UNIVERSIDAD DE SONORA

MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD
EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

OBSTÁCULOS EN LA COMPRENSIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

JOSÉ DE JESÚS AYALA

HERMOSILLO, SONORA MARZO DE 2003

ÍNDICE

PRÓLOGO

Frecuentemente me ha chocado el hecho de que los profesores de ciencias aun más que los otros si cabe, no comprendan que no se comprenda.

(Bachelard, *La formación del espíritu científico)*

El pensamiento matemático de los profesores encargados de guiar el aprendizaje de las mismas, supone un saber que, particularmente en los niveles universitarios, poco se cuestiona e investiga. En la perspectiva de sus propias adquisiciones matemáticas, se precisa como necesario un soporte rico y funcional que permita afrontar con mayor potencial cognitivo la enseñanza de las matemáticas. No obstante, si el referente es una experiencia formativa que ha tenido lugar en el seno de un modelo didáctico de índole disciplinar, es de aceptarse que las significaciones logradas por parte de los sujetos pueden no resultar lo suficientemente sólidas e inclusive algunas inadecuadas en el entendido de que dicho proyecto no asume la complejidad cognitiva y didáctica que suponen los objetos matemáticos. Posteriormente ya como docentes, nos apoyamos en ciertas prácticas "heredadas" o adquiridas a lo largo de nuestra experiencia en el aula que regularmente hacen patente comunes denominadores como los siguientes: utilizar más ejercicios que problemas, dar más respuestas que generar preguntas, operar más que analizar etcétera.

Desde nuestro punto de vista, es aceptable que tanto la formación señalada seguida de una actividad didáctica particularmente desproblematizada, al menos con el tiempo, pueden contribuir a la adquisición de actitudes inerciales o al riesgo de "desvanecimiento" de significados que pueden limitar las posibilidades de análisis e intervención ante situaciones problemáticas con requerimientos que exigen puntos de vista diferentes. Esto propicia una implementación menos rica de matemáticas en las aulas.

En la Universidad de Sonora, los profesores de matemáticas conforman una comunidad con variados grados formativos e intereses académicos. En dicha comunidad se pueden distinguir aquellos que investigan aspectos relacionados con su especialización en matemática, matemática educativa y finalmente aquellos, el sector más amplio, que simplemente están dedicados a dar clases de matemáticas en las diferentes áreas profesionales en el que prestan sus servicios. Aunque no podemos negar que se cuenta con profesores que, desde el punto de vista institucional, indiscutiblemente poseen una base rica de significados respecto a la materia que imparten, es patente que no existe uniformidad en ese sentido y que en todo caso resulta interesante indagar y determinar aspectos que puedan ser útiles en la pretensión de conocer el estado, las necesidades y los requerimientos matemáticos del docente en ejercicio.

En este trabajo iniciamos por explorar, desde cierta perspectiva, en el pensamiento matemático de profesores de cálculo del área de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Sonora, como condición necesaria para promover, en el futuro, su propio desarrollo profesional.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

Nuestra sociedad atraviesa por una etapa de incesante desarrollo científico y tecnológico, lo que impone nuevas demandas en la formación de recursos humanos. Esto plantea un enorme desafío a las instituciones educativas (escuelas), a las que se les deja la responsabilidad de la transformación de individuos, capaces de dar respuesta a los requerimientos cada vez más cambiantes de la sociedad a la que se incorporan. Sin embargo, parece advertirse un consenso general de que la labor educativa no está alcanzando los niveles de preparación científico - técnico ni la formación cultural y humanística esperada.

De esta manera, se hace necesaria la actualización o formulación de los planes y programas de estudio que atiendan de manera coherente los procesos de cambio y modernización que inciden en el desarrollo de nuestra cultura en general. Un ejemplo claro de esta preocupación es la reforma curricular que impulsó el Proyecto de Modernización Educativa en el país para el nivel básico, que entró en vigor en 1994.

Uno de los contenidos considerados valiosos para el desarrollo formativo de los individuos en el ámbito escolar es el contenido matemático. En este sentido existe actualmente una fuerte preocupación para que dicho conocimiento llegue de forma significativa al estudiante de tal manera que pueda, además de dotarlo de una herramienta poderosa para la resolución de problemas diversos, ser la vía mediante la cual se promueva el desarrollo de habilidades cognitivas que le permitan entender, explicar y dar respuesta a los problemas de la vida contemporánea.

En el caso de las instituciones de educación superior, se advierte la necesidad de fortalecer en su aspecto formativo las carreras de ciencias e ingeniería, reconociendo de entrada la importancia que representa atender la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, particularmente del cálculo diferencial e integral.

Debido a su importancia en el acercamiento al desarrollo del pensamiento matemático avanzado y a su alto valor científico y tecnológico, al cálculo se le confiere un lugar preponderante en las currículas de matemáticas de esos niveles, en las áreas de ciencias e ingeniería.

Lo anteriormente expuesto exige que los profesores, particularmente en dichas áreas, precisen de una adecuada preparación para su práctica profesional, que implique un replanteamiento de la figura del profesor: dejar de ser considerado un ejecutor de planes y programas de estudio para concebirlo como un profesional de la docencia con una amplia visión de nuestra problemática social y una preparación profunda en aspectos pertinentes de índole científico y psicopedagógicos.

En lo que respecta a la situación del trabajo docente en la Universidad de Sonora, Estévez y Nieblas (1994) señalan que estudios exploratorios realizados en dicha institución, han permitido identificar algunos problemas que enfrenta la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos escolares, de entre los cuales destacan:

- La mayoría de los maestros tienen pocas oportunidades de investigar aspectos de la disciplina en torno a la que ejercen la docencia, mucho menos de investigar problemas relacionados con su enseñanza.

- Las condiciones laborales no favorecen la innovación en las formas de concebir y practicar la función docente.

- El docente desconoce los procesos cognitivos que subyacen en el aprendizaje de las matemáticas y en consecuencia las alternativas para mejorar su actividad de enseñanza.

- El maestro desconoce los medios para diagnosticar el nivel de conocimientos previos, e incluso el grado de comprensión que van logrando sus alumnos durante el aprendizaje.

Tales condiciones muestran una necesidad que actualmente no pasa desapercibida para muchos de nosotros: investigar de qué modo es posible contribuir, dentro de los márgenes institucionales, para ayudar a los profesores a desarrollar un conocimiento más pertinente, que implique el "perfeccionamiento" de su actual práctica docente.

En la Universidad de Sonora se cuenta con un grupo de trabajo que sustenta el Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa (PMME) cuyo propósito es impulsar la formación de docentes e investigadores que enfrenten de manera adecuada la problemática existente en los procesos de enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas en situación escolar. Ubicados en este contexto, estamos conscientes de la necesidad de buscar los medios que contribuyan a una más adecuada preparación de nuestros profesores de matemáticas, particularmente en el área de Cálculo, que les permita llevar a cabo una actividad más congruente con su papel educativo. Por tanto, en este proyecto presentamos una perspectiva de investigación que nos parece útil para concebir un acercamiento al problema de la profesionalización docente en dicha institución.

1.2 El Problema de Investigación

En este proyecto enfocamos la atención en profesores de matemáticas que imparten cursos de Cálculo en el área de ciencias e ingeniería de la UNISON. El objeto matemático involucrado es el Teorema Fundamental del Cálculo. La elección de este objeto tiene un fondo sistémico: *relaciona los objetos básicos del Cálculo en un sólo resultado.*

Nuestra reflexión parte de que el significado que los profesores deben poseer con relación a los teoremas básicos del cálculo, debe ir más allá que considerarlos como meras verdades matemática cuyo enunciado y demostración pueden seguirse fácilmente de los textos tradicionales. Como primer acercamiento al conocimiento de lo que para ellos significa el teorema señalado, describiremos como es implementado 0regularmente en las clases de matemáticas.

La experiencia propia en los cursos de Cálculo Integral, así como una cercana relación con compañeros docentes que imparten esa materia, nos ha permitido detectar, aunque no de manera sistemática, las siguientes situaciones:

- En los cursos de cálculo integral, el Teorema Fundamental del Cálculo en realidad tiene un mayor reconocimiento, por parte del profesor, por su consecuencia inmediata que expresa las integrales definidas como una resta y que nos quita el peso de calcular límites de sumas de Riemann que, aún en el caso de funciones elementales simples, son exageradamente difíciles de ejecutar, si es que se pretende llevar a cabo todo el proceso. Nos referimos a la expresión

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad donde \quad F'(x) = f(x)$$

- El énfasis en este último resultado permite al profesor concluir sobre la importancia de obtener la función antiderivada F y conduce una muy buena parte del curso a la obtención de dichas antiderivadas mediante diversos métodos como el de sustitución, integración por partes, fracciones parciales etc.

- Posteriormente se aplica el teorema para evaluar la integral en el contexto de aplicaciones estándar como el cálculo de áreas entre curvas, volúmenes de sólidos de revolución, cálculo de trabajo entre otras.

- Generalmente, las tareas suelen realizarse dentro de un repertorio de funciones con comportamiento diferenciable y cuya antiderivada es representable en términos de funciones elementales.

Tales consideraciones nos condujeron a las siguientes preguntas:

- ¿Es la evaluación de la integral como una resta el significado que se debe poseer del Teorema Fundamental del Cálculo?

- ¿Qué significado más pertinente se puede proponer para la noción *comprender un teorema*?

- Si lo anterior es afirmativo ¿Existirán obstáculos representativos asociados con el teorema señalado en el marco de dicha comprensión?

En definitiva, concebimos el proyecto titulado:

Obstáculos en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo

Cuyo problema de investigación es:

Detección de obstáculos en la comprensión del enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo

1.3 Justificación

"En la actualidad, asistimos a un interés creciente en la educación matemática hacia la problemática planteada por la formación de profesores de matemáticas, debido, entre otras razones, al fracaso escolar, la insatisfacción consecuente de los profesores y las nuevas reformas curriculares, las cuales exigen una renovación del profesor en ciertas materias. Estas reformas plantean también un cambio de paradigma educativo, que es paralelo al desarrollo de un nuevo paradigma epistemológico en la matemática (Ernest, 1991; Cooney, 1994)" (Citado en Godino, Batanero y Flores, 2000:1).

La problemática que supone la formación de profesores, es un asunto complejo y que debe ocuparnos específicamente en el contexto de nuestra institución. Para tal efecto proponemos una perspectiva desarrollando las ideas que presentamos a continuación:

a) Importancia de investigar en el pensamiento de los profesores

b) Necesidad de indagar en el pensamiento matemático de los profesores de matemáticas de la Universidad de Sonora

c) Los obstáculos: Una herramienta para explicar dificultades en la adquisición significativa de los objetos matemáticos

a) Importancia de investigar en el pensamiento los profesores

De diversos autores, Contreras (2000), hace los siguientes señalamientos:

- "La actividad que los profesores desarrollan en sus aulas parece estar orientada por sus concepciones (Greeno, 1989). Éstas son como un filtro que regula el estilo personal de enseñar y las decisiones que se toman durante la instrucción (Grossman, Wilson y Shulman 1989; Llinares, 1990; Lubinski y Vacc, 1994; Sierpinska, 1994): las opciones que se toman respecto al contenido, la metodología o los recursos a emplear o los distintos momentos de evaluación, su propia estructura y las interacciones educativas, si entendemos todos estos elementos como integrantes de un complejo marco de relaciones entre el contenido matemático, los alumnos y el profesor (Llinares, 1991 a)".

- "El pensamiento, la planificación y la toma de decisiones de los docentes constituyen una parte considerable del contexto psicológico de la enseñanza. En ese contexto se interpreta y se actúa sobre el currículo; en ese contexto enseñan los docentes y aprenden los alumnos. Los procesos de pensamiento de los maestros influyen sustancialmente en su conducta e incluso la determinan" (Clark y Peterson (1989)).

- "Algunas concepciones, como las relativas a la naturaleza de la disciplina que se imparte, mantienen un cierto estatus contaminante. De forma consciente o (como ocurre la mayoría de las veces) inconsciente, los profesores "comunican" a sus alumnos informaciones de las que, incluso, pueden no estar convencidos. Esta idea, señalada ya por Thompson (1985), pone de relieve uno de los posibles orígenes de las concepciones de los profesores: sus propias experiencias como estudiantes".

