UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Una secuencia didáctica para el estudio de Sucesiones en el nivel Medio Superior

Por:

L.M. Juana Vicente Santiago

Directora de tesis:

M.C. Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez

Hermosillo, Sonora

Febrero 2018

Una secuencia didáctica para el estudio de Sucesiones en el Nivel Medio Superior

Sinodales

M. C. Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora.

M. C. Guadalupe Villaseñor Gándara
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora.

M. C. Daniela Romero
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora.

Dr. César Fabián Romero Félix
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora.

Dedicatoria

A mi madre:
Sra. María Juana Santiago Guadalupe

A la memoria de mi padre:
Sr. Herculano Vicente Jacinta

A mis hermanos

A Dios

Agradecimientos

Gracias a Dios por todas las bendiciones y experiencias por las que me ha tocado pasar hasta el día de hoy, en especial, gracias por haberme brindado la oportunidad de concluir mis estudios de la Maestría en Matemática Educativa. Gracias Señor, por las personas que has puesto en mi camino, y porque es gracias a ti que puedo continuar hacia mis metas.

Agradezco a mi familia, fuente de apoyo incondicional a lo largo de mi vida, y más aún, en mis años de carrera profesional. En especial, mi más grande agradecimiento y admiración a mi madre, Juanita, quien es mi pilar principal, y de quien sus palabras me sirven como fuerza, motivación y valor para seguir adelante. A mi padre, Herculano, que a pesar de que ya no está físicamente con nosotros, me siento protegida por él. A mis hermanos, Lupita, Santiago, José, Maximino y Luis por sus consejos, ejemplos y tiempo en mensajes y muestras de apoyo de todo tipo. A mis sobrinos Ailín, Diego, Fernanda,..., y ahijada Mariel, por esas sonrisas tan tiernas. A mis tíos y primos, en particular a Lupita, Gloria y Antonia.

A todos mis maestros y compañeros que conocí en el posgrado. A mis amigos que estuvieron presentes durante todos mis estudios, y con los que compartí momentos tan agradables. A las personas que durante mis años de estudio me han brindado su tiempo y experiencias, que me han servido para crecer en mi formación académica y personal.

Agradezco a la Directora Lupita Berrones por haberme brindado la oportunidad de iniciar esta bonita experiencia como docente en Matemáticas, en la preparatoria a su cargo. A mis compañeros y amigos en la institución: Angel, Azucena, Belén, Carmen, Fran, Lizeth, Lupita, Karina, Valeria,...,Yesenia, Yuvitza y todo mi 1A, 1B y 1C; a todos y cada uno de mis alumnos con los que he tenido la oportunidad de compartir y aprender junto con ellos: ¡Gracias!

Un agradecimiento especial a mi directora de tesis: M. C. Ana Guadalupe del Castillo por todo su apoyo, por el tiempo dedicado en la elaboración de este proyecto, pero sobre todo por su paciencia, ayuda y confianza depositada en mí, así como sus conocimientos, capacidad y experiencia. Gracias también a M. C. Guadalupe Villaseñor, Dr. César Fabián Romero y M. C. Daniela Romero, no sólo por haber formado parte del comité revisor de mi tesis, sino, por sus correcciones, consejos y observaciones.

Por tanto apoyo que he recibido durante mis estudios, gracias a mi padrino: Ing. Jorge H. Meza; bendiciones a él y a su familia.

A todas las personas que han formado parte de mi vida, ¡Gracias!

Juanita Vicente Santiago
"El tiempo de Dios es perfecto".

Índice

Introducción

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo principal elaborar una propuesta didáctica para el estudio de sucesiones y series, aritméticas y geométricas, dirigida a estudiantes del nivel medio superior. Se considera que, con el tratamiento de este tema matemático, los estudiantes tienen la posibilidad de desarrollar un conjunto de habilidades propias del pensamiento algebraico, a través de la generalización de patrones observados en las situaciones planteadas.

