$*.*

2.3. Igualdad del límite inferior y el límite inferior generalizado

Sea $(\mathbb{S}, \Sigma)$ un espacio medible y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Como se mostró en los ejemplos de la primera sección el límite inferior y el límite inferior generalizado no necesariamente coinciden. En esta sección, presentamos condiciones necesarias y suficientes para que se cumplan las siguientes igualdades:

$$\liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') = \liminf_{n\to\infty} f_n(s), \tag{2.28}$$

$$\lim_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') = \lim_{n\to\infty} f_n(s), \tag{2.29}$$

las cuales mejoran las conclusiones del Lema de Fatou para convergencia débil de medidas como veremos en el Teorema 2.4.1. Para establecer condiciones necesarias y suficientes para (2.28) introducimos las siguientes definiciones.

Definición 2.3.1 (Semi-convergencia uniforme). *Una sucesión de funciones con valores reales $\{f_n\}$ en $\mathbb{S}$*

- *semi-converge uniformemente por abajo a una función real f en $\mathbb{S}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*
$$f_n(s) > f(s) - \epsilon, \tag{2.30}$$
para todo $s \in \mathbb{S}$ y $n \geq N$;
- *semi-converge uniformemente por arriba a una función real f en $\mathbb{S}$ si $\{-f_n\}$ semi-converge uniformemente por abajo a $-f$ en $\mathbb{S}$.*

Nótese que una sucesión $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ converge uniformemente a f en $\mathbb{S}$ si y solo si semi-converge uniformemente por abajo y por arriba a f.

Ejemplo 2.3.2. *Consideremos $\mathbb{S} = [0, 1)$ y para $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(s) := s^n$. Sea $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ definida por $f \equiv 0$. Notemos que dado $\epsilon > 0$*

$$s^n > -\epsilon \quad \forall s \in \mathbb{S} \text{ y } n \in \mathbb{N}, \tag{2.31}$$

es decir, $f_n(s) > f(s) - \epsilon$ para todo $s \in \mathbb{S}$ y $n \geq 1$. Por tanto, $\{f_n\}$ semi-converge uniformemente por abajo a f.

Por otro lado, $s^n < \epsilon$ *si* $n > \frac{\log \epsilon}{\log s}$*. Es decir,*

$$f_n(s) < f(s) + \epsilon$$

para todo $s \in \mathbb{S}$ *y* $n \geq \frac{\log \epsilon}{\log s}$*. En este caso* N *depende de* ϵ *y de* s*. Por tanto,* $\{f_n\}$ *no semi-converge uniformemente por arriba a* f*.*

Consideremos las siguientes nociones de semi-equicontinuidad inferior y superior para un sucesión de funciones.

Definición 2.3.3. *A una sucesión de funciones con valores reales* $\{f_n\}$ *en* $\mathbb{S}$ *se le llama*

- *semi-equicontinua inferiormente en un punto* $s \in \mathbb{S}$ *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$f_n(s') > f_n(s) - \epsilon \quad \text{para todo } s' \in B_\delta(s) \text{ y para todo } n = 1, 2, \ldots .$$

  La sucesión $\{f_n\}$ *es semi-equicontinua inferiormente (en* $\mathbb{S}$*) si es semi-equicontinua inferiormente en todo* $s \in \mathbb{S}$*.*

- *semi-equicontinua superiormente en un punto* $s \in \mathbb{S}$ *(en* $\mathbb{S}$*) si* $\{-f_n\}$ *es semi-equicontinua inferiormente en* $s \in \mathbb{S}$ *(en* $\mathbb{S}$*).*

Ejemplo 2.3.4. *Sea* $\mathbb{S} = [0, 1]$ *con la métrica usual. Para* $s \in \mathbb{S}$ *defina*

$$f_n(s) = \begin{cases} ns & \text{si} \quad s \in [0, 1/n], \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La sucesión de funciones $\{f_n\}$ *es semi-equicontinua inferiormente puesto que para cada* $\epsilon > 0$ *y* $s \in \mathbb{S}$*,*

(i) *si* $s > 0$*, entonces existe* $\delta(s, \epsilon) = \min\{s - 1/(\lfloor \frac{1}{2} \rfloor + 1), \epsilon/\lfloor \frac{1}{2} \rfloor\}$ *tal que*

$$f_n(s') > f_n(s) - \epsilon \quad \forall s' \in B_{\delta(s,\epsilon)}(s) \text{ y } n = 1, 2, \ldots; \tag{2.32}$$

(ii) *si* $s = 0$*, entonces* $f_n(s') \geq 0 = f_n(0)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $s' \in \mathbb{S}$*.*

Observación 2.3.5.

- *Se sigue de las definiciones anteriores que una función* $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ *es semi-continua inferiormente (superiormente) en* $s \in \mathbb{S}$ *si y solo si la sucesión* $\{f\}$ *es semi-equicontinua inferiormente (superiormente) en* $s \in \mathbb{S}$*. Además, si una sucesión de* *funciones reales en $\mathbb{S}$ es semi-equicontinua inferiormente (superiormente) en $s \in \mathbb{S}$, entonces cada función de la sucesión es semi-continua inferiormente (superiormente) en s.*

- *Una sucesión de funciones con valores reales $\{f_n\}$ en $\mathbb{S}$ es equicontinua en $s \in \mathbb{S}$ si la sucesión es tanto semi-equicontinua superiormente como inferiormente en $s \in \mathbb{S}$.*

Antes de establecer las condiciones necesarias y suficientes para (2.28), introducimos el siguiente lema.

Lema 2.3.6. *Sea $\{f_n\}$ sucesión no-decreciente de funciones semi-continuas inferiormente con valores en $\overline{\mathbb{R}}$ en un espacio métrico $\mathbb{S}$. Entonces*

$$\liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') = \lim_{n\to\infty} f_n(s), \quad s \in \mathbb{S}. \tag{2.33}$$

Demostración. Para cada $s \in \mathbb{S}$, se cumplen las siguientes relaciones que demuestran (2.33):

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') &= \sup_{n\geq 1} \liminf_{s'\to s} \inf_{k\geq n} f_k(s') \\ &= \sup_{n\geq 1} \liminf_{s'\to s} f_n(s') \\ &= \sup_{n\geq 1} f_n(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s). \end{aligned}$$

La primera igualdad se sigue de la definición de $\liminf$, la tercera de la semi-continuidad inferior de la función f_n, la segunda y la última se tienen puesto que la sucesión $\{f_n\}$ es no decreciente. ∎

Teorema 2.3.7. *Sea $\{f_n\}$ sucesión de funciones reales en un espacio métrico $\mathbb{S}$, y sea $s \in \mathbb{S}$. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(i) si la sucesión de funciones $\{f_n\}$ es semi-equicontinua inferiormente en s, entonces cada función f_n, $n = 1, 2, \ldots$, es semi-continua inferiormente en s y la igualdad (2.28) es válida;

(ii) si $\{f_n\}$ sucesión de funciones semi-continuas inferiormente que satisfacen (2.28) y $\{f_n(s)\}$ es una sucesión convergente, es decir,

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(s) = \limsup_{n\to\infty} f_n(s), \tag{2.34}$$

entonces la sucesión $\{f_n\}$ es semi-equicontinua inferiormente en s.

Demostración. (i) De acuerdo a la Observación 2.3.5, la semi-continuidad inferior en s de cada función f_n, se sigue de la semi-equicontinuidad inferior de la sucesión $\{f_n\}$ en s. Entonces, para probar (i) es suficiente verificar (2.28), lo cual es equivalente a verificar (2.1).

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. De acuerdo a la Definición 2.3.3, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s' \in B_{\delta(\epsilon)}(s)$

$$f_n(s') \geq f_n(s) - \epsilon. \tag{2.35}$$

Puesto que

$$\liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') = \sup_{n\geq 1, \delta>0} \inf_{k\geq n, s'\in B_\delta(s)} f_k(s') \geq \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n, s'\in B_{\delta(\epsilon)}(s)} f_k(s'), \tag{2.36}$$

(2.35) implica

$$\liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') \geq \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k(s) - \epsilon = \liminf_{n\to\infty} f_n(s) - \epsilon, \tag{2.37}$$

donde las igualdades en (2.36) y (2.37) se siguen de las definiciones de $\liminf$, la desigualdad en (2.36) se cumple dado que $\{\delta(\epsilon)\} \subset \{\delta : \delta > 0\}$, y la desigualdad en (2.37) se tiene de (2.35) y (2.36). Entonces, la desigualdad (2.1) se sigue de (2.37) pues ϵ arbitrario.

(ii) Probaremos (ii) por contradicción. Supongamos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ no es semi-equicontinua inferiormente en s. Entonces existe $\epsilon^* > 0$, una sucesión $\{s_n\}$ que converge a s, y una sucesión $\{n_k\} \subset \{1, 2, \dots\}$ tal que

$$f_{n_k}(s_k) \leq f_{n_k}(s) - \epsilon^*, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{2.38}$$

Si la sucesión $\{n_k\}$ es acotada (por un entero positivo C), entonces (2.38) contradice la semi-continuidad inferior de las funciones f_n, $n = 1, 2, \dots, C$. De otra manera, sin pérdida de generalidad, suponemos que la sucesión $\{n_k\}$ es estrictamente creciente. Por lo tanto, (2.38) y (2.34) implican que

$$\liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') \leq \lim_{n\to\infty} f_n(s) - \epsilon^*,$$

lo cual es una contradicción a (2.28). Por lo tanto la sucesión de funciones $\{f_n\}$ es semi-equicontinua inferiormente en s.

∎

La condición (2.34) en el teorema anterior es esencial, si la omitimos no podemos asegurar la conclusión del Teorema 2.3.7(ii). A continuación proporcionamos un contra ejemplo, obteniendo que la sucesión no es semi-equicontinua inferiormente en s.

Ejemplo 2.3.8. *Sea* $\mathbb{S} := [-1, 1]$ *con la métrica euclidiana usual y*

$$f_n(s) = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k-1, \\ \max\{1 - n|s|, 0\} & si \quad n = 2k. \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{N}$ *y* $s \in \mathbb{S}$. *Las funciones* f_n, $n \in \mathbb{N}$ *son no-negativas y continuas en* $\mathbb{S}$. *La igualdad (2.28) se cumple puesto que*

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty, s'\to 0} f_n(s') \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(0) = f_{2k-1}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sin embargo, (2.34) no es válida debido a que

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(0) = 1 > 0 = \liminf_{n\to\infty} f_n(0),$$

donde la primera igualdad se tiene porque $f_{2k}(0) = 1$ *para cada* $k = 1, 2, \ldots$ *y la segunda se tiene ya que* $f_{2k-1}(0) = 0$ *para cada* $k = 1, 2, \ldots$.

La sucesión de funciones $\{f_n\}$ *no es semi-equicontinua inferiormente en* $s = 0$ *pues*

$$f_{2k}(\frac{1}{2k}) = 0 < 1/2 = f_{2k}(0) - 1/2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Por lo tanto, la conclusión del Teorema 2.3.7(ii) no se cumple.

Investiguemos las condiciones necesarias y suficientes para la igualdad (2.29).

Corolario 2.3.9. *Sea* $\{f_n\}$ *sucesión de funciones reales en un espacio métrico* $\mathbb{S}$ *y* $s \in \mathbb{S}$. *Si* $\{f_n(s)\}$ *es una sucesión convergente, entonces* $\{f_n\}$ *es equicontinua en* s *si y solo si cada función* f_n, $n \geq 1$ *es continua en* s *y se cumple la igualdad (2.29).*

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 2.3.7 aplicado a las sucesiones $\{f_n(s)\}$ y $\{-f_n(s)\}$. ■

En el siguiente corolario establecemos condiciones suficientes para la semi-equicontinuidad inferior.

Corolario 2.3.10. *Sea $\mathbb{S}$ un espacio métrico y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales semi-continuas inferiormente en $\mathbb{S}$ que semi-converge uniformemente por abajo a una función real f semi-continua inferiormente en $\mathbb{S}$. Si la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $\mathbb{S}$, entonces $\{f_n\}$ es semi-equicontinua inferiormente en $\mathbb{S}$.*

Demostración. Si se tiene la igualdad (2.28) para todo $s \in \mathbb{S}$, entonces el Teorema 2.3.7(ii) implica que $\{f_n\}$ es semi-equicontinua inferiormente en $\mathbb{S}$ puesto que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente a f. Por lo tanto, para finalizar la demostración, probemos que (2.1) (equivalente a (2.28)) se cumple para cada $s \in \mathbb{S}$.