- Furió (1994), señala que la investigación didáctica apunta hacia un cambio de paradigma en el ámbito de las concepciones. En palabras del propio autor "se está pasando de investigar lo que hace y piensa el alumno en clase hacia lo que piensa y hace el profesor, tratando de analizar su actividad y así poder descifrar las claves de su desarrollo profesional" (p.188).

- Las concepciones de los profesores, como dicen Brown y Cooney (1982) (en el sentido de conocimiento profesional) son la base en la que se deben fundamentar las investigaciones que pretendan comprender las decisiones que éstos toman, idea que comparte Kesler (1985), que también mantiene como objetivo tenerlas en cuenta en los programas de formación de profesores.

b) Necesidad de indagar en el pensamiento matemático de los profesores de matemáticas de la Universidad de Sonora.

La formación de profesores de matemáticas en la Universidad de Sonora, es un asunto que no debe ser ignorado pues es patente que, por diversas razones, la preparación profesional no parece ser suficiente en relación con las demandas de la sociedad actual que requiere de ciudadanos con capacidades para razonar lógicamente, resolver problemas no rutinarios, comunicar ideas matemáticas, etcétera.

No es difícil encontrar comentarios como "el alumno no tiene deseo de superarse", "no tiene la cultura del esfuerzo", "no tiene vocación para las matemáticas", "el maestro del curso anterior no cubrió temas que se necesitaron" etcétera. Estas concepciones reflejan de entrada una postura ingenua respecto al papel que como docente jugamos en el proceso de enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas.

Desde nuestro punto de vista, si bien es necesario buscar propuestas didácticas útiles o de entender mejor los procesos cognitivos y las dificultades de los estudiantes, creemos también necesario indagar en los procesos mismos del pensamiento matemático de los profesores que, en nuestro contexto institucional, no se analiza y menos se investiga.

En la Universidad de Sonora, los profesores de matemáticas conforman una comunidad con una diversidad formativa y de intereses académicos en el que se pueden distinguir aquellos que investigan aspectos relacionados con su especialización matemática, matemática educativa y aquellos, el sector más amplio, que simplemente están dedicados a dar clases de matemáticas en las diferentes áreas profesionales en el que prestan sus servicios. En dicha comunidad podemos afirmar que si bien es cierto que se cuenta con profesores que, con referencia institucional, poseen una base rica de significados respecto a la materia que imparten, es patente que no existe uniformidad en ese sentido y en todo caso resulta interesante indagar y determinar aspectos que puedan ser útiles en la pretensión de conocer el estado, las necesidades y los requerimientos matemáticos que se precisen de los docentes en ejercicio.

Para intentar dar consistencia a tal necesidad, asumimos dos perspectivas que nos parecen factores determinantes en nuestras significaciones o comprensiones matemáticas: la experiencia formativa y la práctica docente.

Experiencia formativa: La experiencia formativa particularmente de los profesores de matemáticas, adscritos al área de ciencias e ingeniería, ha sido predominantemente de carácter disciplinar. Como sabemos, la filosofía de este enfoque consiste en derivar una teoría matemática partiendo de un conjunto de axiomas y de la aplicación de reglas de inferencia lógica para establecer la verdad de los teoremas. En otras palabras, el aspecto didáctico se planteó en términos de la organización propia de los sistemas axiomáticos que creemos, siendo optimistas, más congruentes con las necesidades de un futuro matemático profesional que de alguien que va a dedicarse principalmente a la docencia. En la realidad, es difícil pensar que halla algún matemático que pueda prescindir de la actividad de enseñar matemáticas.

Ahora bien, si entendemos que el docente tiene el compromiso profesional de proponer una adecuada base de matemáticas a sus estudiantes, debemos reconocer su necesidad de contar, como referencia cognitiva, de un soporte significativo rico y funcional que permita mejores posibilidades para tal efecto. No obstante, es de aceptarse que tal soporte precise de fortalecerse dado que las condiciones de una experiencia formativa que tuvo lugar en el seno de una enseñanza de las matemáticas de índole disciplinar, como proyecto exclusivo de enseñanza, no asume la complejidad cognitiva y didáctica que suponen los objetos matemáticos.

Más precisamente, en el contexto de formación de profesores de matemáticas se afirma que:

Una formación del profesor exclusivamente matemática o psicopedagógica de índole generalista no parece suficiente, dada la complejidad cognitiva y didáctica que presentan los conceptos y métodos matemáticos específicos (Lappan y theule-Lubienski, 1992)".
(citado en Godino, Batanero, Flores, 2000:1)

Su práctica docente: Posteriormente, ya como docentes nos apoyamos en ciertas prácticas "heredadas" o adquiridas a lo largo de nuestra experiencia en el aula, pero que regularmente hacen patente comunes denominadores como los siguientes: utilizar sistemáticamente más ejercicios que problemas, valorar más las respuestas que las preguntas, operar más que analizar, etcétera.

Asumimos que tanto la formación señalada seguida de una actividad didáctica particularmente desproblematizada, al menos con el tiempo, pueden contribuir a la adquisición de actitudes inerciales o al riesgo de "desvanecimiento" de significados que pueden limitar las posibilidades de análisis e intervención ante situaciones problemáticas con requerimientos que exigen puntos de vista diferentes. Esto supone una implementación menos rica de matemáticas en las aulas.

En definitiva, lo anterior parece sugerir que es más conveniente, hablando en términos generales, que los profesores de matemáticas precisen de una recuperación, profundización, y ampliación de significados desde un punto de vista epistemológico diferente. Esto nos parece fundamental si convenimos en la necesidad de:

- Hacer matemáticas en las aulas y

- Ser capaces de ayudar a los alumnos a que se comprendan mejor

No obstante, como señalan Porlán y Martín (1999), no se trata de "... una versión más o menos simplificada del conocimiento disciplinar. Ni tampoco coincide con el conocimiento que, de hecho, los profesores manifiestan o utilizan para intervenir en la realidad. Se trata más bien de una forma peculiar de conocimiento que incorpora e integra a ambos y que se construye teniendo en cuenta que la enseñanza es la práctica social de referencia... (p.125)". (Citado en Contreras y Blanco, 2000:5)

Por tanto, desde la perspectiva de la formación de profesores de matemáticas en ejercicio, de la Universidad de Sonora, consideramos necesario indagar, en un marco adecuado de la comprensión, en su pensamiento matemático a fin de buscar claves útiles que permitan contribuir, en el futuro, a su propio desarrollo profesional. Dicha indagación deberá tomar en cuenta las necesidades propias de los diversos colectivos de profesores[℘] ubicados en las diferentes áreas profesionales.

c) Los obstáculos: Una herramienta para explicar dificultades en el proceso de adquisición significativa de los objetos matemáticos

Desde un punto de vista teórico, la adquisición de significados o de comprensiones matemáticas puede analizarse bajo una perspectiva de construcción del conocimiento con base en que ciertos conocimientos previos necesitan modificarse o adecuarse para acceder a la adquisición de otros nuevos. En este sentido se dice que ciertas concepciones suelen oponerse al desarrollo de un conocimiento mejor y más adaptado que deben superarse para efectos de contribuir al logro de mejores y más profundas comprensiones. En particular, Brousseau (1983) propone el término *obstáculo* para referirse a una clase particular de conocimientos e identifica particularmente aquellas que

[℘] Profesores de matemáticas de cálculo, álgebra, etc. ubicados en áreas profesionales como Ciencias e Ingenieria, Químico biólogo, administración, etc.

tienen su origen en la propia complejidad de los objetos matemáticos (obstáculos epistemológicos), y las que tiene su origen en las elecciones didácticas para el desarrollo de las clases (obstáculos didácticos).
Lo anterior sugiere que dicha noción puede plantearse como un acercamiento, tanto al problema de la adquisición o comprensión de las matemáticas como al de la enseñanza misma.

El que existan obstáculos y que sea importante detectarlos se manifiesta por los numerosos trabajos de investigación, desarrollados en esta línea, en el campo de Matemática Educativa* Por citar algunas investigaciones reportadas, en el contexto del cálculo, señalamos las siguientes:

- Bouzzoui (1989), sobre obstáculos y concepciones del concepto de continuidad.
- Sierpinska (1985), Sánchez (1987), Sánchez y Contreras (1998), sobre la existencia de diversos obstáculos epistemológicos asociados a la noción de límite.
- Ruiz (1994), sobre las concepciones y obstáculos relativos al concepto de función. (citados en Contreras de la Fuente (2000)).

En definitiva, la indagación y el conocimiento de los obstáculos en el contexto del pensamiento de los profesores de matemáticas de la Universidad de Sonora, nos parece necesario en los siguientes aspectos:

- ✓ Permite explorar niveles de comprensión en los profesores y tener referente de sus propios requerimientos de significaciones.

- ✓ Es una forma de Invitar a la reflexión respecto a la complejidad cognitiva que los objetos matemáticos representan.

---

*Denominaciones, conceptualmente equivalentes, son utilizadas en otros lugares. Por ejemplo en países como EEUU e Inglaterra se traduce como "educación matemática" mientras que en España y Francia como "didáctica de las matemáticas".

- ✓ Es un acercamiento en la búsqueda de concientizar a los profesores de la existencia de los obstáculos e inclusive de sus propios obstáculos y que puedan actuar en contra de ellos.

1.4 Objetivos

Los objetivos que se persiguen en este trabajo son:

- ✓ Proponer criterios de comprensión para el enunciado de un teorema

- ✓ Mostrar que se reflejan obstáculos en los profesores, que no han sido superados, en la comprensión del enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo.

CAPÍTULO 2: FUNDAMENTOS

En este trabajo las nociones de objeto matemático, contexto, situación problemática e institución se usan del siguiente modo:

Objeto matemático: usado para designar abstracciones matemáticas tales como número, operaciones, función, teorema, demostración, etcétera.

Contexto: en términos generales nos referimos al escenario en el cual se ubica la actividad matemática del sujeto. Por ejemplo el contexto gráfico, numérico, algebraico, deductivo o validativo etc.

Situación problemática: es aquella situación que un sujeto enfrenta para su solución comprometiendo lo que sabe sin tener una respuesta inmediata o algoritmo accesible para tal fin.

Institución: usado en este trabajo para designar a un colectivo específico de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Las prácticas utilizadas en su campo contribuyen a caracterizar dicha institución. Ejemplo de tales colectivos son profesores de matemáticas (estudiantes) de los diversos niveles educativos, matemáticos profesionales, matemáticos educativos, etc.

2.1 Sobre la noción de comprensión

Es común utilizar la idea de comprensión en matemáticas como sinónimo de entendimiento, conceptualización, aprendizaje, o asociarlo con un conocimiento profundo de algún tema u objeto. Excepcionalmente se utilizan los términos piagetanos, asimilación- acomodación para sugerir la misma idea. Esto habla de cierto margen de libertad con que son utilizadas algunas palabras en educación matemática para expresar la idea de dicha noción. El término también es usado en diferente sentido de acuerdo a los contextos institucionales en que se aplica (comprender el concepto de número tiene diferente significado en primaria, secundaria, etc.), Igualmente se distinguen significados distintos en los contextos psicológico ó epistemológico. Adicionalmente se le confiere un sentido particular cuando se habla de evaluar la comprensión.

Existen diversos trabajos de investigación realizados por Sierpinska, Pierie y Kieran, Koyama (1993) (citados en Godino y Batanero, 1994), que ponen de manifiesto la importancia de la idea de "comprensión" en matemáticas. Pero la caracterización de la comprensión "de modo que clarifique su crecimiento, e identifique las acciones pedagógicas que la promuevan continúa siendo un problema" (Pierie y Kieran, 1994:165).

En lo que a nosotros respecta y para los propósitos de la presente investigación, postularemos una serie de aspectos cognitivos que asumiremos como criterios básicos que la actividad del sujeto (profesor) debe reflejar, para emitir el juicio de que comprende el enunciado de un teorema matemático.

2.2 Aspectos de comprensión de un teorema matemático

Desde la perspectiva del conocimiento del profesor, asumimos que la comprensión de un teorema matemático a enseñar, supone algo más allá que entender que es una afirmación matemática verdadera cuyo enunciado y prueba puede reproducirse, en un momento determinado de la clase, siguiendo fielmente a un determinado texto matemático.

