UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

UNA PROPUESTA CONSTRUCTIVISTA ORIENTADA A PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA, SOBRE PROPORCIONALIDAD

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Presenta:

DIANA VARELA ZAMORANO

Directores de Tesis:

DR. JOSÉ LUIS SOTO MUNGUÍA

DRA. MARIA MERCEDES CHACARA MONTES

Hermosillo, Sonora, México febrero de 2017

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En el informe PISA (OECD, 2014) se apuesta a una educación por el conocimiento útil para la vida evaluándose el grado de competencia en la aplicación del conocimiento adquirido al mundo real: "se incorpora la evaluación del concepto de competencia básica que tiene que ver con la capacidad de los estudiantes para extrapolar lo que han aprendido y aplicar sus conocimientos ante nuevas circunstancias y su relevancia para el aprendizaje a lo largo de la vida".

Una de las disciplinas que se considera esencial en la formación de un ciudadano y que sirve de referencia para medir el grado de desarrollo de una sociedad es la asignatura de matemáticas. De ella se espera que sea instrumento para describir y entender el mundo que nos rodea.

Por este motivo se debe emprender la búsqueda de nuevas herramientas de aprendizaje que despierten el interés y la motivación de nuestros estudiantes por las matemáticas y que muestren su vínculo de unión con el mundo real, sin dejar de lado el aprendizaje de conceptos matemáticos y la capacidad de interiorizar las ideas que se esconden tras ellos.

Como parte de la integración de nuevos enfoques de trabajo para la educación en México, en especial en la educación Secundaria, la cual ha retomado nuevos elementos dentro de los procesos enseñanza y aprendizaje, consideramos importante incorporar una serie de elementos que funjan como apoyo para la práctica docente de profesores de matemáticas que enseñan en el nivel secundaria.

En esta dirección nuestro trabajo consta de una propuesta didáctica para el estudio de la proporcionalidad, dirigida a profesores de secundaria utilizando los principios de modelación matemática de Richard Lesh (2003) para su diseño, que han sido creados a partir de la necesidad de establecer la relación del mundo real y las matemáticas.

Un elemento fundamental en el proceso de enseñanza es el profesor y el conocimiento que éste tenga del contenido matemático que esté enseñando es clave para la mejora de la enseñanza en el aula. Estos conocimientos queremos que le permitan ayudar al alumno a comprender el tema más allá del soporte didáctico de que disponga.

La propuesta didáctica está encaminada a brindarle herramientas al profesor para que ayude a sus alumnos a construir el concepto de proporcionalidad, ya que el razonamiento multiplicativo (proporciones, tasas y porcentajes) y la proporcionalidad son los temas más complejos dentro del currículo y de los que presentan mayores errores y dificultades en su aprendizaje (Balderas, Block, & Guerra, 2014).

Con el fin de exponer la pertinencia de este trabajo, en el primer capítulo presenta, a modo de antecedente, un resumen de algunos documentos de investigaciones asociados a las dificultades epistemológicas, cognitivas y didácticas sobre la proporcionalidad que en ellos se destacan. En el segundo capítulo se presenta el marco de referencia donde se analiza el enfoque curricular actual, los programas de estudio y los materiales y apoyos didácticos con los que cuentan los profesores para abordar el tema. En el tercer capítulo se presentan los objetivos del trabajo y para dar sustento teórico a la propuesta didáctica, en el cuarto capítulo se exponen los principios de los Espacios de Trabajo Matemático, incorporando elementos particulares de otras teorías de la Matemática Educativa. A partir de los principios del diseño de actividades de modelación matemática de Richard Lesh, se delinean las acciones metodológicas encaminadas a diseñar las actividades que conformarán las secuencias didácticas de la propuesta. En el quinto capítulo se presenta la descripción de las actividades didácticas.

En el sexto se presenta un reporte de la puesta en escena, así como las conclusiones del análisis del pilotaje y conclusiones generales. Y en forma de anexos se presentan las hojas de trabajo de las actividades.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

1.1 Epistemología de la Proporcionalidad

Existen diversos fenómenos científicos físicos que pueden ser modelados con la proporcionalidad, así como diferentes problemas de la vida cotidiana. La proporcionalidad, ha estado presente en el currículo de la educación básica y en los libros de texto en México a lo largo de la historia.

En esta primera parte del capítulo trataremos aspectos históricos de la proporcionalidad, por una parte, la obra de Euclides y por otro el texto chino llamado Los Nueve Capítulos, estos aspectos fueron tomados de Oller & Jairín (2013).

En el libro de los Elementos de Euclides ya se encuentra un tratamiento teórico de los conceptos de razón y proporción relativamente próximo al actual. De los trece libros que conforman la obra de Euclides, dos son dedicados a la temática que nos ocupa, el V dedicado a las magnitudes y el VII dedicado a la aritmética.

En los primeros cuatro libros de Los Elementos de Euclides, el autor aborda a la relación de igualdad entre los objetos geométricos, al llegar al libro V, cambia esta mirada y centra su atención en las magnitudes que, aunque no sean iguales, mantienen cierta relación.

Algunas definiciones como las siguientes provienen de esa época (Heath, 1956):

- Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.
- Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.
- Una razón es determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.
- Se dice que las magnitudes guardan razón entre sí cuando, al multiplicarse, puedan exceder la una a la otra.

- Las magnitudes que tienen la misma razón son llamadas proporcionales.

Parece comúnmente aceptado el hecho de que antes del desarrollo de la teoría de proporciones de Eudoxo, presentada por Euclides en el libro VII de sus Elementos, la razón entre dos números o magnitudes homogéneas venía dada por un proceso llamado antifairesis o antanairesis (hoy lo denominamos algoritmo de Euclides). Este proceso se lleva a cabo del siguiente modo: dado dos números o magnitudes homogéneas, se resta el menor tantas veces como se pueda hasta que quede un resto menor que el menor de los números de partida. Entonces se repite el proceso tomando como partida el menor de los números iniciales y el resto obtenido; y así sucesivamente. Lo importante aquí es el proceso en sí y no los números que aparecen durante el mismo; es decir, llevamos la cuenta sólo de las longitudes de las series de restas que efectuamos antes de cambiar los papeles.

En concreto fue Eudoxo el que dio con una solución satisfactoria que pasó por dejar indefinido el concepto de razón y definir únicamente aquello que importaba desde un punto de vista puramente geométrico; es decir, definir lo que significaba 'guardar la misma razón´ y 'guardar una razón mayor'.

En el texto chino llamado los Nueve Capítulos, el concepto central que se le da a la proporcionalidad es el de Lü, que se define como "un conjunto de números correlacionados" y enumera algunas propiedades y operaciones entre ellas.

La traducción de este término parece problemática, Kangshen lo traduce al inglés como "rate", Lam como "proportional value". La interpretación de este concepto es sencilla. Se dispone de varias magnitudes directamente proporcionales y una Lü no es más que un conjunto de valores de dichas magnitudes. Las propiedades y operaciones descritas se siguen de la proporcionalidad directa entre las magnitudes consideradas.

El concepto de Lü nos permitirá comprender el tipo de razonamiento subyacente a la génesis de la Regla de Tres.

El motivo por el que esta concepción de la proporcionalidad se adapta mejor a las aplicaciones mercantiles salta a la vista. En este contexto, no existe obstáculo alguno para relacionar directamente dos magnitudes diferentes. Es más, esta forma de enfocar la situación está mucho más cerca de una concepción funcional puesto que mientras en el enfoque griego se relacionan por separado cada una de las magnitudes y después se comparan dichas relaciones, en el chino se entra directamente a analizar la relación existente entre ambas magnitudes. Aquí predomina la idea de razón externa frente a la interna.

Existieron algunos inconvenientes a la teoría griega de la proporcionalidad, a pesar de que permaneció a lo largo de los siglos y después adoptada por la cultura árabe, y eran:

- El concepto de razón no estaba definido rigurosamente en los Elementos y la idea de la razón por antifairesis no aparece sino insinuada en el algoritmo de la división. También subyace la problemática respecto a la naturaleza – numérica o no – de dichos entes.
- En los Elementos, Euclides sólo admite la composición de dos razones de la forma a: b y b:c para obtener a:c, así como la concatenación de este tipo de composiciones. En algunas traducciones aparece una definición interpolada de composición de dos razones cualesquiera, que falla para el caso de las magnitudes y que pretende llenar el vacío que surge ante la Proposición 23 del Libro VI en donde se habla de razón compuesta sin haber introducido dicho concepto.

En el siglo XIII Giovanni Campano hizo una traducción de los Elementos y en ella define a la razón como:

> *"… específicamente de un número más pequeño en relación a uno más grande, a la parte o las partes de ese número menor que están en el mayor. Y de una razón de un número más grande en relación a otro más pequeño, al múltiplo o al múltiplo y la parte o las partes según las cuales el mayor lo es."*

Campano al introducir esta definición, está asignando cierto número a cada razón. Que es lo que se observa en la actualidad, se asocia la razón con un número racional y la igualdad o la relación de orden entre razones con los respectivos conceptos numéricos.

Las dos posibles maneras de enfocar el proceso de aritmetización de la razón es definir la razón: entre dos cantidades de una misma magnitud o entre dos números.

Estas definiciones se han mantenido vigentes hasta épocas muy recientes:

- La de Baratech: *"se denomina razón entre dos números al cociente exacto de dichos números".*
- Y la de Mansilla y Bujanda: *"si a y b son cantidades de una misma magnitud, la medida de a cuando se toma por unidad a b, se llama razón entre a y b".*

Todas las situaciones problemáticas relacionadas con la proporcionalidad que se presentan a los alumnos involucran el manejo de unidades. En ese caso, lo que suele suceder es que se deja de lado por completo a las magnitudes para que los alumnos se centren en la faceta puramente numérica del problema, con lo que se pierde de vista el sentido de los pasos dados para resolverlo.

Aún si se recurre al uso de la razón entre cantidades de una misma magnitud, pensamos que dicha razón no constituye el mejor punto de vista para comprender los procesos que subyacen a una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Eso es así, principalmente, porque dicha razón es escalar, que carece de un significado claro en el contexto del problema.

Una consecuencia fundamental es que en un contexto de magnitudes se convierte en una situación en la que prevalecen las manipulaciones aritméticas como la regla de tres.

Puesto que las situaciones problemáticas relacionadas con la proporcionalidad suelen implicar una relación de carácter funcional entre, al menos, dos magnitudes, pensamos que la introducción de la idea de razón entre cantidades de diferentes magnitudes puede dar una visión más clara de las situaciones puesto que posee un importante significado: "el tanto por uno", es decir, la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con una unidad de la otra bajo la relación que las liga.

Al analizar la epistemología de la proporcionalidad la dificultad se presenta tanto la enseñanza como el aprendizaje de ella se ve reflejada en las aulas como situaciones problema, que los profesores presentan a los alumnos durante sus clases, descontextualizadas, repetitivas, mecanizadas, etc.

La importancia del estudio de la proporcionalidad es crucial para el aprendizaje de conceptos básicos de otras disciplinas (ley de Ohm, ley de Hooke, densidad de población, cálculo de intereses y descuentos, etc.) y es por ello que se concluye que atender a los posibles obstáculos epistemológicos, psicológicos o didácticos que dan lugar a estos errores resulta prioritario.

A continuación, se presentan algunas investigaciones didácticas relacionadas con el tema de la proporcionalidad, los resultados obtenidos, y su contribución para mejorar la enseñanza de este concepto tan importante en las matemáticas.

1.2 Investigaciones sobre la enseñanza de la proporcionalidad

Existen estudios que evidencian deficiencias tanto en la enseñanza como el aprendizaje del tema, por ello el interés de conocer los saberes con los que cuentan los maestros de secundaria sobre la proporcionalidad. Al respecto Balderas, Block & Guerra (2014), reportan los resultados de una investigación donde se demuestra que pocos maestros son capaces de identificar las relaciones de proporcionalidad y construir argumentos claros para justificar la presencia o ausencia de la proporcionalidad en diferentes situaciones.

En este trabajo aplicaron algunos cuestionarios a profesores donde se exploraron los saberes de los profesores divididos en tres grupos: los que tienen que ver con las tareas y las técnicas que utilizaron para resolver los ocho problemas planteados, los que tienen que ver con las justificaciones de las técnicas usadas, de las ideas que sustentan sus argumentos, con los términos utilizados, con las propiedades que caracterizan a la noción en cuestión y con los temas que se relacionan con éste y los conocimientos relativos a la enseñanza de la proporcionalidad. El cuestionario fue aplicado a 63 maestros del estado de Nuevo León, México, en el contexto de un taller para maestros. Todos eran docentes de matemáticas en escuelas secundarias públicas o privadas del estado y estaban impartiendo clases en el periodo 2007-2008 en primer grado.

Los resultados señalan la presencia de tres tendencias: fuerte incidencia de los procedimientos “clásicos”, la Regla de Tres y el Valor Unitario; menor presencia de los procedimientos “internos” que suelen ser menos formales y más intuitivos. Finalmente, una menor presencia de procedimientos “algebraicos”.

Las principales dificultades durante la resolución de los problemas que se reportan fueron:

a) confusiones para distinguir un problema de proporcionalidad (relación afín y aditiva) de uno que no lo es,

b) poca claridad a la hora de utilizar la noción de escala (confusión entre longitud y área),

c) dificultad con la noción de composición de factores de escala.

Esto podría explicar la tendencia de los maestros a diseñar sus clases basadas solamente en la resolución de problemas sencillos; las deficiencias se muestran cuando los profesores intentan proporcionar las justificaciones que caracterizan a la proporcionalidad. Además, mostraron dificultad para argumentar por escrito, la mayoría no pudo justificar la existencia o no de la proporcionalidad. Respondieron sin dar una causa y dejaron implícita una parte del argumento, o dieron argumentos circulares o ambiguos.

Como parte de las conclusiones finales señalan que (ibíd., 2014):

1. *Este trabajo evoca la necesidad imperiosa de promover la capacidad de argumentación de los maestros, además de la redacción en general.*
2. *El estudio es una referencia útil para la planeación de cursos o materiales didácticos, tanto en la formación de maestros como en los talleres de actualización de los mismos.*
3. *Se reconoce que los resultados que aporta este trabajo son parciales, y deben ser complementados con otros acercamientos metodológicos.*

Los conceptos de razón y proporción son contenidos que han recibido mucha atención desde la antigüedad hasta nuestros días y su aplicación para la solución de problemas de la vida real han aparecido en papiros de 1600 A.C. De acuerdo a NCTM Curriculum and Evaluation Standards (1989), ''la habilidad para el razonamiento proporcional se desarrolla en los estudiantes desde el 5o a 2do de secundaria. Por lo que, siendo de gran importancia, amerita el tiempo que sea necesario en clase, para asegurar su comprensión''. Otras Investigaciones han reportado que no solo los estudiantes de tercero de secundaria tienen dificultades con el tema de proporcionalidad, sino también docentes en formación y docentes en servicio de educación básica carecen del conocimiento de contenido pedagógico para enseñarlo.

En este sentido Ben-Chaim, Keret & Ilany (2007) realizaron una investigación donde aplicaron un modelo especial de enseñanza de la razón y la proporción a maestros de matemáticas en pre-servicio de escuelas israelíes, dicho modelo fue creado, implementado y evaluado.

El modelo utilizado contempla tres componentes: cognitivo, afectivo y la conducta del docente en formación, que se evidencia por su disposición a afrontar la construcción de unidades de enseñanza y la planificación de la enseñanza del sujeto. Para el diseño del modelo se tomaron en cuenta las recomendaciones de Sowder et al. (1998) sobre cómo educar a los maestros de matemáticas en pre-servicio para enseñar estructuras multiplicativas, incluyendo el contenido de proporcionalidad.

Las actividades que fueron escogidas para aplicarlas a los maestros en formación son problemas genuinos, confiables y presentes en la vida cotidiana; les llamaron de investigación ya que plantean problemas con preguntas abiertas no rutinarias, consisten en varios niveles, y son espirales en su estructura. Estas actividades requieren que el alumno active el juicio y el uso del conocimiento para resolver los problemas (Ilany et al., 2004). Las actividades de proporcionalidad requieren comparaciones numéricas cuantitativas y cualitativas entre razones y encontrar un valor faltante, involucran números enteros, fracciones, decimales y cálculo de porcentajes; establecen la comprensión de diversos conceptos relacionados con los temas de razón y proporción, tales como relaciones directas e indirectas, linealidad, tasas y escalas.

En esta investigación se aplicaron cuestionarios antes y después de la aplicación de las actividades de proporcionalidad, en los que se evalúa su actitud (cualitativa) y su razonamiento proporcional (cualitativo y cuantitativo).

En los resultados de los datos sobre la actitud indican que los maestros de pre-servicio de este estudio mejoraron su actitud hacia la enseñanza de las matemáticas en general, y eran mucho más confiados en su capacidad para tratar la razón y la proporción al final del curso.

En el análisis cuantitativo en cuanto al conocimiento sobre proporcionalidad hubo un avance significativo. Al principio del curso se evidenció que los docentes en formación no estaban familiarizados con el tema de proporcionalidad, reflejando que este tema no se trata específicamente dentro del sistema escolar en ningún nivel.

Al final del cuestionario de actitud había tres preguntas abiertas en la que se pedía mencionar una situación de razón y una situación de proporción, fundamentando su respuesta. En la mayoría de los casos, los maestros de pre-servicio escribieron: ''No recuerdo'', o ''No sé '' y hubo muchas respuestas en blanco. Las siguientes respuestas son de aquellos que escribieron algo: "Todavía no he enseñado clases de cuarto o quinto grado", o "En mi opinión la palabra proporción es un sinónimo de la palabra razón", o "Cuando algo malo sucede en nuestra vida, se nos dice que la tomemos en la proporción correcta”. En contraste, en el cuestionario después del curso, cada uno de los 15 participantes proporcionó varios ejemplos correctos de situaciones de razón y proporción con indicación apropiada de conceptos adecuadamente relacionados, incluso usando simbología matemática como $a / b = c / d$ donde $a, b, c, d \neq 0$.

Durante el curso de proporcionalidad los docentes en formación externaron su preocupación sobre la falta de conocimiento que tenían del contenido matemático, a continuación, se citan varios comentarios: "Pensé que el tema de razón y proporción era fácil y que sabía cómo enseñarlo, pero hoy después de haberlo aprendido, me doy cuenta de que es muy complicado y que todavía no tengo conocimiento"; "Me expuso a un tema sobre el cual no sabía cuánto no sé y cuánto no estoy listo para enseñarlo”.

Otro cambio significativo que está relacionado a este curso, es a la necesidad de incluir los temas de razón y proporción dentro de los programas de educación de los maestros en formación y de los que están en servicio, uno de los participantes escribió que este tema es el ABC de las matemáticas, como maestro es necesario dominar este contenido para enseñar otros temas.

Otro resultado importante después de este curso fue que los docentes en formación una vez incorporados en el sistema laboral implementaron estas actividades en sus clases, pidiendo ayuda a los instructores para la preparación de las actividades además de tener voluntad para aceptar ser observados.

Finalmente, esta investigación concluye con la propuesta de incluir el tema de proporcionalidad y su didáctica, por lo menos durante un semestre, en los programas de formación de profesores.

Existe evidencia que los alumnos de secundaria, que son orientados hacia la construcción de su propios procedimientos y conocimientos a través de actividades colaborativas para la solución de problemas de proporcionalidad, tienen mejores resultados que los estudiantes con experiencias en clases más tradicionales, como en el trabajo de investigación de David Ben-Chaim et al. (1998), donde se hizo una comparación entre dos grupos de alumnos de primero de secundaria en Estados Unidos, a lo largo de un ciclo escolar, el primer grupo recibió clases que fueron diseñadas por un proyecto llamado matemáticas conectadas, y en el otro grupo las clases fueron las tradicionales. Las actividades del proyecto de matemáticas son diseñadas alrededor de situaciones de la vida real, situaciones problema interesantes para el alumno, situaciones impredecibles, en los cuales los alumnos resuelven problemas y al hacer esto, observan patrones y relaciones; conjeturan, prueban, discuten, verbalizan y generalizan estos patrones y relaciones.

A los dos grupos se les evaluó al principio y al final del ciclo escolar, los resultados que se obtuvieron fueron favorecedores para el grupo del proyecto de matemáticas conectadas, además dieron mejores respuestas cuando en la evaluación les pedían que explicaran o que contestaran “¿Cómo lo sabes?” añadiendo escritos con la explicación a sus respuestas.

Puesto que la razón y la proporción juegan un papel importante en grados superiores, una de las sugerencias de esta investigación es darle seguimiento a este grupo de estudiantes sobre su desarrollo y entendimiento sobre la proporcionalidad.

Finalmente concluyen que se encontró evidencia de fortalezas y debilidades en los estudiantes, de ambos grupos, al tratar con el contenido de proporcionalidad y sus aplicaciones. Y que, por su complejidad, su manejo debe ser incluido en los materiales de instrucción dentro del currículo.

Aunque el presente trabajo se centra en maestros de secundaria es importante buscar investigaciones sobre la enseñanza de la proporcionalidad en grados inferiores, puesto que hay contenidos matemáticos que indiscutiblemente tienen sus raíces en la educación básica (primaria), y dependiendo de la forma en que dichos contenidos y los conceptos involucrados, se construyan en esa etapa educativa, es lo que permite avanzar hacia la comprensión de conceptos que se enseñarán en los siguientes niveles educativos. Este es el caso de la razón y la proporción.

Un tema recurrente en matemática educativa, son las dificultades que enfrentan tanto profesores como estudiantes, cuando abordan situaciones que involucran los conceptos de razón y proporción. Al respecto Ruiz (2005) ha desarrollado un trabajo de investigación para reconocer los procesos cognitivos del pensamiento de alumnos de sexto de primaria cuando resuelven problemas de razón y proporción directa.

El motivo de esta investigación nace, según la investigadora, al observar que los alumnos logran una comprensión muy pobre de los tópicos de razón y proporción y esto contribuye al mal empleo de conocimientos de la aritmética (manejo de problemas multiplicativos, entre otros) que se trabajan en la escuela primaria, además de que delimita y distorsiona conceptos que se abordan en la secundaria y preparatoria, como la variación proporcional, funciones, derivadas, etc. Otro aspecto interesante de la investigación, es que este problema se relaciona con el hecho de que los alumnos no utilizan ni identifican las diferentes representaciones, como es el caso de la representación tabular con la numérica, aquí nombra el caso específico del llenado de tablas en los libros de texto gratuito donde no establecen las relaciones tanto internas como externas entre las cantidades, además de que estas relaciones no son vistas como razones. Otra dificultad que el artículo hace notar es aquella relacionada con los métodos de solución que emplea el estudiante al resolver problemas de razón y proporción, tiene que escoger entre usar números naturales o fracciones, la vía por la que se inclina es la primera, evadiendo la manipulación de fracciones.

Por otro lado, Mendoza (2009) desarrolló una investigación con una muestra de estudiantes de secundaria, a quienes propuso una secuencia didáctica de exploración. Como resultado se llegó a la conclusión de la necesidad de diseñar una secuencia amplia, donde haya una mayor articulación entre la proporcionalidad, las fracciones y los decimales, para darle un sentido más amplio al porcentaje, así como afirmar los conocimientos básicos de aritmética, y no tomar por vistos estos temas en primaria. Se resaltó la importancia que dentro del salón de clases se promueva el discurso que permita explicar y justificar las técnicas, así como validar sus procedimientos por medio de la institucionalización, se hizo notar la importancia de darles nombre y visibilidad a estos procedimientos.

1.3 La enseñanza de la proporcionalidad

El razonamiento proporcional se considera como uno de los componentes importantes del pensamiento formal adquirido en la adolescencia. Las nociones de comparación y covariación están en la base subyacente al razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción. El desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplina que va desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química (Godino & Batanero, 2004).

Diversas investigaciones han mostrado, sin embargo, que la adquisición de las destrezas de razonamiento proporcional es insatisfactoria en la población en general.

Estas destrezas se desarrollan más lentamente de lo que se había supuesto; incluso hay evidencia de que una gran parte de las personas nunca las adquieren en absoluto. Estas cuestiones no se enseñan bien en las escuelas, que con frecuencia sólo estimulan la manipulación de símbolos y fórmulas carentes de significado.

Los resultados de diversas investigaciones proporcionan orientaciones sobre cómo ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento proporcional.

Algunas de estas orientaciones son las siguientes:

- Proporcionar una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos que pongan en juego relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes.
- Estimular la discusión y experimentación en la comparación y predicción de razones.
- Procurar que los niños distingan las situaciones de comparación multiplicativa (proporcionalidad) de las no multiplicativas, proporcionando ejemplos y discutiendo las diferencias entre ellas.
- Ayudar a los niños a relacionar el razonamiento proporcional con otros procesos matemáticos.
- El concepto de fracción unitaria es muy similar al de tasa unitaria. El uso de tasas unitarias para comparar razones y resolver proporciones es una de las técnicas más apropiadas.

Reconocer que los métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo de “regla de tres” para resolver problemas de proporcionalidad no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional y no se deberían introducir hasta que los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente.

Diversas investigaciones han puesto de manifiesto que los estudiantes basan su razonamiento intuitivo sobre las razones y proporciones en técnicas aditivas y de recuento en lugar de razonar en términos multiplicativos, lo que indica una deficiencia importante.

La comprensión de los porcentajes se considera con frecuencia como fácil de lograr, pero hay datos experimentales abundantes de lo contrario. El uso incorrecto de los porcentajes es frecuente no sólo entre los estudiantes de secundaria sino incluso también en los adultos. Se encuentran errores flagrantes, lo que sugiere que con frecuencia las ideas básicas pueden no estar claras.

La proporcionalidad es una de las ideas principales presente en todos los niveles de las matemáticas escolares y es fundamental en la estructura descriptiva de la física y otras ciencias. La mayoría de las actividades matemáticas de nuestra vida cotidiana están relacionadas con este concepto por ser el más sencillo de utilizar. Sin embargo, las ideas de proporcionalidad son en general mal entendidas, posiblemente debido a las formas de enseñanza que son comunes que en el aula.

El papel del profesor en el tema de razonamiento proporcional, como el nombre del tema lo indica, es enseñar las diferentes formas de razonamiento que se pueden aplicar en situaciones de este tipo y diferenciarlo de contextos no proporcionales. Así, la enseñanza de la regla de tres como única estrategia para resolver problemas de proporcionalidad resultaría insuficiente para que el alumno pueda desarrollar de manera completa una concepción sobre las ideas fundamentales de la proporcionalidad y sus diferentes enfoques, y saber cuándo aplicar correctamente esta regla.

La proporcionalidad es una idea tan importante que se le debe dedicar un espacio considerable en cada uno de los grados superiores de la educación básica (estudiantes de 9 a 15 años).

Mochón nos habla de lo importante que es dejar atrás la enseñanza que muestra a la regla de tres como la llave mágica con la que se puede resolver todo problema de cuatro números con uno faltante. Para esto se debe seguir una enseñanza conceptual basada en la comprensión y no perdiendo el contexto del problema que le da sentido al proceso utilizado. En su artículo da algunas aproximaciones sobre proporcionalidad a manera de secuencia didáctica (Mochón, 2012).

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA

2.1 Reforma educativa del 2011

En el año 2011 la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011) dio a conocer la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) que marca un modelo curricular basado en competencias, donde se consideran tanto los conocimientos que los estudiantes deberán construir, como las habilidades y actitudes necesarias para resolver problemas en diferentes contextos, tomar decisiones y encontrar alternativas, entre otras.

Para lograr lo anterior, este documento señala que se requiere, entre otras cosas:

- *Alinear los procesos referidos a la alta especialización de los docentes en servicio; el establecimiento de un sistema de asesoría académica a la escuela, así como al desarrollo de materiales educativos y de nuevos modelos de gestión que garanticen la equidad y la calidad educativa, adecuados y pertinentes a los contextos, niveles y servicios, teniendo como referente el logro educativo de los alumnos.*
- *Transformar la práctica docente teniendo como centro al alumno, para transitar del énfasis en la enseñanza, al énfasis en el aprendizaje.*

En el Programa de Matemáticas de Educación Secundaria (SEP, 2011), se presentan los estándares curriculares de matemáticas que en la parte referente al conocimiento matemático se organiza en tres ejes temáticos que son los siguientes:

Sentido numérico y Pensamiento Algebraico.

Forma, espacio y medida.

Manejo de la Información.

En el enfoque didáctico que propone, señala que el rol del docente en una clase de matemáticas es el de guía, el cual convierte su clase en un espacio social para la construcción del conocimiento.

> *En el salón de clases el maestro plantea un problema sin explicación previa de cómo resolverlo, al obtener diferentes procedimientos y resultados por parte de los alumnos, el docente tiene la responsabilidad de ayudar al estudiante a analizar y socializar sus resultados* (SEP, 2011).

En este nivel la proporcionalidad juega un papel relevante ya que, se relaciona con otras nociones de matemáticas tales como la semejanza en geometría, las fracciones en la aritmética, entre otras.

Sin embargo, la proporcionalidad vista desde el pensamiento algebraico incorpora hábitos analíticos, entre los que podemos nombrar algunas de las habilidades para la solución de problemas como: abstraer, representar, procesar, generalizar y comunicar (SEP, 2011). Al ser parte de una manera de pensar, se desarrolla en un dominio matemático más amplio: no se puede dejar de lado el sentido numérico que se ha cultivado a través del estudio de la aritmética, pues es éste precisamente el recurso donde habrán de apoyarse las habilidades algebraicas que ahora se pretenden desarrollar.

2.2 Desarrollo de competencias en estudiantes y de los docentes.

En la reforma educativa del programa de estudios para la educación de nivel básico del 2011, el enfoque de la educación se centra en el desarrollo de competencias, sobre todo en las competencias para la vida que el estudiante debe desarrollar durante y al término de la educación básica.

Estas competencias genéricas son:

- competencias para el manejo de información,
- competencias para el manejo de situaciones,
- competencias para la convivencia y competencias para la vida en sociedad.

En el área de matemáticas, se analizó el Plan de Estudios 2011 (SEP, 2011) buscando una concordancia con los planes de clase que se encuentran en la página de internet de la SEP, los libros de texto y observaciones de clases de matemáticas que actualmente se imparten en las escuelas de educación secundaria.

Además, se analizaron algunos reactivos de matemáticas de pruebas estandarizadas, específicamente PISA 2012 (Programa Internacional para la evaluación de estudiantes) (OECD, 2014), al comparar los planes de clases y algunos reactivos de matemáticas de pruebas estandarizadas, el resultado fue la no concordancia de lo que nos marca la reforma educativa del 2011, con lo que se hace cotidianamente en el salón de clases.

El Plan de estudios 2011, habla de la importancia de los docentes para crear en los salones de clases, los ambientes propicios de aprendizaje:

> *La acción de los docentes es un factor clave, porque son quienes generan ambientes propicios para el aprendizaje, plantean situaciones didácticas y buscan motivos diversos para despertar el interés de los alumnos e involucrarlos en actividades que les permitan avanzar en el desarrollo de sus competencias.*

Y dentro de las modalidades de trabajo, la Secretaría de Educación en el programa de matemáticas en la reforma del 2011, propone Proyectos y Situaciones didácticas. Los proyectos los define como:

> *"… un conjunto de actividades sistémicas e interrelacionadas para reconocer y analizar una situación o problema y proponer posibles soluciones".*

Este tipo de proyectos ayudan a la movilización de aprendizajes y al desarrollo de las competencias, considera los intereses e inquietudes de los estudiantes, trayendo el mundo real al aula.