En efecto, la semi-convergencia uniforme por abajo de $\{f_n\}$ a f implica que para un $\epsilon > 0$ arbitrario

$$\liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') \geq f(s) - \epsilon,$$

para cada $s \in \mathbb{S}$. Puesto que $\epsilon > 0$ es arbitrario y $f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s)$, $s \in \mathbb{S}$, obtenemos la desigualdad (2.1). ∎

2.4. Lema de Fatou en su forma clásica para sucesión de medidas

Sea $(\mathbb{S}, \Sigma)$ un espacio medible y μ medida en $(\mathbb{S}, \Sigma)$. En esta sección, estableceremos el Lema de Fatou en su forma clásica para sucesiones de medidas.

Teorema 2.4.1. *Sea $\mathbb{S}$ un espacio métrico, $\{\mu_n\}$ una sucesión de medidas que converge débilmente a $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S})$, $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ sucesión de funciones reales en $\mathbb{S}$ semi-equicontinua inferior. Si una de las siguientes condiciones se cumple:*

(i) la sucesión $\{f_n^-\}$ es a.u.i con respecto a $\{\mu_n\}$;

(ii) se cumple la condición (ii) del Teorema 2.2.13

entonces

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n(s)\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds). \tag{2.39}$$

Demostración. El Teorema 2.2.13 aplicado a la sucesión $\{f_n\}$, implica que

$$\int_{\mathbb{S}} \liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds). \tag{2.40}$$

Ahora, como la sucesión $\{f_n\}$ es semi-equicontinua inferiormente, el Teorema 2.3.7 implica que

$$\liminf_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s') = \liminf_{n\to\infty} f_n(s).$$

Por lo tanto, de (2.40) se tiene la desigualdad (2.39). ■

También es posible obtener el teorema de convergencia de Lebesgue para una sucesión de medidas como vemos en el siguiente corolario.

Corolario 2.4.2 (Teorema de Lebegue para convergencia débil de medidas)**.** *Sea* $\mathbb{S}$ *un espacio métrico,* $\{\mu_n\}$ *una sucesión de medidas en* $\mathbb{S}$ *que converge débilmente a* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S})$*, y* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles en* $\mathbb{S}$ *con valores en* $\overline{\mathbb{R}}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')$ *existe* μ*-c.s.,* $s \in \mathbb{S}$*. Si* $\{f_n\}$ *es a.u.i. con respecto a* $\{\mu_n\}$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mu_n(ds) = \int_{\mathbb{S}} \lim_{n\to\infty, s'\to s} f_n(s')\mu(ds)$$

Demostración. El corolario se sigue directamente del Teorema 2.2.13, aplicado a la sucesión $\{f_n\}$ y $\{-f_n\}$. ■

Como vimos a lo largo del capítulo es posible obtener la desigualdad de Fatou cuando se tiene una sucesión de medidas que converge débilmente. Esta desigualdad no es con el límite inferior usual, si no con el límite inferior generalizado (Definicion 2.1.1). Sin embargo, bajo ciertas condiciones, como se vio en la Sección 2.3, estos llegan a coincidir.

En el siguiente capítulo, aplicaremos los resultados obtenidos a procesos de control de Markov.

Capítulo 3

Procesos de Control de Markov

3.1. Introducción

El objetivo del presente capítulo es presentar aplicaciones a los Problemas de Crontrol de Markov(PCM) de los resultados analizados previamente respecto al Lema de Fatou generalizado bajo convergencia débil de la sucesión de medidas. Nos centraremos en el estudio de los criterios de optimalidad de costo descontado y promedio. Iniciaremos el capítulo introduciendo los elementos necesarios para definir el problema de control óptimo.

Terminología y convenciones de notación

- Un *espacio de Borel* es un subconjunto de Borel de un espacio métrico completo y separable.
- Cuando nos referimos a un conjunto de funciones "medibles" significa "Borel-medibles".
- Un *kernel estocástico* en $\mathbb{X}$ dado $\mathbb{Y}$ es una función $P(\cdot|\cdot)$ tal que $P(\cdot|y)$ es una medida de probabilidad en $\mathbb{X}$ para cada $y \in \mathbb{Y}$ fija, y $P(B|\cdot)$ es una función medible en $\mathbb{Y}$ para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ fija.

3.2. Modelo de control

Definimos el modelo de control de Markov como el arreglo

$$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \{A(x)|x \in \mathbb{X}\}, Q, c)$$

que consiste de los siguientes elementos:

(a) $\mathbb{X}$ es un espacio de Borel, llamado el *espacio de estados*;

(b) $\mathbb{A}$ es un espacio de Borel, llamado el *espacio de control* o *espacio de acciones*;

(c) $\{A(x)|x \in \mathbb{X}\}$ es una familia de subconjuntos medibles no vacíos de $\mathbb{A}$, donde $A(x)$ es el conjunto de *acciones admisibles* para el estado $x \in \mathbb{X}$. Definimos el conjunto

$$\mathbb{K} := Gr(A) = \{(x, a)|x \in \mathbb{X}, a \in A(x)\}$$

de estados-acciones admisibles y suponemos que $\mathbb{K}$ es un subconjunto medible de $\mathbb{X} \times \mathbb{A}$ y que existe un mapeo medible $f : \mathbb{X} \to \mathbb{A}$ tal que $f(x) \in A(x)$ para toda $x \in \mathbb{X}$.

(d) Q es un kernel estocástico en $\mathbb{X}$ dado $\mathbb{K}$ llamado *ley de transición.*

(e) A la función medible $c : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ se le llama función de *costo por etapa* y supondremos que es acotada por abajo.

El modelo de control representa un sistema estocástico controlado que es observado en los tiempos $t = 0, 1, \ldots$. Denotando por x_t y a_t al estado del sistema y al control (acción) aplicado al tiempo t, la evolución del sistema se puede describir de la siguiente manera. Si el sistema está en el estado $x_t = x \in \mathbb{X}$ al tiempo t y el control $a_t = a \in A(x)$ es aplicado, entonces suceden dos cosas:

(i) se genera un costo $c(x, a)$;

(ii) el sistema se mueve a un nuevo estado $x_{t+1} \in \mathbb{X}$ con ley de probabilidad $Q(\cdot|x, a)$, i.e.,

$$Q(B|x, a) := Prob[x_{t+1} \in B|x_t = x, a_t = a], \quad B \subset \mathbb{X}.$$

Una vez que ha ocurrido la transición al nuevo estado, se escoge un nuevo control y el proceso se repite.

Si el número de épocas de decisión es finito, decimos que el modelo tiene horizonte finito; en otro caso decimos que el horizonte es infinito.

3.3. Políticas de control

Considere el modelo de control de Markov definido anteriormente y para cada $t = 0, 1, \ldots,$ defina el espacio H_t de *historias admisibles* hasta el tiempo t donde $H_0 := \mathbb{X}$, y

$$H_t := \mathbb{K}^t \times \mathbb{X} = \mathbb{K} \times H_{t-1} \quad \text{para} \quad t = 1, 2, \ldots$$

donde $\mathbb{K}$ es el conjunto estados-acciones admisibles. Un elemento genérico h_t de H_t, al cual se le llama t-historia admisible, o simplemente t-historia, es un vector de la forma

$$h_t = (x_0, a_0, \ldots, x_{t-1}, a_{t-1}, x_t),$$

con $(x_i, a_i) \in \mathbb{K}$ para $i = 0, 1, \ldots, t-1$, y $x_t \in \mathbb{X}$. Observe que para cada t, H_t es un subespacio de

$$\overline{H}_t := (\mathbb{X} \times \mathbb{A})^t \times \mathbb{X} = (\mathbb{X} \times \mathbb{A}) \times \overline{H}_{t-1}, \quad \text{para } t = 1, 2, \ldots$$

y $\overline{H}_0 := H_0 = \mathbb{X}$.

Definición 3.3.1. *Una política de control aleatorizada (también llamada política de control o simplemente política) es una sucesión $\pi = \{\pi_t\}$ de kerneles estocásticos π_t en $\mathbb{A}$ dado H_t que satisface*

$$\pi_t(A(x_t)|h_t) = 1 \quad \forall h_t \in H_t, t = 0, 1, \ldots. \tag{3.1}$$

Es decir, $\pi_t(\cdot|h_t)$ está concentrada en $A(x_t)$. El conjunto de todas las políticas es denotado por Π.

Denotamos por $\mathbb{F}$ el conjunto de todas las funciones medibles $f : \mathbb{X} \to \mathbb{A}$ tal que $f(x) \in A(x)$ para toda $x \in \mathbb{X}$. A las funciones en $\mathbb{F}$ se les llama *selectores*.

Definición 3.3.2. *Una política $\pi = \{\pi_t\}$ es*

(a) determinista si existe una sucesión $\{g_t\}$ de funciones medibles $g_t : H_t \to \mathbb{A}$ tal que, para toda $h_t \in H_t$ y $t = 0, 1, ...,$ $g_t(h_t) \in A(x_t)$ y $\pi_t(\cdot|h_t)$ está concentrada en $g_t(h_t)$. En este caso usualmente escribimos $\pi = \{g_t\}$;

(b) *determinista de Markov si existe una sucesión* $\{f_t\}$ *de funciones en* $\mathbb{F}$ *tal que* $\pi_t(\cdot|h_t)$ *está concentrada en* $f_t(x_t) \in A(x_t)$ *para todo* $h_t \in H_t$ *y* $t = 0, 1, \ldots$*. En este caso* π *toma la forma* $\pi = \{f_t\}$*;*

(c) *determinista estacionaria si existe una función* $f \in \mathbb{F}$ *tal que* $\pi_t(\cdot|h_t)$ *está concentrada en* $f(x_t) \in A(x_t)$ *para todo* $h_t \in H_t$ *y* $t = 0, 1, \ldots$*. En este caso identificamos a* π *como* f*.*

En otras palabras una *política es determinista de Markov* si todas las decisiones dependen únicamente del estado y el tiempo actuales y un *política es determinista estacionaria* si todas las decisiones dependen solamente del estado actual.

Identificamos al conjunto $\mathbb{F}$ con el *conjunto de políticas deterministas estacionarias.*

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ el espacio medible que consiste del espacio muestral $\Omega := \overline{H}_\infty = (\mathbb{X} \times \mathbb{A})^\infty$ y $\mathcal{F}$ la correspondiente σ-álgebra producto. Los elementos en Ω son sucesiones de la forma $\omega = (x_0, a_0, x_1, a_1, \ldots)$ con x_t en $\mathbb{X}$ y a_t en $\mathbb{A}$ para toda $t = 0, 1, \ldots$.

Sea $\pi = \{\pi_t\}$ una política de control arbitraria y ν una medida arbitraria de probabilidad en $\mathbb{X}$ a la cual nos referiremos como "distribución inicial". Entonces, por el Teorema de Ionescu-Tulcea ([12, p.178]), existe una única medida de probabilidad P_ν^π en $(\Omega, \mathcal{F})$ y procesos estocásticos $\{x_t\}$ y $\{a_t\}$ tal que $P_\nu^\pi(H_\infty) = 1$ y para toda $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{A})$, y $h_t \in H_t$, $t = 0, 1, \ldots$:

$$P_\nu^\pi(x_0 \in B) = \nu(B),$$

$$P_\nu^\pi(a_t \in C|h_t) = \pi_t(C|h_t),$$

$$P_\nu^\pi(x_{t+1} \in B|h_t, a_t) = Q(B|x_t, a_t).$$

Definición 3.3.3. *El proceso estocástico* $(\Omega, \mathcal{F}, P_\nu^\pi, \{x_t\})$ *se denomina proceso de control markoviano a tiempo discreto (o también, proceso de decisión de Markov).*

El operador esperanza con respecto a P_ν^π es denotado como E_ν^π. Si ν está concentrado en el estado inicial $x \in \mathbb{X}$, entonces escribimos P_x^π y E_x^π en lugar de P_ν^π y E_ν^π, respectivamente.