La propuesta didáctica se desarrolló bajo los lineamientos de la Reforma Integral de Educación Media Superior y el Nuevo Modelo Educativo, por lo cual, en el primer capítulo de este trabajo se muestran algunos aspectos relacionados con las Reformas mencionadas. Cabe señalar que, ya que los planes de estudios están basados en el enfoque por competencias, en este primer capítulo también se muestran las competencias disciplinares consideradas para la elaboración de esta propuesta. Asimismo, se presentan antecedentes históricos sobre las sucesiones y series, aritméticas y geométricas; además, se exponen algunos resultados de investigación sobre los errores y dificultades que muestran los estudiantes en el estudio del tema matemático. Lo anterior se realizó con la intención de generar ideas que pudieran servir para la elaboración de las actividades didácticas que constituyen la propuesta.

En el capítulo 2 se presenta la problemática que llevó a proponer la elaboración de una secuencia didáctica para el estudio de sucesiones y series. Es decir, en este capítulo se abordan algunos aspectos relacionados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las sucesiones numéricas, que forman parte de los temas del álgebra. Asimismo, se incluyen, de manera explícita, el objetivo general y los objetivos específicos que fueron planteados específicamente para el estudio de sucesiones y series, aritméticas y geométricas.

En el capítulo 3 se plantean los elementos del marco teórico que sustentan a esta propuesta: el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS). También, se presentan las acciones metodológicas que fueron consideradas para el logro de los objetivos planteados. Estas herramientas teóricas y metodológicas consideradas para la elaboración de la propuesta, fueron tomadas en cuenta, ya que permiten diseñar procesos de enseñanza, además de poder describir lo que sucede y dar una valoración a su pertinencia.

En el capítulo 4, se presenta el diseño de la secuencia y algunos análisis previos. En particular, se presenta la caracterización del significado pretendido, así como de los indicadores de idoneidad, que fueron considerados para la elaboración de las actividades. Asimismo, se incluyen las características con las que cuentan cada una de las actividades que conforman la secuencia didáctica.

Como se mencionó anteriormente, las herramientas del marco teórico considerado, nos permiten dar una valoración a la pertinencia de la propuesta, por lo que en este capítulo se presenta también una valoración de las actividades antes de que fueran llevadas a escena.

En el capítulo 5 se mencionan las características consideradas como más relevantes de la puesta en escena de las actividades didácticas, así como los análisis y resultados de dicha implementación; la cual se llevó a cabo con un grupo de estudiantes que se encontraban cursando el segundo semestre de sus estudios del nivel medio superior.

A partir del análisis a posteriori de la puesta en escena, se presentan las modificaciones que se hicieron a algunas de las secciones de las actividades, con la intención de afinar el diseño.

Por último, se incluye un apartado con las principales conclusiones del trabajo de tesis, las cuales están estructuradas tomando en cuenta: el diseño de la secuencia didáctica, el logro de los objetivos, la utilidad del marco teórico, y posibles líneas a seguir.

Capítulo 1. Marco Referencial

En este primer capítulo se mencionan algunos aspectos relacionados con la Educación Media Superior; entre ellos se señalan los que se refieren a las reformas dirigidas a este nivel educativo (la Reforma Integral de Educación Media Superior y el Nuevo Modelo Educativo) y algunos otros relacionados con el tema matemático de interés: sucesiones y series, aritméticas y geométricas.

Asimismo, como resultado de una consulta hecha a reportes de investigación y propuestas didácticas relacionadas al tema matemático de interés, se presentan algunos errores y dificultades que muestran los estudiantes en el estudio de las sucesiones numéricas, y que fueron considerados para el diseño del proyecto.

1.1 Antecedentes de la Educación Media Superior en México

En Pardo (2009) se menciona que la calidad de la Educación Media Superior en México es un problema que se ha venido tratando desde mucho tiempo atrás. Ante los retos que este problema representa, se han desarrollado e implementado Reformas con el objetivo de que los jóvenes cuenten con herramientas y aptitudes necesarias para incursionar en la educación superior y posteriormente al ambiente laboral.

Por su parte, en Campos (2011) se pueden encontrar antecedentes históricos de la Educación Media Superior referentes a los sexenios presidenciales en México. Los sexenios mencionados son a partir de los años 1970-1976, en el que se dio un crecimiento sin precedentes en la educación media superior con base en políticas de apoyo que propiciaron la creación de nuevas instituciones educativas.