Las competencias disciplinares correspondiente a matemáticas que marca la reforma educativa del 2011 son:

- resolver problemas de manera autónoma,
- comunicar información matemática,
- validar procedimientos y resultados y

- manejar técnicas eficientemente.

Con una visión clara y amplia sobre el tema, el docente estará en condiciones de dar herramientas a sus alumnos y lograr desarrollar en ellos dichas competencias.

En el presente trabajo buscamos colaborar para desarrollar algunas competencias disciplinares docentes identificadas para este nivel que a continuación se citan textualmente de la RIEB (SEP, 2011):

• Domina los contenidos de enseñanza del currículo y los componentes para el desarrollo de habilidades intelectuales y pensamiento complejo en los estudiantes.

• Promueve la innovación y el uso de diversos recursos didácticos en el aula para estimular ambientes para el aprendizaje, e incentiva la curiosidad y el gusto por el conocimiento de los estudiantes.

Con la intención de que este dominio se vea reflejado en sus posibilidades para impulsar la resolución de problemas como herramienta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, adecuando el conocimiento construido al nivel de sus estudiantes.

2.3 Evaluaciones a Profesores y Alumnos

Evaluación Docente

En febrero del 2013, se aprobó una reforma al artículo 3° constitucional en la cual establece, entre otras cosas, la aplicación de evaluaciones obligatorias para el ingreso, promoción, reconocimiento y la permanencia en el servicio público educativo con la finalidad de integrar, distinguir y sostener en la docencia a los profesionales que cuenten con los mejores conocimientos y capacidades.

El Sistema Nacional de Registro del Servicio Profesional Docente, en conjunto con la Secretaría de Educación Pública y la Coordinación Nacional del Servicio Profesional Docente, difundieron los resultados nacionales del Concurso de Oposición, de acuerdo con los lineamientos, criterios y acuerdos establecidos por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, de los aspirantes a ocupar plazas de docentes de educación básica (Docente, 2015). En los cuales los puntajes corresponden a cada uno de los instrumentos aplicados: conocimientos y habilidades para la práctica docente, habilidades intelectuales y responsabilidades éticas, y evaluación complementaria o adicional.

Los instrumentos que forman parte de la evaluación son independientes entre sí y evalúan diferentes aspectos del perfil de ingreso, en ellos se utilizan tres niveles de desempeño: Nivel I, Nivel II y Nivel III. Cada nivel de desempeño referirá a lo que un sustentante es capaz de hacer. No obstante que cada uno de los instrumentos cuenta con descripciones específicas para cada nivel; en términos generales, el Nivel I significa un dominio insuficiente de los conocimientos y habilidades contemplados en el instrumento que juzga indispensable para un adecuado desempeño docente. El Nivel II significa que el sustentante muestra un dominio suficiente y organizado de los conocimientos y habilidades contemplados en el instrumento, considerados indispensables para un adecuado desempeño docente. Y el Nivel III indica que el sustentante demuestra un dominio suficiente y organizado del conocimiento y habilidades contemplados en el instrumento, y demuestra que es capaz de aplicar estos conocimientos y habilidades en situaciones propias de su función.

En los resultados globales del proceso de evaluación para el ingreso a la educación básica, ciclo 2014-2015, de 70 sustentantes del Estado de Sonora, solo 10 obtuvieron Nivel III en conocimientos y habilidades para la práctica docente, y 18 obtuvieron Nivel III en habilidades intelectuales y responsabilidades ético-profesionales, el resto obtuvo Nivel II.

Al revisar las guías académicas en el portal del servicio profesional docente para el examen del docente de matemáticas de secundaria, no se encontraron contenidos sobre la enseñanza de las matemáticas o del conocimiento de las matemáticas.

Evaluaciones a alumnos

Otro tipo de evaluación que se puede usar como indicador es el de PISA (OECD, 2014), cabe mencionar que la evaluación PISA 2015 se centró en ciencias, por lo que tomaremos como referencia la aplicación del 2012 que se centró en las matemáticas, aunque también incluyó la lectura, la ciencia y la resolución de problemas, pero como áreas de evaluación secundaria. Para PISA, competencia matemática significa la capacidad de los individuos para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. El término describe las capacidades de las personas para el razonamiento matemático y el uso en matemáticas de: conceptos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. La competencia matemática no es un atributo que un individuo tiene o no tiene; sino que más bien lo puede desarrollar durante su escolaridad.

En matemáticas se evalúan las siguientes áreas:

- Definiciones. Capacidad individual para formular, utilizar e interpretar matemáticas en una variedad de contextos.
- Contenido: Cuatro áreas generales que se relacionan con números, álgebra y geometría: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, probabilidad y datos.
- Procesos: Formulación de situaciones matemáticas, empleo de conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento, interpretación, aplicación y evaluación de resultados matemáticos.
- Contextos: Las situaciones en las cuales el lenguaje matemático es aplicado: personal, ocupacional, social y científico.

Por ejemplo, “La pizza”, uno de los reactivos liberados por PISA, requiere que se determine cuál de dos pizzas redondas, que tienen distinto diámetro y precio, pero igual grosor, es la mejor opción en relación con su costo. En él se recurre a varias áreas de las matemáticas, incluida la medición, la cuantificación (relación calidad-precio, razonamiento proporcional y cálculos aritméticos) y el cambio y las relaciones (se refiera a las relaciones entre las variables y al modo en que las propiedades relevantes cambian de la pizza más pequeña a la más grande). Finalmente, esta pregunta se clasificó como una pregunta de cambio y relaciones, puesto que la clave del problema radica en la capacidad del alumno para relacionar el cambio en las áreas de las dos pizzas (dado un cambio en el diámetro) y la correspondiente modificación del precio. Evidentemente, una pregunta diferente que incluyese el área del círculo podría clasificarse como una pregunta de espacio y forma. Las relaciones entre los aspectos de contenido que abarcan estas cuatro categorías favorecen la coherencia de las matemáticas como disciplina y son evidentes en algunas de las preguntas seleccionadas para la evaluación de PISA 2012.

En esta evaluación México se ubicó en un nivel 1 en matemáticas, donde un estudiante típico en este nivel puede contestar preguntas en un contexto familiar, en el que toda la información relevante y las preguntas son claramente presentadas y definidas. Ellos son capaces de identificar información y obtener procedimientos de acuerdo con las instrucciones directas en situaciones explícitas.

En comparación de los alumnos mexicanos, los alumnos japoneses se han colocado dentro de los primeros lugares en la evaluación PISA desde el año 2000, por lo que se ha puesto al sistema educativo japonés como ejemplo (OECD, 2014). Los alumnos japoneses tienen un promedio de 235 minutos de clases de matemáticas a la semana, los alumnos mexicanos tienen un promedio de 250 minutos, lo que nos lleva a deducir que la calidad en la enseñanza tiene mucho más peso que la cantidad de horas en el aula (O´Donoghue, 2014), y la importancia que tiene el diseño de actividades apropiadas, pero si el docente no ha estado en contacto directo con éstas es imposible que las diseñe para ponerlas en práctica en el aula.

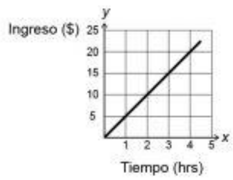
PLANEA es el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes que pone en operación el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) a partir del ciclo escolar 2014-2015, en coordinación con la Secretaría de Educación Pública (SEP). El INEE afirma que “es una prueba estandarizada a gran escala que evalúa los aprendizajes clave del currículo en los campos de formación relacionados con Lenguaje y Comunicación y Matemáticas que son comunes a todos los evaluados”.

A continuación, se presentan varios reactivos típicos de examen PLANEA en el tema de la proporcionalidad.

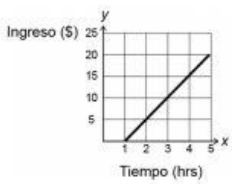
Reactivo con nivel de logro II, los alumnos que llegan a este nivel, logran resolver correctamente este nivel de logro, reconocen y expresan, de diferentes formas, relaciones de proporcionalidad directa y plantean relaciones sencillas de proporcionalidad inversa.

El ingreso de Ramón es directamente proporcional al tiempo que labora, ¿cuál de las siguientes gráficas representa lo que gana en función de las horas que trabaja? Considera el pago como de $ 5.00 por hora.

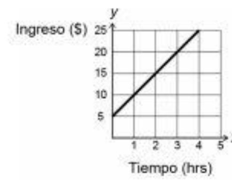
A)



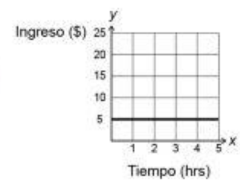
B)



C)



D)



Reactivo con nivel de logro III, para PLANEA los alumnos que alcanzan este nivel de logro, resuelven problemas de cálculo de porcentajes o reparto proporcional.

Ana, Juan y Andrea aportaron respectivamente $ 20, $ 30 y $ 50 para comprar un boleto para una rifa. El boleto que compraron resultó ganador de un premio de $ 12 000. Acordaron repartir el premio proporcionalmente a lo que cada uno aportó. ¿Cuánto le corresponde a Juan?

A) $ 360

B) $ 400

C) $ 3 600

D) $ 4 000

Reactivos de nivel de logro IV. Se presentan ahora dos reactivos clasificados en este nivel, que corresponde a los alumnos que resuelven problemas que implican números fraccionarios y decimales (combinados), o el uso de notación científica, o una ecuación o sistema de ecuaciones. Como se puede constatar, en los dos reactivos son problemas que involucran las razones y la proporcionalidad, aunque PLANEA no especifica en este nivel de logro la proporcionalidad.

En México se producen 1.3×10^{8} toneladas de basura por año. Se sabe que una tonelada es igual a 1×10^{3} kg, y hay 1.1×10^{8} mexicanos. ¿Qué cantidad de basura, en kg, produce al año cada mexicano?

A) 1.18×10^{3} kg

B) 11.8×10^{3} kg

C) 1.18×10^{19} kg

D) 1.18×10^{-3} kg

La siguiente fotografía se amplificó a $\frac{5}{2}$ de la original.

¿Por cuánto se deben multiplicar las medidas de la foto ampliada para obtener las de la foto original?

A) 10

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{5}{2}$

D) 25 $\frac{5}{2}$

Como puede verse los reactivos son de opción múltiple y pueden resolverse aplicando directamente el concepto de proporcionalidad, los que en las investigaciones que se presentaron en el capítulo anterior de este trabajo, son considerados como problemas sencillos donde abiertamente se habla de proporcionalidad e induce a la utilización de la regla de tres. Estos reactivos son los que los docentes tienen como base para la planeación de su clase y para la elaboración de sus evaluaciones dentro del salón de clase. Además, se constata la transversalidad de la proporcionalidad ya que se encuentra en varios reactivos a lo largo de la evaluación.

2.4 Formación continua de Profesores

La reforma educativa estableció que es obligatorio que todo ingreso a funciones docentes se realice por concurso para que sea el mérito el criterio clave para ingresar al servicio docente; determinó apoyar a los docentes de nuevo ingreso mediante programas de tutoría; mandató que los docentes en servicio se sujetaran al menos cada 4 años a una evaluación; y dispuso el fortalecimiento de una oferta de programas de formación continua a los docentes en servicio para ampliar permanentemente sus capacidades y favorecer su dominio disciplinar y pedagógico.

Les están ofreciendo cursos de formación de manera gratuita para los maestros de educación pública, y sobre todo a los maestros que hayan obtenido calificación insuficiente en la evaluación de desempeño.

Los cursos ofertados para los docentes de matemáticas son muy generales. Por ejemplo, el curso ofrecido bajo el título “Desarrollo de competencias para la planeación didáctica argumentada”, tiene como propósito ampliar y fortalecer las competencias para el diseño y desarrollo de la planeación de situaciones didácticas acordes con los aprendizajes esperados de la asignatura.

Ninguno de los cursos ofertados es sobre proporcionalidad o sobre diseño de situaciones problema para las clases de matemáticas que promuevan el enfoque didáctico que propone la RIEB del 2011.

2.5 Ubicación Curricular

El tema matemático de interés para el presente trabajo de tesis está ubicado como contenido curricular en el eje de manejo de la información, en el tema de proporcionalidad y funciones, para los estudiantes de primero, segundo y tercero de secundaria.

De acuerdo con los planes de estudio de matemáticas (SEP, 2011) los contenidos sugeridos de acuerdo a los aprendizajes esperados se muestran desglosados en las siguientes tablas:

		EJE
Primero de Secundaria	Bloque	Manejo de la información
	I	**Proporcionalidad y funciones.** Resolución de problemas de reparto de proporcionalidad
	II	**Proporcionalidad y funciones.** Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad directa del tipo “valor faltante” en diversos contextos, con factores constantes fraccionarios.

III	**Proporcionalidad y funciones.** Formulación de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas.
IV	**Proporcionalidad y funciones.** Análisis de la regla de tres, empleando valores enteros o fraccionarios. Análisis de los efectos del factor inverso en una relación de proporcionalidad, en particular en una reproducción a escala
V	**Proporcionalidad y funciones.** Resolución de problemas de proporcionalidad múltiple.

		EJE
Segundo de Secundaria	**Bloque**	Manejo de la información
	I	**Proporcionalidad y funciones.** Resolución de problemas diversos relacionados con el porcentaje, como aplicar un porcentaje a una cantidad; determinar qué porcentaje representa una cantidad respecto a otra, y obtener una cantidad conociendo una parte de ella y el porcentaje que representa. Resolución de problemas que impliquen el cálculo de interés compuesto, crecimiento poblacional u otros que requieran procedimientos recursivos.
	II	**Proporcionalidad y funciones.** Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.
	III	**Proporcionalidad y funciones.** Representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación.
	IV	**Proporcionalidad y funciones.** Análisis de las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano. **Análisis y Representación de datos.** Resolución de situaciones de medias ponderadas.

Tercero de Secundaria	Bloque	EJE Manejo de la información
	I	**Proporcionalidad y funciones.** Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.
	III	**Proporcionalidad y funciones.** Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Según el programa de estudios, estos temas tienen entre sus propósitos que los alumnos: "*identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente, y calculen valores faltantes y porcentajes utilizando números naturales y fraccionarios como factores de proporcionalidad*".

CAPÍTULO 3. PROBLEMÁTICA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

A pesar de la importancia concedida al tema de proporcionalidad en los currículos escolares, autores como Vergnaud (1988, 1994), Lesh, Post, y Behr (1988), Adjiage y Pluvinage (2007), Martin et al. (2008), García y Serrano (1999) concluyen en sus investigaciones que los alumnos no alcanzan niveles apropiados de aprendizaje en estas temáticas durante su ciclo escolar. Además, estudios comparativos de diferentes periodos de tiempo muestran que los resultados no mejoran significativamente de un año a otro (Hodgen, Kuchemann, Brown, & Coe, 2010; Martin et al., 2008).

Así pues, si bien se reconoce el valor que a nivel curricular tienen los ejes temáticos en torno a la proporcionalidad, continúa siendo un problema complejo en relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje. A pesar de los importantes avances logrados en la investigación en didáctica de las matemáticas (caracterizaciones finas de los problemas cognitivos y didácticos) aún no se logran consolidar propuestas que modifiquen la forma como se aborda el tema de proporcionalidad en los contextos escolares.

Por lo que es importante continuar trabajando sobre una enseñanza adecuada para abordar el tema de proporcionalidad.

Es pertinente mencionar que la proporcionalidad juega un rol importante en la comprensión de las relaciones entre las magnitudes físicas, las nociones matemáticas como fracciones, escalas, porcentajes entre otras. Sin olvidar que permite resolver problemas, no solo de las matemáticas, sino de otras ciencias como la física (concepto de velocidad, aceleración, uso de factores de conversión) y la química (concentración o balanceo de ecuaciones). Además, es importante mencionar que el concepto de proporción parte de la visualización del espacio real o de conceptos cotidianos como cambios de monedas, cambio de escalas, cuantificación de escalas, etc.

Por otra parte, este tema es de particular interés en múltiples investigaciones como las reportadas por: Balderas, Block & Guerra (2014), Mendoza (2009), Ben-Chaim et al. (2007) y Mochón (2012), los cuales muestran cómo la educación tradicional ha centrado la enseñanza en algoritmos relacionados con la proporcionalidad sin profundizar en el concepto. En estos mismos estudios ha quedado de manifiesto también que los maestros y estudiantes tienen dificultades para comprender el concepto.

Por lo anterior consideramos importante la búsqueda de contextos interesantes, que puedan orientar al profesor sobre las dificultades que el concepto representa para sus estudiantes. La propuesta diseñada se ubica en la modalidad de trabajo, que la SEP (2011, p. 62) clasifica como "Proyectos" y enfatizar la construcción de un modelo para la resolución de una situación problemática.

Por lo anterior, nos hemos propuesto como el siguiente objetivo general:

> ***Modelar situaciones relacionadas con el concepto de proporcionalidad; como medio para enriquecer la formación de los profesores.***

Con la finalidad de lograr el objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar actividades de modelación matemática (Model Eliciting Activities).
- Analizar la aplicación de las actividades diseñadas.

CAPITULO 4. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En esta primera parte del apartado se describe la teoría en la cual se basa el diseño de la secuencia y en la cual se basará la observación de la puesta en escena.
Para el diseño de las actividades se tomaron como base los principios de diseño de actividades de modelación matemática de Richard Lesh y su equipo y para el análisis de la puesta en escena de las actividades se utilizó el modelo teórico conocido como los Espacios de Trabajo Matemático.

4.1 Teoría para el diseño de actividades

En este trabajo los principios que se utilizaron para el diseño de actividades son una adecuación de los principios de Dienes. A diferencia de las actividades propuestas por Dienes, esta secuencia didáctica se basará en situaciones problémicas del día a día de los profesores o de su entorno, este tipo de actividades son de modelación matemática y son, en lo que se requiere al diseño y al tema una adaptación de Richard Lesh.

4.1.1 Seis Principios para el diseño de actividades

El Proyecto de Números de Racionales (RNP) fue el proyecto de investigación más duradero de cooperación multi-universidad en la historia de la educación matemática. La Fundación Nacional de la Ciencia de Estados Unidos, con la excepción de 1983-1984, ha financiado este proyecto de forma continua desde 1979.
El RNP ha generado más de 90 ponencias presentadas y la publicación de varios libros, capítulos de libros y artículos de investigación. El proyecto está a cargo de un grupo de

investigadores dedicados al estudio del aprendizaje y la enseñanza de los conceptos de números racionales incluyendo las nociones de fracción, decimal, relación, la división indicada, medida y operador. Sus estudios los llevaron naturalmente al tema de la proporcionalidad con especial atención en los componentes del razonamiento proporcional. Han examinado la relación entre la comprensión de la multiplicación y la división y el aprendizaje de los conceptos de su interés. Recientemente se han ocupado del diseño de programas efectivos de desarrollo profesional para los maestros y al mismo tiempo con las prácticas de evaluación adecuados en este campo de las matemáticas.

El equipo ha diseñado una serie de actividades para desarrollar lo que llaman "estudio de casos" (case studies) y han formulado un conjunto de seis principios que rigen el diseño (Lesh & Doerr, 2003), describimos a continuación estos principios.

El primer principio se llama Principio de Construcción del Modelo. Este principio garantiza que la solución a la situación planteada requiere la construcción de una descripción explícita, explicación, procedimiento o predicción justificada por una situación matemáticamente significativa dada. Tales productos externalizan cómo los estudiantes interpretan la situación y también revelan los tipos de cantidades matemáticas, relaciones, operaciones y patrones que ellos toman en cuenta.

El segundo principio de diseño es el Principio de Realidad. Este principio también podría ser denominado como el principio del significado, se requiere que la actividad sea diseñada para que los estudiantes puedan interpretar la actividad en forma significativa poniendo en juego de sus diferentes niveles de habilidad matemática y el conocimiento general.

El tercer principio de diseño es el Principio de Autoevaluación. Este principio garantiza que durante el desarrollo de las actividades los propios alumnos pueden identificar y utilizar datos, para probar y revisar sus formas de pensar. En concreto, el diseño debe incluir información que los estudiantes pueden utilizar para evaluar la utilidad de sus alternativas de solución, para juzgar cuándo y cómo deben mejorarse sus soluciones, y para saber en qué momento ya llegaron a una solución.

El cuarto principio, denominado Documentación del Modelo, asegura que, al concluir la actividad, se debe requerir a los estudiantes para crear algún tipo de documentación que revelará explícitamente cómo están pensando en la situación problema. Exigir documentación externa que revele su pensamiento es beneficioso tanto para el profesor como para los alumnos. En primer lugar, la documentación es de gran ayuda para el profesor, porque revela cómo los estudiantes están interpretando y pensando en la situación dada. En segundo lugar, la documentación es beneficiosa para los estudiantes, porque cuando los estudiantes exteriorizan su pensamiento, es más fácil para ellos autoevaluarse o reflexionar sobre su pensamiento. En otras palabras, la externalización de su pensamiento mejora la metacognición de los estudiantes.

Este principio se concreta típicamente de dos maneras. En primer lugar, mientras los estudiantes están trabajando en grupos revelan explícitamente sus maneras de pensar cuando se comunican entre sí para llevar a cabo procesos tales como la planificación, el seguimiento y la evaluación. En segundo lugar, el diseño de la situación se plantea exigir a los estudiantes la producción de explicaciones, procedimientos o descripciones como parte de su solución y para explicar sus soluciones por escrito. Juntas estas dos formas, producen documentaciones que revelan cómo los estudiantes están pensando en la situación dada.

El quinto principio es el Principio de las Producciones Compartibles y Reutilizables, que se usa al solicitar a los estudiantes la producción de soluciones que los demás puedan entender y reutilizar. Al pedir a los estudiantes que generen productos que puedan ser utilizados por otras personas más allá de la situación inmediata, el diseño solicita a los estudiantes ir más allá de sus formas personales de pensar para desarrollar formas más generales de pensamiento.

El sexto principio, el Principio del Prototipo Eficaz, asegura que la situación será tan simple como sea posible y aun así matemáticamente significativa. El objetivo es que los estudiantes desarrollen las soluciones que proporcionarán prototipos útiles para la interpretación de otras situaciones similares.

4.1.2 La influencia de los Principios para la comprensión de los conceptos matemáticos de Zoltan Dienes.

Richard Lesh y su equipo plantean las actividades de modelación matemática, haciendo una adecuación a los Principios para la comprensión de los conceptos matemáticos de Dienes. En este apartado explicaremos someramente estos principios en particular, ya que son parte de la fundamentación de su Teoría del Aprendizaje matemático.

Dienes ha sido uno de los matemáticos educativos más creativos que han existido, uno de sus principales trabajos fue la creación de principios para diseñar actividades didácticas que ayuden a los estudiantes a la formación de estructuras basadas en la comprensión y habilidades.

Dienes usó el término *"embodiment"* para referirse a los materiales manipulables, como los bloques de aritmética, él enfatiza los siguientes 4 principios de cómo estos *"embodiments"* deben ser utilizados para el diseño de actividades didácticas:

El principio de Construcción. La construcción, la manipulación y el juego constituyen para el niño el primer contacto con las realidades matemáticas.

Principio dinámico. El aprendizaje pasa de la experiencia al acto de categorización, a través de ciclos que se suceden regularmente uno a otro.

El principio de Variabilidad Perceptiva. Establece que para abstraer efectivamente una estructura matemática debemos encontrarla en una cantidad de estructuras diferentes para percibir sus propiedades puramente estructurales.

El principio de la Variabilidad Matemática. Que establece que como cada concepto matemático envuelve variables esenciales, todas esas variables matemáticas deben hacerse variar si ha de alcanzarse la completa generalización del concepto.

En resumen, los principios de Dienes fueron diseñados para ayudar a los estudiantes: a ir más allá de centrarse en materiales concretos, o en acciones aisladas, para enfocarse en patrones y regularidades que ocurren dentro de los sistemas de operaciones y relaciones que son impuestos a los materiales; ir más allá de centrarse en materiales concretos aislados para centrarse en las similitudes y las diferencias entre los sistemas estructuralmente parecidos; ir más allá de los patrones estáticos y los objetos para centrarse en sistemas dinámicos de operaciones, relaciones y transformaciones; e ir más allá del pensamiento con un modelo dado para pensar también en él como una variedad de maneras de resolver de problemas.

Debido al objetivo de extender los principios de Dienes para hacerlos más útiles a los maestros de niveles superiores a la escuela primaria, el equipo de Lesh exploró la posibilidad de reemplazar actividades que involucran materiales concretos con actividades en las que los contextos se basan en las experiencias cotidianas de los estudiantes o sus familias, a estas actividades se les llamó Model Eliciting Activities (Actividades de Modelación Matemática).

4.2 Fundamentos Teóricos para el análisis de la puesta en escena

En este apartado se presentará el modelo teórico y metodológico de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM), que es el resultado de una investigación colaborativa de investigadores de varios países, a lo largo de 10 años. El modelo de los ETM ha sido desarrollado por medio de Simposios, el Cuarto Simposio se llevó a cabo en Madrid, España en el 2014 y el Quinto Simposio en Grecia en el 2016.

El modelo de los ETM ha sido elaborado con el objetivo de proporcionar una herramienta para el estudio específico del trabajo matemático en el que tanto estudiantes como maestros se involucran cuando llevan a cabo actividades matemáticas.

Los ETM son un espacio abstracto de trabajo, que permite el análisis de la actividad matemática de individuos que se ocupan de alguna actividad matemática. Así, analizar el trabajo matemático a través de la lente de los ETM permite dar seguimiento a cómo se construye progresivamente el significado en matemáticas, como un proceso de conexión entre las perspectivas epistemológica y cognitiva (Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016).

Este modelo puede usarse para estudiar diferentes tareas, situaciones de enseñanza y actividades establecidas en campos o dominios matemáticos específicos.

El modelo de los ETM debe funcionar como una herramienta interactuando fuertemente con otras herramientas teóricas.

4.2.1 Espacios de Trabajo Matemático

En este apartado haremos una descripción de los elementos del modelo de los ETM y cómo se relacionan entre sí. Primeramente, se presenta la perspectiva epistemológica, en relación estrecha con los contenidos matemáticos del ámbito estudiado y posteriormente la cognitiva, que concierne al pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas, a través de dos planos a diferentes niveles (ver Figura 1), pero entrelazados por desarrollos de génesis (Kuzniak, 2014). Cada una se identifica como una génesis relacionada con una dimensión específica en el modelo: génesis semiótica, instrumental y discursiva.

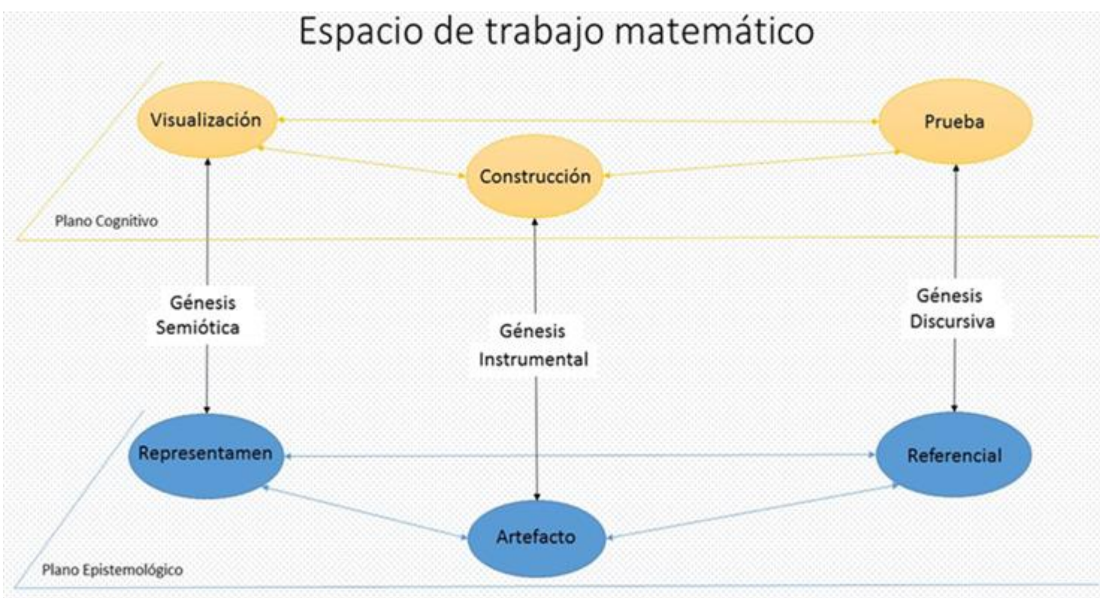


Figura 1

El plano Epistemológico y sus componentes

En este plano existen tres componentes que lo caracterizan con el propósito de describir el trabajo en su dimensión epistemológica: un conjunto de objetos concretos representados; un conjunto de artefactos tales como instrumentos de dibujo, software, etc. Y un sistema teórico de referencia basado en definiciones, propiedades y teoremas. Estos componentes se identifican y organizan de acuerdo con objetivos predeterminados que dependerán del campo matemático y de las tareas propuestas. Su propósito principal es modelar el entorno general en el que el proceso de aprendizaje de los estudiantes se llevará a cabo a través de una actividad matemática dada.

“De acuerdo con una concepción matemática basada en representaciones semióticas, que va más allá de la simple consideración de sistemas de representación, parece pertinente utilizar el término *representamen* para resumir el componente que está en relación con objetos concretos y tangibles” (Gómez-Chacón, Kuzniak, & Vivier, 2016).

Dependiendo del campo matemático en juego y de la estrategia de enseñanza y rutas establecidas, los representamens pueden ser imágenes geométricas, símbolos algebraicos, gráficos o incluso fichas, modelos o fotos en el caso de problemas de modelado. El conjunto de representamens pertenecen a diversos registros de representación semiótica (Duval, 1993), y la interacción entre registros puede relacionarse con paquetes semióticos (Arzarello, 2006).

La noción de artefacto a la que nos estamos refiriendo ha sido formulada por Rabardel (1995), e incluye todo lo que ha sufrido una alteración por la mano del hombre, por pequeña que sea. Según Rabardel, su significado no se limita a los objetos materiales, sino que incluye los sistemas simbólicos. Los sistemas simbólicos que serán considerados como artefactos son los algoritmos que están conectados, ya sea a artefactos materiales tradicionales (ábaco, tablas logarítmicas o trigonométricas, etc.) técnicas de cálculo o construcción (regla de tres, división euclidiana, construcciones "clásicas" con regla y brújulas, etc.) de los cuales la validación y el estado teórico ya no son una preocupación.

El conjunto de propiedades, definiciones, teoremas y axiomas integran la parte teórica del trabajo matemático, por lo que se denomina marco teórico de referencia (denominado "referencial" en la Figura 1). Este conjunto no es sólo una colección de propiedades respalda el discurso deductivo de las demostraciones específicas de las matemáticas, y esto requiere que esté organizado de una manera coherente, para que pueda ser usado por los estudiantes al resolver tareas matemáticas.