3.4. Criterios de optimalidad y problema de control óptimo

Sea $\alpha \in (0,1]$ un número positivo dado, $x_0 = x \in \mathbb{X}$ estado inicial y $\pi \in \Pi$ una política Definimos

- el costo α-descontando en n etapas por

$$V_{n,\alpha}(\pi, x) := E_x^\pi \sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t c(x_t, a_t), \tag{3.2}$$

- el costo α-descontado con horizonte infinito y $\alpha \in (0,1)$ como

$$V_\alpha(\pi, x) := E_x^\pi \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c(x_t, a_t), \tag{3.3}$$

- El costo promedio con horizote infinito como

$$J(\pi, x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^\pi \sum_{t=0}^{n-1} c(x_t, a_t) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} V_{n,1}(\pi, x). \tag{3.4}$$

El costo óptimo o la *función de valor óptimo* se define como

$$J(x) := \inf_{\pi\in\Pi} J(\pi, x), \quad x \in \mathbb{X} \tag{3.5}$$

para el caso de costo promedio y para el caso descontado la función de valor óptimo es

$$V_\alpha(x) := \inf_{\pi\in\Pi} V_\alpha(\pi, x), \quad x \in \mathbb{X}.$$

Diremos que una política $\pi^* \in \Pi$ es óptima en costo promedio si $J(x) = J(\pi^*, x)$ para toda $x \in \mathbb{X}$. De igual manera, una política $\hat{\pi}$ es α-óptima en costo descontado si $V_\alpha(x) = V_\alpha(\hat{\pi}, x)$ para toda $x \in \mathbb{X}$.

El problema de control óptimo consiste en encontrar una política óptima para el criterio de optimalidad correspondiente.

3.5. Hipótesis generales y resultados auxiliares

Para asegurar la existencia de políticas óptimas para un criterio de optimalidad es necesario imponer ciertas condiciones en el modelo de control. Entre éstas se suelen considerar diferentes condiciones de continuidad, por ejemplo: continuidad o semi-continuidad en la función $c(\cdot,\cdot)$, semi-continuidad superior en la multifunción $x \to A(x)$ y también condiciones de continuidad en la probabilidad de transición $Q(\cdot|x,a)$, $(x,a) \in \mathbb{K}$. En esta última, considerando las definiciones introducidas en el Capítulo 1, se considera que la probabilidad de transición es débilmente continua o fuertemente continua. Específicamente,

- continuidad débil de Q en $(x,a) \in \mathbb{K}$ significa que

$$\int_{\mathbb{X}} f(z)Q(dz|x_n,a_n) \to \int_{\mathbb{X}} f(z)Q(dz|x,a) \text{ cuando } n \to \infty \tag{3.6}$$

  para cualquier sucesión $\{(x_n,a_n), n \geq 0\}$ que converge a (x,a), donde $(x_n,a_n) \in \mathbb{K}$ y para cualquier función continua acotada $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$,

- continuidad fuerte en Q en $(x,a) \in \mathbb{K}$ significa que se cumple (3.6) para cualquier función medible acotada $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$.

Es decir, cuando la probabilidad de transición es débilmente continua tenemos que la sucesión de medidas de probabilidad $\{Q(\cdot|x_n,a_n)\}$ converge débilmente a la medida $Q(\cdot|x,a)$ y cuando la probabilidad de transición es fuertemente continua $\{Q(\cdot|x_n,a_n)\}$ converge fuertemente a la medida $Q(\cdot|x,a)$.

En este trabajo las condiciones en el modelo que consideraremos son impuestas en la Hipótesis 2.

Para $\alpha \in (0,1)$ y $x \in \mathbb{X}$ definamos:

$$m_\alpha := \inf_{x\in\mathbb{X}} V_\alpha(x), \quad u_\alpha(x) := V_\alpha(x) - m_\alpha,$$

$$\underline{J} := \liminf_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)m_\alpha, \quad \bar{J} := \limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)m_\alpha.$$

Observemos que $u_\alpha(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{X}$. Ahora bien, consideremos la siguiente hipótesis.

Hipótesis 1.

(i) $J^* := \inf_{x\in\mathbb{X}} J(x) < +\infty$ *y*

(ii) $\liminf_{\alpha\uparrow 1} u_\alpha(x) < +\infty$, $x \in \mathbb{X}$..

La Hipótesis 1(i) es equivalente a la existencia de $x \in \mathbb{X}$ y $\pi \in \Pi$ tal que $J(\pi, x) < \infty$. Si la Hipótesis 1(i) no se cumple, entonces el problema es trivial, puesto que $J(x) = \infty$ para toda $x \in \mathbb{X}$ y cualquier política π sería óptima en costo promedio.

Lema 3.5.1. *La Hipótesis 1(i) implica*

$$\underline{J} \leq \bar{J} \leq J^* < +\infty. \tag{3.7}$$

Demostraremos (3.7) haciendo uso del siguiente lema, el cual es uno de los teoremas conocidos como Tauberianos.

Lema 3.5.2. *Sea* $\{c_t, t = 0, 1, \dots\}$ *una sucesión de números no negativos. Entonces*

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\alpha} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1} c_t &\leq \liminf_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)\sum_{t=0}^{\infty}\alpha^t c_t \\ &\leq \limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)\sum_{t=0}^{\infty}\alpha^t c_t \leq \limsup_{n\to\alpha}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1} c_t.\end{aligned}$$

Demostración del Lema 3.5.1. Sin pérdida de generalidad supongamos que c es no negativa en lugar de acotada inferiormente. Notemos que

$$V_\alpha(\pi, x) = E_x^\pi \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c(x_t, a_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t E_x^\pi c(x_t, a_t),$$

donde el intercambio de la suma y el límite es justificado por el teorema de la convergencia monótona. Tomando $c_t := E_x^\pi c(x_t, a_t)$ y considerando $V_\alpha(\pi, x)$ y $J(\pi, x)$ en (3.4), entonces la tercera desigualdad del lema implica

$$\limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(\pi, x) \leq J(\pi, x) \quad \forall \pi \in \Pi, x \in \mathbb{X}.$$

Entonces, de la definición de la función de valor V_α,

$$\limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(x) \leq J(\pi, x) \quad \forall \pi \in \Pi, x \in \mathbb{X}$$

y por lo tanto de (3.5)

$$\limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(x) \leq J(x) \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{3.8}$$

Ahora bien, de (3.8) y la Hipotesis 1(i) tenemos

$$\limsup_{\alpha \uparrow 1}(1-\alpha)m_\alpha \leq \inf_{x\in\mathbb{X}} J(x) < +\infty$$

es decir, (3.7) se cumple. ■

Teorema 3.5.3. *Supongamos que se satisface la Hipótesis 1(i). Si existe una función medible $u : \mathbb{X} \to (0, +\infty)$ y una política estacionaria f tal que*

$$\bar{J} + u(x) \geq c(x, f(x)) + \int_{\mathbb{X}} u(y) Q(dy|x, f(x)), \quad x \in \mathbb{X}, \tag{3.9}$$

entonces f es óptima en costo promedio y

$$J(x) = J(f, x) = \limsup_{\alpha \uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(x) = \bar{J} = J^*, \quad x \in \mathbb{X}. \tag{3.10}$$

Demostración. Puesto que u es no negativa, iterando (3.9) obtenemos

$$n\bar{J} + u(x) \geq V_{n,1}(f, x), \quad n \geq 1, x \in \mathbb{X}.$$

Al dividir la desigualdad anterior entre n y haciendo $n \to \infty$, tenemos que

$$\bar{J} \geq J(f, x) \geq J(x) \geq J^*, \quad x \in \mathbb{X}, \tag{3.11}$$

donde la segunda y tercera desigualdad se siguen de las definiciones de J y J^*, respectivamente. De (3.7) y (3.11) se sigue que para todo $\pi \in \Pi$,

$$J^* = \bar{J} \leq \limsup_{\alpha \uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(x) \leq \limsup_{\alpha \uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(\pi, x) \leq J(\pi, x), \quad \pi \in \Pi, x \in \mathbb{X}.$$

Finalmente, obtenemos que

$$J^* = \bar{J} \leq \limsup_{\alpha \uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(x) \leq \inf_{\pi\in\Pi} J(\pi, x) = J(x) \leq J(f, x) \leq \bar{J}, \quad x \in \mathbb{X}, \tag{3.12}$$

donde la última desigualdad se tiene de (3.11). Entonces todas las desigualdades en (3.12) son igualdades. ■

Para una función $f : \mathbb{U} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida en un espacio métrico $\mathbb{U}$, considere los conjuntos de nivel

$$\mathcal{D}_f(\lambda) = \mathcal{D}_f(\lambda; \mathbb{U}) := \{y \in \mathbb{U} : f(y) \leq \lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Recordemos que una función f es semi-continua inferiormente en $\mathbb{U}$ si los conjuntos de nivel $\mathcal{D}_f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, son cerrados, además la función f es inf-compacta en $\mathbb{U}$ si los conjuntos $\mathcal{D}_f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, son compactos. Por otro lado, un subconjunto de un espacio métrico es también un espacio métrico con respecto a la misma métrica. Para $U \subset \mathbb{U}$, si el dominio de f es reducido a U, entonces a esta función se le llama la restricción de f a U.

Denotemos por $L(\mathbb{X})$ la clase de funciones definidas en $\mathbb{X}$ semi-continuas inferiormente y acotadas por abajo; por $K(\mathbb{A})$ a la familia de subconjuntos compactos no-vacíos de $\mathbb{A}$, y por $K_\sigma(\mathbb{A})$ a la familia de todos los subconjuntos $\sigma-$compactos de $\mathbb{A}$. Observe que $K(\mathbb{A}) \subset K_\sigma(\mathbb{A})$.

Para probar la existencia de políticas óptimas en costo promedio, en lo que resta del trabajo estaremos considerando las siguientes hipótesis; estas se propusieron en [6] y se estudiaron bajo un enfoque distinto en [19].

Hipótesis 2.

(i) *c es semi-continua inferiormente y acotada por abajo en $\mathbb{K}$;*

(ii) *Para todo $x \in \mathbb{X}$ se cumple la siguiente propiedad: si $\{x_t\}$ es una sucesión en $\mathbb{X}$ que converge a $x \in \mathbb{X}$, entonces cualquier sucesión $\{a_t\}$ tal que $a_t \in A(x_t)$ para todo $t \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\{c(x_t, a_t)\}$ es acotada por arriba, tiene un punto límite $a \in A(x)$;*

(iii) *la probabilidad de transición $Q(\cdot|x, a)$ es débilmente continua en $(x, a) \in \mathbb{K}$.*

En [17] y [12] en lugar de la condición (ii) en la Hipótesis 2 se pide que la multifunción $A : \mathbb{X} \to K(\mathbb{A})$ sea semi-continua superiormente. En el Ejemplo 3.5.5 presentamos un caso donde se cumple la Hipótesis 2(i) y (ii), pero la multifunción no es semi-continua.

Definición 3.5.4. *A una función $f : \mathbb{K} \to \overline{\mathbb{R}}$ se le llama K-inf-compacta en $Gr(A)$, si para cada subconjunto compacto no vacío $\mathcal{K}$ de $\mathbb{X}$ la restricción de f a $Gr_{\mathcal{K}}(A) = \{(x, a) : x \in \mathcal{K}, a \in A(x)\}$ es una función inf-compacta.*

De la definición anterior podemos reescribir la Hipótesis 2 de la siguiente manera:

Hipótesis 2*.

(a) *c es K-inf-compacta y acotada por abajo;*

(b) *la probabilidad de transición $Q(\cdot|x, a)$ es débilmente continua en $(x, a) \in Gr(A)$.*

Esto se debe a que la semi-continuidad inferior de c junto con la condición (ii) de la Hipótesis 2 es equivalente a K-inf-compacidad de c; ver Lema B.0.5.