En Campos (2011), se destaca el sexenio 2000-2006, en el que se instauró el Plan Nacional de Educación. Dicho plan contemplaba la creación del Subprograma de la Educación Media Superior, ya que se consideró que el nivel medio superior requería una atención especial por dos principales razones:

1. Por ser el nivel que más incrementara su población en el sexenio dadas las tendencias demográficas y de dinámicas de población, y el incremento de los niveles de cobertura y eficiencia terminal de educación básica en los niveles primaria y secundaria.
2. Porque los alumnos se encuentran en la edad más difícil y son los que necesitan un apoyo mayor en la escuela, adecuado a su edad, para hacer de ellos ciudadanos maduros e individuos de buen provecho.

En el sexenio 2006-2012 se propone el Plan Nacional de Desarrollo, que en su eje titulado "Igualdad de oportunidades" presenta la propuesta de "elevar la calidad educativa", puesto que resulta "impostergable una renovación profunda del sistema nacional de educación, para que las nuevas generaciones sean formadas con capacidades y competencias que les permitan salir adelante en un mundo cada vez más competitivo, obtener mejores empleos y contribuir económicamente a un México con crecimiento económico y mejores oportunidades para el desarrollo humano".

En cuanto a los retos que la Educación Media Superior representa, según Pardo (2009), se encuentran los siguientes:

- Por décadas el nivel Medio Superior se caracterizó por su desarticulación y dispersión, así como por la carencia de programas y políticas públicas que le dieran sentido e identidad.
- El nivel Medio Superior también ha sido tradicionalmente el de mayor reprobación y repetición; aún entre quienes logran graduarse, solamente el 50 por ciento continúa con la Educación Superior.
- En el año 2007el nivel Medio Superior presentaba las mayores carencias de todo el sistema educativo; era el nivel con mayor deserción, con cerca del 40 por ciento.
- El problema actualmente es aún mayor, ya que es precisamente en la primera década del Siglo XXI cuando México cuenta con el número más grande de jóvenes en toda su historia. Esto implica que se está presentando y se observará en el futuro, la mayor presión de demanda por estos servicios.

En pocas palabras, el punto de partida para definir la identidad de la EMS fue el tratar de encarar los retos de ampliación de cobertura, mejoramiento de la calidad y búsqueda de la equidad.

Dado lo mencionado anteriormente se podría pensar que la EMS es un reto muy difícil de encarar; sin embargo, de acuerdo con Pardo (2009), no todo es sombrío, ya que el nivel Medio Superior constituye también una gran oportunidad si el país es capaz de ofrecer una educación de calidad a los jóvenes que cursan normalmente este nivel (15 a 18 años). Por lo que en la medida que la educación sea pertinente y de calidad, se contará con los recursos humanos necesarios para mejorar los niveles de productividad y competitividad de México.

1.1.1La Reforma Integral de la Educación Media Superior

En Pardo (2009) se apunta que la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS), es el proyecto de cambio para mejorar la calidad de la Educación Media Superior que han propuesto las autoridades educativas; consiste en iniciar una Reforma Integral para la creación del Sistema Nacional de Bachillerato (SNB) en un marco de diversidad.

Por lo mencionado en Campos (2011), con el establecimiento del SNB se crean nuevos ejes metodológicos, académicos y pedagógicos del sistema educativo, basado en competencias. Debido a que existen varias definiciones de lo que es una competencia, a continuación, se presenta una que fue considerada por la DGB: Una competencia es la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico.

En el Documento base del Bachillerato General (2016) se señala que la Reforma ha sido un proceso de construcción colectiva derivado de las sesiones del Consejo Nacional de Autoridades Educativas que ha tenido como resultado la formulación de una serie de acuerdos secretariales que la norman e institucionalizan; algunos de los acuerdos secretariales son los siguientes:

- ACUERDO 442 por el que se establece el Sistema Nacional del Bachillerato en un marco de diversidad.
- ACUERDO 445 por el que se conceptualizan y definen para la Educación Media Superior las opciones educativas en las diferentes modalidades.
- ACUERDO 488, por el que se establecen: el Sistema Nacional del Bachillerato en un marco de diversidad; las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional del Bachillerato, así como las competencias docentes.
- ACUERDO 656, por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del SNB, y se establecen las competencias disciplinares extendidas del bachillerato general.