El plano Cognitivo y sus componentes

Es esencial comprender cómo los individuos, pero también las comunidades de individuos, adquieren, desarrollan y hacen uso del conocimiento matemático a través del propio trabajo matemático. Esto sugiere un segundo nivel en el modelo de los ETM, centrado en el sujeto, considerado como un sujeto cognitivo. En relación estrecha con los componentes del nivel epistemológico, se introducen tres componentes cognitivos: la visualización, relacionada con el desciframiento e interpretación de signos, y la representación interna de los objetos y relaciones involucradas; la construcción en función de los artefactos utilizados y de las técnicas asociadas; y las pruebas que se generan a través de procesos deductivos, y se basan en el sistema de referencia.

La *visualización* se asociará con diagramas y operaciones relacionadas con el descifrado y el uso de signos que, por cierto, pueden ser escuchados como imágenes acústicas en contextos estrictamente orales -y sobre los cuales nada asegura a priori que impliquen estrictamente la visualización. Este proceso puede ser considerado como un medio para estructurar la información proporcionada por los signos, y abarca el desciframiento, la interpretación y el tejido de relaciones. Tiene que ser ampliado y distinguido de la simple visión o percepción de los signos.

La *construcción* se relaciona con acciones desencadenadas por el uso de herramientas artificiales, acciones que no necesariamente pueden resultar en una producción tangible, como dibujos o escritos, pero que pueden abarcar la observación, la exploración o incluso la experimentación (más sistemática y técnicamente apoyada).

La *prueba* puede ser vista en este modelo, como el producto de la génesis discursiva (que se explicará más adelante), que puede consistir en una cadena de deducciones que establecen una proposición matemática; pero también, en una serie de argumentos que justifiquen un resultado matemático.

Las génesis de los ETM

Los espacios de trabajo matemático consideran la existencia de tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva.

La *génesis semiótica* es el proceso asociado con representaciones, explica la relación dialéctica entre las perspectivas sintácticas y semánticas sobre objetos matemáticos, expuestos y organizados a través de sistemas semióticos de representación. La génesis semiótica proporciona a los representantes perceptibles su estado de objetos matemáticos operativos.

Este enriquecimiento progresivo del significado corresponde, de alguna manera, a las funciones icónicas y simbólicas de los signos considerados en la semiótica. Con respecto al modelo de la Figura 1, la génesis semiótica considerada como un proceso de decodificación e interpretación de signos podría ser vista metafóricamente como un movimiento ascendente, un enlace que parte de un representamen y que se abre camino hacia la "conciencia cognitiva" mediante la percepción visual. El movimiento inverso, comenzando en la mente de un "sujeto cognoscitivo" y dirigido hacia un representamen, podría entonces ser evocado cuando se está produciendo o especificando un signo, y entonces pertenecería a procesos tales como la codificación.

La *génesis instrumental* permite hacer operativos los artefactos durante los procesos constructivos contribuyendo al logro del trabajo matemático. Siguiendo la distinción de Rabardel (1995), es útil considerar que un instrumento consiste de dos componentes: un artefacto-material o simbólico- y los esquemas con los que se usa.

La *génesis discursiva* es el proceso por el cual las propiedades y resultados son organizados en el sistema teórico de referencia y éstas se activan para usarse en el razonamiento matemático y validaciones discursivas. Esta génesis involucra un proceso bidireccional: en una dirección, un discurso deductivo apoyado en propiedades contenidas en el marco teórico de referencia, y en la otra dirección, la identificación de propiedades y definiciones que se incluirán en el marco referencial.

En la Figura 2 se muestra el esquema de los Espacios de Trabajo Matemático. En este diagrama se incluyen tres planos verticales, los cuales explican, de una manera más general, las relaciones que existen entre los polos y génesis del ETM.

El plano de la *Comunicación* conecta la génesis semiótica y la génesis discursiva y es crucial para desarrollar el trabajo que va más allá de la simple visión icónica de los objetos.

El plano de *Razonamiento* conecta la génesis instrumental y la génesis discursiva, este plano se activa cuando los procesos de exploración o experimentación se llevan a cabo con respecto a una o varias afirmaciones bien definidas.

El plano de *Descubrimiento* se apoya en la génesis semiótica e instrumental para identificar y explorar objetos en la solución de los problemas matemáticos

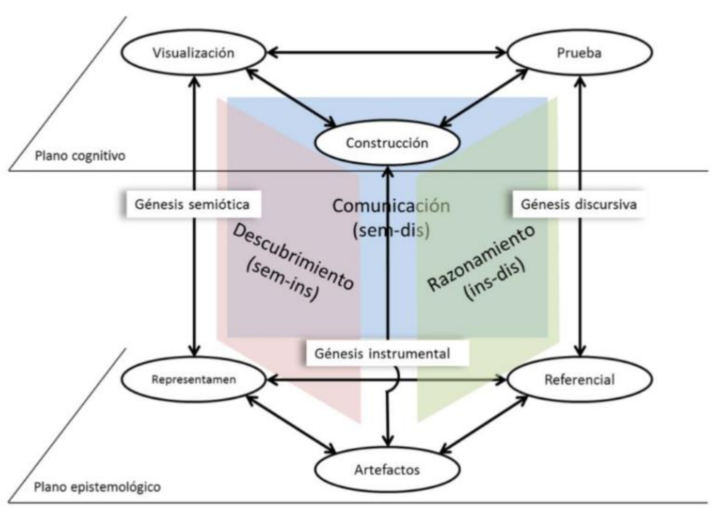


Figura 2

No hay descripciones exactas o definiciones precisas de estos planos por que las interacciones entre las génesis varían de acuerdo al campo matemático en el cual se esté trabajando, el tipo de tareas, el nivel de escolaridad, etc. Los tres planos son herramientas valiosas para describir las interrelaciones entre las diferentes génesis, identificar y caracterizar fases en los procesos de resolución. Así, es posible describir la evolución del trabajo matemático para identificar brechas, detectar confinamientos o bloqueos dentro de una o dos génesis, en términos de circulación entre los planos.

En relación con las actividades de carácter fuertemente constructivista, podría intentarse analizar cómo los procesos de descubrimiento pueden evitar quedar atrapados en ese plano donde quedarían moviéndose sin sentido.

Recientemente, se ha introducido en el modelo de los ETM el término fibración que se ha sugerido para etiquetar movimientos y transiciones entre los diferentes elementos del modelo. En consecuencia, tendríamos fibraciones internas (entre planos, entre componentes, entre registros de representaciones semióticas, etc.) y fibraciones externas (entre los ETM asociados a diferentes campos matemáticos). Estas fibraciones ayudan a visualizar las interrelaciones y en retratar el desarrollo y la circulación del trabajo matemático dentro del modelo.

4.3 Aspectos Metodológicos

Como primer paso, se consideró el contenido matemático que se quería trabajar con los profesores. Para el diseño de las actividades didácticas se decidió trabajar con los elementos teóricos antes mencionados. Para el diseño de las actividades se utilizó los Seis Principios para el diseño de actividades del equipo de Richard Lesh y para el análisis de la puesta en escena los Espacios de Trabajo Matemático del equipo de Kuzniak.
Se planificó y se ejecutó la puesta en escena de las actividades con maestros de secundaria. Al aplicar la actividad didáctica se contó con las hojas de trabajo que se encuentran en el anexo 1 y anexo 2 del presente trabajo.

Se analizó la pertinencia de las actividades utilizando como marco teórico los Espacios de Trabajo Matemático y las conclusiones fueron basadas en la observación del proceso que los docentes fueron desarrollando para la resolución de las actividades.
Como resultado de esta observación se hicieron modificaciones a las actividades tanto de redacción como de cambio en las instrucciones con la finalidad de mejorar la comprensión de la actividad por parte de los docentes, así como mejorar en la autonomía de los docentes al realizar las actividades didácticas.
Como parte del análisis de la puesta en escena de las actividades didácticas, nos dimos a la tarea de buscar bibliografía donde nos pudiéramos apoyar para iniciar el análisis. Esto se debe a que el marco teórico de los ETM es relativamente nuevo.
Se optó por un análisis que se orientara más a un aspecto visual y sencillo.

CAPÍTULO 5. FUNDAMENTO DEL DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

En este apartado se hace una descripción de las actividades didácticas, elaboradas con base en el diseño de los seis principios de diseño de las Actividades de Modelación Matemática: Construcción del Modelo, Realidad, Documentación del Modelo, Autoevaluación, Prototipo Eficaz y Producciones Compartibles y Reutilizables, descritos en el marco teórico del presente trabajo.

En cada actividad se encuentra una descripción del objetivo general, los objetivos particulares, así como el material y recursos didácticos para su implementación.

Las actividades se encuentran en hojas de trabajo donde el profesor da respuesta a algunos cuestionamientos, plasma algunos cálculos, procedimientos, etc. por lo que nos sirven como herramientas de observación. Estas hojas de trabajo contienen los seis principios particulares de las Actividades de Modelación Matemática, también se incluyen orientaciones didácticas, las cuales se consideran pertinentes para facilitar la posibilidad de replicar las actividades.

La primera actividad descrita parte de una situación problemática sobre el juego de Voleibol, cuya versión original fue elaborada por Lesh y su equipo y que fue aplicada en la Universidad de Noroeste de Kellogg en la escuela de Administración, la versión fue adaptada para nivel secundaria y modificada, se presenta a continuación.

La segunda actividad es el problema de la bandera de México que fue inspirada en un problema real con una bandera que debía ser reparada, al investigar sobre la Ley de Escudos, Banderas e Himno Nacionales e incluye un artículo que habla de la fabricación de éstas.

5.1 Actividad: Voleibol.

1. Objetivo de la actividad didáctica.

Objetivo General:

Usar el concepto de proporcionalidad para modelar la situación problemática planteada.

Objetivos específicos de la actividad didáctica:

a) Utilizar el procesamiento de datos durante el proceso de construcción del modelo que resuelve la situación
b) Tomar decisiones sobre los procedimientos a utilizar durante el proceso de resolución de la situación.
c) Verificar si la situación ha sido bien resuelta.
d) Comunicar efectivamente el procedimiento que lo llevó a la solución al problema.

2. Material utilizado.

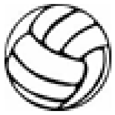
Es recomendable que el material esté en el centro del salón, hacerles saber a los participantes que todo el material está disponible sin hacer sugerencias de usar uno en especial.

- Hojas de trabajo.
- Marcadores, pizarrón.
- Lápices, plumas.
- Calculadora.
- Hojas blancas, papel construcción.
- Sobres manila para recolectar los trabajos.
- Software (hoja electrónica Excel o GeoGebra).

3. Tiempo total estimado.

Aproximadamente 120 minutos.

4. **El contexto de la actividad.**



El voleibol es un deporte donde dos equipos se enfrentan sobre una cancha lisa separados por una red central, tratando de pasar el balón por encima de la red hacia el área del equipo contrario. El balón debe ser tocado o impulsado con golpes limpios, pero no puede ser parado, sujetado, retenido o acarreado.

Cada equipo dispone de un máximo de tres toques para devolver el balón al campo

contrario. Habitualmente el balón se golpea con manos y brazos, una de las características más peculiares del voleibol es que los jugadores tienen que ir rotando sus posiciones a medida que van consiguiendo puntos.

Cada equipo juega con seis jugadores que pueden ser relevados durante el juego. Tres de los jugadores forman la línea delantera, en tareas de ataque y los otros tres se colocan detrás y actúan de defensores o zagueros.

Principio de Realidad

En esta primera parte de la actividad se plantea el contexto en una situación de la vida cotidiana, los conocimientos que tienen de él son una extensión de sus experiencias, en el cual sus opiniones van a ser tomadas en cuenta y no forzadas a una manera de pensar.

La actividad didáctica de Voleibol brinda información sobre las actividades de puesta a prueba en un campamento deportivo que se especializa en voleibol para jovencitas. El artículo del periódico describe una situación donde, en el primer día del campamento, cierta información es obtenida de cada muchacha que se interese en participar. Se busca que el principio de realidad esté presente.

El producto que se pide en este problema es escribir una carta al director del campamento donde se describa un esquema donde se utilice la información para calificar a las jovencitas y asignarles equipos que sean equivalentes en las habilidades generales.

Orientación didáctica 1.1
En esta sección del artículo del periódico los participantes leen individualmente, el propósito es que se familiaricen con el contexto del problema, es importante que todos entiendan el tema.
Tiempo estimado: 5 minutos.

Artículo de periódico: Campeonas de voleibol

Durante años, la secundaria general #1 ha ganado campeonatos de voleibol. Su éxito no ha llegado por accidente, sus excelentes entrenadores y su liderazgo han ayudado a poner en el mapa a varias jugadoras. Las jugadoras atribuyen el éxito de su equipo a los entrenadores debido a su ética de trabajo.

Cada mañana, las jugadoras hacen pesas, y una vez por semana, junto a sus entrenadores de la escuela estudian videos para observar las técnicas y para estudiar a sus competidoras. Además de levantar pesas y ver videos, los equipos entrenan seis días a la semana.

Además de trabajar duro, tienen toda la actitud de ganadoras. Otra cosa, en la que tanto atletas como entrenadores están de acuerdo, que ha ayudado a que su equipo continúe en la senda de la victoria es un campamento de voleibol de verano. Este campamento se celebra cada verano desde la segunda a la cuarta semana de julio en el Instituto Tecnológico de Hermosillo (ITH). Este Instituto es el anfitrión del campamento, y cuando el tiempo y los de manera que no exista ventaja para algún equipo.

En los últimos años algunos equipos han derrotado contundentemente a los demás. Mariana recuerda haber asistido al campamento el año pasado y perder un partido 15-3, 15-2, 15-6. "Ha sido una experiencia humillante", afirma Mariana. "Llegué al campamento por dos razones. En primer lugar, quería mejorar como jugadora. Y en segundo, quería estar en otros equipos y competir contra otros equipos, diferentes a los de la temporada regular. Con el sistema actual, un equipo puede arrasar al tuyo fácilmente."

Debido a la gran desventaja en la que queda algunos equipos, el interés por el campamento ha disminuido. El campamento ofrece a las jugadoras la oportunidad de aprender y mejorar sus habilidades en el voleibol, pero el torneo no resulta tan atractivo como debería. Incluso las jugadoras que ganan regularmente en el torneo se están aburriendo. Ellas también prefieren enfrentarse a equipos más competitivos, que ganar sus juegos fácilmente.

recursos lo permite, algunos jugadores profesionales son invitados a participar. Al final del campamento, se lleva a cabo un torneo de voleibol, donde estudiantes de secundaria de Hermosillo, con edades entre 12 y 15 años, se combinan entre sí para formar los equipos del torneo. Los organizadores del campamento son entrenadores del ITH y la Universidad Estatal de Sonora. Ellos hacen un intento de dividir las jugadoras de la misma escuela

La preocupación de los organizadores del campamento, por los problemas que se describen en la nota periodística, los llevó a recabar información que se presenta en laTabla 1.

TABLA 1. INFORMACION RECABADA DURANTE LA PUESTA A PRUEBA DE LAS PARTICIPANTES EN EL CAMPAMENTO

Nombre	Altura del jugadora metros	Salto vertical en cm	Carrera de 40 metros en segundos	Resultados en saques (número de saques completos con éxito de un total de 10)	Resultados de Remate (de un total de 5 intentos)
Gertrudis	1.85	50.8	6.21	8	Toque-devuelto Toque-no devuelto Clavada En la red Devuelta
Betty	1.57	63.3	5.98	7	Clavada Devuelta Fuera de cancha Toque-devuelto Clavada
Jennifer	1.77	60.9	6.44	8	Fuera de cancha Devuelta Devuelta Clavada En la red
Amy	1.77	68.5	6.01	9	Clavada Clavada Toque-no devuelto Clavada Devuelta
Ana	1.67	63.3	6.95	10	Fuera de cancha En la red Devuelta Devuelta Toque-devuelto
Kate	1.72	43.1	7.12	6	Clavada Toque-no devuelto Clavada Devuelta Clavada
Andrea	1.60	53.3	6.34	5	Fuera de cancha Clavada En la red En la red Toque-devuelto
Cristina	1.65	58.4	7.34	8	En la red Clavada Clavada

					Clavada Toque-no devuelto
Lorena	1.65	60.9	6.32	9	En la red Fuera de cancha En la red Fuera de cancha Devuelta
Elizabeth	1.70	48.2	8.18	10	Toque-no devuelto Clavada Clavada Fuera de cancha Devuelta
Kim	1.75	58.4	6.75	7	Toque-devuelto Clavada Devuelta Fuera de cancha Clavada
María Paula	1.72	38.1	5.87	8	Clavada Clavada Clavada Toque-no devuelto En la red
Hermelinda	1.62	53.3	6.72	8	Clavada Devuelta Fuera de cancha En la red Toque-devuelto
Laura	1.70	48.2	6.88	9	Fuera de cancha En la red En la red Clavada Devuelta
Tina	1.54	60.9	6.27	6	Toque-no devuelto Toque-devuelto Toque devuelto Clavada Fuera de cancha
Angie	1.77	58.4	6.54	8	Fuera de cancha Clavada Fuera de cancha Fuera de cancha Toque-devuelto
Ruth	1.60	66	7.01	9	Toque-no devuelto En la red Clavada Clavada Clavada
Rebeca	1.75	45.7	6.78	10	En la red Fuera de cancha Clavada Toque-devuelto Clavada

TIPOS DE REMATES

Clavada: El otro equipo fue incapaz de devolver la pelota.
Fuera de cancha: La jugadora remató la pelota fuera de la cancha, así que el otro equipo gana el punto.
Devuelta: El otro equipo devolvió el remate.
Toque-no devuelto (dejadita): La jugadora hace una finta de remate a la pelota y solo la toca para que logre pasar la red. El otro equipo no logra devolver la pelota.
Toque-devuelto (dejadita devuelta): La jugadora hace una finta de golpe a la pelota y solo la toca para que pase la red. El otro equipo devuelve el toque.
En la red: La jugadora falla el golpe porque la pelota pega en la red y no pasa.

Orientación didáctica 1.2
Individualmente contestarán las preguntas sobre el artículo periodístico. Esto dará un panorama general sobre la familiaridad de los participantes con el contexto y podrán precisar algunas ideas sobre la situación que se está planteando.
Tiempo estimado: 10 minutos.

DESPUES DE HABER LEIDO EL ARTÍCULO Y REVISADO LA INFORMACIÓN DE LA TABLA, DE LA PÁGINA ANTERIOR, CONTESTA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS INDIVIDUALMENTE.

1. ¿Qué problema está teniendo el campamento?

____

____

2. ¿Qué tipo de golpe puede ser clasificado como Toque-no devuelto durante la prueba?

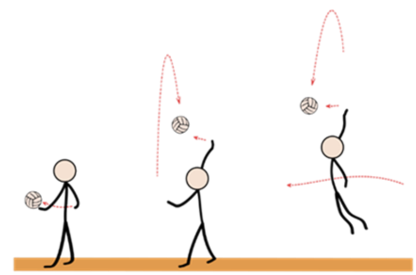
____

____

3. ¿Qué tipo de golpe puede ser clasificado como Clavada durante la prueba?

4. ¿Cuál es la jugadora más alta de la lista?

5. ¿Qué jugadora brinca más alto? ¿Es la misma persona que puede alcanzar el punto más alto? ¿Por qué si o por qué no?



A continuación, se presenta el problema, este problema tiene algunas similitudes con el problema de asignar calificaciones a los estudiantes de un grupo, combinando calificaciones de exámenes rápidos, proyectos de laboratorio, tareas, etc. Es similar también a los problemas que se resuelven en la Revista del Consumidor y otras publicaciones al comparar sistemas complejos cuando se evalúa un producto. Esto es así porque involucra la combinación de medidas que relacionan varios tipos de información tanto cualitativa como cuantitativa.

En particular en el problema del voleibol se deben combinar cinco tipos de información formulando un listado de jugadoras y los datos sobre la medición de sus habilidades.

Orientación didáctica 1.3

A continuación se presenta el problema, se recomienda la integración de equipos de 3 ó 4 personas, si ya se ha trabajado en equipos anteriormente, se recomienda utlizar esos equipos, las actividades de modelación matemática tienen mejores resultados cuando los miembros del equipo ya tienen una relación de trabajo entre ellos.

Para promover la unidad puedes invitar a ponerle un nombre al equipo. En cada equipo deben asignarse roles entre ellos como: administrador del tiempo, recolector de materiales, escritor de la carta, etc.

Recordarles que deben compartir frente el resto del grupo la solución de su problema y preparar una presentación con una duración de entre 3 y 5 minutos.

Dependiendo de la experiencia que el grupo tenga con actividades de modelación matemática, el instructor puede presentar el problema e identificar ante el grupo:

a) El destinatario de la solución del problema.
b) El producto que se les está pidiendo que produzcan.

Una vez que queden claros los puntos anteriores puede dejar que los equipos empiecen a trabajar en la solución del problema.

Tiempo estimado: 15 minutos.

LEE CON DETENIMIENTO LA SIGUIENTE SITUACIÓN.

PROBLEMA

Los organizadores del campamento quieren tener una competencia más reñida en el torneo de voleibol, para que el campamento sea éxitoso. Así que necesitan dividir a las integrantes del campamento en equipos para que los juegos sean más parejos. La información de la Tabla 1 debe ser utilizada para armar tres equipos con mayor competitividad entre ellos, ya que a las jugadores no les gusta que un equipo arrase con los demás. A nivel motivacional la jugadora debe saber que está en un equipo que tiene la oportunidad de vencer a cualquiera de los otros dos.

En la siguiente actividad se supondrá que eres la persona indicada para decirles a los organizadores cómo integrar los equipos. Al final de la actividad se te solicitará que redactes una carta en la que expliques con detalle los criterios que usaste para seleccionar los equipos. Las especificaciones de la carta se darán en su momento.

Principio de Construcción del Modelo.

Este problema fue diseñado originalmente para motivar a los estudiantes de licenciatura a desarrollar mejores maneras de pensar sobre situaciones en las que la información sobre productos (lugares o personas) se les debe asignar cierto peso y posteriormente agruparlas, de tal modo que se pueda asignar alguna calificación de calidad con algún propósito.

Durante el desarrollo de la actividad se aplica el principio de construcción para garantizar que la solución al problema requiera una descripción del procedimiento mediante una situación matemáticamente significativa, donde explican los tipos de relaciones entre las cantidades, operaciones matemáticas y patrones que se toman en cuenta.

En el desarrollo de la actividad se debe asegurar que los participantes reconozcan la necesidad de un modelo el cual puede ser construido, modificado, ampliado o mejorado.

Orientación didáctica 1.4

El tiempo puede variar de acuerdo al tiempo que se dedique a la autorreflexión y a la revisión de los participantes. Mientras los participantes trabajan, el rol del instructor debe ser de observador y facilitador, debe intentar aclarar las dudas que surjan, con preguntas que los lleven a obtener respuestas por ellos mismos, evitar comentarios que lleven a los participantes a una solución en particular. Además durante esta parte, tratará de dar sentido a cómo están resolviendo el problema, así durante la presentación de los resultados podrá preguntarles acerca de su solución.

Tiempo estimado: 45 minutos

DESARROLLA LA SIGUIENTE ACTIVIDAD EN EQUIPO.

1. ¿Qué crees más importante que una jugadora tenga mayor altura o que brinque más alto? ¿Qué tanto crees que es más importante?

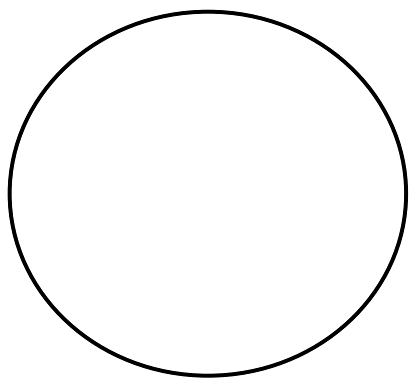
____

____

2. ¿Qué crees más importante que la jugadora tenga mejor resultado del saque o que corra más veloz? ¿Qué tan importante es un aspecto sobre otro?

3. ¿Cuál habilidad crees tú que es más importante para ser un jugador de voleibol?
4. ¿Cuál habilidad crees tú es la menos importante para ser un jugador de voleibol?

5. Elaboren un diagrama de pastel en el que cuantifiquen la importancia de las características mostradas en la tabla.



6. Ordena las jugadoras de mayor estatura a la de menor estatura.

7. ¿Cuál jugadora es la más alta?

____

8. ¿Cuál jugadora es la menos alta?

____

9. ¿Cuál es la diferencia entre la más alta y la menos alta?

____

Principio de Auto-evaluación.

Este principio establece que el participante debe identificar cuándo sus respuestas deben mejoradas o extendidas y cuándo ya resolvió el problema. Deben tener claro el propósito y para quién se necesitan los resultados.

10. Asigna una calificación de acuerdo al orden de la estatura a cada jugadora y escríbela en la Tabla 2.

TABLA 2. CALIFICACIONES DE LAS JUGADORAS											
Nombre	**Calificación Altura**		**Calificación Salto vertical**		**Calificación Corrida**		**Calificación Saque**		**Calificación Remate**		**Calificación final**
Gertrudis											
Betty											
Jennifer											
Amy											
Ana											

Kate											
Andrea											
Cristina											
Lorena											
Elizabeth											
Kim											
María Paula											
Hermelinda											
Laura											
Tina											
Angie											
Ruth											
Rebeca											

Principio de las Producciones Compartibles y Reutilizables.

Este principio asegura que la estrategia creada para este problema, pueda ser modificada y fácilmente utilizada para un rango amplio de situaciones. Se debe motivar a los participantes a ir más allá de producir las maneras de pensar que solo nos sirvan para situaciones únicas, a producir modelos reusables, modificables y que se puedan aplicar en otras situaciones.

11. ¿Cómo afecta la cuantificación que asignaste a la altura en el diagrama de pastel, a la calificación de estatura de cada una de las jugadoras?

____

____

12. Asigna una calificación a las otras características: salto vertical y corrida, escríbelo en la Tabla 2.

13. ¿Cómo afecta la cuantificación que asignaste al salto vertical y corrida en el diagrama de pastel, a la calificación de salto vertical y corrida que le asignaste a cada jugadora?

____

____

____

14. Discute con tu equipo, ¿cómo podrían asignar una calificación a la habilidad de saque?

____

15. Analiza los tipos de remates, observa en cuales tipos el equipo gana el punto, en cuáles pierde el punto y en cuáles el juego sigue.

____

____

____

____

16. Basado en lo anterior, asigna una calificación a cada jugadora en la caraterística remate y escríbelo en la Tabla 2.
17. Completa Tabla 2 con las calificaciones de las jugadoras.
18. ¿Cuál será tu estrategia para formar los 3 equipos? Discute con tus compañeros y lleguen a un acuerdo de cuál sería la mejor estrategia.

____

____

____

19. Supongan que en el campamento se inscriben 40 jugadoras, ¿tu método sirve para dividir a los asistentes en equipos competitivos?, ¿o necesitas cambiar algo?

____

20. ¿Tu método puede ser usado para cualquier número de jugadoras?

21. En el formato de la siguiente página, escribe una carta dirigida a los organizadores explicando tu método matemático, para crear los 3 equipos, y como puede ser utilizado para cualquier número de jugadoras.

Principio de Prototipo Eficaz.

Los problemas son vehículos efectivos para discutir diferentes tópicos y para hacer conexiones matemáticas por lo que, se proponen actividades que motiven al participante a formular o pensar en situaciones en las que la solución propuesta de la situación problema sirva también para resolver otras similares.

Principio de Documentación del Modelo.

Esta actividad promueve la modelación y la argumentación, ya que el producto que se obtiene no es una respuesta breve ni está representada por un número, a una situación que ha sido completamente matematizada por otros.

En cambio, el producto es una descripción que expresa la manera de pensar de los que están resolviendo el problema en cuanto a: cómo cuantificar información cualitativa relevante (por ejemplo, asignar valores numéricos a variables categóricas), y cómo agregar información para definir por medio de operaciones un “índice de calidad” para cada jugadora y para cada equipo.

El producto que se obtiene es una especie de modelación cíclica e iterativa en la cual los intentos de solución son puestos a prueba y revisados repetidamente. Los principios de autoevaluación y prototipo eficaz están presentes a lo largo de la actividad.

Fecha: ___________________

Estimados Organizadores del Campamento,

Nuestro equipo, ha determinado asignar los siguientes pesos a las características de sus jugadoras:

____

____

____

____

____

El procedimiento matemático que llevamos a cabo para crear los 3 equipos fue el siguiente:

____

____

____

____

Este proceso matemático puede ser utilizado para próximos campamentos con diferente cantidad de jugadores de la siguiente manera:

____

____

____

Atentamente,

____

Orientación didáctica 1.5

Los equipos presentan sus soluciones al grupo. Antes de empezar se debe motivar a los integrantes de los equipos que no solo escuchen a los demás, sino que;

a) Traten de entender las soluciones de los otros equipos y
b) Consideren qué tanto las otras soluciones satisfacen las necesidades del destinatario.

Motívelos a que les hagan preguntas a los otros equipos e intercale entre las presentaciones, las preguntas y las discusiones de las soluciones.

El formato de la carta es una sugerencia, los equipos pueden decidir cómo presentar su solución.

Tiempo estimado: 30 minutos.

22. Presenta tus resultados a tus compañeros

La intención de esta reflexión es que ellos hagan un balance de fortalezas y debilidades que observan en las actividades de modelación matemática. Se pretende, además, que el docente encuentre nuevas maneras de abordar algunos temas o la posibilidad de enriquecer sus estrategias para el desarrollo de los procesos de enseñanza – aprendizaje. Es sumamente importante que el profesor explore dentro del problema las potencialidades que tiene para aplicarlas a actividades que él ya realiza en clase y puede modificar o crear.

Orientación didáctica 1.6

Invite a los participantes a responder las preguntas de reflexión de su aprendizaje experiencial con la intención de evidenciar lo ocurrido.

REFLEXIONES DIDÁCTICAS

1. ¿Qué contenidos matemáticos correspondientes al programa curricular de matemáticas se aborda?

2. ¿Crees que el contexto utilizado en la actividad, está conectado con la vida real?

3. Si se aplicara la actividad en el salón de clase ¿Qué aprendizaje lograríamos con esta actividad en nuestros estudiantes?

4. ¿Qué aprendizaje lograste con esta actividad?

5. ¿Qué tipo de habilidades promueve este tipo de actividades de modelación matemática?

5.2 Actividad: La bandera de México.

1. Objetivo de la actividad didáctica.

Objetivo general:

Usar el concepto de proporcionalidad para modelar la situación problemática planteada.

Objetivos específicos de la actividad didáctica.

a) Utilizar la razón para la comparación de dos o más cantidades.
b) Tomar decisiones sobre los procedimientos a utilizar durante el proceso de resolución de la situación.
c) Verificar si la situación ha sido bien resuelta.
d) Comunicar efectivamente el procedimiento que lo llevó a la solución al problema.

2. Material utilizado:

Es recomendable que el material esté en el centro del salón, hacerles saber a los participantes que todo el material está disponible sin hacer sugerencias de usar uno es especial.