Ejemplo 3.5.5. *Sea $\mathbb{X} = \mathbb{A} = \mathbb{R}^+$, $A(0) = \{0\}$ y $A(x) = [x, x+1]$ si $x > 0$ y la función $c : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$c(x,a) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \ o \ x > 0, a = x \\ \frac{1}{x} & si \quad x > 0, x < a \leq x+1. \end{cases}$$

La multifunción $x \longmapsto A(x)$ no es semi-continua superiormente. En efecto, sea $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $x_n \to 0$ y sea $a_n = x_n + 1/2$. Entonces $a_n \in A(x_n)$ y $a_n \to 1/2$ pero $1/2 \notin A(0)$ por lo tanto la multifunción no es semi-continua superiormente.

Ahora mostramos que la función c es semi-continua inferiormente y acotada por abajo. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y

$$\mathcal{D}_c(\lambda) = \{(x,a) \in \mathbb{K} : c(x,a) \leq \lambda\}.$$

Entonces $\mathcal{D}_c(\lambda) = \emptyset$ si $\lambda < 0$ y $\mathcal{D}_c(0) = \{(x,a) : x = a\}$. Para $\lambda > 0$

$$\mathcal{D}_c(\lambda) = \{(0,0)\} \cup \{(x,a) : 1/\lambda \leq x < \infty, \ x \leq a \leq x+1\} \tag{3.14}$$

Por lo tanto $\mathcal{D}_c(\lambda)$ es un conjunto cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ de donde se sigue que c es s.c.i.

Finalmente mostramos que la función c satisface la Hipótesis 2(ii). Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{X}$ tal que $x_n \to x$ y $a_n \in A(x_n)$ tal que $\{c(x_n, a_n)\}$ está acotada por arriba. Probaremos que existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ tal que $a_{n_k} \to a \in A(x)$.

Sea $x > 0$. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe N tal que $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ para todo $n \geq N$ y por lo tanto, $a_n \in [x-\epsilon, x+1+\epsilon]$ para todo $n \geq N$. Por la compacidad de $[x-\epsilon, x+1+\epsilon]$ se sigue que existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ tal que $a_{n_k} \to a \in [x-\epsilon, x+1+\epsilon]$. Pero $x_{n_k} < a_{n_k} < x_{n_k} + 1$ para $k \geq 1$ lo que implica que

$$a \in [x, x+1] \in A(x)$$

pues $x_{n_k} \to x$.

Sea $x=0$ y supóngase (sin pérdida de generalidad) que $x_n > 0$ y $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \geq 1$. Si $0 \leq c(x_n, a_n) \leq M$ y $a_n \neq x_n$ entonces

$$\frac{1}{x_n} \leq M$$

lo que implica que existe N tal que $a_n = x_n$ para todo $n \geq N$ y por lo tanto $a_n \to 0 \in A(0)$. Por lo tanto, se cumple la Hipótesis 2(ii)

Además, observamos que de (3.14) se sigue que la función $c(\cdot,\cdot)$ no es inf-compacta en $\mathbb{K}$ pues $\mathcal{D}_c(\lambda)$ no es compacto, pero de acuerdo al Lema B.0.5 c es K-inf-compacta.

Ahora bien, para $\alpha \in (0,1]$ y una función $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ en $L(\mathbb{X})$, definimos

$$\eta_u^\alpha(x,a) := c(x,a) + \alpha \int_{\mathbb{X}} u(y)Q(dy|x,a), \quad (x,a) \in Gr(A). \tag{3.15}$$

Lema 3.5.6. *Para todo $x \in \mathbb{X}$, los siguientes enunciados se cumplen:*

(a) la Hipótesis 2(i) y (ii) implica que la función $c(x,\cdot)$ es inf-compacta en $A(x)$;

(b) bajo la Hipótesis 2(ii) y (iii), para cualquier $u \in L(\mathbb{X})$ y $\alpha \in (0,1]$, la función $\eta_u^\alpha(x,\cdot)$ es inf-compacta en $A(x)$.

Demostración. (a) Para $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario y $x \in \mathbb{X}$ fijo considere el conjunto

$$\mathcal{D}_{c(x,\cdot)}(\lambda) = \{a \in A(x) : c(x,a) \leq \lambda\}$$

y sea $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathcal{D}_{c(x,\cdot)}(\lambda)$. Entonces $\{c(x,a_n)\}$ es acotada por arriba y por la Hipótesis 2(ii) existe $\{a_{n_k}\}$ subsucesión de $\{a_n\}$ tal que $a_{n_k} \to a \in A(x)$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_{c(x,\cdot)}(\lambda)$ es un conjunto compacto, lo cual demuestra (a).

(b) Fijamos $x \in \mathbb{X}$. Puesto que $u \in L(\mathbb{X})$ y Q es débilmente continua en (x,a), el Teorema 1.4.5(iii) implica que el segundo sumando en (3.15) es una función semi-continua inferiormente, y es acotada por abajo puesto que u acotada por abajo. De acuerdo con (a), $c(x,\cdot)$ es inf-compacto en $A(x)$. Por lo tanto, como la suma de una función inf-compacta y una función semi-continua inferiormente acotada por abajo es una función inf-compacta, concluimos que $\eta_u^\alpha(x,\cdot)$ es inf-compacta en $A(x)$.

$\blacksquare$

Denotamos con E_x a la sección de E en $x \in \mathbb{X}$, es decir, $E_x = \{a : (x,a) \in E\}$ y con $proj_{\mathbb{X}}E$ la proyección de E en $\mathbb{X}$, es decir, $proj_{\mathbb{X}}E = \{x \in \mathbb{X} : (x,a) \in E$ para algún $a \in \mathbb{A}\}$. El siguiente teorema, conocido como el teorema de Arsenin-Kunigui ([14]) nos será de utilidad en lo que resta del trabajo.

Teorema 3.5.7. *Si E es un subconjunto de Borel de $\mathbb{X} \times \mathbb{A}$ y $E_x \in K_\sigma(\mathbb{A})$ para todo $x \in \mathbb{X}$, entonces $proj_{\mathbb{X}}E$ es un conjunto de Borel y existe $f : proj_{\mathbb{X}}E \to \mathbb{A}$ medible tal que $(x, f(x)) \in E$ para todo $x \in proj_{\mathbb{X}}E$.*

Lema 3.5.8. *Si se cumple la Hipótesis 2 y $u \in L(\mathbb{X})$, entonces la función*

$$u^*(x) := \inf_{a \in A(x)} \left[c(x,a) + \int_{\mathbb{X}} u(y) Q(dy|x,a) \right], \quad x \in \mathbb{X}, \tag{3.16}$$

pertenece a $L(\mathbb{X})$, y existe $f \in \mathbb{F}$ tal que

$$u^*(x) = c(x, f(x)) + \int_{\mathbb{X}} u(y) Q(dy|x, f(x)), \quad x \in \mathbb{X}. \tag{3.17}$$

Más aún, el ínfimo en (3.16) puede ser reemplazado con el mínimo, y la multifuncion $x \longmapsto A_*(x)$ donde

$$A_*(x) := \left\{ a \in A(x) : u^*(x) = c(x,a) + \int_{\mathbb{X}} u(y) Q(dy|x,a) \right\}, \quad x \in \mathbb{X}, \tag{3.18}$$

satisface las siguientes propiedades:

(a) $Gr(A_*) = \{(x,a) : x \in \mathbb{X}, a \in A_*(x)\}$ es un subconjunto de Borel de $\mathbb{X} \times \mathbb{A}$.

(b) $A_*(x)$ es compacto.

Demostración. Para cualquier función semi-continua inferiormente en $\mathbb{X}$, acotada por abajo $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in (0,1]$ se sigue del Lema 3.5.6 que la funcion $\eta_u^\alpha(x,\cdot)$ es inf-compacta en $A(x)$, $x \in \mathbb{X}$. Entonces, el ínfimo en (3.16) puede ser reemplazado por el mínimo y A_* es no vacío para cada $x \in \mathbb{X}$.

Ahora mostraremos que u^* es semi-continua inferiormente en $\mathbb{X}$. Fijemos un $x \in \mathbb{X}$ arbitrario y una sucesión $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Necesitamos probar la desigualdad

$$u^*(x) \leq \liminf_{n\to\infty} u^*(x_n). \tag{3.19}$$

Si $\liminf_{n\to\infty} u^*(x_n) = +\infty$, entonces (3.19) se sigue trivialmente. Entonces consideraremos el caso cuando $\liminf_{n\to\infty} u^*(x_n) < +\infty$.

Sea una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1} \subseteq \{x_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$\liminf_{n\to\infty} u^*(x_n) = \lim_{k\to\infty} u^*(x_{n_k}).$$

Al hacer que $\lambda = \lim_{k\to\infty} u^*(x_{n_k}) + 1$, obtenemos la desigualdad $u^*(x_{n_k}) \leq \lambda$ para todo $k \geq K$ y para algún número natural K. Puesto que la función $\eta_u^1(x,\cdot)$ es inf-compacta en $A(x)$, la ecuación (3.16) puede reescribirse como

$$u^*(x) = \min_{a\in A(x)} \eta_u^1(x,a), \quad x \in \mathbb{X}.$$

Entonces, para todo $k \geq K$, existe $a_k \in A(x_{n_k})$ tal que $u^*(x_{n_k}) = \eta_u^1(x_{n_k}, a_k)$. Por lo tanto

$$c(x_{n_k}, a_k) \leq \eta_u^1(x_{n_k}, a_k) \leq \lambda, \quad k \geq K.$$

En vista de la Hipótesis 2(ii), existe una subsucesión convergente $\{a_{k_m}\}_{m\geq 1}$ de la sucesión $\{a_k\}_{k\geq 1}$ tal que $a_{k_m} \to a \in A(x)$ cuando $m \to \infty$. Debido a la semi-continuidad inferior de η_u^1 en $\mathbb{K}$ obtenemos

$$\liminf_{n\to\infty} u^*(x_n) = \lim_{k\to\infty} u^*(x_{n_k}) = \lim_{m\to\infty} u^*(x_{n_{k_m}}) = \lim_{m\to\infty} \eta_u^1(x_{n_{k_m}}, a_{k_m}) \geq \eta_u^1(x,a) \geq u^*(x),$$

lo cual muestra la desigualdad (3.19). Entonces u^* es semi-continua inferiormente en $\mathbb{X}$.

Ahora, consideramos los conjuntos no-vacíos $A_*(x)$, $x \in \mathbb{X}$, definidos en (3.18). La gráfica $Gr(A_*)$ es un subconjunto de Borel de $\mathbb{X} \times \mathbb{A}$, puesto que $Gr(A_*) = \{(x,a) : u^*(x) = \eta_u^1(x,a)\}$ y las funciones η_u^1 y u^* son semi-continuas inferiormente en $\mathbb{K}$ y $\mathbb{X}$, respectivamente, por lo tanto son de Borel.

El Lema 3.5.6 implica que el conjunto $A_*(x)$ es compacto. En efecto, fijemos $x \in \mathbb{X}$ y sea $\lambda = u^*(x)$. Entonces, el conjunto

$$A_*(x) = \{a \in A(x) : \eta_u^1(x,a) \leq \lambda\} = \mathcal{D}_{\eta_u^1(x,\cdot)}(\lambda)$$

es compacto, ya que $\eta_u^1(x,\cdot)$ es inf-compacta en $A(x)$.

Enseguida, probamos la existencia de $f \in \mathbb{F}$ que satisface (3.17). La $Gr(A_*)$ es de Borel y puesto que los conjuntos no vacíos $A_*(x)$ son compactos para todo $x \in \mathbb{X}$, el teorema de Arsenin-Kunugui (Teorema 3.5.7) implica la existencia de un selector $f : \mathbb{X} \to \mathbb{A}$ tal que $f(x) \in A_*(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$. ∎

3.6. Aplicación del Lema de Fatou a Procesos de Control de Markov

En esta sección aplicaremos el lema de Fatou para demostrar la existencia de políticas estacionarias óptimas en costo descontado y costo promedio bajo las condiciones de las Hipotesis 1 y 2. Primero vemos que la Hipótesis 2 es suficiente para obtener la ecuación de optimalidad en costo descontado y después utilizando las Hipótesis 1 y 2 (o Hipótesis 2^*) se obtiene la desigualdad de optimalidad en costo promedio (3.9).