Como parte del acuerdo 488, el cual es una extensión del acuerdo 442, se establecen los siguientes cuatro ejes de la RIEMS:

I. Se refiere a la construcción de un Marco Curricular Común (MCC) basado en competencias. Este marco curricular permite articular los programas de distintas opciones de EMS en el país. Comprende una serie de desempeños terminales expresados como: competencias genéricas, competencias disciplinares básicas, competencias disciplinares extendidas (de carácter propedéutico) y competencias profesionales (para el trabajo). Todas las modalidades y subsistemas de la EMS compartirán el MCC para la organización de sus planes y programas de estudio. Específicamente, las dos primeras competencias serán comunes a toda la oferta académica del SNB. Por su parte, las dos últimas se podrán definir según los objetivos específicos y necesidades de cada subsistema e institución, bajo los lineamientos que establezca el SNB.

II. Reconoce las distintas modalidades de oferta educativa que ofrecen la posibilidad de cursar este nivel a poblaciones con distintos intereses, necesidades y contextos. Se definen tres: escolarizada, no escolarizada y mixta. Todas las modalidades de la EMS deberán asegurar que sus egresados logren el dominio de las competencias que conforman el MCC. Además, deberán alcanzar ciertos estándares mínimos de calidad y apegarse a los procesos que garanticen la operatividad del MCC. De este modo, todos los subsistemas y modalidades de la EMS tendrán una finalidad compartida y participarán de una misma identidad.

III. Mecanismos de gestión, trata sobre la creación, estándares y procesos comunes que garantizan el apego al MCC bajo las condiciones de oferta especificadas en el SNB. Incluye la formación y actualización de la planta docente, la generación de espacios de orientación educativa y atención a las necesidades de los alumnos, la profesionalización de la gestión directiva, la inversión para contar con infraestructura y equipamiento adecuados, el otorgamiento de apoyos a la demanda por medio de becas, la definición de reglas de movilidad entre subsistemas, la evaluación para la mejora continua, entre otros.

IV. Certificación complementaria del SNB: sistemas de ingreso y permanencia, establece los procedimientos para que cada plantel educativo de manera voluntaria acredite la operación de su modelo de bachillerato con los tres primeros ejes, y se registre así en el Sistema Nacional de Bachillerato.

Por lo tanto, citando a Pardo (2009), "la RIEMS no propone un bachillerato único, ni un plan de estudios homogéneo, sino un marco de organización común que promueva la existencia de distintos tipos de bachillerato en donde la diversidad permita que cada institución se adecúe a las características de su entorno, a la realidad de su contexto, y a las necesidades e intereses de los jóvenes que atiende".

1.1.2 Las sucesiones numéricas en el programa de estudios de Matemáticas 1

A partir del Ciclo Escolar 2009-2010 la Dirección General del Bachillerato (DGB) incorporó en su plan de estudios los principios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior. Este enfoque educativo, basado en competencias, "permite establecer en una unidad común los conocimientos, habilidades, actitudes y valores que el egresado de bachillerato debe poseer".

El plan de estudios en el que se ha organizado el saber y que todo bachillerato debe adquirir, en el contexto de cualquier campo disciplinar, tiene como objetivos: "proveer al estudiante de una cultura general que le permita interactuar con su entorno de manera activa, propositiva y crítica (componente de formación básica); prepararlo para su ingreso y permanencia en la educación superior, a partir de sus inquietudes y aspiraciones profesionales (componente de formación propedéutica); y finalmente, promover su contacto con algún campo productivo real que le permita, si ese es su interés y necesidad, incorporarse al ámbito laboral (componente de formación para el trabajo)".

Los campos disciplinares contemplados en este nivel educativo se organizan en los cinco siguientes: Matemáticas, Ciencias experimentales, Ciencias sociales, Humanidades y Comunicación. Como parte de la formación básica, antes mencionada, se tiene la asignatura de Matemáticas 1 que pertenece al campo disciplinar de Matemáticas.

En este programa de estudios se considera a las Matemáticas como: "Campo disciplinar, el cual tiene la finalidad de propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven el despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas".

Por lo anterior, el programa de estudios para esta asignatura, está compuesta por 10 bloques. Las sucesiones numéricas, se encuentran ubicadas en el bloque III correspondiente al primer semestre del nivel medio superior. En este bloque se espera que el alumno estudie las sucesiones y series numéricas, aritméticas y geométricas, bosquejando a su vez funciones discretas, lineales y exponenciales.