- Hojas de trabajo.
- Marcadores, pizarrón.
- Lápices, plumas.

- Calculadora.
- Hojas blancas, papel construcción.
- Sobres de papel manila para recolectar los trabajos.
- Software (hoja electrónica Excel o GeoGebra).

3. Tiempo total estimado.

Aproximadamente 120 minutos

4. El contexto de la actividad.

El Escudo, la Bandera y el Himno Nacionales son Símbolos Patrios de los Estados Unidos Mexicanos. La fabricación y el uso de esto símbolos están regulados por la "Ley de sobre el escudo, la bandera y el Himno Nacionales" es de orden público y regula sus características y su difusión, así como el uso de la Bandera.

Al respecto del uso de la Bandera Nacional el artículo 3º dice:

> *"La Bandera Nacional consiste en un rectángulo dividido en tres franjas verticales de medidas idénticas, con los colores en el siguiente orden a partir del asta: verde, blanco y rojo. En la franja blanca y al centro, tiene el Escudo Nacional, con un diámetro de tres cuartas partes del ancho de dicha franja. La proporción entre anchura y longitud de la bandera, es de cuatro a siete. Podrá llevar un lazo o corbata de los mismos colores, al pie de la moharra."*

Cualquier persona o empresa que quiera construir una bandera debe cumplir con esta ley.

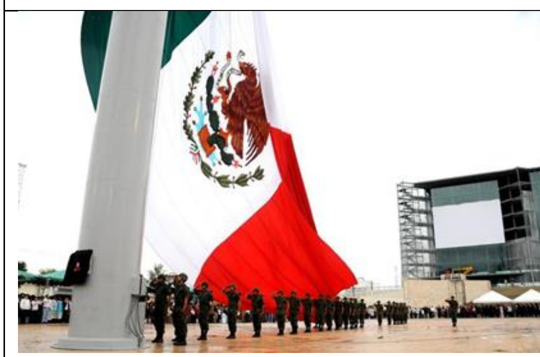
Principio de Realidad

En esta actividad didáctica se plantea una situación problema que se refiere a la vida cotidiana, la construcción de Banderas de México, bajo las regulaciones de la Ley de Escudo, Bandera e Himno Nacionales. Primeramente, se inserta un artículo publicado el periódico en línea Vanguardia.mx (García, 2014), que habla sobre el proceso de fabricación de banderas monumentales en México, posteriormente se plantea la problemática.

Orientación didáctica 1.1
En esta sección del artículo del periódico los participantes leen individualmente, el propósito es que se familiaricen con el contexto del problema, es importante que todos entiendan el tema.
Tiempo estimado: 5 minutos.

MONUMENTAL BANDERA DE LA PLAZA MAYOR, UNA DE LAS MÁS GRANDES DE MÉXICO

La bandera de 200 kilos de peso y 30 metros de largo por 20 metros de ancho, cuenta con un asta de 60 metros de alto.



Torreón, Coahuila. La monumental bandera en la Plaza Mayor, es una de las más grandes de México y la más importante en toda esta región, con una altura de 60 metros sin contar el pararrayos.

La fábrica de vestuario y equipo de la Secretaría de la Defensa Nacional elabora las banderas nacionales desde las de escritorio, oficina, las de guerra o escolta y hasta las banderas monumentales que ondean en toda la República Mexicana.

Son 72 banderas monumentales las que se custodian y tiene bajo su resguardo la SEDENA cuya altura varía desde los 50 ancho. La solicitud no fue fácil, ya que el encargado de realizar los trámites, el Capitán Ezequiel González Olague, debió proporcionar una serie de información para poder realizar la compra.

En la fábrica de vestuario, la elaboración de banderas monumentales cuenta con tres pasos básicos en la industria, el primero de ellos es el teñido, acabado y estampado de los lienzos tricolores donde se da a la tela el tono exacto de los tres colores patrios. El segundo de los pasos es la confección de los lienzos. El tercero de los procesos es el ensamble y estampado del escudo nacional, así como su revisión de calidad para que estas se mantengan a todo su esplendor durante por lo menos seis meses (García, 2014).

metros como la que está en el Zócalo de la ciudad de México. La confección de esta monumental bandera se realizó de acuerdo a la altura del asta bandera en la que sería colocada. Debido a que la Plaza Mayor cuenta con un asta de 60 metros de largo, se solicitó una bandera 30 metros de largo por 20 metros de	En la ley sobre el Escudo, la Bandera y el Himno Nacionales se especifican las características que toda bandera debe cumplir: En el artículo 3º dice que: “La Bandera Nacional consiste en un rectángulo dividido en tres franjas verticales de medidas idénticas, con los colores en el siguiente orden a partir del asta: verde, blanco y rojo. En la franja blanca y al centro, tiene el Escudo Nacional, con un diámetro de tres cuartas partes del ancho de dicha franja. La proporción entre anchura y longitud de la bandera, es de cuatro a siete”. Compete a la Secretaria de Gobernación vigilar el cumplimiento de esta ley. Las dimensiones de las banderas no se encuentran especificadas en la doctrina militar vigente, pero para efectos de estética y armonización de la bandera con la instalación, se considera que el largo debe ser igual a la mitad de la longitud del asta donde se izarán.

Orientación didáctica 1.2

Individualmente contestarán las preguntas sobre el artículo periodístico. Esto permitirá a los participantes familiarizarse con el contexto y generar algunas ideas sobre posibles estrategias de solución.

Tiempo estimado: 10 minutos.

A CONTINUACIÓN, CONTESTA INDIVIDUALMENTE EL CUESTIONARIO, BASA TUS RESPUESTAS EN LA LECTURA SI ES NECESARIO VUELVE A LEER EL ARTÍCULO

1. ¿Qué dependencia pública es la encargada de vigilar el cumplimiento de la Ley sobre el Escudo, la Bandera y el Himno Nacionales?

   ____

   ____

2. ¿ Cuáles son las características de dimensión, diseño y proporcionalidad que deben respetarse al elaborar y utilizar una Bandera Nacional y el Escudo?

3. ¿Cuál es la relación entre el ancho y la longitud de la bandera?

4. ¿ Cuál es la relación que debe guardar el Escudo Nacional con la franja blanca de la Bandera?

5. En el artículo habla de que se tomó en cuenta la altura del asta, ¿qué relación tiene con las medidas de la bandera?

6. Tomando en cuenta las características que dice la Ley, la bandera monumental de la Plaza Mayor de la que habla el artículo, ¿cumple con las dimensiones especificadas en la ley? ¿Por qué?

A continuación, se presenta el problema, cuyo principal objetivo es la aplicación del concepto de proporcionalidad en la modelación y resolución de la situación planteada.

Orientación didáctica 1.3

A continuación se presenta el problema, se recomienda la integración de equipos de 3 ó 4 personas, si ya se ha trabajado en equipos anteriormente, se recomienda utlizar esos equipos, las actividades de modelación matemática tienen mejores resultados cuando los miembros del equipo ya tienen una relación de trabajo entre ellos.

Para promover unidad puedes invitar a ponerle un nombre al equipo. En cada equipo deben asignarse roles entre ellos como: administrador del tiempo, recolector de materiales, escritor, expositor etc.

Recordarles que deben compartir ante el grupo la solución de su problema y preparar una presentación entre 3 y 5 minutos de duración.

Dependiendo de la experiencia que el grupo tenga con actividades de modelación matemática, el instructor puede presentar el problema e identificar ante el grupo:

a) El destinatario de la solución del problema.

b) El producto que se les está pidiendo que produzcan.

Una vez que queden claros los puntos anteriores puede dejar que los equipos empiecen a trabajar en la solución del problema

Tiempo estimado: 15 minutos.

REÚNETE CON TU EQUIPO, LEAN EL PROBLEMA QUE SE PLANTEA Y SIGAN LAS INSTRUCCIONES DEL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD.

PROBLEMA

Una empresa se dedicará a fabricar Banderas Nacionales, que deben cumplir con las características que marca la Ley sobre el Escudo, la Bandera y el Himno Nacional. Para ofrecer a los clientes los diferentes tamaños de Banderas de México, se te pide hacer un catálogo con diferentes tamaños, donde los clientes puedan escoger la que mejor satisfaga sus necesidades.

Principio de Construcción del Modelo.

Este problema fue diseñado originalmente a partir de una problemática real de reparar una bandera que fue dañada en una tormenta. El propósito de la construcción de la solución al problema requiere una descripción explícita, procedimiento o predicción justificada mediante una situación matemáticamente significativa, ya que el procedimiento revela los tipos de cantidades, relaciones, operaciones matemáticas y patrones que se toman en cuenta.

En el desarrollo de la actividad se debe asegurar que los participantes reconozcan la necesidad de un modelo que puede ser construido, modificado, ampliado o mejorado.

Orientación didáctica 1.4

Mientras los participantes trabajan, el rol del instructor debe ser de observador y facilitador, es de resolver dudas con preguntas que los lleven a obtener respuestas por ellos mismos, y así evitar comentarios que los lleven a una solución en particular. Además durante este tiempo, trate de entender cómo están resolviendo el problema e ir escribiendo preguntas que pueda formularles durante la presentación de sus resultados.

Tiempo estimado: 60 minutos

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD.

1. Comparen las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario anterior. Exprese algebraicamente la relación matemática encontrada y escriba a qué tamaños de bandera puede aplicarse.

____

____

____

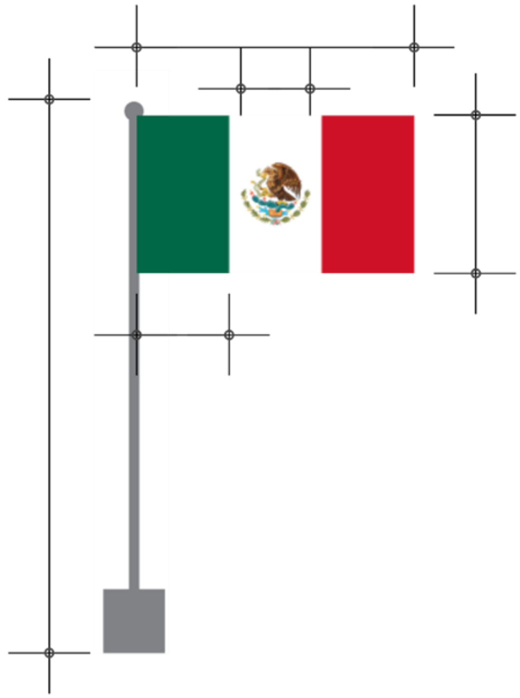
2. Llena los datos que faltan en la siguiente tabla:

Altura del asta	Largo de la bandera	Ancho de la bandera
1.80 m		
3.00 m		
8.40 m		

Principio de Auto-evaluación.

En este principio el participante debe identificar cuándo sus respuestas deben de ser mejoradas o extendidas y cuándo ya resolvió el problema. Deben tener claro el propósito y cómo necesita presentar los resultados.

3. Escoge las medidas para la siguiente bandera. En la figura coloca las medidas del ancho y del largo de la bandera. Así como la medida del diámetro del escudo. No olvides utilizar unidades de medida.



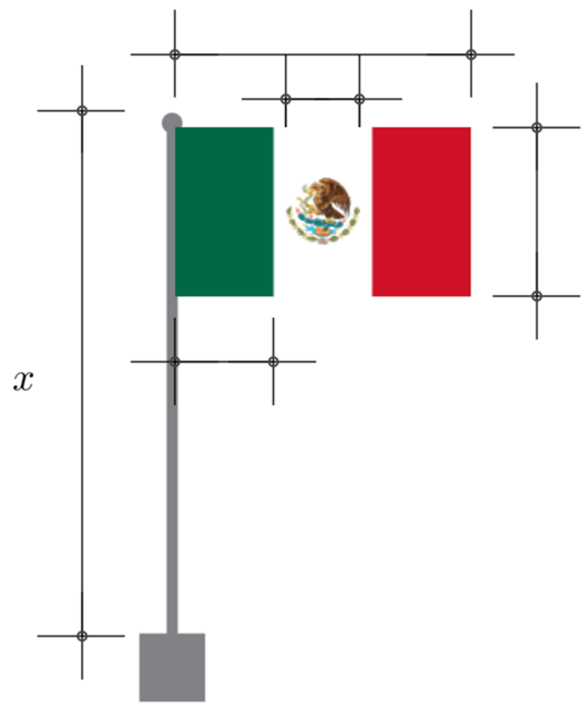
4. En la siguiente tabla anote los datos de la bandera anterior en el renglón número 1 y completa la tabla con otras medidas de banderas que pueden ser incluidas en el catálogo de la Fábrica de Banderas

CATÁLOGO DE BANDERAS					
Bandera	Dimensión del asta	Ancho	Largo	Ancho de la franja	Diámetro del escudo
1					
2					
3					
4					
5					

Principio de las Producciones Compartibles y Reutilizables.

En esta parte de la actividad se promueve que el modelo que ha sido construido sea modificado y ampliado fácilmente. A través de la construcción del catálogo y de la obtención de las expresiones algebraicas que representan las medidas de la bandera a partir de la medida del asta x.

5. Suponiendo que tenemos un asta con altura x , ¿cómo obtendríamos el largo y el ancho de la bandera, el ancho de cada franja y el diámetro del escudo?



Principio de Prototipo Eficaz.

En esta parte de la actividad se presenta una generalización del modelo construido de una manera sencilla, esto dará herramientas a los participantes para poder resolver situaciones similares.

Principio de Documentación del Modelo.

Este principio asegura la creación de una forma de documentar que revele explícitamente cuál es su interpretación sobre la situación problema. Además, ayuda a visualizar y en consecuencia refleja explicaciones, procedimientos o descripciones como parte de la solución y lo explica de una manera escrita (no simplemente con un número).

6. Escribe el procedimiento matemático que tendrían que seguir en la fábrica de banderas, para obtener las medidas de una bandera a partir de la altura del asta:

Orientación didáctica 1.5

Los equipos presentan sus soluciones al grupo. Antes de empezar se debe motivar a los integrantes de los equipos que no solo escuchen a los demás, sino que;

a) Traten de entender las soluciones de los otros equipos y
b) Consideren si pueden incorporar mejoras a las soluciones de su propio equipo.

Motívelos a que hagan preguntas a los otros equipos e intercale entre las presentaciones, las preguntas y las discusiones de las soluciones.

Tiempo estimado: 30 minutos.

7. Presenta los resultados de tu equipo a tus compañeros.

Orientación didáctica 1.6

Invite a los participantes a responder las preguntas de reflexión de su aprendizaje experiencial y compartan la reflexión con el grupo.

YA QUE HAN TERMINADO LA ACTIVIDAD, INDIVIDUALMENTE TRABAJA EN LAS PREGUNTAS DE REFLEXIÓN DIDÁCTICA.

REFLEXIONES DIDÁCTICAS

1. ¿Se puede promover el aprendizaje matemático a través de un problema de la vida diaria como el planteado en la actividad que acaba de realizar? ¿Por qué?

2. ¿Qué habilidades puedes desarrollar en los estudiantes proponiéndoles una actividad como la anterior?

3. Si propusieras en clase esta actividad, ¿consideras que tus estudiantes se sentirían interesados en la situación problema?, ¿por qué?

4. ¿Qué modificaciones le harías a la actividad para aplicarla a tus estudiantes?

5. ¿Qué conceptos matemáticos consideras que están involucrados en esta actividad?

6. Si tu consideras que en esta actividad se pudieran involucrar otro conceptos matemáticos, ¿qué tipo de preguntas agregarías?

CAPITULO 6. PUESTA EN ESCENA, ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

En este apartado se describirán las puestas en escena de las actividades didácticas para docentes, que se llevaron a cabo para la realización de este trabajo.

6.1 La actividad didáctica de Voleibol

La puesta en escena se llevó a cabo en el Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa del Estado de Sonora durante la impartición de un curso llamado "Actividades didácticas para la matemática de secundaria, apoyadas en GeoGebra" en el cual participaron 22 docentes en servicio de diversas escuelas del Estado de Sonora, todos ellos maestros de matemáticas de secundaria, con diferentes formaciones profesionales: normalistas, ingenieros, etcétera.

Los participantes se organizaron en equipos de 4 o 5 maestros. A cada maestro se le proporcionó el material necesario: las hojas de trabajo con la actividad a realizar, plumas, hojas de rotafolio y marcadores. Por lo menos en cada mesa de trabajo se contaba con una laptop, y el lugar donde se llevó a cabo el curso contaba con algunas computadoras de escritorio, con los programas de GeoGebra y Office instalados. El desarrollo de la actividad tuvo una duración de aproximadamente 2 horas.

La actividad que se puso en escena es una actividad diseñada por el equipo de Richard Lesh, con algunas adaptaciones a nuestro contexto educativo. Dicha actividad trata de un campamento de voleibol que tiene el problema de distribuir cierta cantidad de jugadoras en tres equipos que tengan el mejor equilibrio competitivo, se cuenta para ello con alguna información sobre el desempeño de las jugadoras. La actividad está dividida en tres partes: en la primera, los participantes tendrán que leer e interpretar un artículo que describe el contexto en el que se plantea la situación, en la segunda se aborda y resuelve la situación problemática y en la tercera los participantes organizarán la solución en un documento que explicarán al resto del grupo.

Aunque se cuenta con las respuestas escritas de los 22 profesores, únicamente se videograbó el trabajo de un solo equipo de cuatro integrantes y de las discusiones grupales, éste es el equipo en el que centraremos el análisis.

En líneas generales, la actividad se desarrolló de la siguiente manera:

Primeramente, se llevó a cabo la lectura del artículo entre todo el grupo, en dicha lectura nadie expresó alguna duda o comentario que denotara la existencia de dudas.

A continuación, se procedió a que los participantes contestaran una serie de preguntas sobre el artículo que han leído, para contestar la pregunta número uno. Las respuestas reflejan que los profesores comprendieron la situación sin grandes dificultades.

En la primera etapa de la actividad, la mayor dificultad en el equipo observado fue el desconocimiento de las reglas del voleibol por dos de sus integrantes, pero uno de los profesores explicó estas reglas al resto del equipo.

En la videograbación se puede observar que la información proporcionada en las hojas de trabajo no tenía el orden apropiado y eso produjo algunas confusiones en los participantes.

La segunda parte de la actividad inicia con la lectura del problema, en esta parte todo el equipo estuvo de acuerdo y no tuvo dudas sobre cuál era el problema planteado.

Durante esta parte se puede observar un incremento en la motivación de los participantes y una discusión más intensa sobre las interpretaciones al problema y sobre las diferentes propuestas de solución planteadas dentro de los equipos.

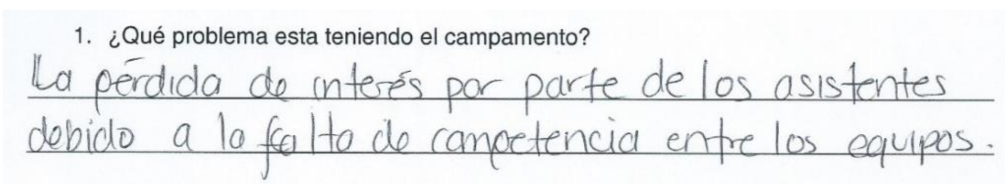
Finalmente, en la tercera parte de la actividad el equipo presentó frente al grupo la propuesta de solución al problema, en general se observó un poco de inseguridad al momento de exponer, a continuación, se detallará lo observado en la puesta en escena de la actividad de voleibol.

6.1.1 Reporte sobre la resolución de la actividad Voleibol.

En el siguiente reporte de la resolución de la actividad Voleibol no se utiliza el marco teórico para realizarlo.

En la primera parte de la actividad didáctica, no se mostraron dificultades por parte de los docentes, entendieron el contexto que se plantea en la actividad. A continuación, se hace una descripción de las respuestas a las preguntas del control de lectura.

Con la pregunta número uno se pretende saber si los participantes tienen claro el problema que se está planteando, y el contexto en el que está enmarcado, en la Figura 3 se muestra una de las respuestas:

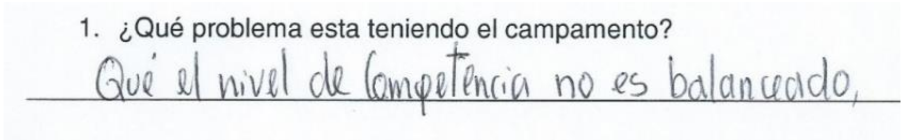

1. ¿Qué problema esta teniendo el campamento?

La pérdida de interés por parte de los asistentes debido a la falta de competencia entre los equipos.

Figura 3

La respuesta de la Figura 3, aunque corta, muestra que el participante ha captado cuál es el problema principal y tiene claridad sobre el contexto en el que se está planteando.

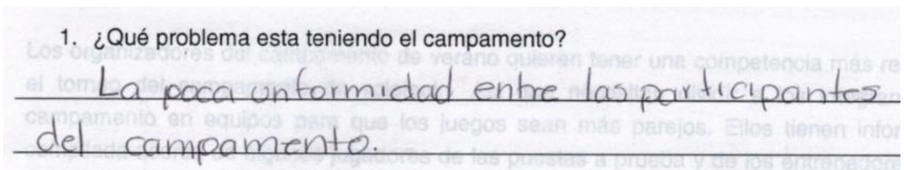
En las repuestas de los participantes se puede observar que entienden el contexto en el que está planteado el problema y entienden el problema en sí, aunque muestran algunas imprecisiones al escribir, como se muestra en la Figura 4, que utilizó el término “balanceado” el cual resulta confuso.


1. ¿Qué problema esta teniendo el campamento?

Qué el nivel de competencia no es balanceado,

Figura 4

En cambio, otras respuestas no permiten saber si la situación les ha resultado clara, por ejemplo, en la respuesta de la Figura 5, el participante parece no haber captado las características de la situación y si las captó, no ha podido expresarlas con precisión.


1. ¿Qué problema esta teniendo el campamento?

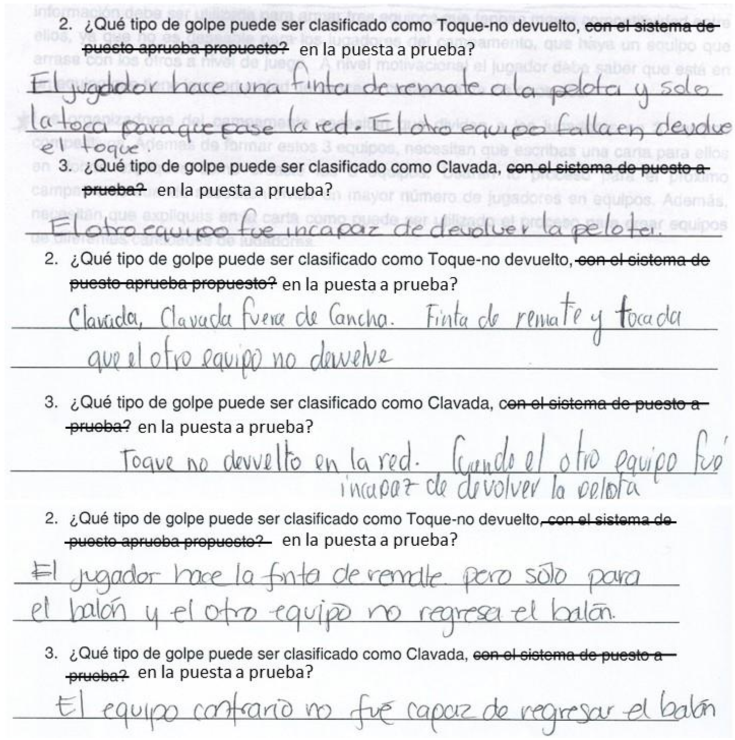
La poca uniformidad entre los participantes del campamento.

Figura 5

Aunque las respuestas por escrito son imprecisas, el trabajo colaborativo permitió avanzar sin que esto fuera una dificultad, ya que se mostró el intercambio de ideas durante la discusión sobre la situación problema, esta evidencia se extrajo de la videograbación, en la que se mostró cómo los participantes discutieron sobre la interpretación del contexto del problema, propuestas de solución, etc. a medida que la actividad se desarrolló.

Las preguntas dos y tres de la actividad, tienen como finalidad verificar si el profesor ha logrado familiarizarse con el lenguaje técnico del voleibol, en esta pregunta se observó que los profesores que no tenían conocimiento de este deporte, se vieron en la necesidad de preguntar y recibir asesoramiento de los integrantes que conocían el deporte, en las respuestas se observó que pudieron reconocer y caracterizar los términos técnicos en voleibol.

En la Figura 6, se muestran las respuestas de los profesores que recibieron asesoría:



2. ¿Qué tipo de golpe puede ser clasificado como Toque-no devuelto, ~~con el sistema de puesto aprueba propuesto?~~ en la puesta a prueba?

El jugador hace una finta de remate a la pelota y sólo la toca para que pase la red. El otro equipo falla en devolver el toque.

3. ¿Qué tipo de golpe puede ser clasificado como Clavada, ~~con el sistema de puesto a prueba?~~ en la puesta a prueba?

El otro equipo fue incapaz de devolver la pelota.

2. ¿Qué tipo de golpe puede ser clasificado como Toque-no devuelto, ~~con el sistema de puesto aprueba propuesto?~~ en la puesta a prueba?

Clavada, Clavada fuera de Cancha. Finta de remate y tocada que el otro equipo no devuelve

3. ¿Qué tipo de golpe puede ser clasificado como Clavada, ~~con el sistema de puesto a prueba?~~ en la puesta a prueba?

Toque no devuelto en la red. Cuando el otro equipo fue incapaz de devolver la pelota

2. ¿Qué tipo de golpe puede ser clasificado como Toque-no devuelto, ~~con el sistema de puesto aprueba propuesto?~~ en la puesta a prueba?

El jugador hace la finta de remate pero sólo para el balón y el otro equipo no regresa el balón.

3. ¿Qué tipo de golpe puede ser clasificado como Clavada, ~~con el sistema de puesto a prueba?~~ en la puesta a prueba?

El equipo contrario no fue capaz de regresar el balón

Figura 6

En la Figura 6 se muestra una corrección que se hizo a la actividad debido a que no se entendió la pregunta, los participantes no pudieron asociar el término sistema con la tabla proporcionada, así que se procedió verbalmente a darles la instrucción de corregirlas. En las respuestas se puede observar que contestaron de una manera favorable. En estas respuestas se deduce que el docente entiende los términos empleados en la actividad.

La pregunta 4 tiene como finalidad verificar si los profesores pueden leer e interpretar la información de la tabla que se proporciona en el problema; en ella se pregunta cuál es la jugadora más alta de la lista y los cuatro participantes contestan Gertrudis, ya que es la de mayor altura. Se observó que las respuestas coinciden con la información dada en la tabla, se puede suponer que los participantes fueron capaces de interpretar apropiadamente esta información.

A continuación, se presentan las respuestas a la pregunta 5, la primera pregunta es qué jugadora brinca más alto, posteriormente se pregunta si es la misma persona que puede alcanzar el punto más alto, al observar el video los participantes externan al instructor que hacía falta información en la tabla que se proporciona, por lo que el instructor les dice que eso respondan. En la Figura 7 se muestra la respuesta donde no pueden relacionar la información que el problema brinda con lo que se les está pidiendo.

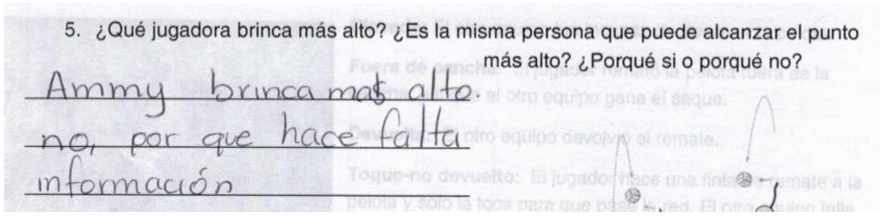


Figura 7

En otra respuesta a la pregunta 5 (ver Figura 8) se declara también la insuficiencia de la información para determinar si coinciden la persona más alta y la que brinca más, aunque en ninguna de las dos respuestas se precisa a qué se están refiriendo.

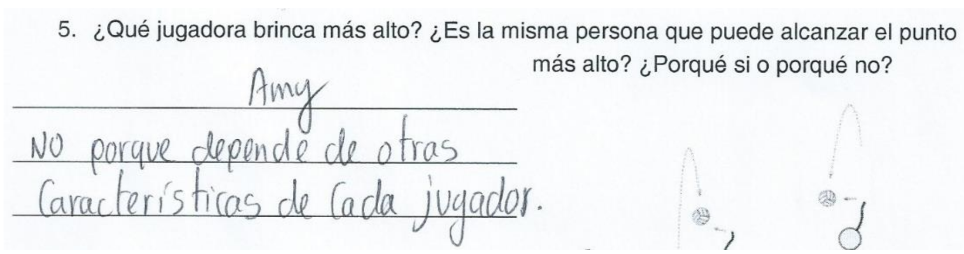


Figura 8

Solamente una de las respuestas (ver Figura 9) aclara cuál es la información faltante a la que se refieren.

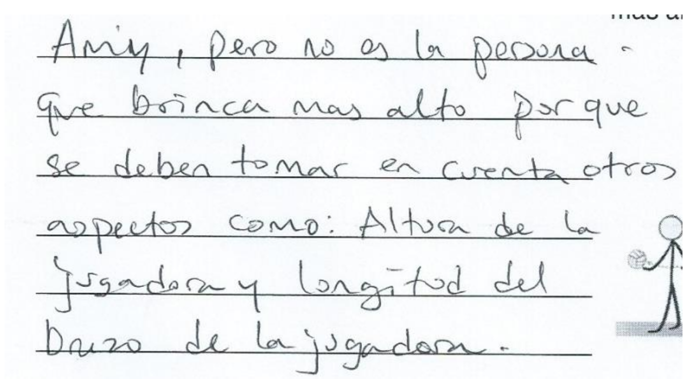


Figura 9

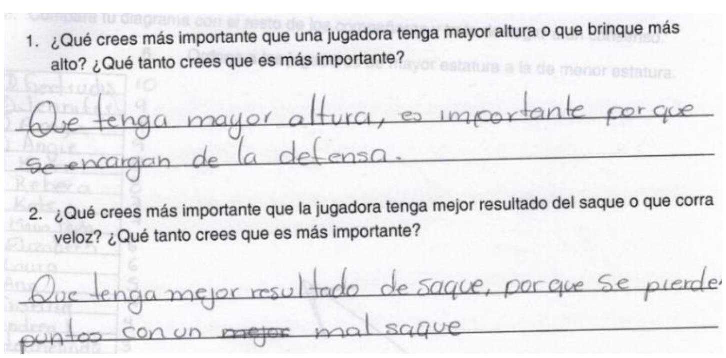
Podemos deducir que los profesores de este equipo no tienen problemas para obtener información directa de la actividad, en cambio, cuando esta información no está explícita o se deben hacer ciertas conjeturas para responder a ciertas situaciones, los participantes no muestran iniciativa para dar una salida a la supuesta falta de información, ni verifican el impacto que podría tener la información sobre la variable “longitud del brazo” en el desarrollo posterior.

En la segunda parte de la actividad los participantes realizan la lectura del problema, se observó que los participantes en lugar de seguir el desarrollo de la actividad empiezan a tratar de darle solución al problema que es formar los 3 equipos competitivos, utilizando la información que tienen hasta el momento.