3.6.1. Costo total esperado descontado

Bajo la Hipótesis 2 estableceremos las siguiente propiedades de procesos de control markoviano con costo descontado: existencia de políticas estacionarias óptimas, la descripción de los conjuntos de políticas estacionarias óptimas y convergencia del algoritmo de iteración de valores.

Teorema 3.6.1. *Supongamos que se cumple la Hipótesis 2. Entonces*

(i) las funciones $V_{n,\alpha}$ y V_α son semi-continuas inferiormente en $\mathbb{X}$ y $V_{n,\alpha}(x) \to V_\alpha$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in \mathbb{X}$;

(ii)

$$V_{n+1,\alpha}(x) = \inf_{a \in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int_{\mathbb{X}} V_{n,\alpha}(y) Q(dy|x,a) \right] \tag{3.20}$$

para todo $x \in \mathbb{X}$ y $n = 0, 1, \ldots,$ con $V_{0,\alpha}(\cdot) \equiv 0$.

(iii) para $\alpha \in (0,1)$,

$$V_\alpha(x) = \min_{a \in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int_{\mathbb{X}} V_\alpha(y) Q(dy|x,a) \right], \quad x \in \mathbb{X}, \tag{3.21}$$

y los conjuntos no-vacíos

$$A_\alpha(x) := \left\{ a \in A(x) : V_\alpha(x) = \eta^\alpha_{V_\alpha}(x,a) \right\}, \quad x \in \mathbb{X}$$

satisfacen las siguientes propiedades

- *la gráfica $Gr(A_\alpha) = \{(x,a) : x \in \mathbb{X}, a \in A_\alpha(x)\}$ es un subconjunto de Borel de $\mathbb{X} \times \mathbb{A}$, y*

- $A_\alpha(x)$ *es compacto.*

(iv) Existe una política estacionaria α-óptima f_α; además, una política estacionaria es α-óptima si y solo si $f_\alpha(x) \in A_\alpha(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$.

Demostración. Sea $M > -\infty$ tal que $c(x,a) \geq M$, $\forall (x,a) \in \mathbb{K}$. Primeramente, demostraremos los enunciados para una función de costo c no negativa, i.e., cuando $M = 0$. En este caso, $V_{n,\alpha}(x) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $V_\alpha(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Tenemos que (ii) se tiene de [2, Lema 8.7] y (3.21) se tiene de [2, Proposición 9.8].

De (3.20) y el Lema 3.5.8, $V_{1,\alpha} \in L(\mathbb{X})$ puesto que $V_{0,\alpha} = 0 \in L(\mathbb{X})$. Por los mismos argumentos, si $V_{n,\alpha} \in L(\mathbb{X})$, entonces $V_{n+1,\alpha} \in L(\mathbb{X})$. Entonces $V_{n,\alpha} \in L(\mathbb{X})$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por el Lema 3.5.6, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{X}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $\mathcal{D}_{\eta^\alpha_{V_{n,\alpha}}(x,\cdot)}(\lambda)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{A}$, entonces de [2, Proposición 9.17] o [12, Lema 4.2.4], $V_{n,\alpha} \uparrow V_\alpha$ cuando $n \to \infty$. Ya que el límite de un sucesión monótona creciente de funciones semi-continuas inferiormente es de nuevo una función semi-continua inferiormente, $V_\alpha \in L(\mathbb{X})$. El Lema 3.5.8, aplicado a (3.21), implica el enunciado (iii), y (iv) se sigue de [2, Proposición 9.12].

Ahora, sea $c(x,a) \geq M$ para todo $(x,a) \in \mathbb{K}$ y para algún $-\infty < M < 0$. Definamos una nueva función de costo $\hat{c} := c - M \geq 0$, y denotemos por $\hat{V}_{n,\alpha}$ y $\hat{V}_\alpha$ las funciones de valor correspondiente. Entonces $V_{n,\alpha} = \hat{V}_{n,\alpha} + [(1-\alpha^n)/(1-\alpha)]M$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $V_\alpha = \hat{V}_\alpha + M/(1-\alpha)$. Puesto que (i)-(iv) se cumplen para los costos $\hat{c}$ y las funciones $\hat{V}_{n,\alpha}$ y $\hat{V}_\alpha$, también se cumplen para la función de costo inicial c y las funciones de valor $V_{n,\alpha}$ y V_α. ■

3.6.2. Desigualdad de optimalidad en costo promedio

Supongamos que la Hipótesis 1 se cumple. Sea

$$u(x) := \liminf_{\alpha \to 1, y \to x} u_\alpha(y) = \sup_{\beta \in (0,1)} \sup_{\delta > 0} \inf_{y \in B_\delta(x)} \inf_{\alpha \in [\beta,1)} u_\alpha(y), \quad x \in \mathbb{X}. \tag{3.22}$$

Además, definimos las siguientes funciones no-negativas en $\mathbb{X}$

$$U_\beta(x) := \inf_{\alpha \in [\beta,1)} u_\alpha(x), \qquad \underline{u}_\beta(x) := \liminf_{y \to x} U_\beta(y), \quad \beta \in (0,1),\ x \in \mathbb{X}. \tag{3.23}$$

Observamos que las tres funciones definidas son finitas. En efecto,

$$\underline{u}_\beta(x) \le U_\beta(x) \le \sup_{\beta\in(0,1)} \inf_{\alpha\in[\beta,1)} u_\alpha(x) = \liminf_{\alpha\uparrow 1} u_\alpha(x) < \infty, \quad \beta \in (0,1),\ x \in \mathbb{X}, \tag{3.24}$$

donde las primeras dos desigualdades se siguen de las definiciones de $\underline{u}_\beta$ y U_β, respectivamente. Para $x \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \sup_{\beta\in(0,1)} \sup_{\delta>0} \inf_{y\in B_\delta(x)} \inf_{\alpha\in[\beta,1)} u_\alpha(y) = \sup_{\beta\in(0,1)} \sup_{\delta>0} \inf_{y\in B_\delta(x)} U_\beta(y) \\ &= \sup_{\beta\in(0,1)} \liminf_{y\to x} U_\beta(y) = \sup_{\beta\in(0,1)} \underline{u}_\beta(x) < \infty, \end{aligned} \tag{3.25}$$

donde la primera igualdad se sigue de la definición de lím inf y la última desigualdad se tiene por (3.24). En vista de (3.23), las funciones $U_\beta(x)$ y $\underline{u}_\beta(x)$ son no-decrecientes en β. Por lo tanto, de (3.25)

$$u(x) = \lim_{\beta\uparrow 1} \underline{u}_\beta(x), \quad x \in \mathbb{X}. \tag{3.26}$$

Antes de enunciar el resultado principal (Teorema 3.6.5) establecemos algunos hechos preliminares.

Lema 3.6.2. *Si la Hipótesis 1 se cumple, las funciones* $u, \underline{u}_\alpha : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$, $\alpha \in (0,1)$ *son semi-continuas inferiormente. Si adicionalmente suponemos la Hipótesis 2, las funciones* $u_\alpha : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$, $\alpha \in (0,1)$, *son semi-continuas inferiormente en* $\mathbb{X}$.

Demostración. Puesto que $U_\alpha(x) \ge 0$, $\alpha \in (0,1)$, y $x \in \mathbb{X}$, las funciones $\underline{u}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ son semi-continuas inferiormente [11, Lema 3.1]. Ya que el supremo sobre cualquier conjunto de funciones semi-continuas inferiormente es una función semi-continua inferiormente, entonces u es semi-continua inferiormente.

Supongamos la Hipótesis 2. De acuerdo al Teorema 3.6.1(i), la función $u_\alpha(x) = V_\alpha(x) - m_\alpha$ es semi-continua inferiormente en $\mathbb{X}$. ■

Corolario 3.6.3. *Suponemos la Hipótesis 1. Para cada sucesión* $\alpha_n \uparrow 1$, *cuando* $n \to \infty$, *y para cada* $x \in \mathbb{X}$,

$$\underline{u}_{\alpha_n}(x) \uparrow u(x) = \liminf_{n\to\infty, y\to x} \underline{u}_{\alpha_n}(y).$$

Demostración. Sea $\alpha_n \uparrow 1$ cuando $n \to \infty$, y $x \in \mathbb{X}$. Entonces

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty, y\to x} \underline{u}_{\alpha_n}(y) &= \sup_n \sup_{\delta>0} \inf_{y\in B_\delta(x)} \inf_{m\geq n} \underline{u}_{\alpha_m}(y) = \sup_n \sup_{\delta>0} \inf_{y\in B_\delta(x)} \underline{u}_{\alpha_n}(y) \\ &= \sup_n \liminf_{y\to x} \underline{u}_{\alpha_n}(y) = \lim_{n\to\infty} \underline{u}_{\alpha_n}(x) = u(x),\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple ya que la función $\underline{u}_\alpha(y)$ es no decreciente en α, la cuarta igualdad se cumple puesto que es semi-continua inferiormente y la última se sigue de (3.26). ∎

Lema 3.6.4. *Supongamos que se cumplen las Hipótesis 1 y 2, entonces para toda $x \in \mathbb{X}$,*

$$\bar{J} + u(x) \geq \min_{a\in A(x)} \left[c(x,a) + \int_{\mathbb{X}} u(y)Q(dy|x,a) \right]. \tag{3.27}$$

Demostración. Fijemos un $\epsilon^* > 0$ arbitrario. Puesto que $\bar{J} = \limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)m_\alpha$, existe $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que

$$\bar{J} + \epsilon^* > (1-\alpha)m_\alpha, \quad \alpha \in (\alpha_0, 1). \tag{3.28}$$

Por otro lado, de acuerdo al Teorema 3.6.1 para todo $x \in \mathbb{X}$ y $\alpha \in [0,1)$,

$$V_\alpha(x) = \min_{a\in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int_{\mathbb{X}} V_\alpha(y)Q(dy|x,a) \right],$$

que es equivalente a

$$(1-\alpha)m_\alpha + u_\alpha(x) = \min_{a\in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int_{\alpha} u_\alpha(y)Q(dy|x,a) \right], \quad x \in \mathbb{X}. \tag{3.29}$$

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que

$$\bar{J} + \epsilon^* + u(x) \geq \min_{a\in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int_{\mathbb{X}} \underline{u}_\alpha(y)Q(dy|x,a) \right], \quad x \in \mathbb{X}, \alpha \in [\alpha_0, 1). \tag{3.30}$$

En efecto, de (3.28) y (3.29) para cada $\alpha, \beta \in [\alpha_0, 1)$ tal que $\alpha \leq \beta$, y para cada $x \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned}\bar{J} + \epsilon^* + u_\beta(x) > (1-\beta)m_\beta + u_\beta(x) &= \min_{a\in A(x)} \left[c(x,a) + \beta \int_{\mathbb{X}} u_\beta(y)Q(dy|x,a) \right] \\ &\geq \min_{a\in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int_{\mathbb{X}} U_\alpha(y)Q(dy|x,a) \right].\end{aligned}$$

Entonces tenemos que para todo $x \in \mathbb{X}$ y todo $\alpha \in [\alpha_0, 1)$,

$$\begin{aligned}\bar{J} + \epsilon^* + U_\alpha(x) &= \inf_{\beta\in[\alpha,1)} [\bar{J} + \epsilon^* + u_\beta(x)] \geq \min_{a\in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int_{\mathbb{X}} U_\alpha(y) Q(dy|x,a) \right] \\ &\geq \min_{a\in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int_{\mathbb{X}} \underline{u}_\alpha(y) Q(dy|x,a) \right] = \min_{a\in A(x)} \eta^\alpha_{\underline{u}_\alpha}(x,a).\end{aligned}$$

El Lema 3.5.8 implica que la función $x \to \min_{a\in A(x)} \eta^\alpha_{\underline{u}_\alpha}(x,a)$ es semi-continua inferiormente en $\mathbb{X}$, por lo tanto

$$\liminf_{y\to x} \min_{a\in A(y)} \eta^\alpha_{\underline{u}_\alpha}(y,a) \geq \min_{a\in A(x)} \eta^\alpha_{\underline{u}_\alpha}(x,a), \quad x \in \mathbb{X}, \alpha \in (0,1),$$

y ya que por la definición (3.23), $\underline{u}_\alpha(x) = \liminf_{y\to x} U_\alpha(y)$, obtenemos finalmente

$$\bar{J} + \epsilon^* + \underline{u}_\alpha(x) \geq \min_{a\in A(x)} \eta^\alpha_{\underline{u}_\alpha}(x,a) \quad x \in \mathbb{X}, \alpha \in [\alpha_0, 1). \tag{3.31}$$

Puesto que por el Corolario 3.6.3 $u(x) = \sup_{\alpha\in[\alpha_0,1)} \underline{u}_\alpha(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$, (3.31) implica (3.30).