De las 8 competencias disciplinares básicas propuestas para la asignatura de Matemáticas 1, las siguientes 5 son las que se pretenden desarrollar durante el bloque 3:

- Competencia 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Competencia 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Competencia 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Competencia 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Competencia 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Considerando los procesos de enseñanza y aprendizaje, en este bloque se presentan otros aspectos, tales como: desempeños del estudiante al concluir el bloque, actividades de enseñanza, actividades de aprendizaje e instrumentos de evaluación (los cuales se presentan en el Capítulo 4 de este trabajo). Lo anterior con la finalidad de "facilitar el proceso educativo al diseñar actividades significativas integradoras que permitan vincular los saberes previos de los estudiantes con los objetos de aprendizaje para potenciar los aprendizajes de los estudiantes".

1.2 La nueva Reforma: El Nuevo Modelo Educativo y el Nuevo Currículo de la Educación Media Superior

En Nuño (2016) se sugiere que el establecimiento del MCC de la Reforma del 2008 fue resultado de hacer frente a desafíos históricos derivados de la gran diversidad de sistemas institucionales. Entre dichos retos destacan:

- Una amplia dispersión y heterogeneidad curricular.
- La ausencia de un perfil del egresado del nivel medio superior.
- Problemas de pertinencia y relevancia de los contenidos curriculares.
- Falta de equivalencias curriculares entre los subsistemas

La nueva Propuesta busca revisar y actualizar el MCC, dado que aún persisten problemas como los siguientes:

- Los currículos están estructurados por áreas de conocimiento y asignaturas no integradas adecuadamente.
- Los contenidos a menudo son poco estimulantes para los jóvenes y no los "enganchan" en sus aprendizajes.
- No se logra el propósito de formar de manera integral a los estudiantes.
- Existe un fuerte desequilibrio entre la formación teórica y la formación práctica.
- Los currículos siguen sobrecargados de asignaturas e información.

En Nuño (2017) se menciona que se realizó una revisión del modelo educativo vigente en ese momento. La revisión se llevó a cabo en su conjunto, incluidos los planes y programas, los materiales y los métodos educativos. Este replanteamiento inició en el 2014 y en julio de 2016 la Secretaria de Educación Pública (SEP) presentó un planteamiento para la actualización del modelo educativo, compuesto de tres documentos:

1. Carta sobre los Fines de la Educación en el Siglo XXI. Expone de manera breve qué mexicanas y mexicanos se busca formar con el nuevo Modelo Educativo.
2. El Modelo Educativo 2016. Explica, en cinco ejes, la forma en que se propone articular los componentes del sistema para lograr el máximo logro de aprendizaje de los jóvenes.
3. Propuesta Curricular para la Educación Obligatoria 2016. Contiene un planteamiento curricular para la educación básica y la media superior, y abarca tanto la estructura de los contenidos educativos como los principios pedagógicos que la sustentan.

Esta Propuesta curricular para la Educación Obligatoria mencionada en Nuño (2016), asume que el currículo debe ser mucho más que una lista de contenidos; y, por el contrario, lo considera un instrumento que da sentido, significado y coherencia al conjunto de la política educativa. Por ello fija los fines de la educación, pero también establece los medios para alcanzarlos.

1.2.1 Las sucesiones numéricas en el Nuevo Currículo de la EMS

Como parte de las modificaciones a la Reforma que constituyen el nuevo Modelo Educativo, se encuentran las realizadas al campo disciplinar de las matemáticas. En Cantoral (2016) se muestran las adecuaciones realizadas a los programas de matemáticas del Bachillerato General (BG) y del Bachillerato Tecnológico (BT). El cambio fundamental que se propone consiste en: "incorporar a la algoritmia y la memorización como medios necesarios, pero no suficientes, para la construcción de conocimiento matemático y así fortalecer el sentido de 'lo propiamente matemático' en diversas situaciones de aprendizaje: una enseñanza más activa, realista y crítica".