Al seguir con el desarrollo de la actividad inicia una discusión entre los compañeros del equipo acerca de qué características son las más importantes en el voleibol. Los comentarios que hacen entre ellos cuando empiezan a discutir cómo resolver la actividad es que se les hace “muy volátil”, posiblemente este comentario se deba a la poca familiaridad con actividades matemáticas con este tipo de características.

En este momento se hizo evidente una mayor comunicación entre los integrantes del equipo, a partir de este momento se comunican cualquier decisión acerca de las respuestas que dan al desarrollo de la actividad.

Llegaron a un consenso de que la característica más importante es que la jugadora tenga mayor altura, en la Figura 10 puede verse también el argumento ofrecido, aunque no intentan cuantificar la diferencia a pesar de la solicitud expresa en la pregunta.


1. ¿Qué crees más importante que una jugadora tenga mayor altura o que brinque más alto? ¿Qué tanto crees que es más importante?

Que tenga mayor altura, es importante porque se encargan de la defensa.

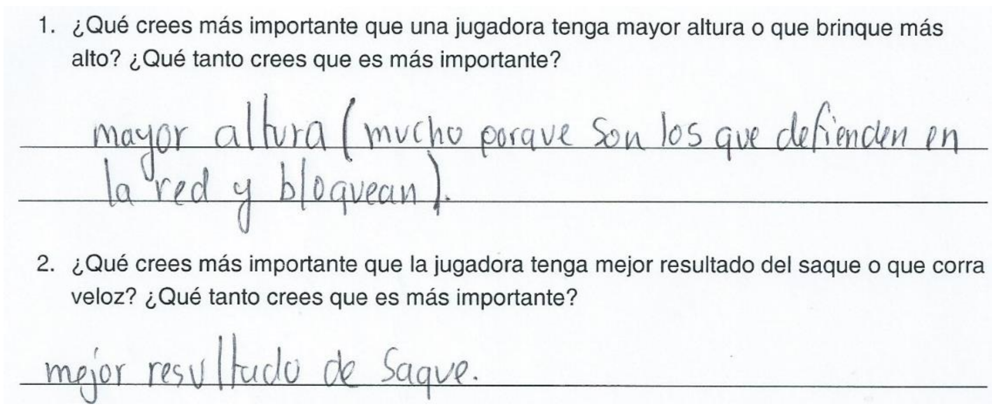
2. ¿Qué crees más importante que la jugadora tenga mejor resultado del saque o que corra veloz? ¿Qué tanto crees que es más importante?

Que tenga mejor resultado de saque, porque se pierde puntos con un ~~mejor~~ mal saque

Figura 10

En la pregunta 2 del desarrollo de la actividad los cuatro participantes coinciden en señalar que el saque es más importante para una jugadora, en comparación con que la jugadora corra más veloz. Como puede verse en la Figura 10, tampoco en este caso hay una cuantificación de la diferencia.

La ausencia de cuantificación en ambas preguntas se observa en los cuatro participantes del equipo. En la Figura 11 se muestra la respuesta de uno de los participantes donde al preguntársele qué tanto cree que es más importante contesta "mucho" y argumenta por qué es más importante.



1. ¿Qué crees más importante que una jugadora tenga mayor altura o que brinque más alto? ¿Qué tanto crees que es más importante?

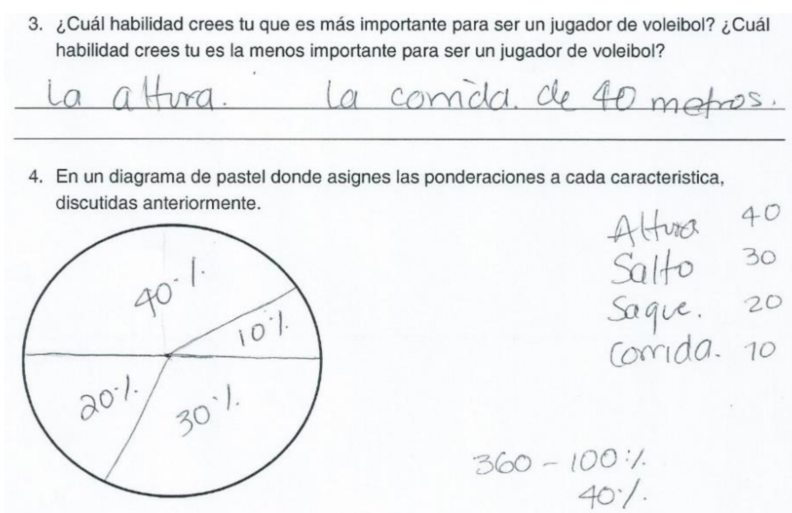
mayor altura (mucho porque son los que defienden en la red y bloquean).

2. ¿Qué crees más importante que la jugadora tenga mejor resultado del saque o que corra veloz? ¿Qué tanto crees que es más importante?

mejor resultado de saque.

Figura 11

Con respecto a las preguntas 3 y 4 referentes a la cuantificación de las habilidades de las jugadoras, se analizan las respuestas dadas por los participantes, en las Figuras 12 y 13, se muestran las dos respuestas de los integrantes del equipo, todos coinciden en solo ponderar 4 de las 5 habilidades que se muestran.



3. ¿Cuál habilidad crees tu que es más importante para ser un jugador de voleibol? ¿Cuál habilidad crees tu es la menos importante para ser un jugador de voleibol?

La altura. La corrida de 40 metros.

4. En un diagrama de pastel donde asignes las ponderaciones a cada caracteristica, discutidas anteriormente.

Figura 12

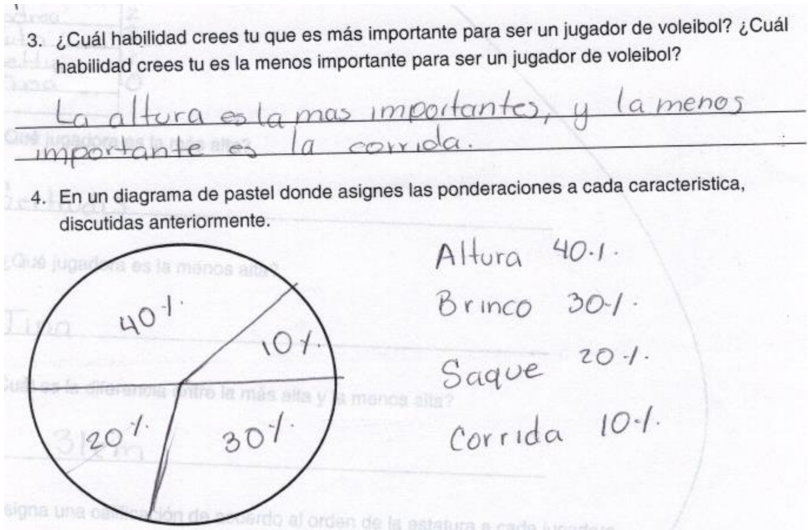


Figura 13

En la Figura 14 se muestra cómo este participante tacha el diagrama de pastel en el cual solo se consideran 4 habilidades y escribe, a manera de corrección, las 5 habilidades con las ponderaciones asignadas.

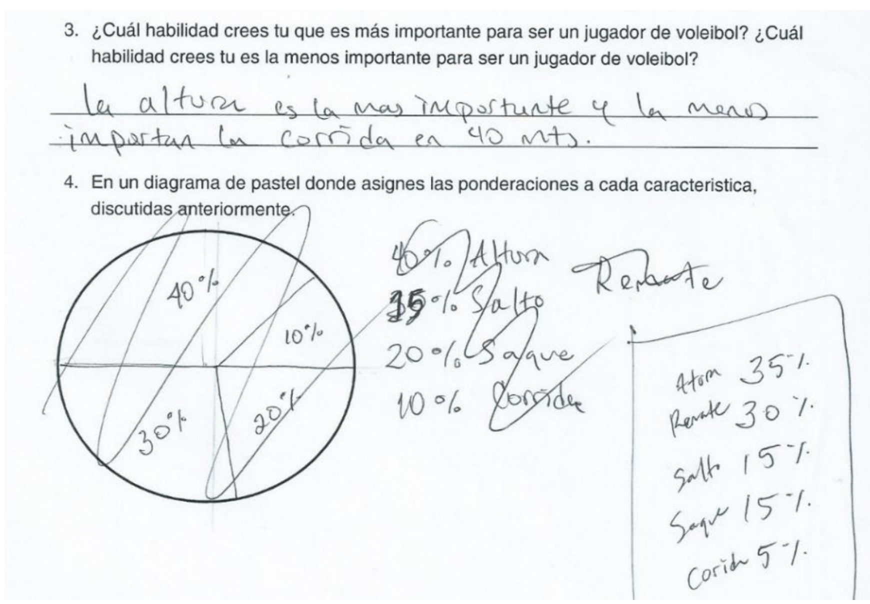


Figura 14

En esta parte de la actividad los profesores muestran claridad para declarar la importancia de cada una de las habilidades y cuantificarlas con una ponderación en porcentaje por medio del diagrama de pastel.

En la pregunta número 5 de la actividad se pide que comparen el diagrama de pastel con sus compañeros para llegar a un consenso, en el video se observa que elaboran el diagrama de pastel en equipo.

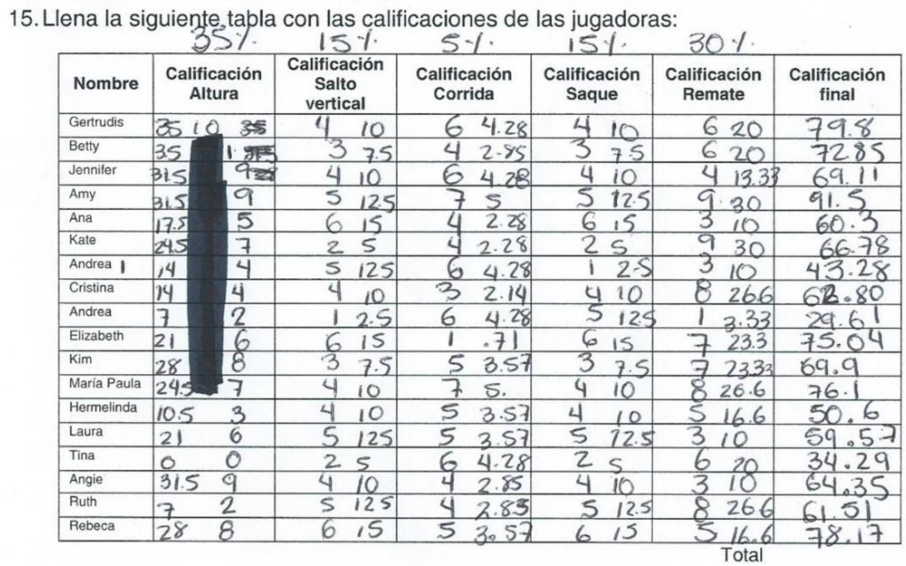
En los números del 6 al 9 de la actividad, los participantes ordenan en la tabla a los jugadores de mayor a menor e indican cuál jugadora es la más alta y cuál es la menos alta y la diferencia de estatura entre ellas, los cuatro participantes no muestran dificultad para responder las preguntas. En el video se observa cómo el participante utiliza su laptop para abrir una hoja de Excel donde insertó los nombres de las jugadoras con sus respectivas alturas y utilizó la función ordenar de mayor a menor, por lo que el resto del equipo procedió a responder conforme la tabla de Excel.

Cuando a los docentes se les pide, en el número 10 de la actividad que asignen calificación a la estatura de cada jugadora, se observó que el participante asignó calificaciones de 0 a 10 y estableció intervalos para cada calificación, estos intervalos van de 0.02 empezando desde 1.53 como la estatura menor hasta 1.85 como la estatura mayor. En la figura 15 se muestra como quedaron asignadas las calificaciones a cada jugadora de acuerdo al procedimiento construido por los participantes.

1 Gertrudis	10
2 Jennifer	9
3 Amy	9
4 Angie	9
5 Kim	8
6 Rebeca	8
7 Kate	7
8 Maria Paula.	7
9 Elizabeth	6
10 Laura	6
11 Ana	5
12 Cristina	4
13 Andrea I	4
14 Hermelinda	3
15 Andrea	2
16 Ruth	2
17 Betty	1
18 Tina	0

Figura 15

En la Figura 16 se muestra el trabajo realizado por el docente, el cual asigna calificaciones de la siguiente manera: para las habilidades de altura, salto y corrida asigna intervalos para cada calificación de 0 al 10, además este docente agrega las ponderaciones y realiza la suma total de las ponderaciones. A la habilidad de saque le asigna como calificación el número de saques exitosos. Y para la habilidad de remate asigna un valor a cada tipo de resultado 0, 1 o 2. Al sumar el valor de cada uno de los resultados de los remates esa es la calificación asignada.



15. Llena la siguiente tabla con las calificaciones de las jugadoras:

	35%	15%	5%	15%	30%	
Nombre	**Calificación Altura**	**Calificación Salto vertical**	**Calificación Corrida**	**Calificación Saque**	**Calificación Remate**	**Calificación final**
Gertrudis	35 10 ~~35~~	4 10	6 4.28	4 10	6 20	79.8
Betty	35 [redacted] 1 ~~35~~	3 7.5	4 2.85	3 7.5	6 20	72.85
Jennifer	31.5 [redacted] 9	4 10	6 4.28	4 10	4 13.33	69.11
Amy	31.5 [redacted] 9	5 12.5	7 5	5 12.5	9 30	91.5
Ana	17.5 [redacted] 5	6 15	4 2.28	6 15	3 10	60.3
Kate	24.5 [redacted] 7	2 5	4 2.28	2 5	9 30	66.78
Andrea 1	14 [redacted] 4	5 12.5	6 4.28	1 2.5	3 10	43.28
Cristina	14 [redacted] 4	4 10	3 2.14	4 10	8 26.6	62.80
Andrea	7 [redacted] 2	1 2.5	6 4.28	5 12.5	1 3.33	29.61
Elizabeth	21 [redacted] 6	6 15	1 .71	6 15	7 23.3	75.04
Kim	28 [redacted] 8	3 7.5	5 3.57	3 7.5	7 23.33	69.9
María Paula	24.5 [redacted] 7	4 10	7 5.	4 10	8 26.6	76.1
Hermelinda	10.5 3	4 10	5 3.57	4 10	5 16.6	50.6
Laura	21 6	5 12.5	5 3.57	5 12.5	3 10	59.57
Tina	0 0	2 5	6 4.28	2 5	6 20	34.29
Angie	31.5 9	4 10	4 2.85	4 10	3 10	64.35
Ruth	7 2	5 12.5	4 2.85	5 12.5	8 26.6	61.51
Rebeca	28 8	6 15	5 3.57	6 15	5 16.6	78.17
					Total	

Figura 16

En la Figura 16 pueden verse los porcentajes asignados a cada atributo, mientras que, en la Figura 17 se muestra cómo asignaron el peso a cada habilidad según el porcentaje.

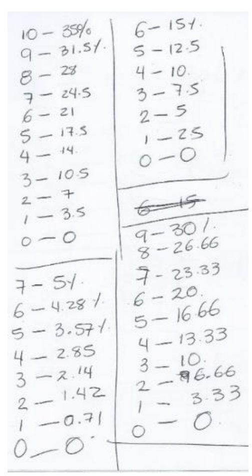
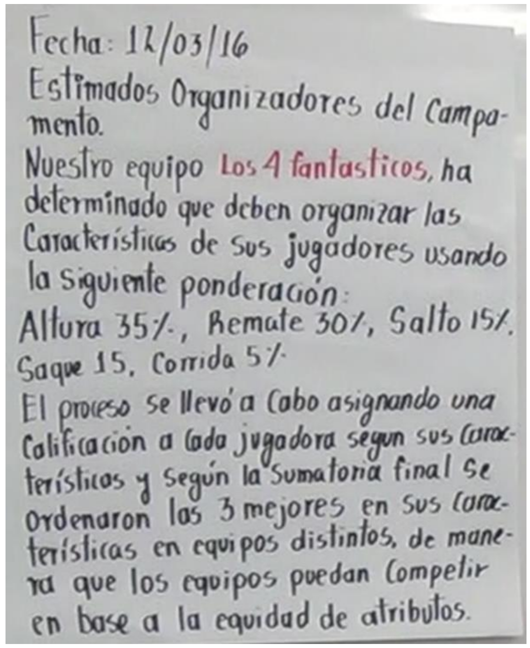


Figura 17

La Figura 18 muestra la carta donde el equipo expone la manera de formar los tres equipos para el campamento, en el video se muestra al equipo exponiendo su propuesta.



Fecha: 12/03/16

Estimados Organizadores del Campamento.

Nuestro equipo Los 4 fantasticos, ha determinado que deben organizar las Características de sus jugadores usando la siguiente ponderación:

Altura 35%, Remate 30%, Salto 15%, Saque 15, Corrida 5%

El proceso se llevó a cabo asignando una Calificación a cada jugadora segun sus características y según la sumatoria final se ordenaron las 3 mejores en sus características en equipos distintos, de manera que los equipos puedan competir en base a la equidad de atributos.

Figura 18

El integrante del equipo explica en el video, que no han terminado de hacer las operaciones necesarias para obtener los números con los cuales formarán los equipos, hace hincapié en que las ponderaciones las asignaron mediante el conocimiento que él mismo tiene sobre el voleibol. Aunque ellos declaran no haber terminado la actividad uno de los integrantes escribe en sus hojas de trabajo, en la respuesta a la pregunta 16, que la estrategia para formar los 3 equipos seria: “A partir del resultado de la evaluación de cada integrante; elegiría por bloques de 3 integrantes con las mejores calificaciones (y así) sucesivamente a partir de la lista”.

La respuesta a la pregunta 17 se refiere al funcionamiento del método para dividir a 40 jugadoras en un campamento contesta: “sí, sólo varía la cantidad de integrantes”. Esta respuesta puede mostrar bien, una deficiencia para explicar sus procedimientos matemáticos o falta de cuidado al contestar las preguntas.

Previo a la carta la respuesta a la pregunta 18 donde los participantes deben responder si su método puede ser usado para cualquier número de jugadoras contesta: “sí sólo moviendo el rango en las calificaciones de las habilidades de las integrantes”.

6.1.2 El desarrollo de la actividad vista como un Espacio de Trabajo Matemático

En este apartado se analizará esta actividad, con el modelo denominado Espacios de Trabajo Matemático, para describir la actividad matemática de los docentes al resolver la situación problemática.

El modelo de los ETM contempla dos planos, el primer plano es el epistemológico y define lo que se espera de la actividad matemática de acuerdo al dominio matemático del que se trate, en este caso sobre la teoría de la proporcionalidad. En cuanto al desarrollo de la actividad existen tres componentes que interactúan y son característicos de esta actividad matemática. En el desarrollo de la actividad didáctica tenemos como *representamen*: representaciones tabulares, gráficas de pastel y representaciones numéricas; se tienen dos tipos de *artefactos*, los artefactos tecnológicos como la hoja de cálculo y la calculadora, y los artefactos matemáticos como la regla de tres, y por último el *referencial* basado en la teoría de la proporcionalidad y la teoría de los números reales.

Debido que las matemáticas son una actividad humana, trataremos de comprender el sentido que tiene para los participantes el desarrollo de la actividad y la información que se les proporciona, así como el uso de los artefactos durante los procesos de resolución de los problemas que se les presentan. En el plano cognitivo tenemos tres procesos: el proceso de *visualización* que se vale de la relación entre las diferentes representaciones, éstas se pondrán en juego durante el proceso de la resolución, como de la actividad de modelación matemática que están llevando a cabo, los participantes utilizan su intuición al momento de ir distinguiendo la información proporcionada en las hojas de trabajo. El proceso de *construcción* donde el participante a través de la visualización y del uso de los artefactos va construyendo su modelo para la solución del problema. Y el proceso *discursivo*, que en esta actividad se limita a un proceso de argumentación, debido a que la actividad no exige demostraciones matemáticas.

En el diagrama de los ETM los dos planos epistemológico y cognitivo están conectados a través de los elementos de cada plano, la articulación entre estos dos planos está dada por las génesis: la génesis semiótica es el proceso en el que se ponen en juego las diferentes representaciones del representamens con el propósito de visualizar e inversamente. La génesis instrumental que transforma los artefactos en herramientas para el proceso de construcción del modelo para resolver el problema. Y la génesis discursiva que le da sentido al razonamiento matemático utilizado en la modelación.

Además de los planos horizontales, se encuentran los planos verticales de *descubrimiento*, *razonamiento* y *comunicación* en el esquema de la Figura 2, que se muestra en el capítulo 4 en la página 43 del presente trabajo, éstos coinciden con las conexiones de los planos horizontales, constituyendo las caras verticales del prisma, el objetivo de este análisis es entender la naturaleza y la dinámica de la actividad matemática de los participantes.

El término fibración lo explica Vivier (2014) para etiquetar movimientos y transiciones entre los diferentes elementos del modelo. Vivier habla de dos tipos de fibraciones: internas (entre planos, entre componentes, entre registros semióticos de representación) y externas entre ETM asociados con diferentes dominios de matemáticas. Estas fibraciones visibilizan estas interdependencias y favorecen la descripción del edificio y la circulación del trabajo matemático en el modelo (Montoya Delgadillo, Vivier 2014).

6.1.3 Análisis de la actividad didáctica a través del punto de vista de los ETM

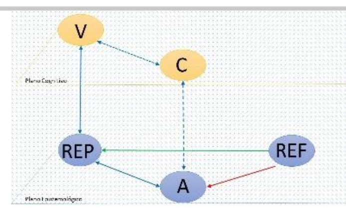
De acuerdo con este marco teórico descrito en la sección anterior, podríamos considerar que la actividad didáctica es "completa" si la modelación matemática construida por los participantes es un recorrido por las tres aristas: semiótica, instrumental y discursiva. Es importante hacer notar que el contenido matemático que interesa es el de proporcionalidad, aun cuando los docentes no lo declaren formalmente.

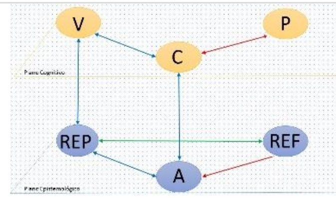
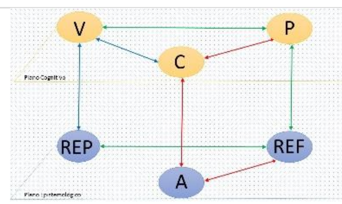
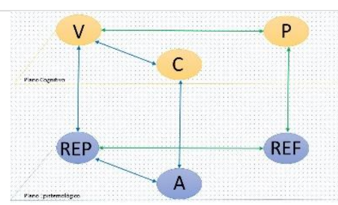
Para fines del análisis y poder reconocer la activación de alguna de las génesis se dividió la actividad en fases, en la primera fase que incluye las cinco primeras preguntas de los docentes, deben asignar ponderaciones según las prioridades que ellos establecen.

En la fase 2 (preguntas 6 a la 15) se asignan calificaciones según la ponderación y los datos proporcionados en la tabla.

En la fase 3 (pregunta 16 a la 20) los participantes deben proponer una estrategia para formar los 3 equipos. Finalmente, en la fase 4 deben elaborar y presentar un documento dirigido a los organizadores del campamento, donde expliquen cómo deben distribuirse las jugadoras en los tres equipos.

A continuación, se presenta una tabla donde se muestra el análisis de las diferentes fases.

FASE	Trabajo matemático	Diagrama ETM
Fase 1. Asignación de ponderaciones según las habilidades que creen más importantes.	El trabajo matemático se ubica principalmente en el plano semiótico-instrumental cuando está centrado en la cuantificación de las habilidades de las jugadoras. Las aristas se orientan en dos direcciones: de izquierda a derecha, lo que favorece la construcción de objetos y ciertas condiciones impuestas por los signos matemáticos y en retroceso que facilita la visualización y los datos de operación. La argumentación es débil por que no está enfatizada en la actividad.	 *Figura 19*

Fase 2. Asignación de calificaciones dependiendo del peso de cada habilidad.	Esta fase se lleva a cabo en el plano semiótico instrumental, la idea que tienen de proporcionalidad y los artefactos son utilizados para la modelación. La génesis discursiva es utilizada para justificar la técnica de construcción del modelo, permitiendo el uso de artefactos. La arista de la génesis semiótica se activa en los 2 sentidos, al igual que la génesis instrumental.	 *Figura 20*
Fase 3. Estrategia para la formación de equipos.	Esta fase se lleva a cabo en el plano discursivo-instrumental, argumentando la eficacia de su modelo que utilizaron para formar los equipos, la explicación se da a través de las tablas con datos que ellos construyeron.	 *Figura 21*
Fase 4. Presentación de los equipos de la carta como producto final.	Esta fase se lleva a cabo en el plano semiótico-discursivo. La argumentación de la construcción del modelo está basada en las interacciones de las representaciones. Además de explicar cómo cambiaron las representaciones que los llevaron a la modelación y a la solución al problema.	 *Figura 22*

Fase 1.

En esta fase la interacción entre registros enriquece la visualización, estos registros se usan para interpretar el problema, donde la visualización desempeña un papel heurístico. Esto se lleva a cabo cuando ordenan las estaturas de mayor a menor y se les pide que asignen calificaciones a esta habilidad. En esta fase a cada estatura le asignan un número que, tratando de preservar la proporcionalidad, el cambio de una representación tabular a otra se da de manera natural en la actividad la cual se muestra en las Figuras 23a y 23b.

Nombre	Altura del jugador metros
Gertrudis	1.85
Betty	1.57
Jennifer	1.77
Amy	1.77
Ana	1.67
Kate	1.72
Andrea	1.60
Cristina	1.65
Lorena	1.65
Elizabeth	1.70
Kim	1.75
María Paula	1.72
Hermelinda	1.62
Laura	1.70
Tina	1.54
Angie	1.77
Ruth	1.60
Rebeca	1.75

Figura 23a

1 Gertrudis	10
2 Jennifer	9
3 Amy	9
4 Angie	9
5 Kim	8
6 Rebeca	8
7 Kate	7
8 Maria Paula	7
9 Elizabeth	6
10 Laura	6
11 Ana	5
12 Cristina	4
13 Andrea	4
14 Hermelinda	3
15 Andrea	2
16 Ruth	2
17 Betty	1
18 Tina	0

Figura 23b

Las fibraciones internas entre los componentes del modelo ETM en esta fase de la actividad (ver Figura 19) se dan de la siguiente manera: $REP \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow REF \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow C$. Estas fibraciones privilegian a la identificación y la exploración de los objetos y las conversiones entre los registros de representación.

Al asignar las calificaciones (véase Figura 23b) los participantes incluyeron al cero como calificación lo que les ha ocasionado problemas al asignar las ponderaciones posteriormente.

FASE 2.

En esta Fase, el uso que le dan a la noción que tienen de proporcionalidad, así como el uso de algunos instrumentos para la modelación matemática y los cambios de registro dan como resultado la construcción de una parte importante del modelo para la solución del problema. A las representaciones tabulares obtenidas en la Fase 1 (Figura 23b) les dieron un tratamiento, en este caso a cada una de las calificaciones se les asignó proporcionalmente un porcentaje según el peso asignado a cada habilidad, se genera la construcción de la siguiente representación tabular a partir del porcentaje que le asignaron que se muestran en las Figuras 24a y 24b.

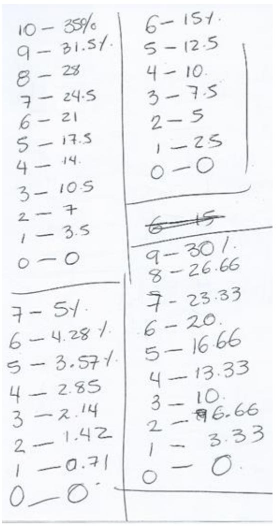
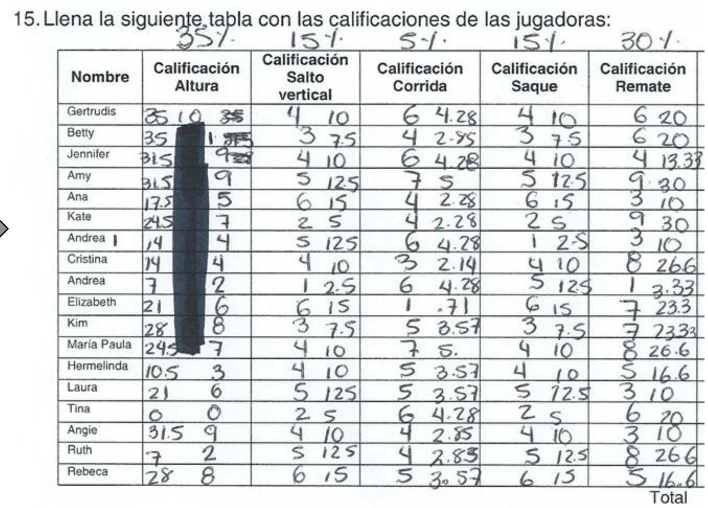


Figura 24a



15. Llena la siguiente tabla con las calificaciones de las jugadoras:

	35%	15%	5%	15%	30%
Nombre	Calificación Altura	Calificación Salto vertical	Calificación Corrida	Calificación Saque	Calificación Remate
Gertrudis	35 10 ~~35~~	4 10	6 4.28	4 10	6 20
Betty	35 [redacted] 1 ~~35~~	3 7.5	4 2.85	3 7.5	6 20
Jennifer	31.5 [redacted] 9	4 10	6 4.28	4 10	4 13.33
Amy	31.5 [redacted] 9	5 12.5	7 5	5 12.5	9 30
Ana	17.5 [redacted] 5	6 15	4 2.28	6 15	3 10
Kate	24.5 [redacted] 7	2 5	4 2.28	2 5	9 30
Andrea 1	14 [redacted] 4	5 12.5	6 4.28	1 2.5	3 10
Cristina	14 [redacted] 4	4 10	3 2.14	4 10	8 26.6
Andrea	7 [redacted] 2	1 2.5	6 4.28	5 12.5	1 3.33
Elizabeth	21 [redacted] 6	6 15	1 .71	6 15	7 23.3
Kim	28 [redacted] 8	3 7.5	5 3.57	3 7.5	7 23.33
María Paula	24.5 [redacted] 7	4 10	7 5.	4 10	8 26.6
Hermelinda	10.5 3	4 10	5 3.57	4 10	5 16.6
Laura	21 6	5 12.5	5 3.57	5 12.5	3 10
Tina	0 0	2 5	6 4.28	2 5	6 20
Angie	31.5 9	4 10	4 2.85	4 10	3 10
Ruth	7 2	5 12.5	4 2.85	5 12.5	8 26.6
Rebeca	28 8	6 15	5 3.57	6 15	5 16.6

Total

Figura 24b

En esta fase las fibraciones internas entre los elementos del ETM (ver Figura 20) se presentan de la siguiente manera: $C \rightarrow V \rightarrow REP \rightarrow A \rightarrow REF \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow P$. En esta fase las fibraciones favorecen tanto a la construcción del modelo como a la argumentación de la eficacia del modelo, las calificaciones asignadas que fueron escritas en el registro tabular en la Fase 1 son utilizados como representamens en esta fase para visualizar y hacer el cambio de representación a un porcentaje. En esta fase se construye la tabla con las representaciones con porcentajes para cada habilidad.