En principio debemos reconocer la unidad entre el enunciado y su prueba matemática o demostración. La prueba matemática le otorga el carácter de verdadero al enunciado en el marco del sistema axiomático donde se ubique y sólo así es que es llamado *teorema*. Por ejemplo, el enunciado que estableció por muchos años la conjetura de Fermat pasó a ser llamado teorema, y a formar parte de la cultura matemática o de la teoría aritmética, cuando fue posible encontrar una demostración rigurosamente convincente desde la perspectiva de los matemáticos profesionales. Por tanto, desde el punto de vista de la institución matemática, la noción de comprensión de un teorema debe considerar los siguientes dos aspectos:

- El enunciado
- El procedimiento de la demostración.

En lo relacionado al *enunciado* de un teorema, se consideran varios aspectos cognitivos importantes que deben articularse: Identificar y comprender los términos o conceptos básicos que emplea, interpretar su significado, identificar las hipótesis (si estas son necesarias y suficientes) y la tesis, darse cuenta de la necesidad de las hipótesis etcétera.

En lo que respecta al *procedimiento de demostración* se mencionan los siguientes: reconocer los términos empleados, recordar resultados (conceptos, teoremas, algoritmos) y relacionarlos oportunamente, con la proposición objeto de estudio, aplicar correctamente las definiciones, las reglas de inferencia, entender el razonamiento seguido desde el punto de vista global, etcétera.

2.3 Criterios de comprensión para el enunciado de un teorema matemático

Específicamente en esta investigación, estamos interesados en proponer lo que entenderemos por comprensión del enunciado de un teorema matemático. Para tal efecto debemos contestar la pregunta:

¿Qué requisitos podemos pedir para emitir el juicio de que el enunciado de un teorema matemático específico es comprendido?

Algunos elementos cognitivos para su comprensión ya se han señalado anteriormente. Para complementar las ideas señalemos los siguientes elementos orientadores.

Godino y Batanero (1998) señalan que "... la emisión de un juicio sobre la comprensión de un sujeto no puede basarse exclusivamente en que sea capaz de seguir 'la regla de uso' de un término o expresión matemática, o que sea capaz de identificar otros objetos con los cuales se relaciona. Es preciso que reconozca una finalidad, un para qué de tal objeto en una clase de situaciones problemáticas".

Además dichos autores utilizan cuatro hipótesis sobre las matemáticas para su teoría sobre el significado y comprensión de los conceptos matemáticos (1994, 1999), que también asumiremos en este trabajo:

- La matemática es una actividad humana que implica la solución de situaciones problemáticas.

- Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o colectivos específicos implicados en el estudio de tales problemas. En consecuencia los objetos matemáticos son entidades culturales socialmente compartidas.

- La matemática es un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones de los problemas. Los sistemas de símbolos tienen una función comunicativa e instrumental.

- La matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado.

Dichas hipótesis, toman en cuenta concepciones de carácter cognitivo y epistemológico de las matemáticas pues se admiten las facetas de lenguaje simbólico, cuerpo lógicamente organizado de conocimientos y socialmente compartido y como actividad humana. Además las matemáticas como conocimiento cultural socialmente compartido exige de nuestra propuesta, atender a las características propias del colectivo de sujetos a quien va dirigida la investigación que en nuestro caso son: *profesores de matemáticas de la Universidad de Sonora, que imparten cálculo en el área de ciencias e ingeniería.* En este caso asumimos que la cultura matemática de referencia debe tener correspondencia con las directrices institucionales determinados por los textos de cálculo y en los cuales ubicamos, en la teoría de integración de Riemman, al Teorema Fundamental del Cálculo.

En concordancia con los intereses de nuestra investigación, debemos considerar cierta clase de situaciones problemáticas, en el marco de los significados de referencia, para analizar si en las respuestas de los docentes se reflejan obstáculos.

Para efectos de postular criterios de comprensión del enunciado de un teorema, proponemos los siguientes:

C1. Reconstruir una versión correcta e interpretarlo adecuadamente en algún contexto.

C2. Identificar los términos u objetos matemáticos básicos que se ponen en juego.

C3. Argumentar, con situaciones matemáticas o ejemplos, el porqué el teorema sólo puede garantizar la(s) conclusión(es) bajo la(s) hipótesis establecida(s).

C4. Utilizar el enunciado adecuadamente según sus diferentes usos y contextos en el que ofrece soluciones.

2.4 Elementos significativos de referencia en el caso del enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo

Señalaremos algunos elementos significativos de referencia, según los criterios señalados, para el caso del enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo, con la pretensión de ejemplificar, sin la pretensión de ser exhaustivo, la idea de conocimiento institucional.

El sentido de "versión correcta" del teorema que aparece en el criterio *C1*, salvo estilos personales de presentación, se refiere a una enunciación que pueda hacerse corresponder con una versión institucional o una equivalente a ella. En el caso del Teorema Fundamental del Cálculo encontramos enunciados como los siguientes:

1. **Teorema** : Sea f integrable sobre $[a,b]$ y defínase F sobre $[a,b]$ por

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx.$$

Si f es continua en $c \in [a,b]$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Una versión más débil es:

2. **Teorema**: Si f es una función continua sobre $[a,b]$ y si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ entonces F es diferenciable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$.

Cuyo equivalente se enuncia como

3. **Teorema:** Si f es una función continua en $[a,b]$ y $f(x) = F'(x)$ para alguna función F entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Respecto a los términos u objetos matemáticos básicos que se ponen en juego y que estipula *C2*, se refiere a aquellos que son señalados de forma explícita o implícita en la estructura simbólica del teorema. En este caso se atiende a la ubicación del teorema dentro de la organización lógica de la disciplina y en función de la versión presentada. Por ejemplo para la versión (2) tenemos:

Hipótesis: función real de variable real f, la continuidad (global) de f, la función integral F (como función de límite superior), el intervalo cerrado $[a,b]$, igualdad como regla de correspondencia.

Conclusión: diferenciabilidad, antiderivada de una función, igualdad como identidad.

El criterio *C3* refleja que la comprensión del enunciado de un teorema supone tener en mente su ámbito de validez (generalidad) funcional. Debemos conocer y dar argumentos matemáticos del porqué el teorema deja de ser cierto cuando la(s) hipótesis no se cumple(n), es decir, entender, por ejemplo, que la continuidad es una condición suficiente, no necesaria, y ejemplificar que fuera de esta(s) hipótesis, la conclusión no se sostiene.

Finalmente *C4* refleja que la comprensión de un teorema requiere conocer sus diferentes usos y los diferentes contextos en el que el teorema ofrece soluciones. Por ejemplo:

- Para evaluar una integral definida para el cálculo de alguna cantidad específica: áreas, volúmenes, longitudes, distancias recorridas, etcétera.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Para construir una primitiva de una función continua: Utilizada por ejemplo para resolver o representar la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condición inicial.

Para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

podemos escribir su solución como:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)dt + y_0$$

- Para analizar el comportamiento diferenciable de la integral, vista como una función real de variable real, a partir de la función integrando.

- Para demostrar otros resultados: los métodos de evaluación de integrales definidas, Teorema de Taylor, etcétera.

Cabe señalar que nuestro modelo propuesto para investigar en la comprensión del enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo, precisa perfeccionarse de tal forma que pueda ser más útil y flexible en este y otros contextos institucionales. Por lo que a nosotros respecta, dicho modelo será nuestra base "axiomática" con la cual formularemos cuestionarios y analizaremos la actividad de los profesores bajo a estudio.

2.5 La noción de obstáculo

De acuerdo a nuestro modelo de referencia propuesto, una insuficiente comprensión del enunciado del Teorema Fundamental del cálculo, seguramente se manifiesta a través de dificultades o errores en el proceso de resolver problemas en los que ha de comprometerse. Una postura teórica explica que regularmente dichas situaciones no necesariamente deben entenderse como sinónimo de incompetencia o falta de aptitud del individuo, sino más bien como un fenómeno didáctico justificado bajo la óptica de un mecanismo de construcción de conocimientos cuyo eje de desarrollo gira alrededor de la noción "obstáculo". Esta idea (obstáculo epistemológico), citada por Brousseau (1983), fue introducido por Gastón Bachelard en 1938: "no se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad, la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano; es en el acto mismo de conocer íntimamente que aparecen por una suerte de necesidad funcional lentitudes y problemas... Uno conoce contra un conocimiento anterior."

El concepto de obstáculo se incorpora, en 1976, a la Didáctica de las Matemáticas (denominación utilizada en Europa continental cuya versión en México es Matemática Educativa) para desarrollar una teoría que explica la existencia de errores y dificultades especiales en el proceso de adquisición de nuevos conocimientos por parte del que aprende. En esta teoría, un obstáculo es un conocimiento que permite resolver un conjunto de tareas en términos adecuados, pero que se muestra limitado, inapropiado, cuando se aplica a casos más generales. Esto permite mostrar que el error no necesariamente tiene el rol simplificado que comúnmente se le atribuye como se señala en la siguiente cita:

"... el error no sólo es el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar, como lo conciben las teorías conductistas; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, que incluso habiendo sido exitoso, se presenta como falso e inadaptado..."(Brousseau, 1976).

Brousseau propone una caracterización de obstáculo la cual presentamos con el sustantivo "sujeto":

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.

- El sujeto utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia.

- Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente.

- El sujeto resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor.

- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo de forma esporádica.

Como podemos deducir de la caracterización anterior, el éxito pragmático de una concepción permite mantenerla y conservarla en nuestro pensamiento debido fundamentalmente a su viabilidad. Esto explica en buena medida la resistencia al cambio y su persistencia cumpliendo la función de obstáculo en el sentido propuesto.

Como ya se ha señalado, en el contexto de los profesores de nuestra institución, los obstáculos son admisibles asumiendo los siguientes aspectos:

- Una formación disciplinar que propone una didáctica ajena a la filosofía de los obstáculos, es decir, a la implementación de problemas y conflictos cognitivos necesarios para contribuir a la aparición y superación de obstáculos.

- Una práctica docente regularmente desproblematizada que puede contribuir al fortalecimiento de obstáculos no superados y al posible desarrollo de otros.

Encontrar dichos obstáculos y superarlos parece necesario para la construcción de comprensiones más adecuadas ó mejor adaptadas, lo que supone revisar nuestros propios esquemas de pensamiento ya hechos y si es preciso, actuar en contra de ellos, construyendo nuevos y más ricos significados, pues "... en efecto, conocemos contra un conocimiento anterior, destruyendo los conocimientos mal hechos, sobrepasando aquello que, en el espíritu mismo, constituye un obstáculo a la inteligencia" (Bachelard, 1938).

CAPÍTULO 3: MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

El método de investigación utilizado en el presente proyecto es de carácter cualitativo - interpretativo y toma en cuenta los siguientes aspectos: el interés de la investigación, el marco teórico que la sustenta, la población a quien va dirigida. Describiremos a continuación cómo conformaremos la estrategia a seguir desde una perspectiva sistémica de los puntos anteriormente señalados.

3.1 Enfoque metodológico

Desde el punto de vista de la naturaleza del problema, se trata de indagar en el pensamiento mismo de los profesores y mostrar que se reflejan las características propuestas a fin de constatar que cierto conocimiento cumple con la función obstáculo.

Debido al carácter impredecible y complejo de los procesos de pensamiento humano, el método de investigación utilizado es un "estudio de casos" motivo por el cual el análisis presentado, de la información obtenida, se realiza a través de un estudio fundamentalmente interpretativo.

Para calificar a una concepción como obstáculo, utilizaremos la caracterización hecha por Brousseau explicitada en nuestro marco teórico. Dicha formulación sugiere que para determinar obstáculos debemos analizar los errores que se producen o las dificultades que se presentan en la actividad de resolver problemas en el marco, según nuestro caso, del modelo de comprensión propuesto.

3.2 Población y elección de la muestra

La población que considera esta investigación se ubica en el contexto de la Universidad de Sonora y específicamente en el área de ciencias e ingeniería. Hasta el tiempo de redacción del presente trabajo, el dato es de aproximadamente 44 profesores de matemáticas impartiendo cursos en dicha área y de los cuales 24 de ellos cubren cursos de cálculo y ecuaciones diferenciales.