Para completar la prueba del lema, fijemos $x \in \mathbb{X}$ arbitrario. Del Lema 3.5.8, para cualquier $\alpha \in (0,1)$, existe $a_\alpha \in A(x)$ tal que $\min_{a\in A(x)} \eta^\alpha_{\underline{u}_\alpha}(x,a) = \eta^\alpha_{\underline{u}_\alpha}(x,a_\alpha)$. Ya que $\underline{u}_\alpha \geq 0$ para $\alpha \in [\alpha_0, 1)$, de la desigualdad (3.30) tenemos

$$\bar{J} + \epsilon^* + u(x) \geq \eta^\alpha_{\underline{u}_\alpha}(x,a_\alpha) \geq c(x,a_\alpha). \tag{3.32}$$

Entonces, para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1)$,

$$a_\alpha \in \mathcal{D}_{\eta^\alpha_{\underline{u}_\alpha}(x,\cdot)}(\bar{J} + \epsilon^* + u(x)) \subseteq \mathcal{D}_{c(x,\cdot)}(\bar{J} + \epsilon^* + u(x)) \subseteq A(x).$$

Por el Lema 3.5.6, el conjunto $\mathcal{D}_{c(x,\cdot)}(\bar{J} + \epsilon^* + u(x))$ es compacto. Siendo así, para cada sucesión $\beta_n \uparrow 1$ de números de $[\alpha_0, 1)$, existe una subsucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq1}$ tal que la sucesión $\{a_{\alpha_n}\}_{n\geq1}$ converge y $a_* = \lim_{n\to\infty} a_{\alpha_n} \in A(x)$.

Consideremos la subsucesión $\alpha_n \uparrow 1$ tal que $a_{\alpha_n} \to a_* \in A(x)$. Del lema de Fatou Generalizado (Teorema 2.2.1) y el Corolario 3.6.3, se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_n \int_{\mathbb{X}} \underline{u}_{\alpha_n}(y) Q(dy|x,a_{\alpha_n}) \geq \int_{\mathbb{X}} u(y) Q(dy|x,a_*). \tag{3.33}$$

Puesto que la función c es semi-continua inferiormente, (3.32) y (3.33) implican

$$\bar{J} + \epsilon^* + u(x) \geq \liminf_{n\to\infty} \eta^{\alpha_n}_{\underline{u}_{\alpha_n}}(x, a_{\alpha_n}) \geq c(x, a_*) + \int_{\mathbb{X}} u(y)Q(dy|x, a_*) \geq \min_{a\in A(x)} \eta^1_u(x, a).$$

Como $\epsilon^* > 0$ arbitrario, de lo anterior obtenemos (3.27). ∎

Ya estamos listos para enunciar nuestro resultado principal.

Teorema 3.6.5. *Suponemos las Hipótesis 1 y 2. Entonces existe una política estacionaria f que satisface la desigualdad de optimalidad en costo promedio (3.9) donde u es la función definida en (3.22) y las igualdades (3.10) se cumplen para esta política f. Además, las siguientes afirmaciones son válidas:*

(a) La función $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$, definida en (3.22), es semi-continua inferiormente.

(b) f es óptima en costo promedio y $f(x) \in A_*(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$ (ver (3.18)).

Demostración. La parte (a) se sigue del Lema 3.6.2. Por otro lado, el Lema 3.6.4 implica que

$$\bar{J} + u(x) \geq \min_{a\in A(x)} \left[c(x, a) + \int_{\mathbb{X}} u(y)Q(dy|x, a) \right], \quad x \in \mathbb{X}.$$

con u definida en (3.22). Del Lema 3.5.8 y de (a) existe una política estacionaria f que alcanza el mínimo en el lado derecho de la desigualdad anterior, es decir $f(x) \in A_*(x)$ y

$$\bar{J} + u(x) \geq c(x, f(x)) + \int_{\mathbb{X}} u(y)Q(dy|x, f(x)), \quad x \in \mathbb{X}.$$

Por lo tanto del Teorema 3.5.3, f es óptima en costo promedio y $f(x) \in A_*(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$. ∎

3.6.3. Ejemplo: Modelos de ecuaciones en diferencias

En esta sección estudiamos PCMs que evolucionan por medio de ecuaciones en diferencias, y como caso particular presentamos un modelo de control de inventario. Principalmente nos enfocaremos al análisis de la Hipótesis 2.

Sea $\mathbb{X}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{S}$, espacios de Borel, $A(x)$ subconjunto no vacío de A, $\mathbb{K} = \{(x, a) : x \in \mathbb{X},\ a \in A(x)\}$ y $f : \mathbb{K} \times \mathbb{S} \to \mathbb{X}$ una función continua. Consideremos un modelo de control markoviano definido por

$$x_{t+1} = f(x_t, a_t, \xi_t)$$

donde ξ_t $(t = 1, 2, ...)$ son v.a.i.i.d. definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Denotemos por μ la medida de probabilidad en $(\mathbb{S}, \mathcal{B}(\mathbb{S}))$ inducida por la distribución común de las variables ξ_t, es decir, $\mu(B) = P[\xi_t \in B]$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$.

En este caso la probabilidad de transición está dada por

$$Q(B|x,a) = \int_{\mathbb{S}} \mathbf{I}_B(f(x,a,s))\mu(ds), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{X}), \quad (x,a) \in \mathbb{K}. \tag{3.34}$$

Probaremos que el kernel de transición es débilmente continuo, es decir, mostraremos que si $(x_n, a_n) \to (x, a)$ en $\mathbb{K}$, entonces $Q(\cdot|x_n, a_n)$ converge débilmente a $Q(\cdot|x, a)$. Para esto es suficiente demostrar que para todo conjunto cerrado $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, se cumple que

$$\limsup_{n\to\infty} Q(B|x_n, a_n) \leq Q(B|x, a).$$

Si $(x_n, a_n) \to (x, a)$ entonces

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} Q(B|x_n,a_n) &= \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} \mathbf{I}_B(f(x_n, a_n, s))\mu(ds) \\ &\leq \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{I}_B(f(x_n, a_n, s))\mu(ds) \\ &\leq \int_{\mathbb{S}} \mathbf{I}_B(f(x, a, s))\mu(ds) = Q(B|x, a), \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue del Lema de Fatou (para el lím sup) y la segunda del hecho que f es continua y B es cerrado lo que implica que para cada $s \in \mathbb{S}$, la función

$$(x, a) \longmapsto \mathbf{I}_B(f(x, a, s))$$

es semi-continua superiormente en $\mathbb{K}$. Por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{I}_B(f(x_n, a_n, s)) \leq \mathbf{I}_B(f(x, a, s)).$$

En general, la probabilidad de transición definida en (3.34) puede no ser fuertemente continua como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.6.6. *Sea $\mathbb{X} = \mathbb{A} = \mathbb{S} = \mathbb{R}$, la función $f : \mathbb{X} \times \mathbb{A} \times \mathbb{S} \to \mathbb{X}$ definida por $f(x, a, s) = x + a - s$ y supóngase que μ está concentrada en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. Consideremos una sucesión (x_n, a_n) que converge a (x, a) tal que $(x_n+a_n) \in \mathbb{Q}$ y $(x + a) \in \mathbb{Q}^c$. Entonces, $\{s : x_n + a_n - s \in \mathbb{Q}^c\} \subset \mathbb{Q}^c$ y $\{s : x + a - s \in \mathbb{Q}^c\} \supset \mathbb{Q}$ y* *por lo tanto,*

$$0 = \lim_{n\to\infty} Q(\mathbb{Q}^c|x_n, a_n) \neq Q(\mathbb{Q}^c|x, a) = 1.$$

Ejemplo 3.6.7. *Sea $\mathbb{X} = \mathbb{A} = \mathbb{S} = \mathbb{R}$, la función $f : \mathbb{X} \times \mathbb{A} \times \mathbb{S} \to \mathbb{X}$ definida por $f(x, a, s) = x+a-s$. Supóngase que μ está concentrada en $[0, \infty)$, $\mu(\{0\}) > 0$ y $\mu(\{x\}) = 0$ para $x > 0$. Si (x_n, a_n) es tal que $x_n, a_n > 0$ y $(x_n, a_n) \to (0, 0)$ entonces*

$$0 = \lim_{n\to\infty} Q(\{0\}|x_n, a_n) \neq Q(\{0\}|0, 0) = \mu(\{0\}) > 0.$$

3.6.3.1. Un modelo de inventario

Consideramos un modelo de control de inventario donde $\mathbb{X} = \mathbb{S} = \mathbb{R}$, $\mathbb{A} = \mathbb{R}^+$, $A(x) = [0, \infty)$ si $x \geq 0$ y $A(x) = [-x, \infty)$ si $x < 0$. La dinámica del proceso está dada por la ecuación

$$x_{t+1} = x_t + a_t - \xi_t, \qquad t = 0, 1, ... \tag{3.35}$$

donde (ξ_t) es una sucesión de v.a.i.i.d. no negativas con función de distribución común μ tal que $\mu(\{0\}) > 0$. La función de costo por etapa es

$$c(x, a) := k\mathbf{I}_{(0,\infty)}(a) + \bar{c}a + hE[(x + a - \xi)^+] + pE[(x + a - \xi)^-]$$

donde ξ es una v.a. con distribución μ, $k \geq 0$ es el costo por ordenar, $\bar{c} \geq 0$ es el costo por unidad, $h \geq 0$ es el costo de almacenamiento y $p \geq 0$ es la penalización por demanda no surtida.

Nótese que

$$E[(x + a - \xi)^+] = \int_{[0,x+a]} (x + a - s)\mu(ds) = (x + a)\mu(0) + \int_{\mathbb{R}} (x + a - s)\mathbf{I}_{(0,x+a)}(s)\mu(ds)$$

y

$$E[(x + a - \xi)^-] = \int_{[x+a,\infty)} (s - x - a)\mu(ds) = \int_{\mathbb{R}} (s - x - a)\mathbf{I}_{(x+a,\infty)}(s)\mu(ds).$$

Puesto que para cada $s \in \mathbb{R}$, las funciones $(x, a) \to \mathbf{I}_{(0,x+a)}(s)$ y $(x, a) \to \mathbf{I}_{(x+a,\infty)}(s)$ son semi-continuas inferiormente en $\mathbb{K}$, del Lema de Fatou se sigue que la función

$$L(x, a) := h\left[(x + a)\mu(\{0\}) + \int_{\mathbb{R}} (x + a - s)\mathbf{I}_{(0,x+a)}(s)\mu(ds)\right] + p\int_{\mathbb{R}} (s-x-a)\mathbf{I}_{(x+a,\infty)}(s)\mu(ds) \tag{3.36}$$

es semi-continua inferiormente en $\mathbb{X} \times \mathbb{A}$. Por otra parte,

$$c(x, a) = k\mathbf{I}_{(0,\infty)}(a) + \bar{c}a + L(x, a) \tag{3.37}$$

lo que implica que $c(x, a)$ es semi-continua inferiormente en $\mathbb{K}$ y además está acotada por abajo (no negativa).

Ahora, sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{X}$ tal que $x_n \to x \in \mathbb{X}$ y (a_n) una sucesión tal que $a_n \in A(x_n)$ y $0 \leq c(x_n, a_n) \leq M$ para alguna $M \in \mathbb{R}$. Entonces de (3.36) y (3.37) se sigue que

$$(x_n + a_n)\mu(0) \leq M$$

lo que implica que (a_n) es una sucesión acotada y por lo tanto existe una subsucesión (a_{n_k}) de (a_n) tal que $a_{n_k} \to a \in A(x)$.

Concluimos entonces que este modelo de inventario satisface la Hipótesis 2.