Con esta visión, en Cantoral (2016) se consideran las matemáticas, "como conjuntos de conceptos abstractos (número, variable, función, proporción y semejanza, entre otros) que se articulan con apoyo de los procedimientos válidos. Estos razonamientos se aplican a diversos clases o categorías de objetos, a saber, números, figuras, estructuras y transformaciones, y deben su origen a la necesidad de representar y tratar con situaciones que provienen de la vida cotidiana como el tratamiento del riesgo y la aleatoriedad, el cambio, la variación y la predicción, o los patrones, las formas y la simbolización, entre otras".

Aunado a lo anterior, se concluye que "una diferencia fundamental es que se privilegia la construcción del conocimiento matemático en situaciones contextuales, por sobre el aprendizaje memorístico y descontextualizado. De lo cual se adecuaron en cierta medida las competencias disciplinares tomadas en cuenta para las modificaciones a todas las asignaturas del campo de las Matemáticas, obteniendo una red de competencias disciplinares". Dichas competencias se pueden observar en el esquema 1.2.

De esta red de competencias disciplinares que se señala en Cantoral (2016) se tienen que algunas son bases o antecedentes de otras, en particular, las competencias 1, 2 y 4; por lo que habrá que tomarse en cuenta para el diseño de situaciones de aprendizaje en todas las asignaturas del campo de las Matemáticas.

- Competencia 1. "Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales".
- Competencia 2. "Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques".
- Competencia 4. "Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación".

Asimismo, las prácticas a considerar para estas competencias son: construir, interpretar, formular, resolver, graficar y argumentar.

Otras competencias, consideradas intermediarias, son:

- Competencia 3. "Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales".
- Competencia 5. "Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento".

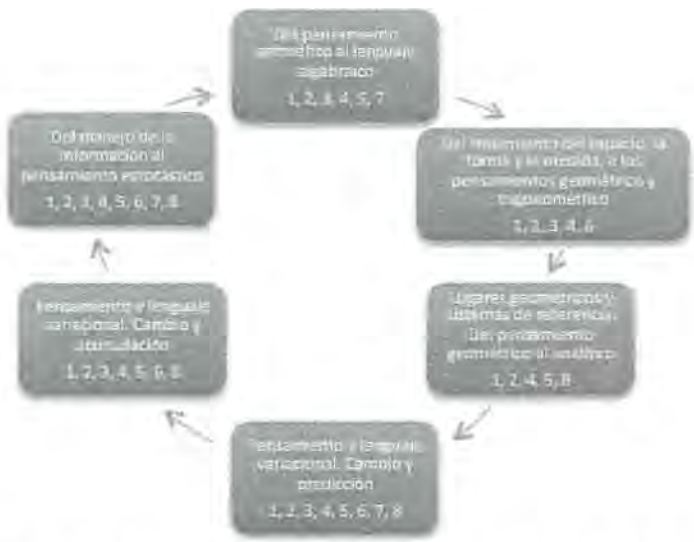
Prácticas a considerar: explicar, interpretar, contrastar, analizar, determinar y estimar.

Un tercer grupo de competencias, que se presenta sólo esporádicamente, son:

- Competencia 6. "Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean".

- Competencia 7: "Elige un enfoque determinístico o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia".
- Competencia 8: "Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos".

Prácticas a considerar: cuantificar, representar, contrastar, elegir, argumentar e interpretar.



Esquema 1.2. Red de competencias disciplinares para el campo de las Matemáticas.

De la revisión realizada a las asignaturas Álgebra (BT) y Matemáticas I (BG), se identifica, entre otros aspectos, que únicamente en el BG se aborda el tema de Sucesiones y Series, referidas a dos formas particulares: Aritmética y Geométrica

En lo referente a Matemáticas I del BG, en Cantoral (2016), se tiene que el eje disciplinar se considera como: *del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico*; y en el cual las competencias disciplinares tomadas en cuenta son: 1, 2, 3, 4, 5 y 7. Sus componentes son: *patrones, simbolización, y generalización: elementos del álgebra básica*. Por su parte, los contenidos centrales son los siguientes:

- Uso de las variables y las expresiones algebraicas.
    - Usos de los números y sus propiedades.
    - Conceptos básicos del lenguaje algebraico.
- **De los patrones numéricos a la simbolización algebraica.**
    - **Sucesiones y series numéricas.**
- Variación lineal como introducción a la relación funcional.
    - Variación proporcional.
    - Tratamiento de lo lineal y lo no lineal (normalmente cuadrático).
- El trabajo simbólico.
    - Representación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Asimismo, en las sucesiones numéricas vistas como contenido específico del contenido central *de los patrones numéricos a la simbolización algebraica*, se considera lo siguiente:

> "Sucesiones y series numéricas particulares (números triangulares y números cuadrados, sucesiones aritméticas y geométricas), representadas mediante dibujos, tablas y puntos en el plano. Con base en comportamientos numérico, ¿qué, ¿cómo y cuánto cambia? Un análisis variacional de los patrones numéricos".