Los aspectos que contribuyeron en la selección de la muestra, en tamaño y forma, fueron:

- La noción de obstáculo: Es una concepción es que no debe plantearse como un fenómeno exclusivamente individual sino característico de un determinado grupo representativo en un contexto institucional particular.

- El tamaño de la población docente que trabaja en área de cálculo y ecuaciones diferenciales

- Su experiencia docente en el área del cálculo y su formación profesional

- Dichos aspectos fueron determinantes en el proceso de selección de la muestra quedando, como sigue:

    - Número de sujetos: 2
    - Experiencia docente: 15 años o más.
    - Área de mayor experiencia docente: el cálculo
    - Formación de los sujetos:

A. Licenciatura y maestría en matemáticas

B. Licenciatura en matemáticas y maestría en Matemática Educativa

3.3 Variables en el estudio

En el presente estudio se asumen como variables fundamentales: el contexto de los problemas, tiempos de aplicación, formación profesional, estrategias de solución, dificultades en el proceso de solución, obstáculos y tipos de obstáculos

3.4 Instrumentos de investigación:

Como fase exploratoria el instrumento de recolección de datos se dio a través de cuestionarios elaborados en cuatro bloques, de acuerdo al modelo de comprensión establecido. Los cuestionarios fueron aplicados a cada uno de los individuos de la población experimental de forma independiente. Cada caso lo hemos identificado utilizando las expresiones "sujeto A", "sujeto B".

Aunque se contemplaron otros medios disponibles como las entrevistas abiertas y la tecnología audiovisual que permitieran contribuir a la comprensión del caso, hasta la presentación de los resultados actuales no ha sido posible utilizarlos.

3.5 Proceso de recopilación de información

Como se ha señalado anteriormente, la obtención de la información fue a través de la aplicación escrita de cuestionarios diseñados bajo la perspectiva de nuestro modelo de comprensión y distribuidos en cuatro bloques, un bloque por cada sesión de trabajo y en el que se permitió emplear un espacio de tiempo que finalmente variaba según las restricciones que los sujetos imponían. Factores adversos, como la tensión con la que trabajaban, la sensación de inseguridad sobre la manera como abordaban las respuestas, el escepticismo respecto al "uso" de la información que reportaban, su actividad docente en curso, etcétera, hizo que en ocasiones fuese inevitable permitir que determinados bloques se entregaran a veces de un día para otro y en ocasiones de días.

Aún cuando las situaciones anteriores se presentaron durante el proceso, consideramos que la objetividad de nuestros primeros resultados no debe ser desestimada dado que nuestro énfasis gira alrededor del pensamiento de los profesores y no de los profesores mismos.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

El análisis de la información obtenida es realizada desde un punto de vista cualitativo - interpretativo sobre el proceso de elaboración de respuestas por parte de los sujetos. Este análisis pretende buscar patrones de pensamiento o concepciones que puedan considerarse como reflejo de obstáculos. Los cuestionarios aplicados fueron diseñadas en concordancia a los criterios de comprensión sin alguna intención declarada de hacer patente algún obstáculo documentalmente conocido.

La presentación de la información que reportamos y su correspondiente análisis, comprenden elementos de los cuestionarios aplicados y se ha organizado "caso" por "caso" intentando un seguimiento en las respuestas proporcionadas.

En lo que sigue usaremos las abreviaturas "P1-B1" para la pregunta o problema 1 del bloque o cuestionario uno, "P1-B2" para la pregunta o problema 2 del bloque o cuestionario dos, etcétera. Presentamos la redacción en el estudio del primer "caso" y en el siguiente, para efectos prácticos, se omitirá dichas redacciones. Se usará "R" para la respuesta del sujeto bajo estudio y "*TFC*" para referirnos al Teorema Fundamental del Cálculo.

4.1 Análisis para el sujeto A

Preguntas según los criterios de comprensión C1 y C2

P1-B1: ¿Cómo enunciarías el teorema fundamental del cálculo?

R: *Hay un resultado que nos permite relacionar el concepto de integral definida con el concepto de derivada. Este resultado es el Teorema Fundamental del Cálculo. Para una función* f *continua en* $[a,b]$ *siempre existe la integral sobre dicho intervalo. Entonces podemos definir una función* F *que nos dé la integral desde a hasta* x, *para cualquier* x *en* $[a,b]$, *es decir:*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

y esta función es derivable ó tiene derivada para todo $x\in[a,b]$ *y además* $F'(x)=f(x)$ *para todo* $x\in[a,b]$.

Análisis: De acuerdo a la redacción del enunciado presentado podemos observar lo siguiente:

1A. Se proporciona el enunciado del *TFC* en el contexto de la continuidad global.

2A. Aunque se establece la hipótesis de continuidad para garantizar la existencia de la integral, y la verdad de la tesis, no clarifica el carácter de suficiente de dicha hipótesis

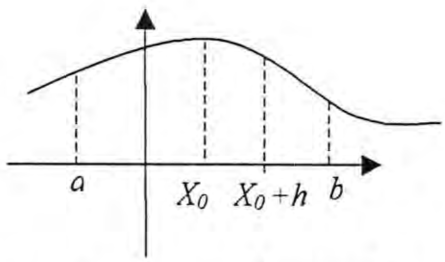
3A. Designa a la función integral con la expresión integral definida

P2-B1: Ilustra el teorema con alguna interpretación de su significado

R: *Supongamos que* $f(x)$ *tiene la siguiente gráfica para todo* $x \in [a,b]$ ... *entonces* $\int_a^x f(t)dt$ *lo podemos interpretar como el Área bajo la gráfica desde a hasta x...y si tratamos de obtener* $F'(x_0)$ *para algún* x_0 *en* $[a,b]$ *obtenemos*

$$F'(x_0) = \lim \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \ldots = \lim \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{h} = \ldots = \lim \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h}$$

que geométricamente



pero $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq hM$ *donde* $M = máx\{f(x) | x \in [x_0, x_0+h]\}$ *y cuando* $h \to 0$ $x_0 + h \to x_0$ *y*

$$\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} \leq M$$ *pero* $M \to f(x_0)$ $\therefore F'(x_0) = f(x_0)$. *Claro, habría que ver también para h<o pero esto nos da una idea del porqué el resultado.*

Análisis: En este caso el profesor refleja lo siguiente

4A. La interpretación del enunciado de TFC lo traduce al esquema de prueba aritmético que se apoya en elementos intuitivos para intentar hacer plausible la validez de dicho resultado. De hecho parece reflejar que la conexión derivada integral precisa de este punto de vista pues termina diciendo "*... esto nos da una idea del porqué el resultado*".

- Como observación, desde el punto de vista analítico el razonamiento aritmético-intuitivo falla en el paso al límite pues el hecho de que

$$\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} \leq M$$ y que $M \to f(x_0)$ cuando $h \to 0$ no obliga a que $F'(x_0) = f(x_0)$.

P3-B1. Señala los elementos matemáticos presentes que entran en juego en dicho teorema

R: *La continuidad, la integral definida, la derivada, el límite de una función.*

Análisis:

5A. Obsérvese que la función integral, como señalamos, es designada como integral definida.

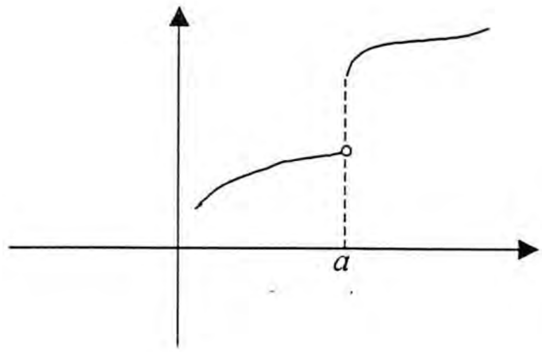
6A. No señala al intervalo cerrado como otro elemento básico

7A. Desde nuestra perspectiva, el señalamiento de la continuidad y la omisión del intervalo cerrado refleja un pensamiento continuo global de las funciones

En relación al punto C3 del modelo de la comprensión

P4-B1: Pensemos que un colega tuyo te dice que ha encontrado una función integrable, discontinua en $x = a$ y tal que la función integral F es derivable en dicho punto y en donde además se cumple que $F'(a) = f(a)$. ¿Podemos decirle que su hallazgo es falso porque contradice al teorema fundamental del cálculo?

R: *Sí. Si se calcula la derivada de* F *y* $h \to 0$ *por la derecha, entonces obtendrá* $f(a)$ *pero si lo hace por la izquierda su valor no es* $f(a)$.



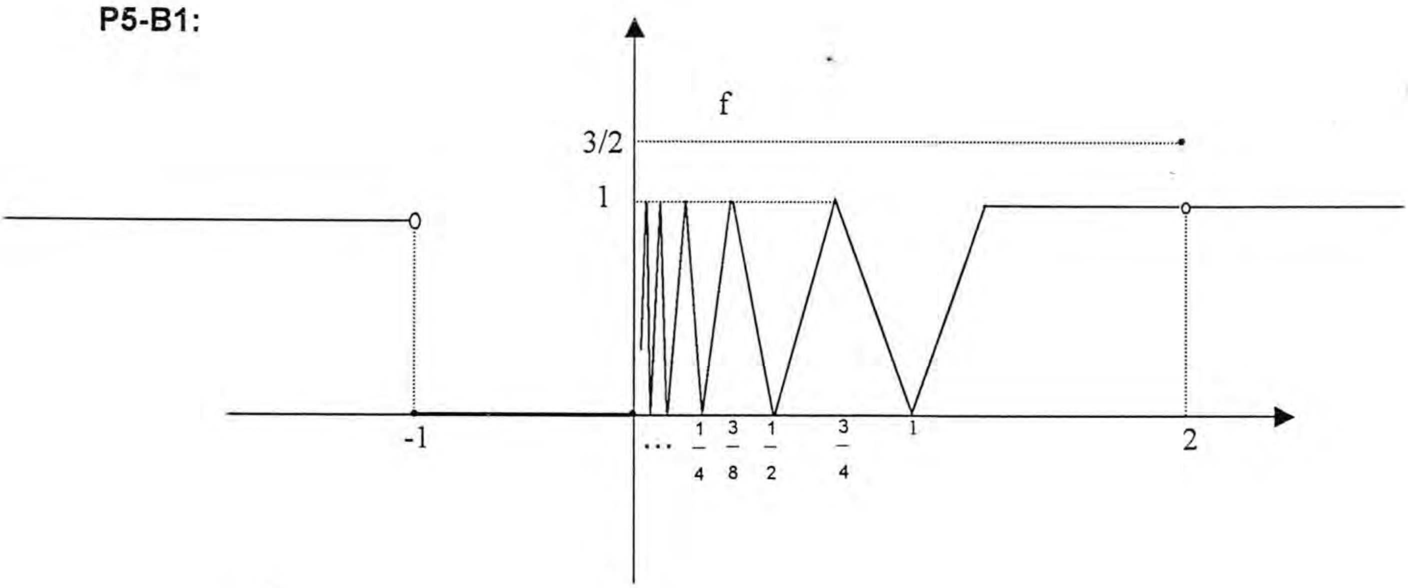
Análisis: En este caso se comete un error al no atender a la lógica del teorema ¿ Es un descuido involuntario? No obstante refleja que

8A. Sabe que las funciones integrables admiten la discontinuidad de salto presentada.

9A. Tiene claro que en un punto de discontinuidad de salto, la función integral no es diferenciable.

En relación al punto C4 del modelo de la comprensión: contexto gráfico- aritmético

P5-B1:



Si $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ determina, argumentando en cada caso, los puntos x en los cuales

i. F es derivable pero $F'(x)\neq f(x)$

ii. $F'(x)$ no existe

iii. $F''(x)$ no existe

En este contexto intentamos analizar si su propia versión limitaba sus posibilidades de análisis. Para ello incorporamos elementos que pudieran fungir de perturbadores en función de dicha versión. Tales elementos son:

- La función integral se fija en el origen que es punto de discontinuidad, no removible, de la gráfica proporcionada y no se hace explícito un intervalo particular. Se presenta además una discontinuidad removible y otra no removible.