Apéndice A

Funciones semi-continuas

Definición A.0.1. *Sea $\mathbb{S}$ un espacio métrico. La función $f : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice ser*

semi-continua inferiormente (s.c.i) *en $\mathbb{S}$ si $\{s \in \mathbb{S} : f(s) > a\}$ es abierto en $\mathbb{S}$ para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$,*

semi-continua superiormente (s.c.s) *en $\mathbb{S}$ si $-f$ es s.c.i, es decir, $\{s \in \mathbb{S} : f(s) < a\}$ es abierto en $\mathbb{S}$ para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Note que f es continua si y solo si es tanto s.c.i como s.c.s.

Teorema A.0.2. *La función f es semi-continua inferiormente en $\mathbb{S}$ si y solo si para cada sucesión $\{x_n\}$ convergente a un punto $x \in \mathbb{S}$, tenemos que $\liminf_n f(x_n) \geq f(x)$ donde $\liminf_n f(x_n) = \sup_n \inf_{k \geq n} f(x_k)$. Por lo tanto, f es s.c.s si y solo si $\limsup_n f(x_n) \leq f(x)$ cuando $x_n \to x$.*

Algunas propiedades de las funciones semi-continuas son

- Si f es s.c.i en un espacio métrico compacto entonces f alcanza su ínfimo. Análogamente, si f s.c.s en un espacio métrico compacto, f alcanza su supremo.
- Si f_i es s.c.i en $\mathbb{S}$ para cada $i \in I$, entonces $\sup_i f_i$ es s.c.i; Si I es finito, entonces $\min_i f_i$ es s.c.i. Similarmente, si f_i es s.c.s para cada i, entonces $\inf_i f_i$ s.c.s, y si I finito, entonces $\max_i f_i$ es s.c.s.

Teorema A.0.3 (Teorema A2.5 [1])**.** *Sea $f : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{S}$ espacio métrico, f arbitraria. Defina*

$$\underline{f}(x) := \liminf_{y \to x} f(y), \quad x \in \mathbb{S}$$

esto es

$$\underline{f}(x) = \sup_V \inf_{y \in V} f(y),$$

donde V *representa a todas las bolas abiertas con centro en* x *y radio* $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Se tiene que* $\underline{f}$ *es semi-continua inferiormente en* $\mathbb{S}$ *y* $\underline{f} \leq f$*; además si* $g : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ *es semi-continua inferiormente y* $g \leq f$*, entonces* $g \leq \underline{f}$ *. Por lo tanto* $\underline{f}$*, llamada envolvente inferior de* f*, es el supremo de todas las funciones s.c.i que son menores o iguales que* f *(siempre hay al menos una de estas funciones, es decir, la constante* $-\infty$*).*

Similarmente, si $\overline{f} := \limsup_{y \to x} f(y) = \inf_V \sup_{y \in V} f(y)$*, entonces* $\overline{f}$ *, la envolvente superior de* f*, es semi-continua superiormente y* $\overline{f} \geq f$*; de hecho* $\overline{f}$ *es el ínfimo de todas las funciones s.c.s que son mayores o iguales que* f*.*

Observación A.0.4.

(i) $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$*,*

(ii) Si $f \leq g$*, entonces* $\underline{f} \leq \underline{g}$ *y* $\overline{f} \leq \overline{g}$*,*

(iii) Si f *es acotada, también lo son* $\underline{f}$ *y* $\overline{f}$*; precisamente, si* $m \leq f \leq M$*,* $m, M \in \mathbb{R}$ *entonces* $m \leq \underline{f} \leq f \leq \overline{f} \leq M$*.*

Para una función $f : \mathbb{U} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida en un espacio métrico $\mathbb{U}$, considere los conjuntos de nivel $\mathcal{D}_f(\lambda)$ (o $\mathcal{D}_f(\lambda; \mathbb{U})$)

$$\mathcal{D}_f(\lambda) = \{y \in \mathbb{U} : f(y) \leq \lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{A.1}$$

De la Definición A.0.1 tenemos que una función f es semi-continua inferiormente en $\mathbb{U}$ si todos los conjuntos de nivel $\mathcal{D}_f(\lambda)$ son cerrados. Los conjuntos de nivel satisfacen las siguientes propiedades

(a) si $\lambda_1 > \lambda$, entonces $\mathcal{D}_f(\lambda) \subseteq \mathcal{D}_f(\lambda_1)$;

(b) si g, f son funciones en $\mathbb{U}$ tal que $g(y) \geq f(y)$ para todo $y \in \mathbb{U}$, entonces $\mathcal{D}_g(\lambda) \subseteq \mathcal{D}_f(\lambda)$.

Sea $L(\mathbb{X})$ la familia de todas las funciones en $\mathbb{X}$ que son l.s.c y acotadas por abajo.

Proposición A.0.5. v *está en* $L(\mathbb{X})$ *si y solo si existe una sucesión de funciones continuas y acotadas por abajo* v_n *en* $\mathbb{X}$ *tal que* $v_n \uparrow v$*.*

Proposición A.0.6. *Si* $v, v_1, \ldots, v_n$ *pertenecen a* $L(\mathbb{X})$*, entonces las funciones* αv *con* $\alpha \geq 0$ *y* $v_1 + \cdots + v_n$ *pertenecen a* $L(\mathbb{X})$*.*

Las demostraciones de los hechos anteriores se pueden encontrar en [1].

Apéndice B

Resultados Auxiliares

A continuación mostraremos el Lema 2.2.10(Teorema B.0.2) visto en el Capítulo 2. Para la prueba utilizaremos un resultado auxiliar que podemos encontrar en Kartashov [13].

Lema B.0.1. *(Kartashov [13, p. 134]). Considere una sucesión de funciones reales* $\epsilon_n(K)$*, donde* $K > 0$*, tal que*

(i) $\epsilon_n(K) \downarrow 0$ *cuando* $K \to +\infty$ *para cada* $n = 1, 2, \ldots$*; y*

(ii) $\lim_{K\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \epsilon_n(K) = 0$.

Entonces $\lim_{K\to\infty} \sup_{n=1,2,\ldots} \epsilon_n(K) = 0$.

Teorema B.0.2. *Sea* $(\mathbb{S}, \Sigma)$ *un espacio medible,* $\{\mu_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathcal{M}(\mathbb{S})$ *sucesión de medidas, y* $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *sucesión de funciones medibles en* $\mathbb{S}$ *con valores en* $\overline{\mathbb{R}}$*. Entonces existe* $N = 0, 1, \ldots$ *tal que* $\{f_{n+N}\}_{n=1,2,\ldots}$ *es u.i. con respecto a* $\{\mu_{n+N}\}_{n=1,2,\ldots}$ *si y solo si* $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *es a.u.i. con respecto a* $\{\mu_n\}_{n=1,2,\ldots}$*.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ La integrabilidad uniforme con respecto a $\{\mu_{n+N}\}_{n\geq1}$ de la sucesión $\{f_{n+N}\}_{n\geq1}$ para algún $N = 0, 1, \ldots$ implica la integrabilidad uniforme asintótica con respecto a $\{\mu_n\}_{n\geq1}$ de la sucesión $\{f_n\}_{n\geq1}$.

$(\Leftarrow)$ sea $\{f_n\}_{n\geq1}$ a.u.i. con respecto a $\{\mu_n\}_{n\geq1}$. Entonces existe $N = 0, 1, \ldots$ tal que $f_n \in L_1(\mathbb{S}; \mu_n)$ para cada $n = N+1, N+2, \ldots$. En efecto, si existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\geq1}$ de $\{f_n\}_{n\geq1}$ tal que $\int_{\mathbb{S}} |f_{n_k}(s)|\mu_{n_k}(ds) = \infty$, entonces $\int_{\mathbb{S}} |f_{n_k}(s)|\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : |f_{n_k}| \geq$

$K\}\mu_{n_k}(ds) = \infty$ para cada $K > 0$ y $k = 1, 2, \ldots$. Por lo tanto,

$$\lim_{K\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} |f_n(s)|\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : |f_n| \geq K\}\mu_n(ds) = \infty,$$

que contradice que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es a.u.i. con respecto a $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$.

Considere $\epsilon_n(K) := \int_{\mathbb{S}} |f_{n+N}(s)|\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : |f_{n+N}| \geq K\}\mu_{n+N}(ds)$, $n = 1, 2, \ldots$. Puesto que $f_{n+N} \in L_1(\mathbb{S}; \mu_{n+N})$ para cada $n = 1, 2, \ldots$, la condición (i) en el Lema B.0.1 se cumple. La condición (ii) también se cumple porque $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es a.u.i. con respecto a $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$. Entonces, el Lema B.0.1 implica la validez de la integrabilidad uniforme de $\{f_{n+N}\}_{n\geq 1}$ con respecto a $\{\mu_{n+N}\}_{n\geq 1}$. ■

Teorema B.0.3

En el siguiente teorema, veremos que la condición (ii) del Teorema 2.2.13 bajo ciertas condiciones implica que la sucesión de funciones $\{f_n^-\}_{n\geq 1}$ es uniformemente integrable con respecto a $\{\mu_n\}_{1\geq 1}$.

Teorema B.0.3. *Sea $\mathbb{S}$ un espacio métrico, $\{\mu_n\}_{n=1,2,\ldots}$ sucesión de medidas en $\mathbb{S}$ que convergen débilmente a $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S})$, y $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ sucesión de funciones medibles en $\mathbb{S}$ con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Supongamos que existe una sucesión de funciones medibles $\{g_n\}$ en $\mathbb{S}$ con valores en $\mathbb{R}$ tal que $f_n(s) \geq g_n(s)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{S}$ y*

$$-\infty < \int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mu_n(ds). \tag{B.1}$$

Si la sucesión de funciones $\{g_n\}_{n\geq 1}$ es uniformemente acotada por arriba, entonces existe $N = 0, 1, \ldots$ tal que $\{f_{n+N}^-\}_{n=1,2,\ldots}$ es u.i con respecto a $\{\mu_{n+N}\}_{n=1,2,\ldots}$.

Demostración. De acuerdo al Teorema 2.2.10, es suficiente probar que $\{f_n^-\}_{n\geq 1}$ es a.u.i. con respecto a $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$, esto es,

$$\lim_{K\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : f_n(s) \leq -K\}\mu_n(ds) = 0. \tag{B.2}$$

Desmostremos (B.2). En efecto, puesto que $f_n(s) \geq g_n(s)$,

$$\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : f_n(s) \leq -K\} \leq \mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : g_n(s) \leq -K\},$$

para todo $n = 1, 2, \ldots,\ K > 0$, y $s \in \mathbb{S}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} &\lim_{K\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(s)\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : f_n(s) \le -K\}\mu_n(ds) \\ &\qquad \ge \lim_{K\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : g_n(s) \le -K\}\mu_n(ds). \end{aligned} \tag{B.3}$$

Las desigualdades (B.1) implican

$$\begin{aligned} &\lim_{K\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} g_n(s)\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : g_n(s) \le -K\}\mu_n(ds) \ge \\ &\int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mu(ds) + \lim_{K\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} -g_n(s)\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : g_n(s) > -K\}\mu_n(ds). \end{aligned} \tag{B.4}$$

Ya que las funciones $\{g_n\}_{n\ge1}$ son acotadas por arriba por la misma constante, el Teorema 2.2.11 aplicado a la sucesión de funciones $\{\hat{f}_n\}_{n\ge1}$, que son uniformemente acotadas por abajo, donde $\hat{f}_n(s) := -g_n(s)\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : g_n(s) > -K\}$, $s \in \mathbb{S}$, $n = 1, 2, \ldots,$ implica

$$\begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} -g_n(s)\mathbf{I}\{s \in \mathbb{S} : g_n(s) > -K\}\mu_n(ds) \\ &\qquad \ge -\int_{\mathbb{S}} \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mathbf{I}\{s' \in \mathbb{S} : g_n(s') > -K\}\mu(ds) \end{aligned} \tag{B.5}$$

para cada $K > 0$. Si para cada $s \in \mathbb{S}$

$$\limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s')\mathbf{I}\{s' \in \mathbb{S} : g_n(s') > -K\} \downarrow \limsup_{n\to\infty, s'\to s} g_n(s') \quad \text{cuando } K \uparrow +\infty, \tag{B.6}$$

entonces (B.3)-(B.5) implican directamente (B.2), es decir, $\{f_n^-\}_{n\ge1}$ es a.u.i. con respecto a $\{\mu_n\}_{n\ge1}$.