FASE 3

En esta fase suman todos los porcentajes asignados a cada jugadora obteniendo la calificación final. Esta actividad no exige de una prueba matemática, por lo que la génesis discursiva es pobre, esta génesis se desarrolla en esta actividad durante la formulación de las argumentaciones que se presentan al explicar la eficacia de su modelo matemático, siendo una característica muy importante en esta actividad. Aunque esta fase se manifiesta en la tabla que se muestra a continuación, se corrobora el procedimiento cuando un integrante del equipo explica el trabajo matemático realizado.

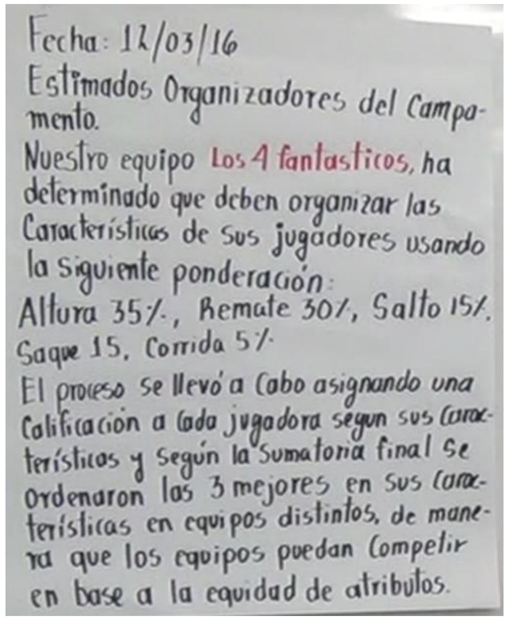
Las fibraciones internas de los elementos del ETM en la Fase 3 (Figura 21) se presentan de la siguiente manera: $REP \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow REF \rightarrow A$. En esta fase las fibraciones internas en el plano cognitivo se repiten hasta tener el modelo matemático que resuelva la situación problema. En esta fase se construye una representación tabular en la cual se obtienen las calificaciones finales para cada jugadora, dicha tabla se muestra en la Figura 25:

Nombre	Calificación final
Gertrudis	79.8
Betty	7285
Jennifer	69.11
Amy	91.5
Ana	60.3
Kate	66.78
Andrea I	43.28
Cristina	62.80
Andrea	29.61
Elizabeth	75.04
Kim	69.9
María Paula	76.1
Hermelinda	50.6
Laura	59.57
Tina	34.29
Angie	64.35
Ruth	61.51
Rebeca	78.17

Figura 25

FASE 4

En esta fase se favorece la argumentación al verbalizar su modelo matemático para la resolución de la situación problema y defender la eficacia de su modelo, se cuenta con la presentación del equipo en video de la explicación del modelo y a continuación se muestra la hoja de rotafolio en la Figura 26, con la cual se hizo dicha presentación:



Fecha: 12/03/16
Estimados Organizadores del Campamento.
Nuestro equipo Los 4 fantasticos, ha determinado que deben organizar las Características de sus jugadores usando la siguiente ponderación:
Altura 35%, Remate 30%, Salto 15%, Saque 15, Corrida 5%
El proceso se llevó a cabo asignando una Calificación a cada jugadora según sus características y según la sumatoria final se ordenaron las 3 mejores en sus características en equipos distintos, de manera que los equipos puedan competir en base a la equidad de atributos.

Figura 26

Las fibraciones internas de los elementos del modelo del ETM (Figura 22) se presentan de la siguiente manera: $V \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow REP \rightarrow REF \rightarrow P$. En esta fase explican y justifican el modelo matemático obtenido, validan la utilización de sus artefactos en este caso el método que utilizaron para la asignación de calificaciones y las ponderaciones utilizadas.

En esta fase se centra la atención al lado semiótico ya que no hay demostración o prueba, por lo que existe un razonamiento perceptivo.

6.1.4 Conclusiones

Al ir analizando las Fases nos dimos cuenta que hubo una progresión en las fibraciones a través los elementos. En la Fase 1 se identificaron fibraciones entre los elementos del plano Semiótico-Instrumental (descubrimiento), mientras en la Fase 2 pudieron observarse al igual que en la Fase 1 fibraciones entre los elementos del plano Semiótico-Instrumental (descubrimiento), en la Fase 3 pudieron observarse fibraciones entre los planos Instrumental-Discursivo (razonamiento) y en la Fase 4 se observan fibraciones entre los planos Semiótico-Discursivo (comunicación). Esto nos da un panorama de la evolución dinámica del trabajo matemático durante la actividad didáctica a lo largo de las cuatro Fases.

En esta actividad didáctica se observan mayores circulaciones en este plano del Descubrimiento, que se apoya en la génesis semiótica e instrumental para identificar y explorar objetos en la solución de problemas matemáticos, así como en la construcción del modelo matemático de la situación problema. Se observa una mayor activación de las génesis semiótica – instrumental, que se corresponde con el diseño de la actividad didáctica, en la que no se proponen tareas para promover la argumentación y deducción.

En el plano de la Comunicación existe el tratamiento, interacción y comunicación del contenido matemático que se trabaja, siendo ésta una parte que se promueve en esta actividad. Con respecto al plano del Razonamiento que está fundado en la justificación de los descubrimientos, hay poca fuerza en la argumentación ya que el discurso no es deductivo, ya que solamente se observa el método que fue producido por los profesores para resolver la situación problema y la construcción de ese modelo, dentro de esta actividad didáctica no hay ejercicios que obligue a que se haga una demostración o prueba de carácter deductivo.

6.2 Actividad “La bandera de México”.

La puesta en escena se llevó a cabo en la Universidad de Sonora en la Escuela de Matemáticas con alumnos de primer semestre de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, como parte del programa de la materia de Introducción a la Matemática Educativa. En esta clase participaron 6 alumnos de los cuales 4 son maestros en servicio que imparten la materia de Matemáticas en secundaria. Cuatro de ellos con formación profesional Normalista y dos con Licenciatura en Matemáticas.

Se llevó a cabo en una de las aulas de la maestría de Matemática Educativa donde de organizaron en mesas de trabajo con 3 integrantes en cada mesa. A cada integrante se le proporcionaron las hojas de trabajo con la actividad a realizar, plumas y marcadores para pizarrón. Por lo menos en cada mesa de trabajo contaban con una laptop con GeoGebra y Office. El desarrollo de la actividad tuvo una duración aproximada de 2 horas.

El contexto de la actividad que se puso en escena fue tomado de la Ley de Escudo, Bandera e Himno Nacionales, y se complementa con un artículo tomado de internet donde habla de la fabricación de las Banderas Nacionales, el cual fue modificado para insertarlo en la actividad.

Esta actividad trata básicamente de una empresa que se dedicará a fabricar Banderas Nacionales, dichas banderas deben cumplir con las características estipuladas en la Ley, por lo que se les pide que elaboren un catálogo en el cual puedan ofrecer a sus clientes diferentes banderas con diferentes medidas y puedan escoger la que mejor les satisfaga, además que escriban un procedimiento para que los fabricantes puedan, a partir de la medida del asta, sugerir al cliente la medida de bandera que le pueden fabricar.

La actividad está dividida en tres partes, primero está la lectura del artículo que pretende familiarizar al participante con el contexto de la actividad, en esta parte, deben contestar preguntas de control de la lectura. En la segunda parte está la presentación del problema y el desarrollo de la actividad. Y finalmente, el espacio donde deben escribir el procedimiento matemático, así como la presentación ante el grupo de su procedimiento.

Se cuenta con las hojas de trabajo resueltas por cada uno de los 6 participantes, pero solamente se cuenta con la videograbación de un equipo durante el desarrollo de la actividad, así como la presentación del mismo equipo.

De una manera general la actividad se desarrolló de la siguiente manera:

Primeramente, se lee el artículo grupalmente, posteriormente se les dio tiempo para que, individualmente contesten las preguntas del control de la lectura. Seguidamente, los participantes comparten sus respuestas con el resto del grupo, hasta que estuvieran todos de acuerdo a las respuestas.

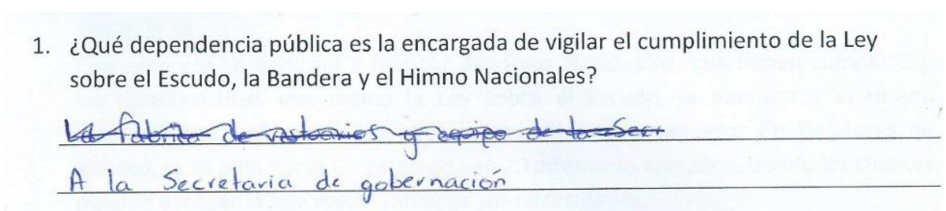
Al dividir en 2 equipos al grupo empiezan el desarrollo de la actividad, cuando los equipos empezaron a trabajar en la actividad se observó una buena comunicación entre los participantes.

La actividad concluyó al exponer uno de los equipos, la solución al problema. A continuación, se detallará lo observado durante la puesta en escena de la actividad de la bandera.

6.2.1 Reporte sobre la resolución de la actividad "La bandera de México".

Durante la lectura del artículo no se observó ninguna dificultad o problema con la comprensión de la lectura, entendieron el contexto en el que se desarrolla la actividad.

La finalidad de la primera pregunta es que se identifique la instancia responsable de vigilar el cumplimiento de la ley. A continuación, en la Figura 27, se muestra la pregunta y respuesta observada.



1. ¿Qué dependencia pública es la encargada de vigilar el cumplimiento de la Ley sobre el Escudo, la Bandera y el Himno Nacionales?

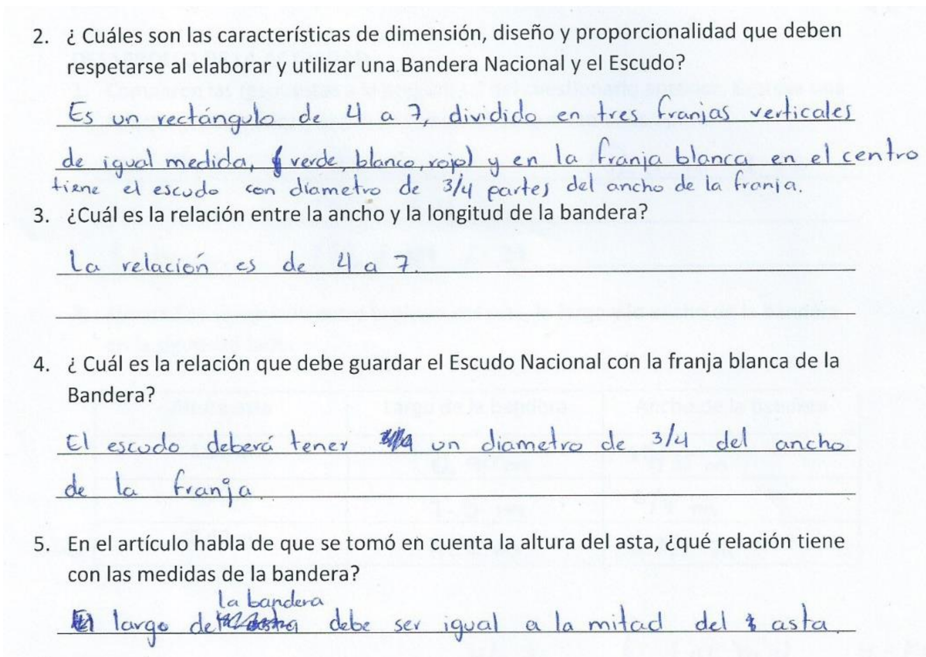
~~La fábrica de vestuarios y equipo de la Secr~~

A la Secretaria de gobernación

Figura 27

Los tres integrantes del equipo tuvieron la misma respuesta por lo que fueron capaces de extraer del texto la pregunta planteada.

Las preguntas 2 a la 5 del control de lectura son específicamente sobre el entendimiento de las especificaciones de la Bandera de México que establece la Ley, aquí se observaron algunos errores en la redacción que fueron corregidos. A continuación, en la Figura 28, se muestra lo contestado por los participantes observados.



2. ¿ Cuáles son las características de dimensión, diseño y proporcionalidad que deben respetarse al elaborar y utilizar una Bandera Nacional y el Escudo?

Es un rectángulo de 4 a 7, dividido en tres franjas verticales de igual medida, (verde, blanco, rojo) y en la franja blanca en el centro tiene el escudo con diametro de 3/4 partes del ancho de la franja.

3. ¿Cuál es la relación entre la ancho y la longitud de la bandera?

La relación es de 4 a 7.

4. ¿ Cuál es la relación que debe guardar el Escudo Nacional con la franja blanca de la Bandera?

El escudo deberá tener un diametro de 3/4 del ancho de la franja.

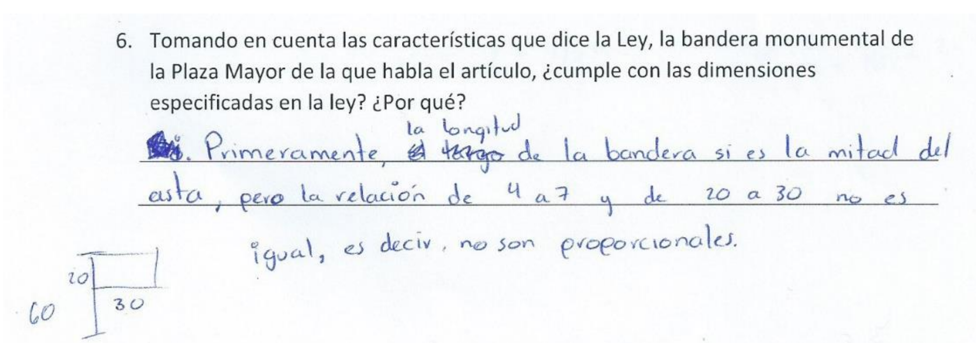
5. En el artículo habla de que se tomó en cuenta la altura del asta, ¿qué relación tiene con las medidas de la bandera?

El largo de la bandera debe ser igual a la mitad del asta.

Figura 28

En la sexta pregunta se espera que apliquen el concepto de proporcionalidad y lo que hayan entendido en la lectura sobre las características que debe cumplir la bandera.

A continuación, en la Figura 29, se muestra las respuestas del equipo observado.



6. Tomando en cuenta las características que dice la Ley, la bandera monumental de la Plaza Mayor de la que habla el artículo, ¿cumple con las dimensiones especificadas en la ley? ¿Por qué?

Primeramente, la longitud de la bandera si es la mitad del asta, pero la relación de 4 a 7 y de 20 a 30 no es igual, es decir, no son proporcionales.

Figura 29

A continuación, en la Figura 30 el participante da las medidas que debería tener la bandera monumental que se nombra en el artículo, según las especificaciones de la Ley de Escudo, Bandera e Himno Nacionales. Se puede leer que utiliza los términos ´relación´ y ´proporcionales´.

Al formarse los equipos y empezar a trabajar en el desarrollo de la actividad, en la primera pregunta tuvieron duda ya que tiene un error de redacción por lo que se hizo la corrección correspondiente. En este equipo, al observar la videograbación puede verse que se llegó al acuerdo de que era mejor trabajar con números enteros para un mejor entendimiento a palabra de un integrante del equipo “los muchachos entenderían mejor la relación con números enteros”. En la Figura 30, se muestra la respuesta de la pregunta uno.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD.

1. Comparen las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario anterior. Exprese una relación matemática y escriba a banderas de que tamaños aplica.

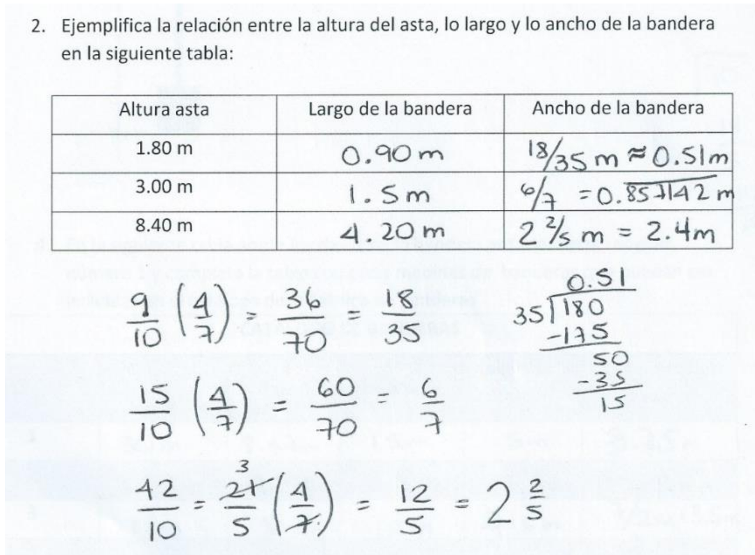
a: ancho L: largo $a = \frac{4}{7} L$

Ejemplos:

(1) Si L = 7m a = 4m. (2) Si L = 21m a = 12m (3) Si: L = 28m a = 16m

Figura 30

En la pregunta 2 se les pide escribir los datos faltantes de una de tabla donde se les dan varias alturas del asta con lo cual deben obtener el largo de la bandera y el ancho. En el video no se observan dificultades para entender la instrucción, tampoco para obtener el procedimiento para el llenado de la tabla, hay una discusión sobre el tratamiento que le darían a las operaciones y la comodidad de utilizar fracciones. En la Figura 31, se muestra el trabajo realizado por el equipo observado.



2. Ejemplifica la relación entre la altura del asta, lo largo y lo ancho de la bandera en la siguiente tabla:

Altura asta	Largo de la bandera	Ancho de la bandera
1.80 m	0.90 m	$18/35$ m $\approx$ 0.51m
3.00 m	1.5m	$6/7 = 0.\overline{857142}$ m
8.40 m	4.20 m	$2\,2/5$ m = 2.4m

$$\frac{9}{10}\left(\frac{4}{7}\right)=\frac{36}{70}=\frac{18}{35}$$

$$\begin{array}{r} 0.51 \\ 35\overline{)180} \\ -175 \\ \hline 50 \\ -35 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\frac{15}{10}\left(\frac{4}{7}\right)=\frac{60}{70}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{42}{10}=\frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{5}\left(\frac{4}{\cancel{7}}\right)=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$$

Figura 31

En la pregunta 3 no tuvieron problema en entender la instrucción, aunque tiene un error de gramática que ya fue corregido, la intención de esta parte es que visualicen por medio de un ejemplo propuesto por ellos las medidas correctas de una bandera. Se escucha, en la videograbación, una discusión del equipo, sobre cómo poder obtener solamente números enteros en todas las medidas de la bandera, llegaron al acuerdo que, aunque fijen las primeras medidas con números enteros el cálculo del diámetro del escudo podría resultar un número no entero. En la Figura 32, se muestran las respuestas del equipo observado.

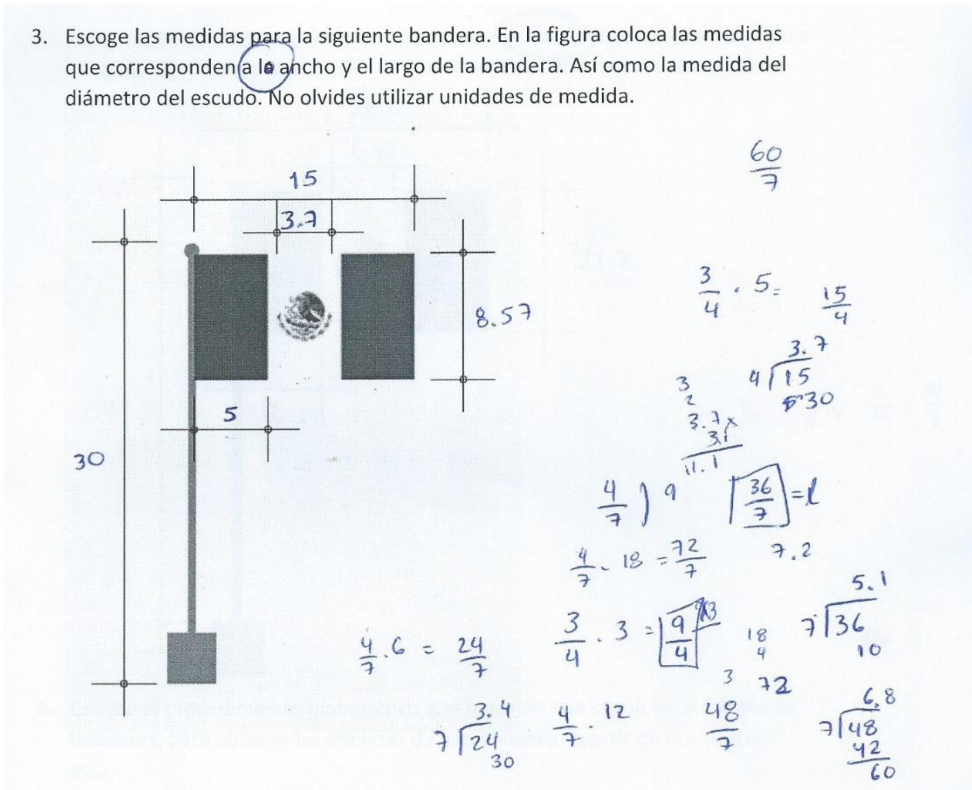


Figura 32

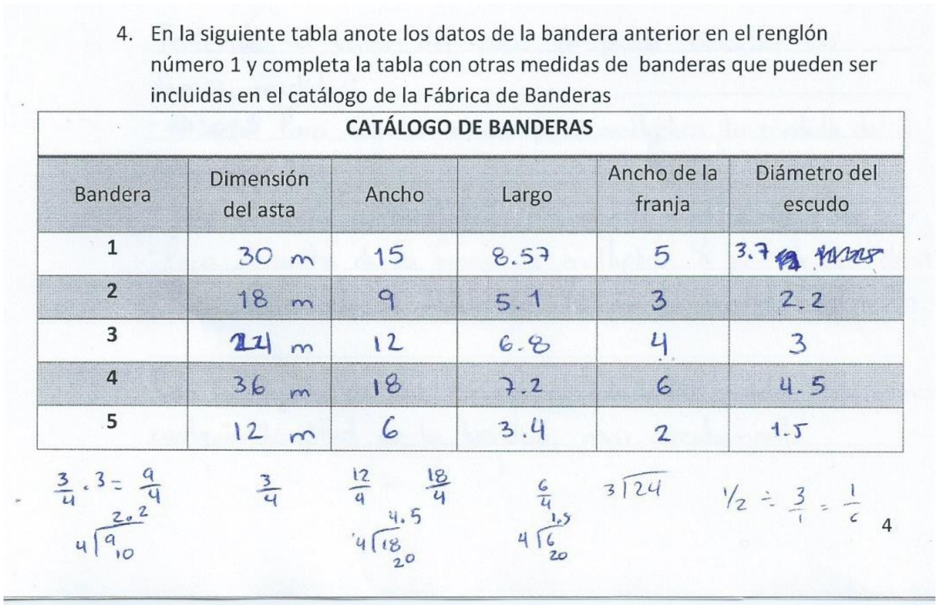
En la pregunta 4 la intención es que logren construir el catálogo mediante un procedimiento sistematizado para la obtención de las medidas utilizando el concepto de razón. Se observó que cada integrante del equipo escogió sus propias medidas para el catálogo, en las Figuras 33 y 34 se muestran los catálogos elaborados por dos de los participantes.

4. En la siguiente tabla anote los datos de la bandera anterior en el renglón número 1 y completa la tabla con otras medidas de banderas que pueden ser incluidas en el catálogo de la Fábrica de Banderas

CATÁLOGO DE BANDERAS

Bandera	Dimensión del asta	Ancho	Largo	Ancho de la franja	Diámetro del escudo
1	30	8.57	15	5	11.25
2	40	11.4	20	6.65	4.8
3	50	14.2	25	8.3	6.225
4	60	17.1	30	10	7.5
5	70	20	35	11.6.	8.7

Figura 33

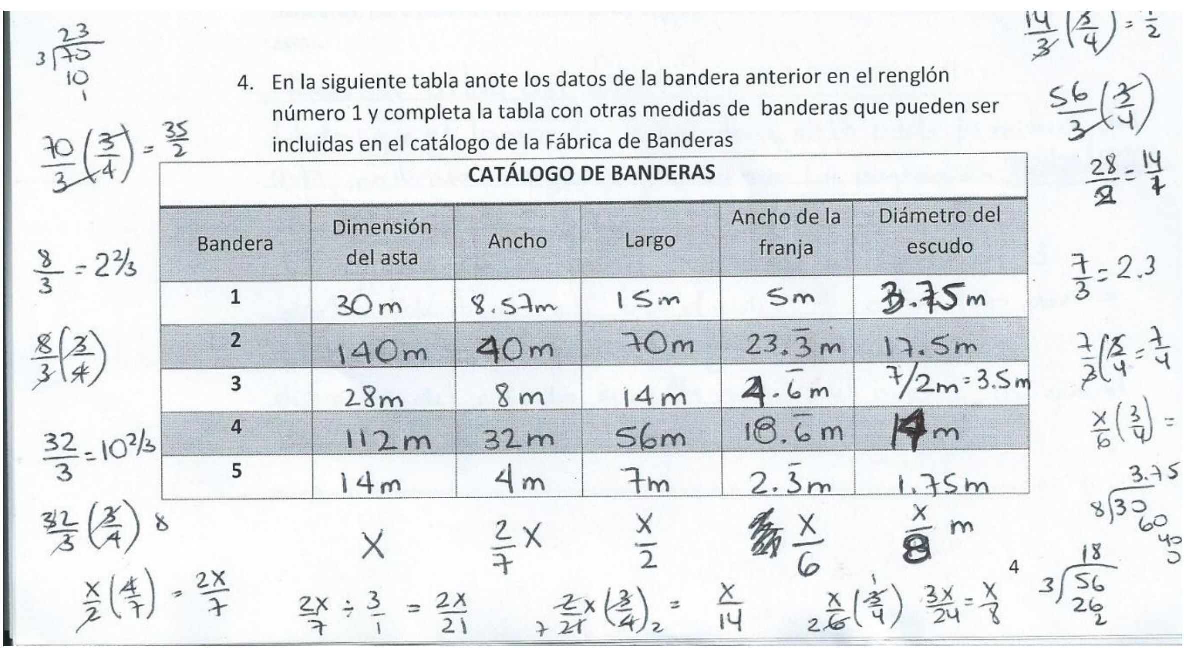


4. En la siguiente tabla anote los datos de la bandera anterior en el renglón número 1 y completa la tabla con otras medidas de banderas que pueden ser incluidas en el catálogo de la Fábrica de Banderas

CATÁLOGO DE BANDERAS					
Bandera	Dimensión del asta	Ancho	Largo	Ancho de la franja	Diámetro del escudo
1	30 m	15	8.57	5	3.7
2	18 m	9	5.1	3	2.2
3	24 m	12	6.8	4	3
4	36 m	18	7.2	6	4.5
5	12 m	6	3.4	2	1.5

Figura 34

Se observó en el video la discusión del equipo sobre el uso de números enteros para las medidas de asta, ancho y largo de la bandera, en la Figura 35 se muestra cómo el participante logra representar todas las medidas usando una expresión algebraica, así obtiene números enteros en las primeras tres medidas: asta, ancho y largo.



4. En la siguiente tabla anote los datos de la bandera anterior en el renglón número 1 y completa la tabla con otras medidas de banderas que pueden ser incluidas en el catálogo de la Fábrica de Banderas

CATÁLOGO DE BANDERAS					
Bandera	Dimensión del asta	Ancho	Largo	Ancho de la franja	Diámetro del escudo
1	30m	8.57m	15m	5m	3.75m
2	140m	40m	70m	23.3̄m	17.5m
3	28m	8m	14m	4.6̄m	7/2m = 3.5m
4	112m	32m	56m	18.6̄m	14m
5	14m	4m	7m	2.3̄m	1.75m
	X	$\frac{2}{7}X$	$\frac{X}{2}$	$\frac{X}{6}$	$\frac{X}{8}$ m

Figura 35

En la pregunta 5 se propone una generalización para la obtención de las medidas de acuerdo a la Ley. En esta parte no tuvieron dificultades para obtenerlas, en la Figura 36 se muestra lo escrito por el equipo.

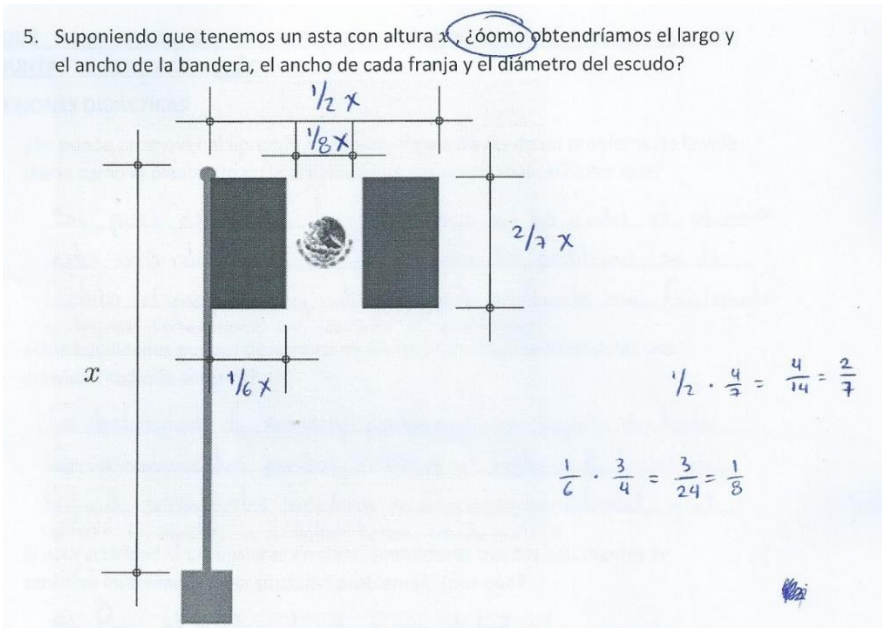
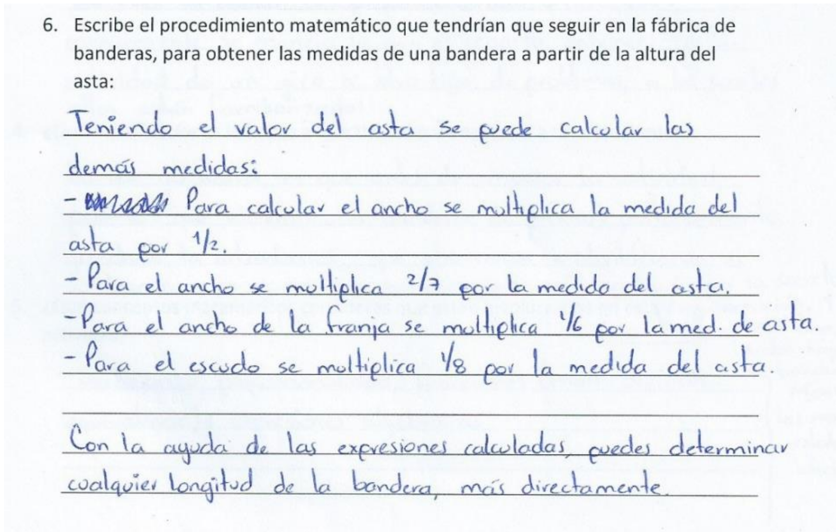


Figura 36

Se observó que algunos de los participantes ya habían llegado a la formulación de las relaciones por medio de ecuaciones en el punto anterior.