- Los valores de la variable independiente pueden tomar valores tanto a la izquierda como a la derecha del límite inferior.

R:

i. *en x=2* $f(2)=\frac{3}{2}$ *y* $F(2)=\int_0^2 f(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2^i})(1)}{2}+\frac{1}{2}$ (éstas últimas igualdades aparecen tachadas)

$$F'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}=\ldots\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^{2+h} f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_2^{2+h} f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(1)}{h}=1\neq\frac{3}{2}=f(2)$$

ii. *En* $x=-1$, *pues por la derecha da 0 y el límite por la izquierda daría 1"*

iii. En x=-1, 0, $\frac{1}{2^n}$, n=1, 2, ... y $x=\frac{3}{2^m}$, m=2,3 ..., y 1, *2 pues la gráfica muestra picos en ésos puntos y* $f'(x)$ *sería* $F''(x)$.

Análisis:

11A. Usa el método aritmético para los cálculos correspondientes. Particularmente esto le dificulta, aunque ve que no es necesario, el valor de la integral en $x = 2$

12A. Se refleja que la discontinuidad en el origen no le plantea ningún inconveniente para la derivabilidad de la integral en los puntos de continuidad.

13A. No obstante, no hace ningún comentario respecto a la derivabilidad de la integral en el origen ¿Lo omite a propósito porque el manejo aritmético se le dificulta?

14A. El inciso tercero, refleja que analiza $F''(x)$ por medio de la derivada $f'(x)$ pues considera $x = 0$ y a $x = 2$ entre los puntos donde $f'(x)$ no existe. Particularmente también esto nos dice que está consciente de que el origen es un punto de discontinuidad.

15A. Por los primeros dos incisos se puede entender que el sujeto sabe de la no derivabilidad de la integral en el caso de salto y que es derivable en el caso de agujero o removible.

Primeras conclusiones:

4.1.1. Por el señalamiento en 13B, parece haber dificultad en el estudio de la derivabilidad de función integral en el caso de la discontinuidad en el origen presentada en P5-B1. Es posible que la tendencia al esquema de carácter aritmético para la integral sea un factor de tal dificultad pues se requiere analizar el cociente diferencial

$$\frac{\int_0^h f(x)dx}{h}$$ particularmente por la derecha.

No obstante un punto de vista geométrico de la situación en el caso de la integral definida desde el origen a uno de los puntos "pico" de la gráfica, revela que coincide con el área de la mitad del cuadrado con base igual a la distancia del origen a dicho punto. Con esta observación, se hace fácil escribir, por ejemplo, que si $h = \frac{1}{2^N}$ para algún N, se tendrá que:

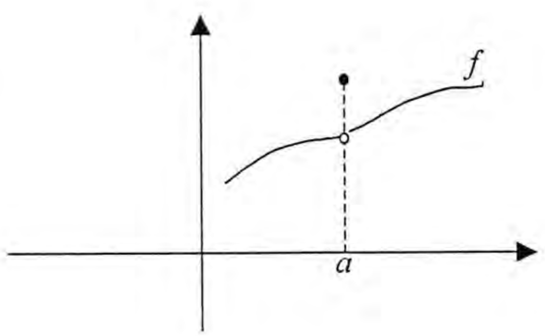
$$\frac{\int_0^h f(t)dt}{h} = \frac{\frac{1}{2^{N+1}}}{\frac{1}{2^N}} = \frac{1}{2}$$

$\forall N$. Dado que la derivada por la izquierda del origen es cero, la integral no puede ser derivable en el origen.

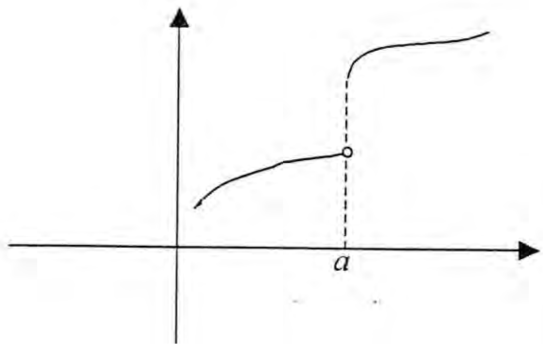
4.1.2. El analizar la segunda derivada de la función integral ($F''(x)$), como se indicó en 14B, por medio de la derivada de la función integrando ($f'(x)$), refleja que predomina en el pensamiento la igualdad $F'(x) = f(x)$. Esto indica que posiblemente la concepción reinante es la de función integral como antiderivada del integrando que es precisamente lo que indica la versión presentada del *TFC* bajo la hipótesis de la continuidad en el intervalo cerrado.

4.1.3. La respuesta incorrecta proporcionada en el P4-B1 en el que se acepta la supuesta contradicción parece fundamentarse, de acuerdo a 9B y 15B, en el conocimiento del sujeto sobre los siguientes dos comportamientos puntuales de la integral:

- En el caso de que se trate de una discontinuidad de agujero o removible, del tipo mostrado en la figura, la integral F es diferenciable en a y se tendrá que $F'(a) \neq f(a)$.



- En el caso de que se trate de una discontinuidad de salto (no removible), F no es diferenciable.

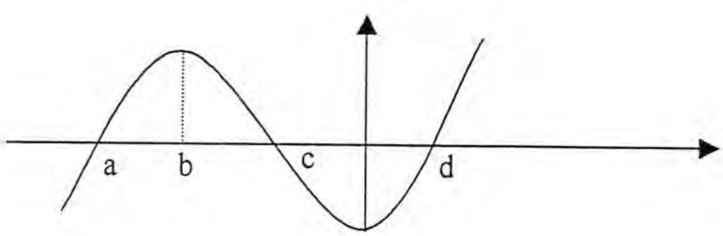


Nos parece que éstas representaciones de lo que significa una situación discontinua puntual, pertenece a una visión global de la continuidad que propicia la concepción de una discontinuidad como una situación puntual aislada como las presentadas por el sujeto.

Contexto gráfico-aritmético

P1-B4

Supongamos que se ha definido la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ de tal forma que su gráfica es la siguiente:



Si definimos $G(x) = \int_b^x f(t)dt$ ¿Cuál es el valor de $G(a)$, $G(c), G(d), G'(b)$ y de $G'(0)$?

¿Cuál es la gráfica de G?

R:

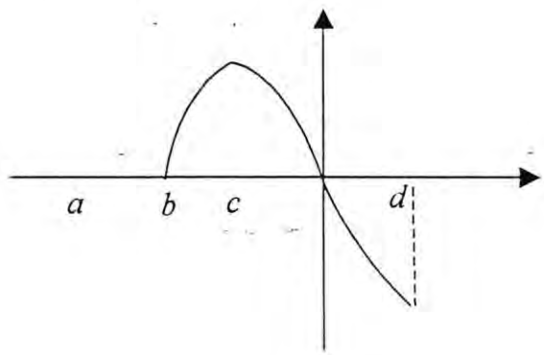
$$G(a)=\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt=-F(b)$$

$$G(c)=\int_b^c f(t)dt=\int_a^c f(t)dt-\int_a^b f(t)dt=F(c)-F(b)$$

$$G(d)=\int_b^d f(t)dt=F(d)-F(b)$$

$$G'(b)=\frac{d}{dx}\int_b^x f(t)dt\Big|_{x=b}=f(b)$$

$$G'(0)=\frac{d}{dx}\int_b^x f(t)dt\Big|_{x=b}=f(0)$$



Análisis:

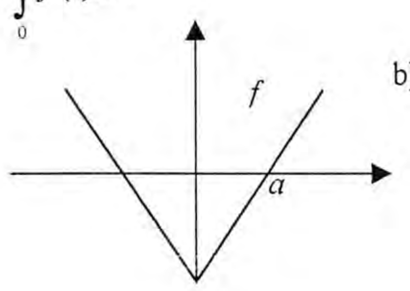
16A. El sujeto refleja un uso adecuado, en términos aritméticos, de la versión del teorema fundamental del cálculo en su modalidad de resta.

17 A. No obstante, el efecto gráfico de la función integral al trasladar el límite inferior de a a b no es visualizado correctamente a pesar de que los primeros cálculos logrados sugieren una traslación vertical y no horizontal como se refleja en la respuesta.

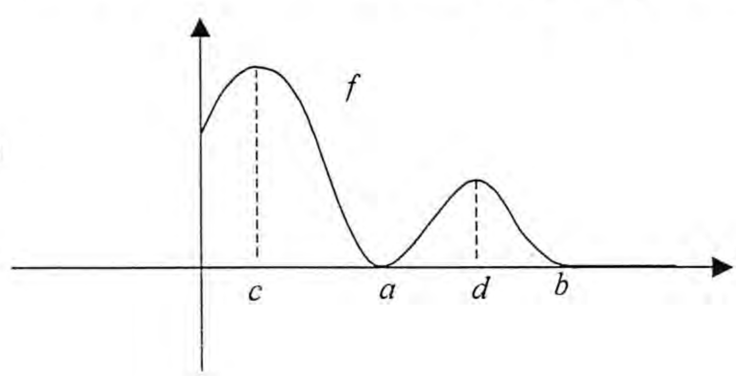
Contexto gráfico

P2-B4: Para las funciones que se muestran a continuación dibuja la gráfica de $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

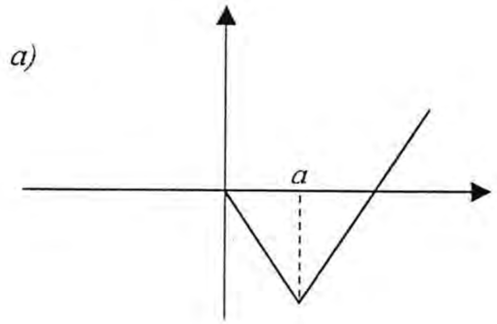
a)

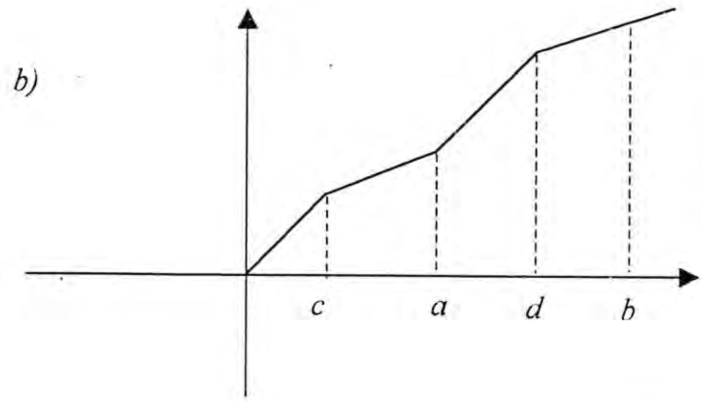


b)



R.





Análisis:

18A. El primer gráfico, al igual que el anterior, parece ser también el efecto de una traslación horizontal.

19A. Se observa que particularmente en los puntos donde el integrando y su derivada se anulan, se dibuja incorrectamente un punto "pico" que representa casos no derivables para la integral. Esto contradice su propia versión que asegura la derivabilidad de la integral en el caso continuo.

20A. Particularmente en el segundo caso, el hecho de la gráfica de la integral se construya a partir de trazos rectos, refleja no percibir "ondulaciones" o cambios de concavidad como lo debe sugerir la gráfica de f.

Segunda conclusión

4.1.4. Las respuestas proporcionadas reflejan dificultades para trasladarse del contexto aritmético al contexto gráfico de la función integral. Aún cuando el sujeto utiliza adecuadamente ambas versiones del *TFC,* no logra articular de manera eficiente el registro aritmético del comportamiento de la función integral con el correspondiente registro gráfico.

Contexto aritmético

P1-B3 Calcule los valores que se indican

i. $f(1)$ si $\int_0^x f(t)dt = 1 + t^2$

ii. $f(\ln 2)$ si $f(x) = \int_0^x f(u)du + 1$

Observación: En este problema no se especificaba respecto a la propiedad de continuidad de f ni de algún dominio específico para las funciones implicadas. De hecho, la continuidad es una propiedad atribuida de forma automática por los sujetos y las respuestas lo reflejan. Por otro lado debemos precisar ciertos puntos que tienen que ver con la primera integral.