Por lo que nos resta demostrar (B.6). Puesto que para cada $s' \in \mathbb{S}$ y $n = 1, 2, \ldots$

$$g_n(s')\mathbf{I}\{s' \in \mathbb{S} : g_n(s') > -K\} \downarrow g_n(s') \quad \text{cuando } K \uparrow \infty,$$

tenemos que

$$\sup_{m\le n, s'\in B_\delta(s)} g_m(s')\mathbf{I}\{s' \in \mathbb{S} : g_m(s') > -K\} \downarrow \sup_{m\le n, s'\in B_\delta(s)} g_m(s') \quad \text{cuando } K \uparrow \infty,$$

para cada $n = 1, 2, \dots$ y $\delta > 0$, donde $B_\delta(s)$ bola en $\mathbb{S}$ con radio δ centrada en s. Por tanto

$$\inf_{n\geq 1,\delta>0} \sup_{m\leq n, s'\in B_\delta(s)} g_m(s')\mathbf{I}\{s' \in \mathbb{S} : g_m(s') > -K\} \downarrow \inf_{n\geq 1,\delta>0} \sup_{m\leq n, s'\in B_\delta(s)} g_m(s') \quad \text{cuando } K \uparrow \infty,$$

i.e. (B.6) se cumple para cada $s \in \mathbb{S}$. Entonces $\{f_n^-\}_{n\geq 1}$ es u.i. con respecto a $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$. ■

K-inf-compacidad

Considere $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ espacios métricos, $u : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ y $\Phi : \mathbb{X} \to 2^{\mathbb{Y}} \setminus \{\emptyset\}$.

Sea $Gr_Z(\Phi) = \{(x, y) \in Z \times Y : y \in \Phi(x)\}$, donde $Z \subseteq \mathbb{X}$. Para una función f con valores en $\overline{\mathbb{R}}$, definida en un subconjunto no vacío U de un espacio métrico $\mathbb{U}$, considere los conjuntos de nivel

$$\mathcal{D}_f(\lambda; U) = \{y \in U : f(y) \leq \lambda\}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Recordemos que una función f es semicontinua en U si todos los conjuntos de nivel $\mathcal{D}_f(\lambda; U)$ son cerrados, y una función f es inf-compacta en U si todos esos conjuntos son compactos.

Lema B.0.4. *Una función $u(\cdot,\cdot)$ K-inf-compacta en $Gr_{\mathbb{X}}(\Phi)$ es s.c.i en $Gr_{\mathbb{X}}(\Phi)$*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Necesitamos demostrar que el conjunto de nivel

$$\mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_{\mathbb{X}}(\Phi))$$

es cerrado.

Si esto no es cierto, existe una sucesión $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y)$ en $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ con $(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_{\mathbb{X}}(\Phi))$ para cualquier α, tal que $(x, y) \notin \mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_{\mathbb{X}}(\Phi))$.

Por otra parte, el conjunto

$$K = (\cup_\alpha \{x_\alpha\}) \cup \{x\}$$

es compacto. Entonces, por K-inf-compacidad de $u(\cdot,\cdot)$ en $Gr_{\mathbb{X}}(\Phi)$, el conjunto de nivel $\mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_K(\Phi))$ es compacto también.

Puesto que $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_\alpha \subseteq \mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_K(\Phi))$, entonces $(x, y) \in \mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_K(\Phi))$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $u(\cdot,\cdot)$ es s.c.i en $Gr_{\mathbb{X}}(\Phi)$. ■

Lema B.0.5. *Sean $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ espacios métricos. Entonces $u(\cdot,\cdot)$ es K-inf-compacta en $Gr_{\mathbb{X}}(\Phi)$ si y solo si las siguientes dos condiciones se cumplen:*

(i) $u(\cdot,\cdot)$ es s.c.i en $Gr_{\mathbb{X}}(\Phi)$;

(ii) Si $\{x_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{X}$ que converge a $x \in \mathbb{X}$ entonces cualquier sucesión $\{y_n\}$ con $y_n \in \Phi(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que la sucesión $\{u(x_n, y_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ es acotada por arriba, tiene un punto límite $y \in \Phi(x)$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $u(\cdot,\cdot)$ K-inf-compacta en $Gr_{\mathbb{X}}(\Phi)$. Entonces, por el Lema B.0.4, $u(\cdot,\cdot)$ es s.c.i en $Gr_{\mathbb{X}}(\Phi)$. Por tanto (i) se sigue.

Considere un sucesión convergente $\{x_n\}$ en $\mathbb{X}$, con límite $x \in \mathbb{X}$. Más aún, sea $\{y_n\}$ una sucesión con $y_n \in \Phi(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que satisface que la sucesión $\{u(x_n, y_n)\}$ es acotada por arriba por algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto $K = (\cup_{n\geq 1}\{x_n\}) \cup \{x\}$ es compacto.

Puesto que $u(\cdot,\cdot)$ es inf-compacto en $Gr_K(\Phi)$, entonces la sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ pertenece al conjunto compacto $\mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_K(\Phi))$. Por lo tanto, esta sucesión tiene un punto límite $y \in \Phi(x)$. Es decir, (ii) se cumple.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que (i) y (ii).

Fijemos $K \in \mathbb{K}(\mathbb{X})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. El conjunto de nivel $\mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_K(\Phi))$ es compacto. En efecto, sea

$$\{(x_n, y_n)\} \subseteq \mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_K(\Phi)).$$

Puesto que K es un conjunto compacto, la sucesión $\{x_n\}$ tiene una sub-sucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a su punto límite $x \in \mathbb{X}$. Por la condición (ii), $\{y_{n_k}\}$ tiene un punto límite $y \in \Phi(x)$, esto es $(x, y) \in Gr_{\mathbb{X}}(\Phi)$ es un punto límite de la sucesión $\{(x_n, y_n)\} \subseteq \mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_K(\Phi))$.

La s.c.i de $u(\cdot,\cdot)$ en $Gr_{\mathbb{X}}(\Phi)$ implica la desigualdad $u(x, y) \leq \lambda$. Entonces, $(x, y) \in \mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_K(\Phi))$, y el conjunto de nivel $\mathcal{D}_{u(\cdot,\cdot)}(\lambda; Gr_K(\Phi))$ es compacto. ■

Apéndice C

Definiciones y glosario de símbolos

Algunas definiciones

Definición C.0.1.

- *Una multifunción o correspondencia* ψ *de* X *a* Y *es una función tal que* $\psi(x)$ *es un subconjunto no vacío de* Y *para todo* $x \in X$.
- *Una vecindad de un conjunto* A *es cualquier conjunto* B *para el cual existe un conjunto abierto* V *tal que* $A \subset V \subset B$. *Cualquier conjunto abierto* V *que satisface que* $A \subset V$ *es llamado vecindad abierta de* A.

Definición C.0.2. *Una multifuncion* $\psi : X \to Y$ *es*

(i) *semi-continua superiormente en* $x \in X$ *si para cada vecindad* U *de* $\psi(x)$, *existe una vecindad* V *de* x *tal que* $z \in V$ *implica que* $\psi(z) \subset U$. *Decimos que* ψ *es semi-continua superiormente en* X , *si es semi-continua superiormente en cada punto de* X.

(ii) *semi-continua inferiormente en* x *si para todo conjunto abierto* U *que se encuentra con* $\psi(x)$ *(i.e.* $\psi(x) \cap U \neq \emptyset$*) existe una vecindad* V *de* x *tal que* $z \in V$ *implica que* $\psi(z) \cap U \neq \emptyset$. *Es semi-continua inferiormente en* X , *si es semi-continua inferiormente en cada punto de* X.

Abreviaturas

i.e. es decir

c.s casi seguramente

u.i uniformemente integrable

a.u.i asintótica uniformemente integrable

s.c.i semi-continuo inferiormente

s.c.s semi-continuo superiormente

v.a variable aleatoria

v.a.i.i.d variable aleatoria independiente idénticamente distribuida

PCM Proceso de control de Markov

DOCP Desigualdad de optimalidad en costo promedio.

Símbolos

$\mathbb{N}$ números naturales

$\mathbb{N}_0$ los naturales con el cero

$\mathbb{R}$ números reales

$\bar{\mathbb{R}}$ reales extendidos, i.e. $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$

$\mathbb{R}^+$ reales no negativos, i.e. $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$

$\mathbf{I}_A$ función indicadora de A

f^+ parte positiva de f, es decir, $f^+(s) = \max\{f(s), 0\}$

f^- parte negativa de f, es decir, $f^+(s) = -\min\{f(s), 0\}$

C $[0,1]$ espacio de funciones continuas en $[0,1]$

$L(X)$ clase de funciones semi-continuas inferiormente y acotadas por abajo en X

$\mathcal{B}(X)$ $\sigma-$álgebra de Borel de X

Bibliografía

[1] Ash, R. B., and Doléans-Dade, C. A. *Probability and Measure Theory*, 2nd ed. Academic Press, 2000. 58, 60

[2] Bertsekas, D. P., and Shreve, S. *Stochastic Optimal Control: the Discrete-Time Case*. Athena Scientific, 1996. 50

[3] Billingsley, P. *Convergence of Probability Measures*, 2nd ed. Wiley series in probability and statistics. Probability and statistics section. Wiley, 1999. 11

[4] Feinberg, E. A., Kasyanov, P. O., and Liang, Y. Fatou's lemma in its classic form and Lebesgue's convergence theorems for varying measures with applications to MDPs. *arXiv preprint arXiv:1902.01525* (2019). 2

[5] Feinberg, E. A., Kasyanov, P. O., and Liang, Y. Fatou's lemma for weakly converging measures under the uniform integrability condition. *Theory of Probability & Its Applications 64* (2020), 615–630. 28

[6] Feinberg, E. A., Kasyanov, P. O., and Zadoianchuk, N. V. Average cost Markov decision processes with weakly continuous transition probabilities. *Mathematics of Operations Research 37*, 4 (2012), 591–607. 44

[7] Feinberg, E. A., Kasyanov, P. O., and Zadoianchuk, N. V. Berge's theorem for noncompact image sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 397*, 1 (2013), 255–259.

[8] Feinberg, E. A., Kasyanov, P. O., and Zadoianchuk, N. V. Fatou's lemma for weakly converging probabilities. *Theory of Probability & Its Applications 58*, 4 (2014), 683–689. 2

[9] Feinberg, E. A., Kasyanov, P. O., and Zgurovsky, M. Z. Convergence of probability measures and Markov decision models with incomplete information. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 287*, 1 (2014), 96–117. 12

[10] Feinberg, E. A., Kasyanov, P. O., and Zgurovsky, M. Z. Uniform Fatou's lemma. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 444*, 1 (2016), 550–567. 13, 16

[11] Feinberg, E. A., and Lewis, M. E. Optimality inequalities for average cost Markov decision processes and the stochastic cash balance problem. *Mathematics of Operations Research 32*, 4 (2007), 769–783. 51

[12] Hernández-Lerma, O., and Lasserre, J. B. *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria*, vol. 30. Springer Science & Business Media, 2012. 39, 44, 50

[13] Kartashov, M. *Probability, Processes and Statistics*. Kyiv University Press, Kyiv (in Ukrainian), 2008. 61

[14] Kechris, A. S. *Classical Descriptive Set Theory*, 1st ed. Graduate Texts in Mathematics 156. Springer-Verlag New York, 1995. 47

[15] Maso, G. D. *An Introduction to* Γ *-Convergence*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser Basel, 1993. 19

[16] Royden, H. L. *Real analysis*, 2nd ed. Macmillan New York, 1988.

[17] Schäl, M. Average optimality in dynamic programming with general state space. *Mathematics of Operations Research 18*, 1 (1993), 163–172. 44

[18] Serfozo, R. Convergence of Lebesgue integrals with varying measures. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A 44* (1982), 380–402. 18

[19] Vega-Amaya, Ó. On the vanishing discount factor approach for Markov decision processes with weakly continuous transition probabilities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 426*, 2 (2015), 978–985. 44