1.3 Estado del Arte

Se realizó una consulta sobre investigaciones y propuestas, relacionadas al tema de sucesiones y series, aritméticas y geométricas, de la cual se encontraron diversos trabajos de donde fue posible obtener la siguiente información.

1.3.1 Antecedentes históricos de las sucesiones

La Real Academia Española define sucesión como:

- Acción y efecto de suceder.
- Entrada o continuación de alguien o algo en lugar de otra persona o cosa.
- Continuación ordenada de personas, cosas, sucesos, etc.

En Matemáticas comúnmente se define una sucesión como una aplicación del conjunto de los números naturales (N) en un conjunto no vacío A, $f: N \rightarrow A$ en donde $f(n) = a_n \in A$ es el enésimo término de la sucesión que conforman los elementos de A. El conjunto A puede ser cualquiera, desde un conjunto de números reales (R) o racionales (Q), un espacio de funciones o de matrices, un conjunto de pasos de baile, las estaciones del año, o cualquier otro conjunto de objetos que sigan un patrón ordenado.

Las sucesiones numéricas matemáticamente interesantes son aquellas de las que se puede estudiar el comportamiento (cómo es el orden del patrón que siguen los términos) y la convergencia de la sucesión (hacia dónde tienden los términos).

En Bedoya (2015) se sugiere que se puede pensar que la historia de las sucesiones comenzó hace miles de años atrás cuando el hombre ajustaba el concepto de número y lograba representarlo por medio de símbolos, para así lograr ordenarlos en forma creciente y progresiva, lo que contribuyó a crear la sucesión natural de los números. Esto conllevó a la necesidad del ser humano de contar sus animales, sus tierras y sus pertenencias en general. Lo anterior puede considerarse como un origen de sucesión aritmética ya que contar consistía en asignarle a cada objeto un término de la sucesión natural, empezando desde uno hasta llegar al último elemento.

Sin embargo, como se menciona en Ortega (2012), el origen de las sucesiones numéricas no se le atribuye a ningún matemático en particular, pero algunos historiadores muestran ciertos documentos que atestiguan la presencia de las sucesiones varios siglos antes de nuestra era. De estos documentos se insinúa como origen de las sucesiones los rituales con ayuda de la numeración, relacionado con los ceremoniales que se organizaban a las divinidades: *había que organizar cuidadosamente los ritos y las celebraciones, no fuera a ser que se enojaran los dioses y prolongaran el invierno un par de semanas.*

De este modo, con el ordenamiento de los ceremoniales se muestran un primitivo uso de las sucesiones; además de considerar que las propias estaciones del año, no son más que una sucesión de números (acotada, periódica y no convergente).

A continuación, considerando a Gutiérrez (2009), Ortega (2012) y Bedoya (2015) se presenta una breve información sobre antecedentes históricos de las sucesiones:

- Babilonios (2000 a.C. - 600 a.C.), respecto a la aritmética comercial, se presenta el problema de calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto; con lo cual se obtienen las sucesiones geométricas.

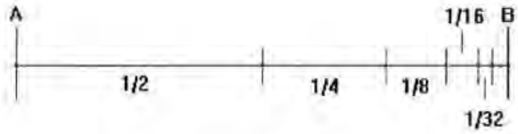
Tablilla babilónica.

- En el antiguo Egipto, se estudiaban las sucesiones aritméticas en relación con sus problemas cotidianos. En cuanto al trato de las sucesiones geométricas, sus conocimientos se recogen en diversos textos matemáticos antiguos, por ejemplo, el Papiro de Amhes; en el problema 79 de éste, se da la solución (sin el enunciado) de un conocido problema sobre gatos, ratones y trigo: 7 casas, 49 gatos, 343 ratones, 2401 espigas de trigo, 16807 medidas de grano; la progresión geométrica $x_n = 7^n, \forall n \in N$

Otros de los textos importantes que recogen los conocimientos importantes de esta civilización es El papiro Rhind. En él se recogen conocimientos generales sobre series geométricas y aritméticas.