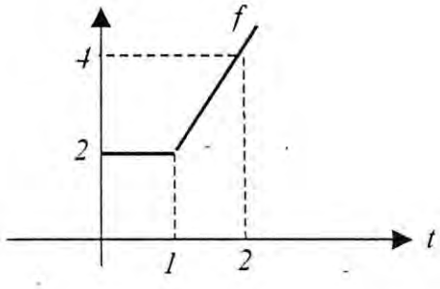
La manera en que se define la primera integral supone un elemento perturbador que, desde nuestra perspectiva, puede llevar a diferentes respuestas:

1. En la expresión de t del lado derecho, si ha de tener significado en dicho contexto, la integral ha de ser constante. En este caso uno debe entender que el integrando es nulo o bien es nulo a partir de un cierto valor en el que la función integral debe estar definida. En este caso, no tendría sentido preguntarse por $f(1)$..

2. Si dicha integral ha de hacerse corresponder con una expresión analítica, dicha expresión debe reflejar la variable que, como límite superior, depende la integral. Así que la expresión correcta debiera ser $\int_0^x f(t)dt = 1 + x^2$. No obstante dado que en $x = 0$ $\int_0^0 f(t)dt = 0 \neq 1$ esto, si es consistente, lo debe ser en algún dominio restringido de la función integral, que excluye al origen y contiene a la unidad, para el que hay una función continua $f(t)$ en el que la igualdad es correcta. Por ejemplo podemos escribir:

$$\int_0^x f(t)dt = 1 + x^2 = 2 + (x^2 - 1) = 2 + \int_1^x 2t\,dt \text{ para } x \geq 1$$

y a partir de aquí definir:



3. Simplemente derivar respecto de x (ó respecto a t) sin hacer ninguna consideración.

R.

i. $f(1) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt\Big|_{x=1} = \frac{d}{dx}[1+t^2]_{x=1} = [0]_{x=1} = 0$

i. $f(1) = \frac{d}{dt}\int_0^1 f(t)dt = \frac{d}{dt}[1+t^2]_{x=1} = [2t]_{t=1} = 2$

ii. $f(\ln 2) = \int_0^{\ln 2} f(u)du + 1$

Análisis

21A. Las respuestas dadas en los dos intentos del primer inciso reflejan la aceptación de la integral como una expresión analítica sin la persuasión de un análisis de congruencia de significado.

22A. Además, la tendencia a efectuar los cálculos, a operativizar, dificultan una actitud más crítica hacia una situación que puede tener sentido o no, a optar por otros puntos de vista más pertinentes.

23A. En el segundo inciso refleja que la dificultad del cálculo de $f(\ln 2)$ radica en que la función misma, es el integrando en el lado derecho y por ser incógnita, la integral no puede determinarse, es decir, no se puede evaluar. No obstante se trata de la función f tal que

$f(0)=\int_0^0 f(u)du+1=1$ y es su propia antiderivada, o bien que $f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du=f(x)$ (*TFC*). De aquí que sea de inmediato pensar en la exponencial $f(x)=\ell^x$ y por tanto $f(\ln 2)=\ell^{\ln 2}=2$

P2-B3: Halle la derivada de la siguiente función:

$$G(x)=\int_3^{\int_1^x \cos^3 tdt}\frac{1}{1+sen^6t+t^4}dt$$

R.

$$\frac{dG}{dx}=\frac{d}{dx}\int_3^{*}\frac{1}{1+sen^6t+t^4}dt$$

pero

$$*=\int_1^x\cos^3 tdt=\int_1^x\cos^2 t\cos tdt=\int_1^x(1-sen^2t)\cos tdt=\int_1^x\cos tdt-\int_1^x sen^2t\cos tdt=[sent]_1^x-[\frac{sen^3t}{3}]_1^x=$$

$$senx-sen1-[\frac{sen^3x}{3}-\frac{sen^3 1}{3}]=r(x)$$

$$\Rightarrow\qquad\frac{dG}{dx}=\frac{d}{dx}\int_3^{r(x)}\frac{1}{1+sen^6t+t^4}dt$$

análisis:

24A. Nuevamente el sujeto refleja un pensamiento operativo al evaluar la integral del límite superior sin ser esencial. El problema no radica en la evaluación de las integrales sino, en la identificación de la integral como la composición de las funciones

$$G(x)=\int_3^x \frac{1}{1+sen^6 t+t^4}\,dt \quad \text{y} \quad F(x)=\int_1^x \cos^3 t\,dt$$

que permite generalizar el *TFC* a través de la regla de la cadena o bien adoptar un punto de vista diferente que permita obtener o sugerir el resultado.

25A. En este caso nos parece que la noción de integral concebida en el intervalo de $[a,x]$, donde x es pensada como un extremo del intervalo y como una noción aritmética o analítica, dificulta el análisis de la función integral desde la perspectiva del límite superior como función de x.

P3-B3: Escriba una función que sea antiderivada de $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$

R.

$$u=\cos x \qquad dx=\frac{du}{-senx}$$
$$du=-senx$$

$$z=\arctan$$

$$F'(x)=\frac{1}{1+\cos^2 x} \Rightarrow F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$ (esta última parte la tacha)

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$

Análisis:

26A. El primer intento optado por el sujeto es la obtención de la antiderivada por el método de sustitución. Esto refleja, como se ha venido señalando, el método operatorio como un esquema de pensamiento predominante en el contexto de la integral.

27A. El hecho de aparecer tachado a la derecha de la implicación refleja una cierta incertidumbre de su respuesta (o de la implicación).

Tercera conclusión:

4.1.5. Del análisis previo podemos concluir que el significado de una situación puede quedar relegado a un segundo plano si lo que buscamos es la operatividad de la integral. Así mismo las dificultades se presentan cuando la operatividad de la integral, en este caso la evaluación, para el sujeto no es inmediata como lo confirma 23A y 24A.

Un contexto deductivo

P1-B2: Sea f una función continua y derivable en (a, b). El teorema del valor medio para derivadas (tvmd) establece que

$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ para algún $c \in (a, b)$

mientras que el teorema del valor medio para integrales (tvmi) establece que si f es una función continua en [a, b]

$\int_a^b f(x)dx = f(d)(b-a)$ para algún $d \in [a, b]$

Determine si es posible hacer válida alguna de las siguientes afirmaciones. Argumente su respuesta.

i. La conclusión del tvmd se deduce del tvmi

ii. La conclusión del tvmi se deduce del tvmd

iii. Ninguna de las dos anteriores es correcta

R. Para el sujeto A ninguna de opciones planteadas es posible ya que:

Pues el tvmd es consecuencia de la derivabilidad de la función y tvmi es consecuencia de la continuidad.

Posteriormente le pedimos mayor información respecto a su respuesta proporcionada y escribió el siguiente señalamiento:

... creo más conveniente dejar al alumno con la idea de que la derivada en algún punto es la pendiente de la recta tangente y que la integral en algún intervalo es el área bajo la gráfica de la función en el mismo intervalo y que por tanto basándonos en la derivabilidad y la continuidad de la función se pueden mostrar ambos resultados ...

Análisis:

28A. Su primera respuesta refleja simplemente que el sujeto no encuentra relación alguna entre ambos teoremas. No obstante en su segunda respuesta parece advertirse que desde el punto de vista geométrico, considera que la pendiente de la recta tangente y el área bajo una curva no tienen una conexión clara. De hecho la respuesta proporcionada a P2-B2 parece indicar que la vía aritmética es la que permite reflejar tal conexión.

29A. En este caso parece haber dificultades en relacionar de manera adecuada el *TFC* en un contexto de validación donde el requerimiento es la búsqueda de relaciones más que los desarrollos aritméticos u operatorios.

Conclusiones finales del análisis del *sujeto A*

Del análisis previo de las respuestas proporcionadas por el *sujeto A,* destacamos las siguientes situaciones:

- Desde el punto de vista metodológico, la concepción aritmética u operatoria en el contexto de la integral, si bien es utilizada con éxito en algunas situaciones presentadas, se refleja limitada para el sujeto en los casos en que los requerimientos de la situación problemática exige un punto de vista diferente. Esto puede justificarse a partir de las conclusiones previas 4.1.1 y 4.1.5

- Presenta dificultades en articular el contexto aritmético del comportamiento de la función integral con el correspondiente contexto gráfico, como aclara la conclusión 4.1.4

- La concepción de continuidad como una propiedad global de las funciones limita a su vez un significado más amplio de la noción de discontinuidad puntual. La concepción de discontinuidad que parece derivarse es la de una situación puntual aislada que particularmente en el contexto de la integral permitió el error lógico de acuerdo a la conclusión previa 4.1.3.

4.2 Análisis para el sujeto B

P1-B1:

R. *T.F.C.*

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C \quad si \quad F'(x) = f(x)$$

Análisis:

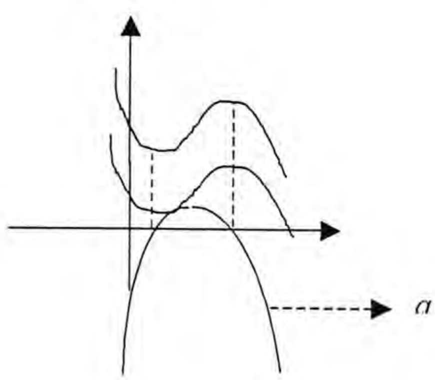
1B. La versión presentada del *TFC* refleja que para el sujeto dicho teorema dice que la función integral es antiderivada de la función integrando.

2B. El hecho de que las hipótesis no queden explícitamente establecidas, es indicio de que se piensa en el contexto de las funciones continuas o simplemente que no lo recuerde.

3B. El sujeto refleja un desvanecimiento de la estructura lógica del enunciado que dificulta recuperarlo.

P2-B1:

R. Sea $f(x)$ *una función cuadrática tal que su trazo sea la que se identifica con (a) en la figura siguiente. Entonces F(x) es cualquiera de las otras representaciones gráficas que se muestran en la misma figura.*



Análisis:

4B. Esta significación de la versión del sujeto del *TFC* refuerza aún más el papel predominante de la integral como antiderivada.

5B. De igual forma se refuerza una concepción global de la continuidad

P3-B1:

R. *Graficación de funciones, función pendiente, interpretación geométrica de la derivada, la derivada.*

Análisis:

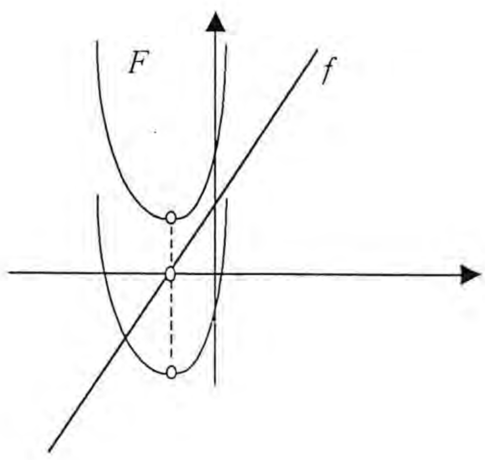
6B. En esta respuesta se refleja que la continuidad global y la diferenciabilidad son hipótesis prácticamente asumidas por el sujeto.

7B. El sujeto refleja un pensamiento sesgado a la visualización gráfica global de las funciones.

P4-B1.

R. *La continuidad o discontinuidad son elementos matemáticos no considerados. Sin embargo, se muestran ejemplos de funciones discontinuas para visualizar lo que ocurre con la función integral. Por ejemplo*

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$



Análisis:

8B. Su respuesta parece evadir la pregunta propuesta. No obstante, como se señaló en el punto 3B, refleja un insuficiente significado lógico del *TFC.*

9B. El ejemplo propuesto en el que marca la discontinuidad de la antiderivada en el punto de discontinuidad de la función(f no esta definida en dicho punto) refleja que más que en la función integral, que debe ser continua, se piensa en la antiderivada.

10B. Lo anterior le dificulta percibir que la integral y la antiderivada son conceptualmente diferentes y que no necesariamente coexisten en un mismo intervalo.