Como parte final del desarrollo de la actividad, se les pidió escribir un procedimiento matemático para que los fabricantes de banderas puedan obtener las medidas, en las Figuras 37, 38 y 39 se muestran los procedimientos escritos por los integrantes del equipo.



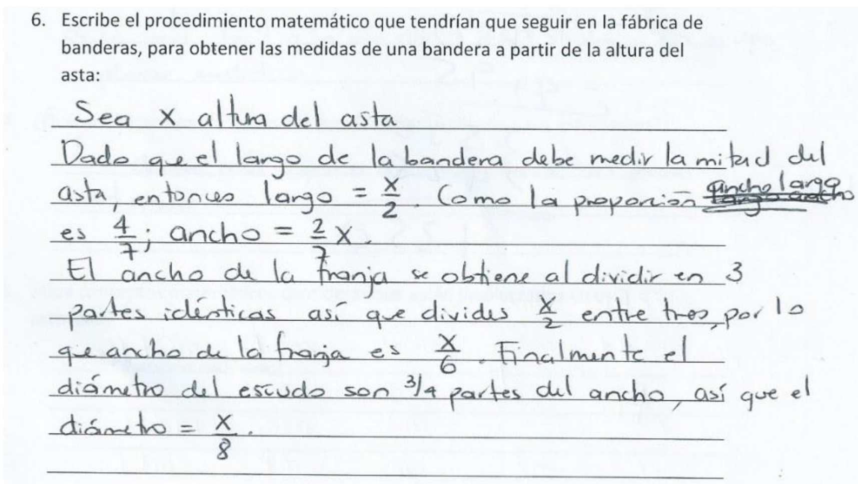
6. Escribe el procedimiento matemático que tendrían que seguir en la fábrica de banderas, para obtener las medidas de una bandera a partir de la altura del asta:

Teniendo el valor del asta se puede calcular las demás medidas:

- Para calcular el ancho se multiplica la medida del asta por 1/2.
- Para el ancho se multiplica 2/7 por la medida del asta.
- Para el ancho de la franja se multiplica 1/6 por la med. de asta.
- Para el escudo se multiplica 1/8 por la medida del asta.

Con la ayuda de las expresiones calculadas, puedes determinar cualquier longitud de la bandera, más directamente.

Figura 37



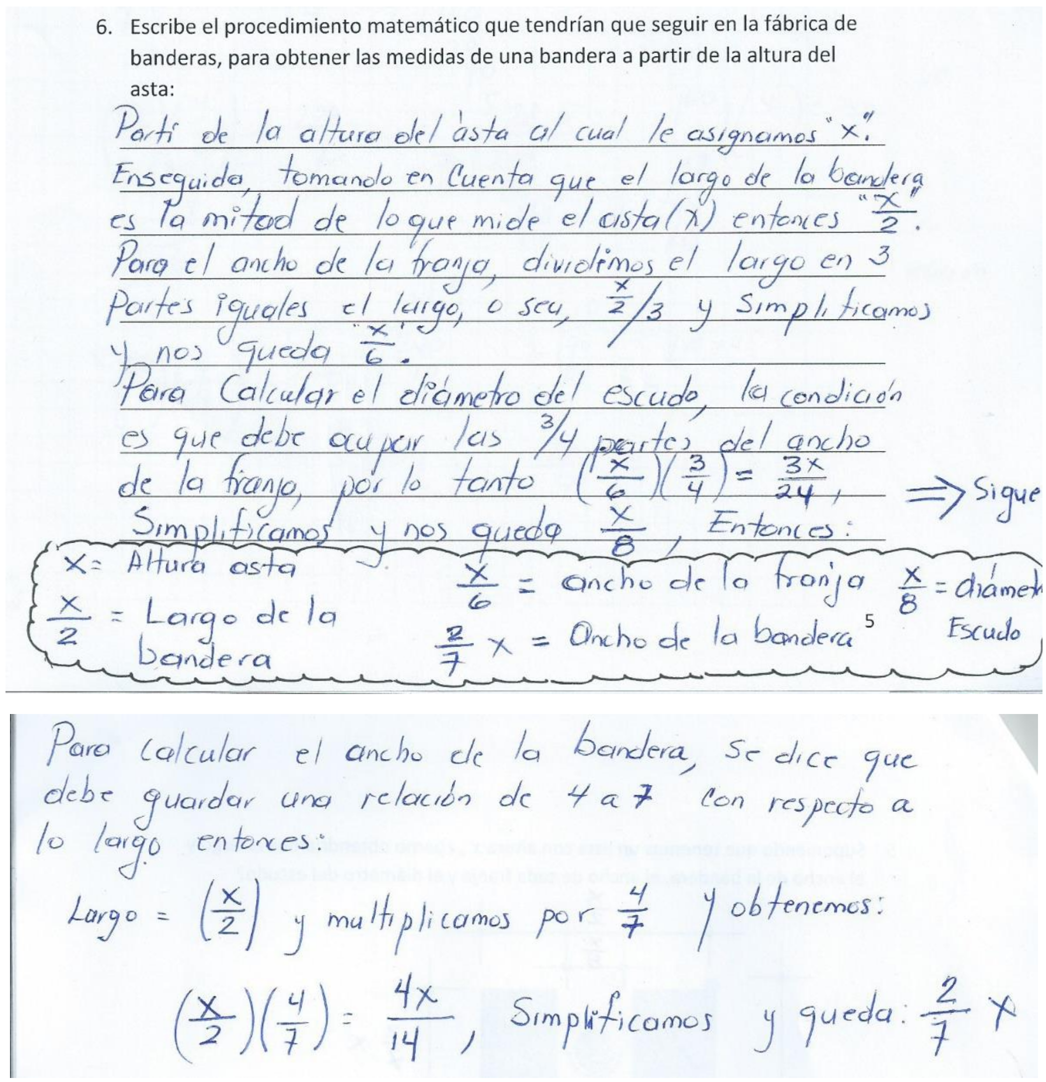
6. Escribe el procedimiento matemático que tendrían que seguir en la fábrica de banderas, para obtener las medidas de una bandera a partir de la altura del asta:

Sea x altura del asta

Dado que el largo de la bandera debe medir la mitad del asta, entonces largo $= \frac{x}{2}$. Como la proporción ~~largo ancho~~ ancho largo es $\frac{4}{7}$; ancho $= \frac{2}{7}x$.

El ancho de la franja se obtiene al dividir en 3 partes idénticas así que divides $\frac{x}{2}$ entre tres, por lo que ancho de la franja es $\frac{x}{6}$. Finalmente el diámetro del escudo son 3/4 partes del ancho, así que el diámetro $= \frac{x}{8}$.

Figura 38



6. Escribe el procedimiento matemático que tendrían que seguir en la fábrica de banderas, para obtener las medidas de una bandera a partir de la altura del asta:

Partí de la altura del asta al cual le asignamos "x". Enseguida, tomando en cuenta que el largo de la bandera es la mitad de lo que mide el asta (x) entonces "$\frac{x}{2}$". Para el ancho de la franja, dividimos el largo en 3 partes iguales el largo, o sea, $\frac{x}{2}/3$ y simplificamos y nos queda $\frac{x}{6}$.
Para calcular el diámetro del escudo, la condición es que debe ocupar las $3/4$ partes del ancho de la franja, por lo tanto $\left(\frac{x}{6}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3x}{24}$, simplificamos y nos queda $\frac{x}{8}$, Entonces: ⇒ Sigue

x = Altura asta

$\frac{x}{2}$ = Largo de la bandera

$\frac{x}{6}$ = ancho de la franja

$\frac{2}{7}x$ = Ancho de la bandera

$\frac{x}{8}$ = diámetro Escudo

5

Para calcular el ancho de la bandera, se dice que debe guardar una relación de 4 a 7 con respecto a lo largo entonces:

Largo = $\left(\frac{x}{2}\right)$ y multiplicamos por $\frac{4}{7}$ y obtenemos:

$\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{4x}{14}$, Simplificamos y queda: $\frac{2}{7}x$

Figura 39

Finalmente, un representante del equipo explica ante el grupo el procedimiento propuesto para la fabricación de banderas. Durante la exposición el participante se limitó a explicar el procedimiento propuesto por el equipo para resolver el problema. La exposición del representante pudiera ser una muestra de las dificultades que existen para explicar procedimientos matemáticos utilizando la lengua natural. En la Figura 40 se muestra la explicación que se dio en el pizarrón.

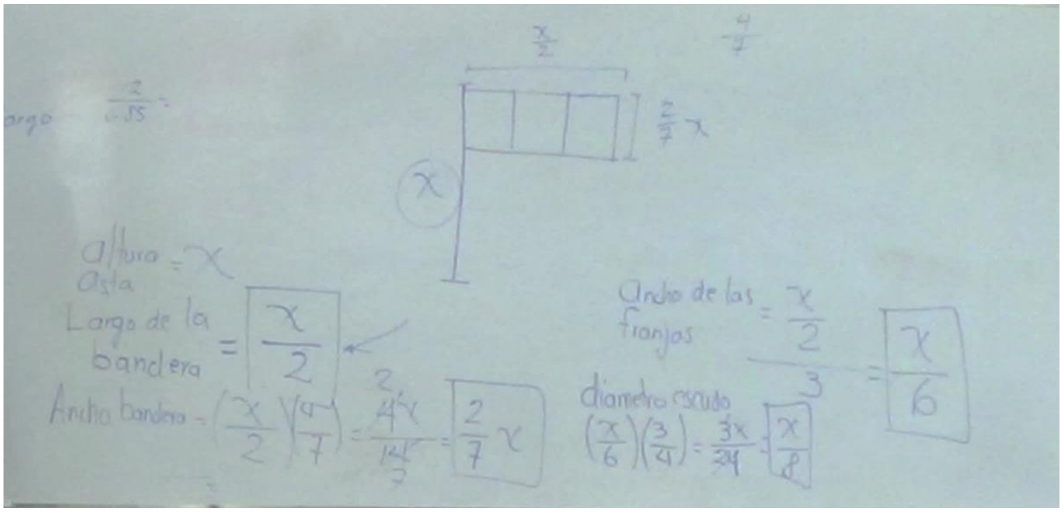


Figura 40

6.2.2 El desarrollo de la actividad vista como un Espacio de Trabajo Matemático.

En este apartado analizaremos la actividad de la Bandera con el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático, con la intención de evaluar el trabajo matemático realizado.

El modelo de los ETM contempla dos planos el primero epistemológico y el segundo cognitivo. En el plano epistemológico define lo que se espera de la actividad en este caso en el tema de proporcionalidad y sus tres componentes, a saber: el *representamen*, el *referencial* y los *artefactos*.

Estos componentes en el desarrollo de la actividad didáctica los podemos encontrar como a continuación se enuncian; el *representamen* son las representaciones numéricas de las razones entre medidas, a las que se refiere la actividad didáctica, las representaciones tabulares de las medidas de las banderas, las representaciones icónicas y representaciones algebraicas. Se presentan los *artefactos* tecnológicos como la calculadora y la hoja de cálculo, y los artefactos matemáticos como el uso de la razón como operador. Y el *referencial* consiste en la teoría de la proporcionalidad y la teoría de los números reales.

El plano cognitivo, centrado en el sujeto, contiene tres componentes cognitivas: la *visualización*, entendida en el sentido que la define Duval (2006); este componente es un proceso relativo a la relación de las diferentes conversiones, por ejemplo: cuando el participante hace una conversión de la información presentada en las hojas de trabajo, del registro verbal al registro numérico se estaría moviendo hacia la visualización. En el proceso de *construcción* es donde el participante a través del proceso de visualización y del uso de artefactos, construye el modelo matemático que propone como solución a la situación problema. Y el proceso de *prueba*, en esta actividad, se promueve solamente la argumentación como una manera de verificación de la eficacia de su modelo matemático construido.

Además de los planos horizontales se tienen los planos verticales que conectan a los seis elementos del modelo de los ETM: *descubrimiento, razonamiento* y *comunicación*. Estos planos verticales están limitados por las tres génesis: *semiótica*, *instrumental* y *discursiva.* La génesis *semiótica* es el proceso en el entran en juego los diferentes representamens. La génesis *instrumental* que transforma los artefactos en instrumentos para el proceso de construcción del modelo para resolver el problema. Y la génesis *discursiva* que le da sentido al razonamiento matemático utilizado en la modelación.

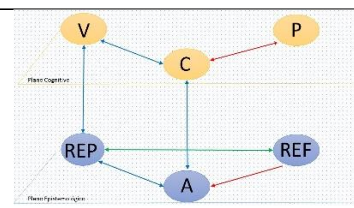
El objetivo de este análisis es entender la naturaleza y la dinámica del trabajo hecho en el desarrollo de la actividad didáctica y en la resolución de los problemas que se presentan. En la siguiente sección se describen las fibraciones observadas durante la puesta en escena de esta actividad didáctica y el trabajo matemático realizado por los docentes.

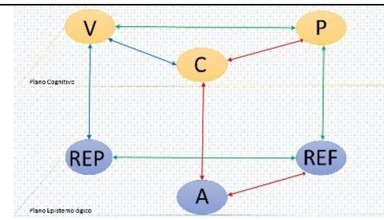
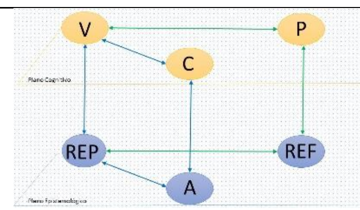
6.2.3 Análisis de la actividad didáctica a través del punto de vista de los ETM

En esta sección analizaremos las diferentes circulaciones entre las componentes de los planos cognitivos y epistemológicos en el modelo de los ETM, es decir, cómo se articulan los planos mediante las génesis, especificando los componentes puestos en juego durante el desarrollo de la actividad didáctica. Es importante hacer notar que durante la actividad matemática el concepto que nos interesa es el de proporcionalidad.

Para facilitar el análisis y poder detectar las activaciones de una o más génesis se dividió el desarrollo de la actividad didáctica en tres Fases. La primera Fase comprende de la pregunta 1 a la 3, donde se identifican las relaciones entre las magnitudes del asta y la bandera, la segunda Fase comprende las preguntas 4 y 5, en esta Fase se construye una tabla con las medidas de las banderas propuestas como parte del catálogo y la tercera Fase comprende la tarea número 6 de la actividad y la presentación donde los participantes explican primero por escrito y luego verbalmente frente al grupo, el procedimiento matemático que utilizaron para obtener las medidas de la bandera a partir de la medida del asta.

A continuación, se presenta la tabla donde se muestra el análisis de las tres Fases de la actividad:

FASE	TRABAJO MATEMÁTICO	DIAGRAMA ETM
Fase 1. Obtención de la relación matemática entre las medidas de la bandera y el escudo.	El trabajo matemático está ubicado principalmente en el plano semiótico instrumental (plano de descubrimiento), se hacen conversiones de representaciones verbales a numéricas y posteriormente la construcción de una representación tabular. Finalmente se utiliza una representación icónica para identificar numéricamente las medidas.	 *Figura 41*

Fase 2. Construcción del catálogo de banderas.	El plano donde se desarrolla esta fase es en el discursivo-instrumental (plano del razonamiento), en esta fase se utilizan los diferentes cambios de representación hechos en la Fase 1, para construir una representación tabular a partir de otra. Además, se construyen expresiones algebraicas sobre una representación icónica, para obtener la solución general al problema. La génesis discursiva se da a través de la verificación de la eficacia de su modelo.	 *Figura 42*
Fase 3. Explicación por escrito y presentación de su propuesta de solución al grupo.	Esta fase se lleva a cabo en el plano semiótico-discursivo (plano de comunicación), se describe y explica la construcción del modelo, con base en las interacciones de las representaciones. Además de explicar cómo usaron los registros de representación para modelar y resolver el problema.	 *Figura 43*

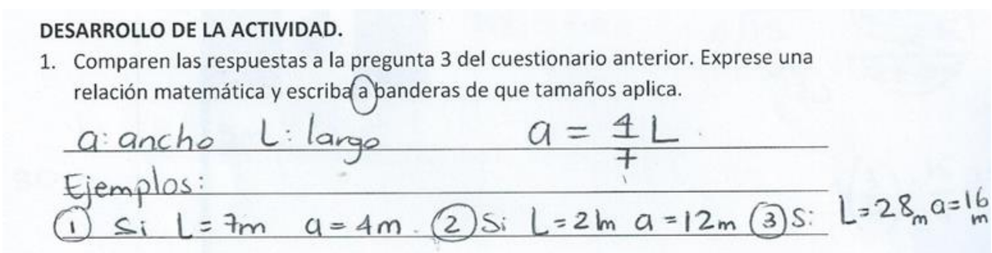
FASE 1.

En esta fase la interacción entre registros, como el cambio del registro verbal al registro numérico, enriquecen la visualización que desempeña un papel heurístico.

Esto se lleva a cabo cuando al leer las características que debe tener la bandera de México, se pasa de la representación verbal a una representación numérica por medio de razones, este cambio de representaciones se da de manera natural por los participantes, en las Figuras 44 y 45 se muestra el trabajo matemático realizado.

En el artículo 3º dice que: "La Bandera Nacional consiste en un rectángulo dividido en tres franjas verticales de medidas idénticas, con los colores en el siguiente orden a partir del asta: verde, blanco y rojo. En la franja blanca y al centro, tiene el Escudo Nacional, con un diámetro de tres cuartas partes del ancho de dicha franja. La proporción entre anchura y longitud de la bandera, es de cuatro a siete".
Las dimensiones de las banderas no se encuentran especificadas en la doctrina militar vigente, pero para efectos de estética y armonización de la bandera con la instalación, se considera que el largo debe ser igual a la mitad de la longitud del asta donde se izarán.

Figura 44



DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD.

1. Comparen las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario anterior. Exprese una relación matemática y escriba a banderas de que tamaños aplica.

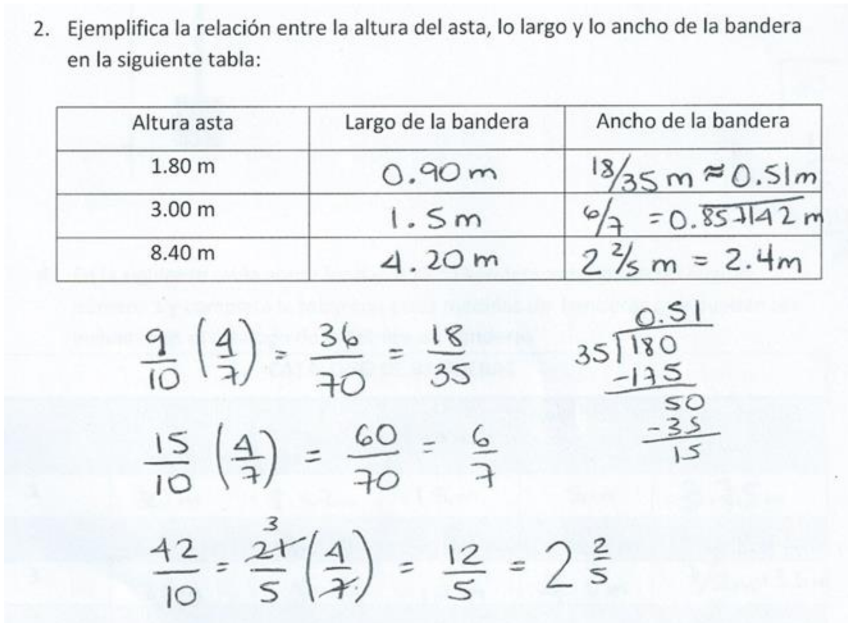
a: ancho L: largo $a = \frac{4}{7} L$

Ejemplos:

1 Si L = 7m a = 4m. 2 Si L = 21m a = 12m 3 Si: L = 28 m a = 16 m

Figura 45

Las representaciones numéricas obtenidas aquí, se utilizan en la pregunta 2 para organizar la representación tabular (ver Figura 46). En esta imagen se observa que la razón es utilizada como un operador de una manera mecanizada al darle el tratamiento a los números para obtener los resultados de la tabla.



2. Ejemplifica la relación entre la altura del asta, lo largo y lo ancho de la bandera en la siguiente tabla:

Altura asta	Largo de la bandera	Ancho de la bandera
1.80 m	0.90 m	18/35 m ≈ 0.51m
3.00 m	1.5m	6/7 = 0.857142 m
8.40 m	4.20 m	2 2/5 m = 2.4m

$$\frac{9}{10}\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{36}{70} = \frac{18}{35}$$

$$\frac{15}{10}\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{60}{70} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{42}{10} = \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{5}\left(\frac{4}{\cancel{7}}\right) = \frac{12}{5} = 2\tfrac{2}{5}$$

$$35\overline{)180}\;=0.51,\quad -175,\; 50,\; -35,\; 15$$

Figura 46

En la Figura 47 se muestra la identificación de los elementos de la tabla a la representación icónica.

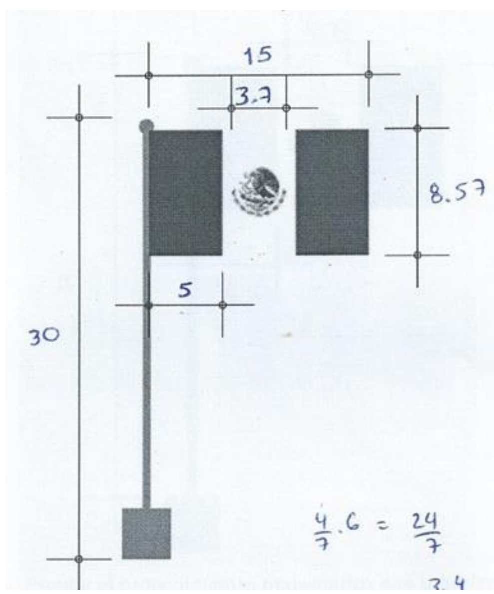


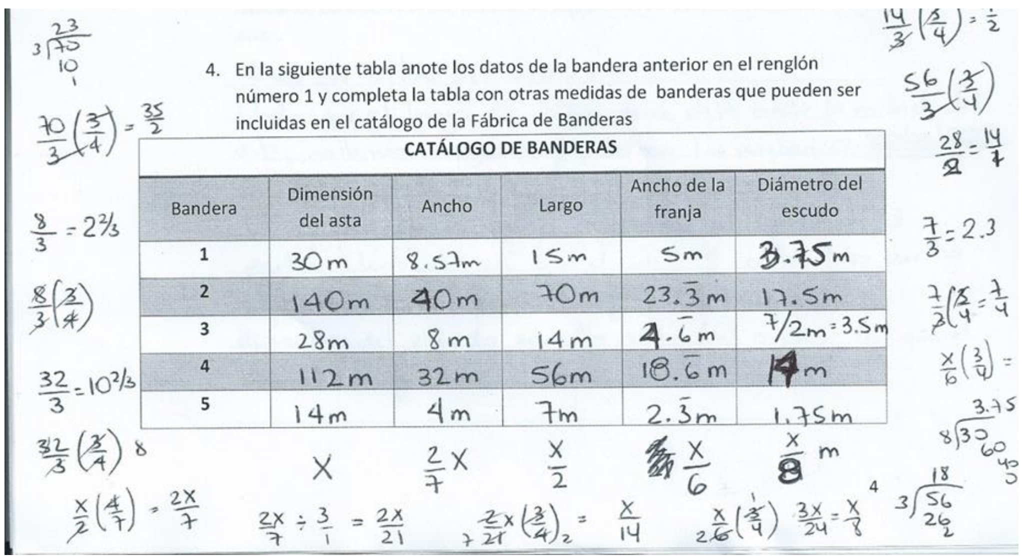
Figura 47

Las fibraciones internas entre los componentes del modelo ETM en esta fase de la actividad (ver Figura 41) se dan de la siguiente manera: $REP \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow REF \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow$

C. Estas fibraciones privilegian a la identificación y la exploración de los objetos y las conversiones entre los registros de representación.

FASE 2.

En esta fase se puede observar como el concepto de proporcionalidad es utilizado para la construcción del catálogo de las banderas, las razones utilizadas como operadores y la verificación de la eficacia del modelo matemático obtenido se muestra en la Figura 46. Además, que se observan indicios de generalización en la parte inferior de la tabla con la aparición de expresiones algebraicas que son utilizadas como artefacto para cambiar las representaciones numéricas.



4. En la siguiente tabla anote los datos de la bandera anterior en el renglón número 1 y completa la tabla con otras medidas de banderas que pueden ser incluidas en el catálogo de la Fábrica de Banderas

CATÁLOGO DE BANDERAS

Bandera	Dimensión del asta	Ancho	Largo	Ancho de la franja	Diámetro del escudo
1	30m	8.57m	15m	5m	3.75m
2	140m	40m	70m	$23.\bar{3}$m	17.5m
3	28m	8m	14m	$4.\bar{6}$m	7/2m = 3.5m
4	112m	32m	56m	$18.\bar{6}$m	14m
5	14m	4m	7m	$2.\bar{3}$m	1.75m
	x	$\frac{2}{7}x$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{6}$	$\frac{x}{8}$ m

Figura 48

Estas representaciones algebraicas surgidas en la pregunta anterior se identifican en una representación icónica que se muestra en la Figura 49, de esta manera encuentran una manera de generalizar el modelo matemático propuesto.

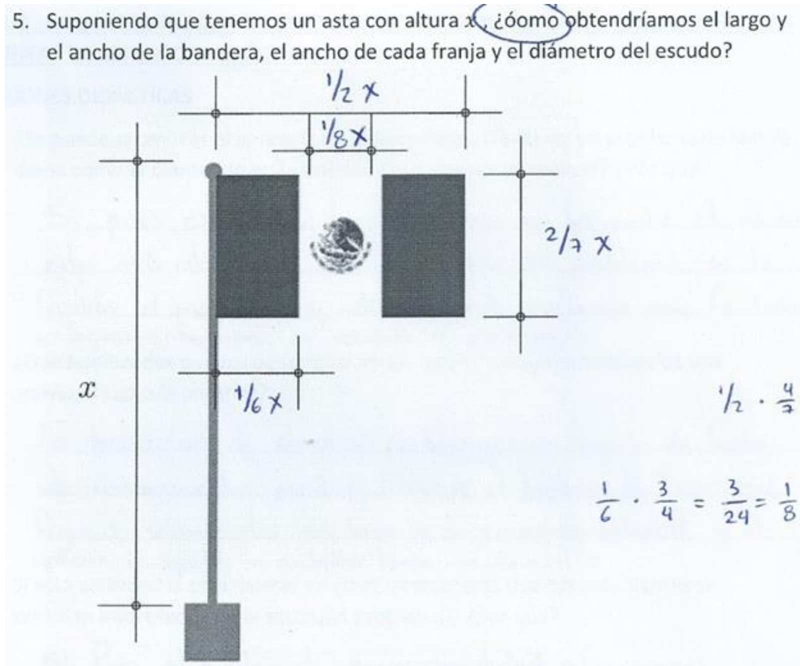
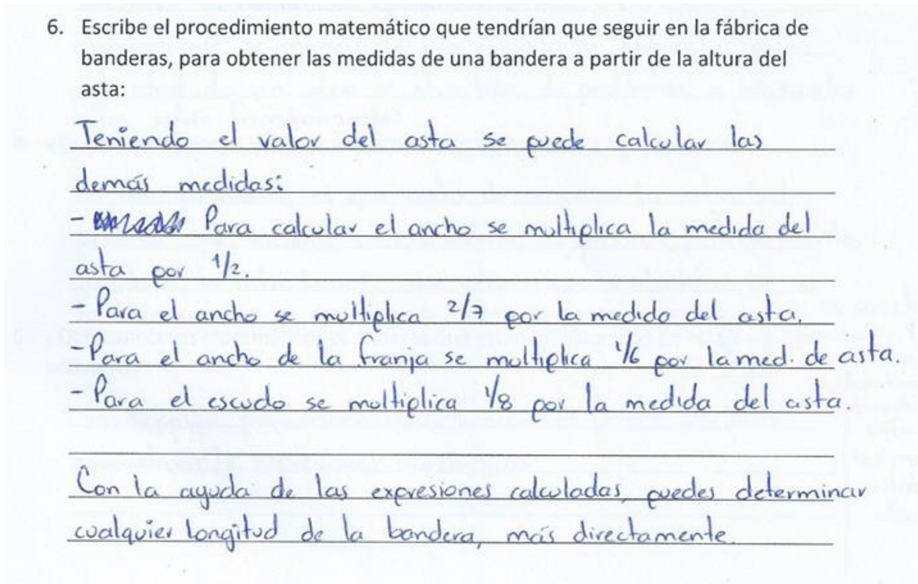


Figura 49

Las fibraciones internas de los elementos del ETM en la Fase 2 (Figura 42) se presentan de la siguiente manera: $REP \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow REF \rightarrow A$. En esta fase las fibraciones internas en el plano cognitivo se repiten hasta tener el modelo matemático que resuelve la situación problema.

FASE 3.

En esta fase se favorece la argumentación con la cual se justifica la eficacia del modelo matemático propuesto y se promueve la verbalización en la explicación del procedimiento matemático. En la Figura 50 se muestra el escrito del procedimiento presentado por uno de los integrantes del equipo.



6. Escribe el procedimiento matemático que tendrían que seguir en la fábrica de banderas, para obtener las medidas de una bandera a partir de la altura del asta:

Teniendo el valor del asta se puede calcular las demás medidas:
- Para calcular el ancho se multiplica la medida del asta por 1/2.
- Para el ancho se multiplica 2/7 por la medida del asta.
- Para el ancho de la franja se multiplica 1/6 por la med. de asta.
- Para el escudo se multiplica 1/8 por la medida del asta.

Con la ayuda de las expresiones calculadas, puedes determinar cualquier longitud de la bandera, más directamente.

Figura 50

Figura 49 se exhibe la evidencia de lo que escribió en el pizarrón el representante del equipo observado, como parte de la presentación del modelo matemático propuesto.