P5-B1: ***contexto gráfico-artmético***

R. $F(x)=\int_0^x f(t)dt \qquad \forall x\in(0,\infty)$

$$f(x)=\begin{cases}\vdots \\ -4x+4\ldots\ldots en\ldots\ldots(\frac{3}{4},1] \\ 3x-3\ldots\ldots en\ldots\ldots(1,\frac{4}{3}] \\ 1\ldots\ldots\ldots\ldots en\ldots\ldots(\frac{4}{3},2) \\ \frac{3}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots en\ldots\ldots x=2 \\ 1\ldots\ldots\ldots\ldots en\ldots\ldots(2,\infty)\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}\vdots \\ -2x^2+4x+c\ldots\ldots en..(\frac{3}{4},1] \\ \frac{3}{2}x^2-3x+c\ldots\ldots en..(1,\frac{4}{3}] \\ x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots en..(\frac{4}{3},2) \\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots en..x=2...o..no..existe \\ x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots en..(2,\infty)\end{cases}$$

$$F'(x)=\begin{cases}\vdots \\ -4x+4 \ldots\ldots\ldots\ldots en..(\frac{3}{4},1) \\ 3x-3 \ldots\ldots\ldots\ldots en..(1,\frac{4}{3}) \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots en...(\frac{4}{3},2) \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots en..x=2..o..no..existe \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots en...(2,\infty)\end{cases}$$

luego:

i) $F'(x) \neq f(x)$

ii), iii). $F'(x)$ *y* $F''(x)$ *no existen en los puntos extremos de cada intervalo. No tiene sentido hablar de la recta tangente al extremo final del trozo de una curva..*

Análisis:

11B. En esta respuesta se presentan serias dificultades para analizar la derivabilidad de la función integral.

12B. Su concepción de integral como antiderivada y como una función representable analíticamente, limita sus posibilidades de análisis en el contexto aritmético.

13B. La respuesta al primer inciso refleja que se piensa en una diferencia entre funciones que manifiesta una concepción de integral como una representación global de la antiderivada de la función integrando.

14B. El punto de discontinuidad $x=2$ le representa un conflicto cognitivo pues no está seguro del comportamiento de la integral en dicho punto.

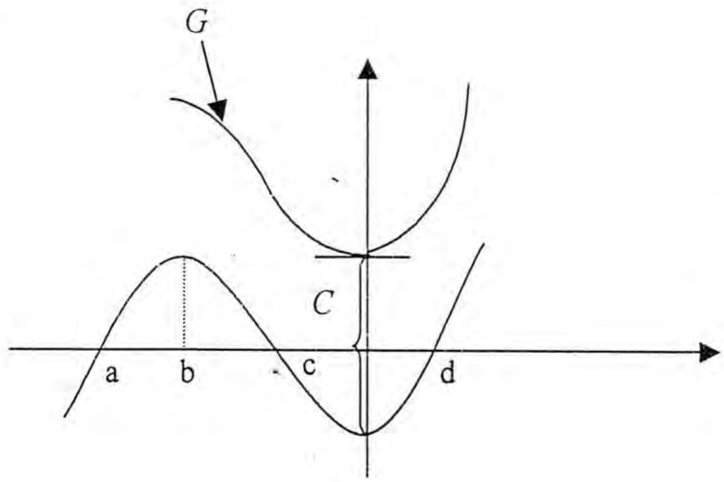
15B. El sujeto explícitamente refleja la concepción de que no tiene sentido hablar de la derivada (recta tangente) en los extremos de los intervalos aún cuando el contexto indica que la función no esta definida por trozos.

Primeras conclusiones

Del análisis previo podemos destacar lo siguiente:

4.2.1. El sujeto refleja la concepción de que la integral es antiderivada de la función lo que le dificulta percibir que conceptualmente son diferentes según se infiere de 1B, 8B y 9B.
4.2.2. El sujeto refleja una concepción analítica de la integral. Esto dificultó el análisis del comportamiento puntual de la derivada de la función integral como se señaló en 10B-14B
4.2.3. El sujeto refleja un pensamiento sesgado hacia la visualización del comportamiento gráfico y global de las funciones en contextos continuos y diferenciables.

P2-B4: ***contexto gráfico- aritmético***



R.

$G(a)$ *no existe*

$G(c) = F(c) + C$

$G(d) = F(d) + C$

$G'(b)$ *no existe*

$G'(0) = 0$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) = H(x) - H(a)$$

$$\int_b^x f(t)dt = G(x) = H(x) - H(b)$$

$G(x) = F(x) + H(a) - H(b)$

Análisis:

16B. Puesto que afirma que "*$G(a)$ no existe*", refleja que para él no tiene sentido preguntarse con lo que ocurre con la función integral a la izquierda del límite inferior.

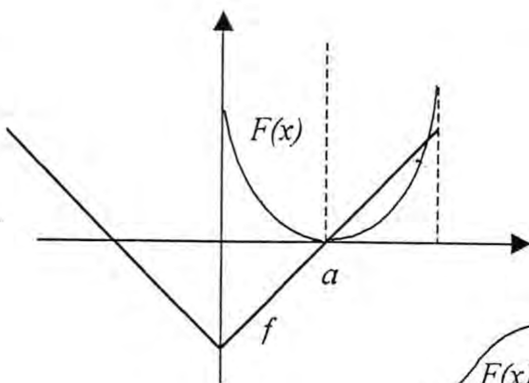
17B. Puesto que afirma que "$G'(b)$ ***no existe***" se refleja que percibe la función integral como una función que debe estar definida a la derecha del límite inferior b que como extremo del intervalo, la derivada (o recta tangente) no existe puesto que representa un extremo de la curva. Esto concuerda con lo señalado en el punto 15B.

18B. Desde el punto de vista cualitativo refleja que la modificación del valor del límite fijo inferior de la función integral, corresponde a una traslación vertical porque que ambas representan antiderivadas de la misma función, pero tiene dificultades en precisar en que sentido ha de trasladarse porque no interpreta que la diferencia $C = H(a) - H(b)$ es una constante negativa.

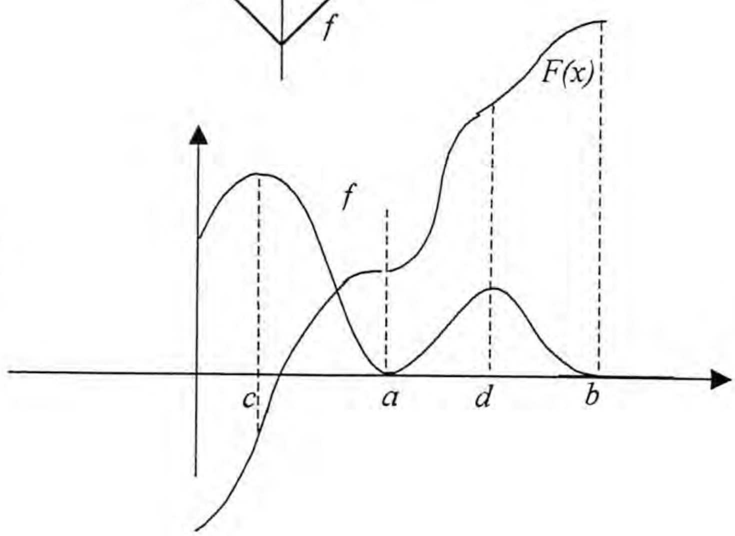
P2-B4: ***Contexto gráfico***

R.

a)



b)



Análisis:

19B. La representación gráfica del primer inciso refuerza que el sujeto sólo tiene sentido la integral a la derecha del extremo inferior de acuerdo a 16B. No obstante no articula el contexto aritmético de la integral con el contexto gráfico pues no percibe que la ubicación de la recta supone que la parábola debe dibujarse con el mínimo debajo de $x = a$.

20B. En el segundo inciso, aunque presenta las cualidades esenciales de la gráfica de la integral, no percibe que no hay razón para dibujar la gráfica de la integral debajo del eje x.

Segundas conclusiones:

4.2.4. Se refleja una concepción de integral como un objeto que sólo tiene sentido definirlo a la derecha de su límite inferior.

4.2.5. Se refleja la idea de que en los puntos extremos de los intervalos en que se defina una función no tiene sentido preguntarse por la derivada desde el punto de vista de que corresponde a un "trozo" de la gráfica.

4.2.6. No obstante, aún cuando las representaciones gráficas de la integral presentan inconvenientes, su desempeño es más adecuado con relación al *sujeto A,* en cuanto a visualizar cualidades de concavidad sobre dicha gráfica. Esto concuerda con la conclusión 4.2.3.

P2-B3

R.

$$G(x)=\int_a^{f(x)} g(t)dt = G(t)\Big|_a^{f(x)} = G(f(x))-G(a) \quad donde\ a\ una\ constante\ G'(t)=g(t)\forall t\in\big(a,f(x)\big)$$

$$G'(x)=G'(f(x))f'(x)-0=g(f(x))f'(x).$$

entonces

$$G'(x)=\Big[\frac{1}{1+sen^6\left(\int_1^x \cos^3 tdt\right)+\left(\int_1^x \cos^3 tdt\right)^4}\Big]\left(\int_1^x \cos^3 tdt\right)'$$

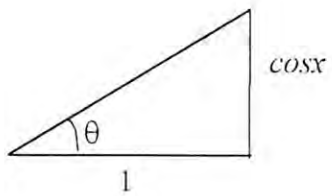
$$\int_1^x \cos^3 tdt=\int_1^x \cos t\cos^2 tdt=\int_1^x \cos t(1-sen^2 t)dt=\int_1^x \cos tdt-\int_1^x \cos t sen^2 tdt$$
$$senx-sen1-\Big[\frac{1}{3}sen^3x-\frac{1}{3}sen^3(1)\Big]=senx-\frac{1}{3}sen^3x+C$$

$$donde\ \ C=\frac{1}{3}sen^3(1)-sen(1)$$

sin embargo

$$G(x)=\int_0^x \frac{1}{1+sen^6t+t^4}dt \qquad no\ existe.$$

P3-B3



$\tan\theta = \cos x$

$x = \cos^{-1}(\tan\theta)$ $\qquad dx = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{1-\tan^2\theta}}\right)\sec^2\theta d\theta$

$\sec\theta = \dfrac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{1}$ $\qquad \sec^2\theta = 1+\cos^2 x$

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sec^2\theta}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\tan^2\theta}}\right)\sec^2\theta d\theta = \int \frac{-1}{\sqrt{1-\tan^2\theta}}d\theta$$

Análisis para P2-B3 y P3-B3:

21B. En las dos respuestas fundamentalmente reflejan que la existencia de la integral es interpretada en términos de su representabilidad analítica

22B. La concepción de integral como algo representable en términos analíticos dificulta el percibir que la función integral es una representación legítima para la antiderivada de la función integrando.

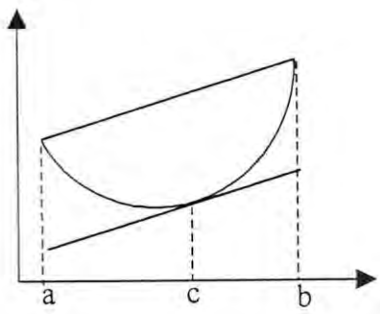
P1-B2

R.

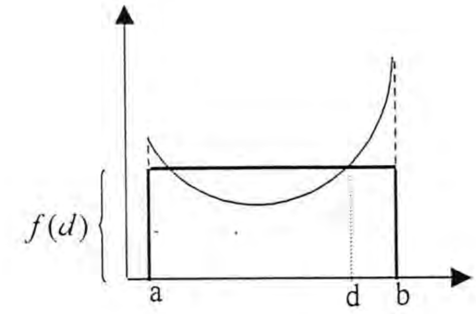
El valor de c en el tvmd está relacionado con la variación promedio de la función en todo el intervalo.

El valor de d en el tvmi es la altura promedio en todo el intervalo.

"Encontrar cualquiera de los dos no implica hallar el otro"



tvm



tvmi

Análisis para P1-B2:

23B. El sujeto refleja dejarse llevar por las interpretaciones gráficas correspondientes de cada resultado que le inducen de manera incorrecta que ambos teoremas no tienen ninguna relación de implicación.