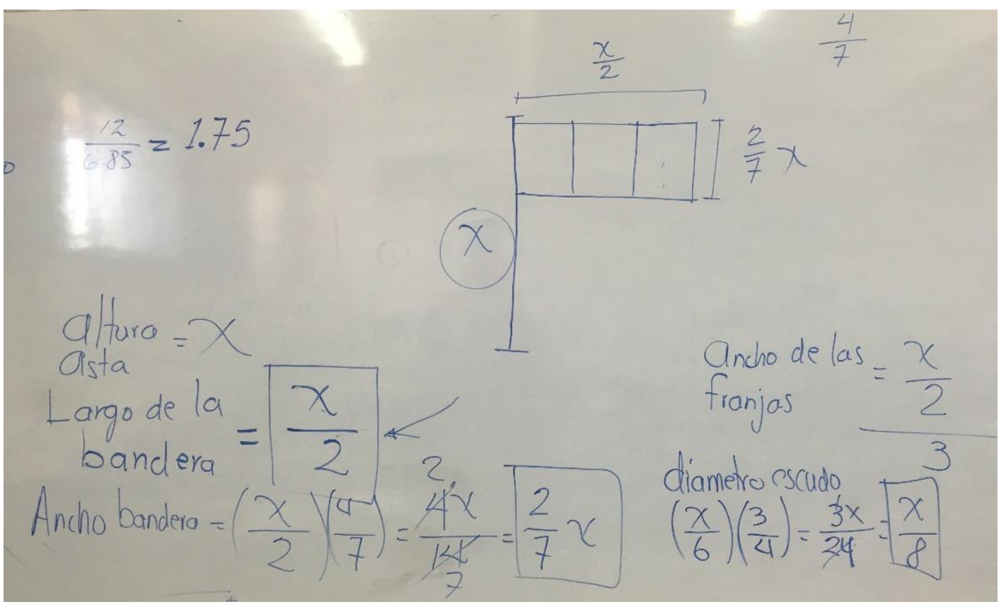


Figura 51

Las fibraciones internas de los elementos del modelo del ETM (Figura 43) se presentan de la siguiente manera: $V \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow REP \rightarrow REF \rightarrow P$. En esta fase explican y justifican el modelo matemático obtenido, validan la utilización de sus artefactos, en este caso el método que utilizaron para obtener las dimensiones de las banderas que incluyeron en su catálogo y las expresiones algebraicas que obtuvieron a partir de un asta bandera de longitud x. En esta fase, el uso de la razón como operador se extiende hacia el modelo matemático propuesto por el equipo y se utiliza para la comprobación de la eficacia del mismo.

6.2.4 Conclusiones

Al analizar la actividad didáctica usando como modelo los ETM se pudo observar la evolución dinámica del trabajo matemático de los participantes ilustrado en las figuras 41, 42 y 43. Las fibraciones que se fueron presentando de la siguiente manera: en la Fase 1 se identificaron fibraciones entre los elementos del plano Semiótico-Instrumental (Descubrimiento), mientras en la Fase 2 pudieron observarse fibraciones entre los planos Instrumental-Discursivo (Razonamiento) y en la Fase 3 se observaron fibraciones entre los planos Semiótico-Discursivo (Comunicación).

El trabajo matemático que se realizó en esta actividad didáctica movilizó las diferentes articulaciones entre los tres planos verticales en el diagrama del modelo de los ETM, dándose una mayor circulación en el plano del Descubrimiento (sem-ins) de la Fase 1, este plano se apoya en la génesis semiótica e instrumental. En este proceso de visualización se dio a través de la estructuración de la información con la cual construyeron el modelo matemático para dar solución a la situación problema. Este tipo de interacciones favoreció la identificación y exploración de objetos, esto desarrolló competencias relacionadas con el descubrimiento de la solución matemática de la situación problema.

En el plano vertical (ins-dis) de razonamiento se desarrolló otro tipo de interacción en el cual justificaron sus descubrimientos (Fase 2), en esta interacción se apoya con la génesis instrumental y la discursiva. Finalmente, en la Fase 3 se orientó a la comunicación matemática de resultados y se basó esencialmente en la génesis semiótica y en la génesis discursiva. En esta actividad didáctica no se pide demostración deductiva.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES GENERALES

Nuestro trabajo estuvo orientado primeramente en dar un panorama general sobre las dificultades históricas en la enseñanza y en el aprendizaje de la proporcionalidad, además se presentaron algunas investigaciones de la matemática educativa sobre el tema del aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad en la educación secundaria. También, en el capítulo del marco de referencia, se presentó lo que establece la RIEB, así como el plan de estudios de la educación secundaria del 2011, y la ubicación curricular del tema de la proporcionalidad, donde se destaca la necesidad de presentar actividades didácticas que sirvan como herramientas para el docente de secundaria. Siendo el objetivo principal de este trabajo contribuir a la práctica docente en el nivel secundaria, se propusieron dos actividades didácticas sobre el tema de la proporcionalidad, que se reportaron aquí.

Las dos actividades fueron diseñadas con base a los principios de diseño para las Actividades de Modelación Matemática (Model Eliciting Activities), en estos diseños se motiva a promover actividades matemáticas en situaciones que tengan sentido para el estudiante; en contraste con la resolución de problemas tradicionales centrados en la manipulación simbólica en los que las significaciones son pocos importantes. En la actividad de Voleibol, se observó la frustración por parte de los docentes al alejarlos del tipo de actividades tradicionales a las que están acostumbrados, pero al analizar las respuestas se observó que pudieron inventar sus propios métodos para resolver la situación matemática planteada que vienen siendo más poderosos que los obtenidos con actividades tradicionales. Y además se les motivó a explicar su procedimiento.

Este tipo de actividades promueven la autonomía en la resolución de problemas, el docente que las aplica, actúa realmente como una guía o mediador para promover la discusión y la presentación de las propuestas de solución, ya que son actividades con respuesta abierta.

Este tipo de Actividades de Modelación Matemática según Lesh (2003) tienen la ventaja de ayudar al estudiante a retener lo que aprende, y transfiere su aprendizaje hacia otros contextos.

Estas actividades que se proponen, como una opción a la práctica docente, entendiéndose que no serían solo este tipo de actividades las que estuvieran presentes en el aula, en caso que el docente decidiera usarlas, complementarían a las secuencias didácticas que sugiere la SEP (2011) ya que son más cercanas al Aprendizaje Basado en Proyectos. No es la intención del presente trabajo involucrar a los docentes en el diseño este tipo de actividades, más bien se trata de dar herramientas a los maestros y que conozcan otra manera de "hacer matemáticas".

Bibliografía

Balderas, R., Block, D., & Guerra, M. (2011). La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros. *XI Congreso Nacional de Investigación Educativa.* San Nicolás de los Garza, Nuevo Léon: Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C. Obtenido de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_05/2204.pdf

Balderas, R., Block, D., & Guerra, T. (2014). Se cómo se hace ´pero no por qué. *Matemática Educativa*, 7-31.

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*, 247-273.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B.-S. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Springer Science+Business Media B.V.*, 333-340.

Dienes, Z. (20 de Mayo de 2010). *Zoltan Dienes´ Web Site.* Obtenido de Zoltan Dienes' Six-stage theory of learning: http://www.zoltandienes.com/academic-articles/zoltan-dienes-six-stage-theory-of-learning-mathematics/

Docente, S. N. (23 de Junio de 2015). *Sistema Nacional del Registro del Servicio Profesional Docente*. Obtenido de http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/ba/ingreso/criterios_basicos/

García, S. G. (24 de febrero de 2014). Vanguardia.mx. *Monumental Bandera de la Plaza Mayor, una las más grandes de México*. Torreón, Coahuila, México. Obtenido de http://www.vanguardia.com.mx/monumentalbanderadelaplazamayorunalasmasgrandesdemexico-1953846.html

Godino, J. D., & Batanero, C. (2004). Proporcionalidad. En J. D. Godino, *Didática de las matemáticas para maestros* (págs. 217-286). Granada: GAMI, S. L. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático . *Bolema*, 1-22.

Heath, S. T. (1956). *The Thirteen Books of Euclid´s Elements.* New York: Dover Publications Inc.

Kuzniak, A., & Mena-Lorca, A. (2012). ETM-3 Actes. *Troisième symposium ETM* (págs. 7-49; 275-343). Montreal: Université de Montreal. Obtenido de http://turing.scedu.umontreal.ca/etm/documents/Actes-ETM3.pdf

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Espacio de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectiva. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5-15.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 721-737.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Earlbum Associates Publishers.

Martínez, S., & González, J. (Octubre de 16 de 2008). *Construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad.* Obtenido de Depositorio digital de documentos en educación matemática: http://funes.uniandes.edu.co/991/

Mendoza, T. (2009). La noción de Porcentaje: Procedimientos, errores e interpretaciones de estudiantes de secundaria. *X Congreso Nacional de Investigación Educativa.* Veracruz: Consejo Mexicano de Investgación Educativa, A. C. Obtenido de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/0300-F.pdf

Mendoza, T., & Block, D. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, las fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *RELIME*, 177-190.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 133-157. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/405/40525850006.pdf

O´Donoghue, J. (23 de Noviembre de 2014). *Teaching quality, not lesson quantity, may be key to Japan´s top math marks*. Recuperado el 12 de Diciembre de 2014, de The Japan Times: www.japantimes.co.jp

OECD. (2014). *Pisa 2012 Results: What Students Know and Can Do* (Revised edition ed., Vol. Volume I). Pisa: OECD Publishing. Obtenido de http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-volume-I.pdf

Oller, A., & Jairín, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 317-338. Obtenido de http://www.clame.org.mx/relime/201302c.pdf

Ruiz, E. F. (Abril de 2005). *Tratamiento de los conceptos de Razón y Proporción através de un programa didáctico*. Recuperado el 2016, de CINVESTAV: http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig3/Tratamiento%20de%20los%20conceptos_FRuiz.pdf

SEP. (2011). *Plan de estudios Educación Básica.* Ciudad de México: Secretaria de Educación Pública.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011 Guía para el maestro Educación básica Secundaria Matemáticas.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

ANEXOS

ANEXO I

Hojas de trabajo de la actividad “Voleibol”

Actividad sobre Voleibol
Artículo de periódico: Campeonas de Voleibol

Durante años, la secundaria general #1 ha ganado campeonatos de voleibol. Su éxito no ha llegado por accidente, sus excelentes entrenadores y su liderazgo han ayudado a poner en el mapa a varias jugadoras. Las jugadoras atribuyen el éxito de su equipo a los entrenadores debido a su ética de trabajo.

Cada mañana, las jugadoras hacen pesas, y una vez por semana, junto a sus entrenadores de la escuela estudian videos para observar las técnicas y para estudiar a sus competidoras. Además de levantar pesas y ver videos, los equipos entrenan seis días a la semana.

Además de trabajar duro, tienen toda la actitud de ganadoras. Otra cosa, en la que tanto atletas como entrenadores están de acuerdo, que ha ayudado a que su equipo continue en la senda de la victoria es un campamento de voleibol de verano. Este campamento se celebra cada verano desde la segunda a la cuarta semana de julio en el Instituto Tecnológico de Hermosillo (ITH). Este Instituto es el anfitrión del campamento, y cuando el tiempo y los recursos lo permite, algunos jugadores profesionales son invitados a participar.

Al final del campamento, se lleva a cabo un torneo de voleibol, donde estudiantes de secundaria de Hermosillo, con edades entre 12 y 15 años, se combinan entre sí para formar los equipos del torneo. Los organizadores del campamento son entrenadores del ITH y la Universidad Estatal de Sonora. Ellos hacen un intento de dividir las jugadoras de la misma escuela de manera que no exista ventaja para algún equipo.

En los últimos años algunos equipos han derrotado contundentemente a los demás. Mariana recuerda haber asistido al campamento el año pasado y perder un partido 15-3, 15-2, 15-6. "Ha sido una experiencia humillante", afirma Mariana. "Llegué al campamento por dos razones. En primer lugar, quería mejorar como jugadora. Y en segundo, quería estar en otros equipos y competir contra otros equipos, diferentes a los de la temporada regular. Con el sistema actual, un equipo puede arrasar al tuyo fácilmente."

Debido a la gran desventaja en la que queda algunos equipos, el interés por el campamento ha disminuido. El campamento ofrece a las jugadoras la oportunidad de aprender y mejorar sus habilidades en el voleibol, pero el torneo no resulta tan atractivo como debería. Incluso las jugadoras que ganan regularmente en el torneo se están aburriendo. Ellas también prefieren enfrentarse a equipos más competitivos, que ganar sus juegos fácilmente.

La preocupación de los organizadores del campamento, por los problemas que se describen en la nota periodística, los llevó a recabar información que se presenta en la tabla 1.

TABLA 1. INFORMACION RECABADA DURANTE LA PUESTA A PRUEBA DE LAS PARTICIPANTES EN EL CAMPAMENTO					
Nombre	**Altura del jugador metros**	**Salto vertical en cm**	**Corrida de 40 metros en segundos**	**Resultados en saques (número de saques con éxito de un total de 10)**	**Resultados de Remate (de un total de 5 intentos)**
Gertrudis	1.85	50.8	6.21	8	Toque-devuelto Toque-no devuelto Clavada En la red Devuelta
Betty	1.57	63.3	5.98	7	Clavada Devuelta Fuera de cancha Toque-devuelto Clavada
Jennifer	1.77	60.9	6.44	8	Fuera de cancha Devuelta Devuelta Clavada En la red
Amy	1.77	68.5	6.01	9	Clavada Clavada Toque-no devuelto Clavada Devuelta
Ana	1.67	63.3	6.95	10	Fuera de cancha En la red Devuelta Devuelta Toque-devuelto
Kate	1.72	43.1	7.12	6	Clavada Toque-no devuelto Clavada Devuelta Clavada
Andrea	1.60	53.3	6.34	5	Fuera de cancha Clavada En la red En la red Toque-devuelto
Cristina	1.65	58.4	7.34	8	En la red Clavada Clavada Clavada Toque-no devuelto
Lorena	1.65	60.9	6.32	9	En la red Fuera de cancha En la red Fuera de cancha Devuelta
Elizabeth	1.70	48.2	8.18	10	Toque-no devuelto Clavada Clavada Fuera de cancha Devuelta
Kim	1.75	58.4	6.75	7	Toque-devuelto Clavada Devuelta Fuera de cancha Clavada
María Paula	1.72	38.1	5.87	8	Clavada Clavada Clavada Toque-no devuelto En la red
Hermelinda	1.62	53.3	6.72	8	Clavada Devuelta Fuera de cancha En la red Toque-devuelto
Laura	1.70	48.2	6.88	9	Fuera de cancha En la red En la red Clavada Devuelta
Tina	1.54	60.9	6.27	6	Toque-no devuelto Toque-devuelto Toque devuelto Clavada Fuera de cancha
Angie	1.77	58.4	6.54	8	Fuera de cancha Clavada Fuera de cancha Fuera de cancha Toque-devuelto
Ruth	1.60	66	7.01	9	Toque-no devuelto En la red Clavada Clavada Clavada
Rebeca	1.75	45.7	6.78	10	En la red Fuera de cancha Clavada Toque-devuelto Clavada

CLAVES PARA LOS REMATES

Clavada: El otro equipo fue incapaz de devolver la pelota.

Fuera de cancha: El jugador remató la pelota fuera de la cancha, así que el otro equipo gana el punto.

Devuelta: El otro equipo devolvió el remate.

Toque-no devuelto (dejadita): El jugador hace una finta de remate a la pelota y solo la toca para que logre pasar la red. El otro equipo no logra devolver la pelota.

Toque-devuelto (dejadita devuelta): El jugador hace una finta de golpe a la pelota y solo la toca para que pase la red. El otro equipo devuelve el toque.

En la red: El jugador falla el golpe porque la pelota pega en la red y no pasa.

DESPUES DE HABER LEIDO EL ARTÍCULO Y REVISADO LA INFORMACIÓN DE LA TABLA, DE LA PÁGINA ANTERIOR, CONTESTA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS INDIVIDUALMENTE.

1. ¿Qué problema está teniendo el campamento?

___

___

2. ¿Qué tipo de golpe puede ser clasificado como Toque-no devuelto durante la prueba?

___

___

3. ¿Qué tipo de golpe puede ser clasificado como Clavada durante la prueba?

___

4. ¿Cuál es la jugadora más alta de la lista?

___

5. ¿Qué jugadora brinca más alto? ¿Es la misma persona que puede alcanzar el punto más alto? ¿Por qué si o por qué no?

___

___

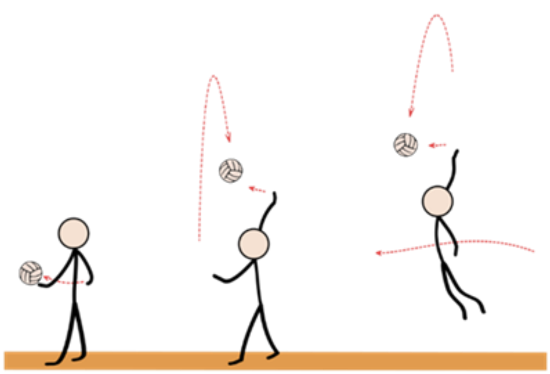
___

___

___

___

___



LEA CON DETENIMIENTO LA SIGUIENTE SITUACIÓN.

PROBLEMA

Los organizadores del campamento quieren tener una competencia más reñida en el torneo de voleibol, para que el campamento sea éxitoso. Así que necesitan dividir a las integrantes del campamento en equipos para que los juegos sean más parejos. La información de la tabla 1 debe ser utilizada para armar tres equipos con mayor competitividad entre ellos, ya que a las jugadores no les gusta que un equipo que arrase con los demás. A nivel motivacional la jugadora debe saber que está en un equipo que tiene la oportunidad de vencer a cualquiera de los otros dos.

En la siguiente actividad se supondrá que eres la persona indicada para decirles a los organizadores cómo integrar los equipos. Al final de la actividad se te solicitará que redactes una carta en la que expliques con detalle los criterios que usaste para seleccionar los equipos. Las especificaciones de la carta se darán en su momento.

DESARROLLA LA SIGUIENTE ACTIVIDAD EN EQUIPO.

1. ¿Qué crees más importante que una jugadora tenga mayor altura o que brinque más alto? ¿Qué tanto crees que es más importante?

____

____

2. ¿Qué crees más importante que la jugadora tenga mejor resultado del saque o que corra más veloz? ¿Qué tan importante es una aspecto sobre otro?

____

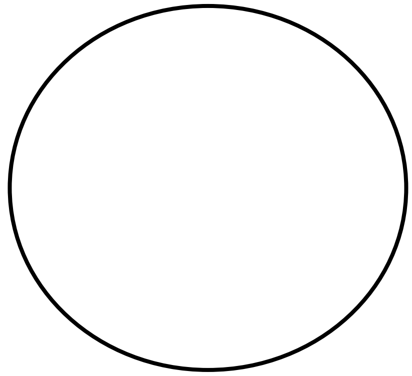
____

3. ¿Cuál habilidad crees tú que es más importante para ser un jugador de voleibol? ¿Cuál habilidad crees tú es la menos importante para ser un jugador de voleibol?

____

____

4. Elaboren un diagrama de pastel en el que cuantifiquen la importancia de las características mostradas en la tabla.



5. Ordena a las jugadoras de mayor estatura a la de menor estatura.

6. ¿Cuál jugadora es la más alta?

____

7. ¿Cuál jugadora es la menos alta?

____

8. ¿Cuál es la diferencia entre la más alta y la menos alta?

____

9. Asigna una calificación de acuerdo al orden de la estatura a cada jugadora y escríbela en la tabla 2.

TABLA 2. CALIFICACIONES DE LAS JUGADORAS

Nombre	Calificación Altura		Calificación Salto vertical		Calificación Corrida		Calificación Saque		Calificación Remate		Calificación final
Gertrudis											
Betty											
Jennifer											
Amy											
Ana											
Kate											
Andrea											
Cristina											
Lorena											
Elizabeth											
Kim											
María Paula											
Hermelinda											
Laura											
Tina											
Angie											
Ruth											
Rebeca											

Total

10. ¿Cómo afecta la cuantificación que asignaste a la altura en el diagrama de pastel, a la calificación de estatura de cada una de las jugadoras?

____

____

11. Asigna una calificación a las otras características: salto vertical y corrida, escríbelo en la tabla 2.

12. ¿Cómo afecta la cuantificación que asignaste al salto vertical y corrida en el diagrama de pastel, a la calificación de salto vertical y corrida que le asignaste a cada jugadora?

13. Discute con tu equipo, ¿cómo podrían asignar una calificación a la habilidad de saque?

14. Analiza los tipos de remates, observa en cuales tipos el equipo gana el punto, en cuáles pierde el punto y en cuáles el juego sigue.

15. Basado en lo anterior, asigna una calificación a cada jugadora en la caraterística remate y escríbelo en la tabla 2.

16. Completa tabla 2 con las calificaciones de las jugadoras.

17. ¿Cuál será tu estrategia para formar los 3 equipos? Discute con tus compañeros y lleguen a un acuerdo de cuál sería la mejor estrategia.

18. Supongan que en el campamento se inscriben 40 jugadoras, ¿tu método sirve para dividir a los asistentes en equipos competitivos?, ¿o necesitas cambiar algo?

19. ¿Tu método puede ser usado para cualquier número de jugadoras?

20. En el formato de la siguiente página, escribe una carta dirigida a los organizadores explicando tu método matemático, para crear los 3 equipos, y como puede ser utilizado para cualquier número de jugadoras.

Fecha: ____________________

Estimados Organizadores del Campamento,

Nuestro equipo, ha determinado asignar los siguientes pesos a las características de sus jugadoras:

____

____

____

____

____

El procedimiento matemático que llevamos a cabo para crear los 3 equipos fue el siguiente:

____

____

____

____

____

Este proceso matemático puede ser utilizado para próximos campamentos con diferente cantidad de jugadores de la siguiente manera:

____

____

____

____

Atentamente,

____

REFLEXIONES DIDÁCTICAS

1. ¿Qué contenidos matemáticos correspondientes al programa curricular de matemáticas se aborda?

2. ¿Crees que el contexto utilizado en la actividad, está conectado con la vida real?

3. Si se aplicara la actividad en el salón de clase ¿Qué aprendizaje lograríamos con esta actividad en nuestros estudiantes?

4. ¿Qué aprendizaje lograste con esta actividad?

5. ¿Qué tipo de habilidades promueve este tipo de actividades de modelación matemática?

ANEXO II

Hojas de trabajo actividad “La bandera de México”

MONUMENTAL BANDERA DE LA PLAZA MAYOR, UNA DE LAS MÁS GRANDES DE MÉXICO

La bandera de 200 kilos de peso y 30 metros de largo por 20 metros de ancho, cuenta con un asta de 60 metros de alto.

Torreón, Coahuila. La monumental bandera en la Plaza Mayor, es una de las más grandes de México y la más importante en toda esta región, con una altura de 60 metros sin contar el pararrayos.

La fábrica de vestuario y equipo de la Secretaría de la Defensa Nacional elabora las banderas nacionales desde las de escritorio, oficina, las de guerra o escolta y hasta las banderas monumentales que ondean en toda la República Mexicana.

Son 72 banderas monumentales las que se custodian y tiene bajo su resguardo la SEDENA cuya altura varía desde los 50 metros como la que está en el Zócalo de la ciudad de México.

La confección de esta monumental bandera se realizó de acuerdo a la altura del asta bandera en la que sería colocada. Debido a que la Plaza Mayor cuenta con un asta de 60 metros de largo, se solicitó una bandera 30 metros de largo por 20 metros de ancho. La solicitud no fue fácil, ya que el encargado de realizar los trámites, el Capitán Ezequiel González Olague, debió proporcionar una serie de información para poder realizar la compra.

En la ley sobre el Escudo, la Bandera y el Himno Nacionales se especifican las características que toda bandera debe cumplir:
En el artículo 3º dice que: "La Bandera Nacional consiste en un rectángulo dividido en tres franjas verticales de medidas idénticas, con los colores en el siguiente orden a partir del asta: verde, blanco y rojo. En la franja blanca y al centro, tiene el Escudo Nacional, con un diámetro de tres cuartas partes del ancho de dicha franja. La proporción entre anchura y longitud de la bandera, es de cuatro a siete".
Compete a la Secretaria de Gobernación vigilar el cumplimiento de esta ley.
Las dimensiones de las banderas no se encuentran especificadas en la doctrina militar vigente, pero para efectos de estética y armonización de la bandera con la instalación, se considera que el largo debe ser igual a la mitad de la longitud del asta donde se izarán.

En la fábrica de vestuario, la elaboración de banderas monumentales cuenta con tres pasos básicos en la industria, el primero de ellos es el teñido, acabado y estampado de los lienzos tricolores donde se da a la tela el tono exacto de los tres colores patrios. El segundo de los pasos es la confección de los lienzos. El tercero de los procesos es el ensamble y estampado del escudo nacional, así como su revisión de calidad para que éstas se mantengan a todo su esplendor durante por lo menos seis meses (García, 2014).

A CONTINUACIÓN, CONTESTA INDIVIDUALMENTE EL CUESTIONARIO BASA TUS RESPUESTAS EN LA LECTURA SI ES NECESARIO VUELVE A LEER EL ARTÍCULO

7. ¿Qué dependencia pública es la encargada de vigilar el cumplimiento de la Ley sobre el Escudo, la Bandera y el Himno Nacionales?

   ____

   ____

8. ¿ Cuáles son las características de dimensión, diseño y proporcionalidad que deben respetarse al elaborar y utilizar una Bandera Nacional y el Escudo?

   ____

   ____

9. ¿Cuál es la relación entre el ancho y la longitud de la bandera?

   ____

   ____

10. ¿ Cuál es la relación que debe guardar el Escudo Nacional con la franja blanca de la Bandera?

    ____

    ____

11. En el artículo habla de que se tomó en cuenta la altura del asta, ¿qué relación tiene con las medidas de la bandera?

    ____

    ____

12. Tomando en cuenta las características que dice la Ley, la bandera monumental de la Plaza Mayor de la que habla el artículo, ¿cumple con las dimensiones especificadas en la ley? ¿Por qué?

    ____

    ____

REÚNETE CON TU EQUIPO, LEAN EL PROBLEMA QUE SE PLANTEA Y SIGAN LAS INSTRUCCIONES DEL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD.

PROBLEMA

Una empresa se dedicará a fabricar Banderas Nacionales, que deben cumplir con las características que marca la Ley sobre el Escudo, la Bandera y el Himno Nacional. Para ofrecer a los clientes los diferentes tamaños de Banderas de México, se te pide hacer un catálogo con diferentes tamaños, donde los clientes puedan escoger la que mejor satisfaga sus necesidades.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD.

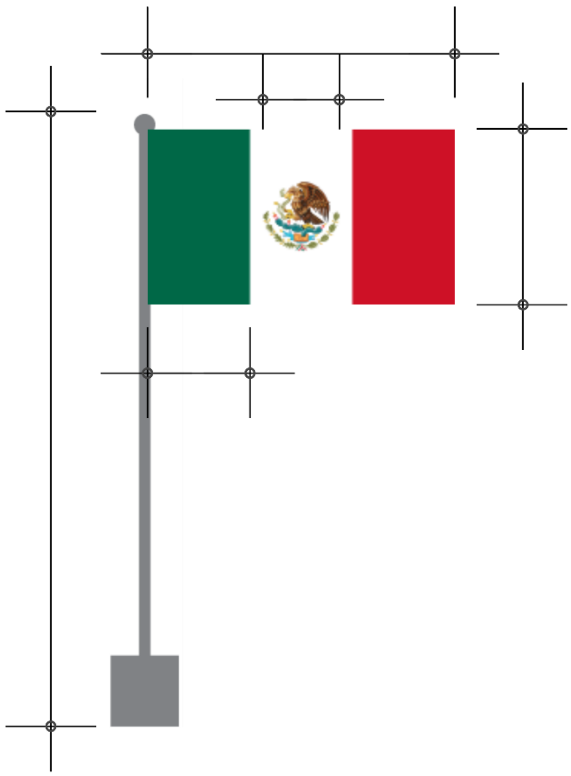
1. Comparen las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario anterior. Exprese una relación matemática y escriba de que tamaños de banderas aplica.

   ____
   ____
   ____

2. Ejemplifica la relación entre la altura del asta, lo largo y lo ancho de la bandera en la siguiente tabla:

Altura asta	Largo de la bandera	Ancho de la bandera
1.80 m		
3.00 m		
8.40 m		

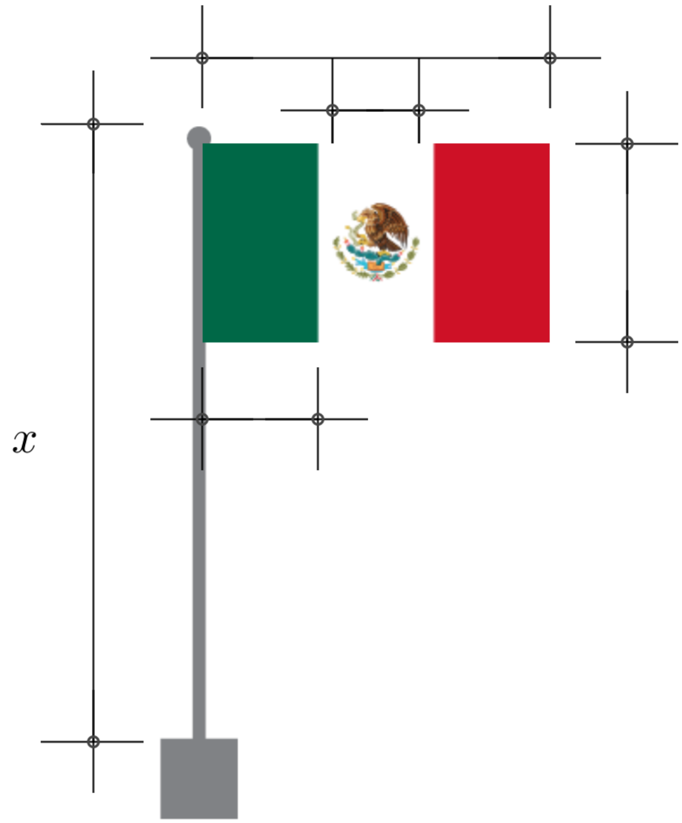
3. Escoge las medidas para la siguiente bandera. En la figura coloca las medidas que corresponden a el ancho y el largo de la bandera. Así como la medida del diámetro del escudo. No olvides utilizar unidades de medida.



4. En la siguiente tabla anote los datos de la bandera anterior en el renglón número 1 y completa la tabla con otras medidas de banderas que pueden ser incluidas en el catálogo de la Fábrica de Banderas

CATÁLOGO DE BANDERAS					
Bandera	Dimensión del asta	Ancho	Largo	Ancho de la franja	Diámetro del escudo
1					
2					
3					
4					
5					

5. Suponiendo que tenemos un asta con altura x , ¿cómo obtendríamos el largo y el ancho de la bandera, el ancho de cada franja y el diámetro del escudo?



6. Escribe el procedimiento matemático que tendrían que seguir en la fábrica de banderas, para obtener las medidas de una bandera a partir de la altura del asta:

<u>YA QUE HAN TERMINADO LA ACTIVIDAD, INDIVIDUALMENTE TRABAJA EN LAS PREGUNTAS DE REFLEXIÓN DIDÁCTICA.</u>

REFLEXIONES DIDÁCTICAS

6 ¿Se puede promover el aprendizaje matemático a través de un problema de la vida diaria como el planteado en la actividad que acabas de realizar? ¿Por qué?

7 ¿Qué habilidades puedes desarrollar en los estudiantes proponiendoles una actividad como la anterior?

8 Si esta actividad la propusieras en clase, ¿consideras que tus estudiantes se sentirían interesados en la situación problema?, ¿por qué?

9 ¿Qué modificaciones le harías a la actividad para aplicarla a tus estudiantes?

10 ¿Qué conceptos matemáticos consideras que están involucrados en esta actividad?

11 Si tu consideras que en esta actividad se pudieran involucrar otro conceptos matemáticos, ¿qué tipo de preguntas agregarías?