24B. Además la expresión *"Encontrar cualquiera de los dos nò implica hallar el otro"* nos parece que sugiere no sólo la imposibilidad geométrica sino también la imposibilidad algebraica en el entendido de que no existe una relación analítica para c y d, que permita conocer uno a partir del otro.

Conclusiones finales para el *sujeto A:*

Del análisis previo para el sujeto A podemos destacar lo siguiente:

- El sujeto refleja la concepción de que la integral es antiderivada de la función lo que le dificulta percibir que conceptualmente son diferentes según lo señalado en 4.2.1.

- El sujeto refleja una concepción analítica de la integral. Esto dificultó el análisis del comportamiento puntual de la derivada de la función integral de acuerdo a 4.2.2.

- No identifica la representación integral como una antiderivada de una función continua.

- Se refleja una concepción de integral como un objeto que sólo tiene sentido definirlo a la derecha de su límite inferior por 4.2.4.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

5.1 Introducción general

El nivel de análisis que hemos presentado en relación con la información obtenida, y derivada de los problemas diseñados, sugiere posibilidades viables de investigación en el contexto institucional de nuestra investigación. No obstante precisa de ampliarse y profundizarse, de manera pertinente, particularmente en lo que respecta a la dimensión metodológica lo cual incluye diversos aspectos como el diseño de un campo de problemas que contribuyan a enriquecer de significado al teorema objeto de estudio, diversificar los medios de recopilación de información, proveer un ambiente propicio y profesional para la incorporación con convicción por parte de los profesores etcétera.

En igual orden de importancia, se precisa involucrar a otros investigadores interesados en el tema, que estimulen y retroalimenten el esquema planteado ya sea colaborando en la profundización teórica o metodológica que adoptamos, o explorando, bajo la perspectiva sugerida, hacia otros ámbitos y grupos diversos que imparten cursos de matemáticas.

Sentimos que las conclusiones, además de enfocarse en las concepciones detectadas, deben dar cuenta de aspectos de carácter emocionales y sociológicos que de alguna manera tuvieron una impacto importante en las actividades y comportamientos de los profesores en el proceso de investigación que se llevó a cabo. Así mismo, también es pertinente señalar algunos factores adversos específicos a la investigación que seguramente impactaron de manera negativa el proceso en sí. Finalmente consideramos una perspectiva de investigación en relación con los resultados obtenidos. Por tal motivo organizamos nuestras conclusiones considerando los siguientes puntos:

- Escepticismo en los profesores implicados
- Factores adversos a la investigación

- Algunas conjeturas a investigar
- Apuntando ideas: Apuntando ideas: ¿Qué efecto tiene sobre los significados personales del docente una implementación didáctica determinada?
- Reflexión final respecto a la comprensión de los teoremas

5.2 Escepticismo en los sujetos implicados

Es importante reconocer que una investigación en el campo de la matemática educativa donde se intenta conocer, desde cierta perspectiva, el funcionamiento del pensamiento humano a partir de un grupo de individuos, nos enfrenta a dificultades difíciles de predecir y controlar, aún cuando los instrumentos de investigación utilizados sean adecuados. El complejo humano y social que representamos lleva por lo regular hacia situaciones no deseadas, desde la perspectiva del investigador, que en ocasiones atentan contra la objetividad con la que se pretende analizar los fenómenos estudiados. Particularmente, un toque especial lo determina cuando el grupo de individuos son precisamente profesores de matemáticas. En nuestro caso se detectó que en los sujetos bajo estudio, predominó una actitud escéptica respecto a la necesidad de una investigación de esta índole y de la objetividad profesional con la que sería sometida la información que aportasen. Esto indudablemente se vuelve una "camisa de fuerza" para la libre manifestación de su propio pensamiento ante los problemas planteados. No obstante, estamos conscientes de que su propia visión respecto a la problemática que nos interesa, como matemáticos educativos, no tiene porqué corresponderse y asumirse como tal por el colectivo general de los profesores. Reconocemos que funcionamos guiados por el entorno en el que nos desarrollamos y en cómo experimentamos las cosas. Las experiencias de nuestra vida académica, en buena medida, nos forjan la manera actual de concebir las cosas y nos lleva a adquirir nuestro propio sistema de creencias. Nos parece importante atender seriamente este aspecto si queremos enriquecer el conocimiento de las concepciones de los profesores en nuestra institución.

5.3 Factores adversos a la investigación

Básicamente, la retención de información se presentó en los sujetos encuestados. Si bien es cierto la metodología precisa de perfeccionarse, la tendencia, de carácter psicológico, a evitar ser "observados" por otros individuos de cómo pensamos, difícilmente podrá controlarse. Esto realmente se vuelve un obstáculo para acercarnos al conocimiento de nuestros pensamientos y funcionamiento tanto en lo conceptual como en lo procedimental.

Otra perspectiva, de apreciación subjetiva, es de índole institucional y emocional que podemos ensayar como sigue: Representamos el punto de apoyo de una institución de nivel superior y sería "bochornoso" que se puedan tener evidencias de un saber insuficiente o de la necesidad de mejores comprensiones sobre los contenidos curriculares que dirigen nuestra acción didáctica.

A continuación explicitamos algunos aspectos adicionales que de alguna u otra manera se reflejaron.

- Una concepción tradicionalista de la figura del profesor que lo coloca como una autoridad al margen de la problemática patente en los estudiantes

- Falta de credibilidad respecto al trabajo profesional y científico a la que será sometida la información que aportan y por tanto una visión inadecuada de la Matemática Educativa.

- Falta de motivación institucional y personal para involucrarse y mantener su participación en un proyecto de esta naturaleza

5.4 Conjeturas a investigar

Algunas concepciones detectadas en esta investigación, tienen un carácter relacional e imbricado. No obstante, profesionalmente hablando, debemos ser cuidadosos con los resultados sugeridos y en todo caso continuar buscando un nivel de evidencia más contundente que refuerce si ciertas concepciones podemos calificarlas como obstáculos, o bien rechazarlas como tales, al menos en nuestro contexto institucional.

Por tanto, nuestro estudio proporciona elementos que sugieren investigar más a fondo las siguientes significados detectados:

O1. La continuidad como una propiedad global de las funciones (en el contexto de la integral)

O2. La discontinuidad como una situación puntual aislada y simple

O3. La función integral $\int_a^x f(t)dt$ ***como antiderivada de*** f

O4. La función integral como una función representable analíticamente

O5. Desde el punto de vista metodológico, la concepción aritmética u operatoria del cálculo

5.5 Apuntando ideas: ¿Qué efecto tiene sobre los significados personales del docente una implementación didáctica determinada?

Como se señaló en la sección del planteamiento del problema, por ejemplo, la práctica didáctica del cálculo integral en el contexto de referencia, por lo regular enfoca su atención particularmente a la obtención de primitivas expresables en términos de funciones elementales y de buen comportamiento, es decir, continuas o diferenciables. Esta práctica, por ejemplo, favorece la asociación función-fórmula y función integral-antiderivada al que se hace referencia las conjeturas

Otra situación que se presenta regularmente ligado a la continuidad, es que tal propiedad, de inicio, es caracterizada en términos didácticos a través de situaciones puntuales y exhibiendo una casuística "representativa" de discontinuidades aisladas (generalmente discontinuidades simples de funciones acotadas): Un agujero o salto en la gráfica. Esto también en nuestras conjeturas.

Lo anterior sugiere preguntas como las siguientes: ¿Tuvo un papel importante la didáctica implementada por los profesores con relación a sus significaciones personales?, ¿Fueron adquiridos en su etapa de estudiante y se filtraron en esta investigación?, ¿Es posible que uno de ellos se gestara y desarrollara en el seno de su propia enseñanza?

Más general ¿Qué efecto tiene sobre los significados personales del docente una implementación didáctica determinada?

Por ejemplo ¿Se pueden desarrollar obstáculos? ¿Contribuye al fortalecimiento de alguno? ¿Es posible determinar potenciales obstáculos de acuerdo al proyecto de enseñanza a implementar?

Hay indicios en ambos sujetos de que las respuestas proporcionadas están ligadas a su quehacer didáctico que dificultan un pertinente análisis ante situaciones problemáticas determinadas que exigen puntos de vista diferentes. Por ejemplo el desempeño en el contexto aritmético se puede apreciar más favorable en el *sujeto A* y en el contexto gráfico en el *sujeto B*. La manera de enunciar y trabajar el *TFC* etc. parecen reflejar actitudes que se relacionan con el quehacer didáctico. Finalmente recordemos la respuesta proporcionada por el sujeto A ante situación P1-B2:

... creo más conveniente dejar al alumno con la idea de que la derivada en algún punto es la pendiente de la recta tangente y que la integral en algún intervalo es el área bajo la gráfica de la función en el mismo intervalo y que por tanto basándonos en la derivabilidad y la continuidad de la función se pueden mostrar ambos resultados ...

Dejamos aquí las cosas para abordar la problemática en otra ocasión.

5.6 Reflexiones finales sobre la comprensión de un teorema

Creemos que el concepto planteado sobre la comprensión del enunciado de un teorema debe tomarse en cuenta y promoverse de forma sistemática y pertinente en los diversos contextos institucionales en que sea posible y adaptable para su enseñanza. Para el caso de la formación profesional docente de matemáticas, en nuestra institución, se debe investigar mayor pertinencia en amplitud y profundidad la problemática que supone la comprensión de los teoremas y los obstáculos asociados a ellos.

Puesto que la Universidad de Sonora es autosuficiente en cuanto a producir sus propios matemáticos para su incorporación docente (la mayoría de los profesores de matemáticas que se incorporan a la docencia son egresados de la misma institución), creemos necesario una orientación matemática en la perspectiva de una enseñanza que tome en cuenta aspectos cognitivos y epistemológicos de las matemáticas, asumiendo a los obstáculos como herramienta auxiliar en la comprensión y enseñanza de las mismas, en especial el tema del cálculo. La comprensión de los objetos matemáticos, como es el caso de los teoremas en el sentido sugerido, nos parece que contribuye hacia un nivel de competencia matemática deseable, no sólo como un aspecto positivo para la investigación en matemáticas, sino como aspecto pertinente para la enseñanza de las mismas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Artigue, M. (1995), La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería didáctica en educación matemática, pp. 97-140. "Una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica.

2. Brousseau, G. (1983), Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. Investigación en Didáctica de las Matemáticas.

3. Cid, E. (2000), Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Cangas de Marazzo (Pontevedra)

4. Contreras, L.C. y Carrillo, L. (2000), Formación Inicial de los Maestros y Resolución de Problemas. Didáctica de las matemáticas. Universidad de Huelva, España.

5. Contreras, L.C. (1999). Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas. Huelva: : Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva, España.

6. Contreras de la Fuente, A. (2000), La Enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y Primer Curso de Universidad. Una Perspectiva Desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos y los Actos de Comprensión. IV Simposio SEIEM. Huelva, España.

7. Contreras, L.C. y Blanco, J. (2000), ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un Modelo Formativo Alternativo. Universidad de Huelva, España.

8. Estévez N. (1999) La enseñanza basada en el uso de estrategias cognitivas. Universidad de Sonora.

9. Godino, J.D. y Batanero, M.C. 1999. Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. Documento interno del Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

10. Godino, J.D. , Batanero, M.C. y Navarro, P. 1995. Epistemología e instrucción matemática: Implicaciones para el desarrollo curricular. L Bazzini (Ed.)

11. Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los conceptos matemáticos. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

12. Godino, J.D. (2002), La Formación Matemática y Didáctica de Maestros Como Campo de Acción e Investigación Para la Didáctica de las Matemáticas: El Proyecto EDUMAT-MAESTROS. V Simposio Sobre Aportaciones del Área Didáctica de la Matemática a Diferentes Perfiles Profesionales. Universidad de Alicante.

13. Godino, J.D. (2001), Confrontación de Herramientas Teóricas Para el Análisis Cognitivo en Didáctica de las Matemáticas. XVI Reunión del SIIDM-Grupo DMDC, SEIEM.

14. Kilpatrick, J. (1994), Investigación en Educación Matemática: su historia y algunos temas de actualidad. Educación Matemática, pp. 1-18. "Una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica.

15. Sierpinska, A. (1994), Understanding in Mathematics. London: The Falmer Press