- En la antigua India, entre el 400 a. C. y el 200 a. C., los matemáticos comenzaron el estudio de las matemáticas para el exclusivo propósito de las matemáticas, desarrollando matemáticamente las sucesiones. El Manuscrito "Bakhshali", escrito entre el 200 a. C. y el 200 d. C., incluía soluciones de sucesiones aritméticas y geométricas y de series compuestas.
- En la antigua Grecia (hasta el 300 d.C.), ya se tenía cierta noción de la sucesión geométrica; una prueba son las conocidas paradojas de Zenón de Elea (490-430 a. C.).

Paradoja de la dicotomía



Paradoja de Aquiles y la tortuga

Además, se comenzaban a usar los números figurales, debido a lo pobre que resultaba ser el sistema de numeración de la época. Por otro lado, son los griegos quienes formalizaron la aritmética e inventaron una notación para representar las generalizaciones, entre ellos, Pitágoras y sus discípulos, quienes se encargaron de organizar los conceptos de sucesiones y series de los mesopotámicos y de los egipcios. Algunos de los aportes a la aritmética fueron las definiciones de números pares e impares por medio de una sucesión para cada una de ellas y también la clasificación de los números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc., formando sucesiones y series aritméticas.

- En la edad media destacan Euclides y Bhaskara II (1114 - 1185). En la proposición 35 del libro IX de Los Elementos de Euclides (siglo III a. C.) aparece una fórmula, semejante a la actual, para hallar la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica.

Por su parte, Bhaskara, importante matemático de la India en el siglo XII. En su más conocida obra, "En Lilavati", plantea diversos problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas.

- La petición del inventor del ajedrez. Hay una antigua leyenda acerca de las sucesiones geométricas como protagonistas y los tableros de ajedrez. El rey de Persia determinó recompensar al inventor, un hombre llamado Sessa, y que resultó ser un avispado hombre de negocios; a cambio de entretener al rey con su juego pidió la siguiente cantidad de trigo: un grano por la 1º casilla, dos granos por la 2º, cuatro granos por la 3º, y así hasta llegar a la última. Sessa estaba pidiendo la suma de los primeros 64 términos de la progresión geométrica $1, 2, 4, 8, \dots$ En total, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \cong 184$ trillones. La sucesión geométrica es: $x_n = 2^n \; \forall n \in N$.

En la edad contemporánea se destacan:

- Gauss, a los 7 años consiguió resolver el problema de la suma de los 100 primeros números en una clase en el colegio, estableciendo una relación simétrica con la sucesión aritmética.

En el siglo XVIII Thomas Robert Malthus fue el primer economista en proponer una teoría sistemática de la población. Plasmó sus puntos de vista con relación a la población en su famoso libro Essay on the Principle of Population (1798). En el capítulo 2 de su célebre ensayo escrito, Malthus enuncia una famosa ley sobre la relación entre el crecimiento de la población mundial y el de los recursos naturales "yo afirmó que, si la población se controla, crece en progresión geométrica, mientras que los recursos naturales de subsistencia crecen en progresión aritmética".

De esta manera, la información obtenida acerca de la historia de las sucesiones aritméticas y geométricas, permitió considerar aspectos para introducirlos dentro de las actividades de la secuencia, por ejemplo, el razonamiento utilizado por Gauss para determinar la suma de los primeros cien números naturales.

1.3.2 Errores y dificultades que enfrentan los estudiantes en el estudio de las sucesiones numéricas

A continuación, a partir de una búsqueda de investigaciones relacionadas con las sucesiones y series de interés – aunque algunas de éstas llevadas a cabo en niveles educativos diferentes al nivel medio superior – se presentan algunos errores y dificultades que muestran los estudiantes en el estudio de las sucesiones numéricas, y que fueron considerados para el diseño del proyecto.

De Ortega (2012) se tomaron en cuenta los siguientes errores y dificultades:

- Confunden los conceptos de término e índice.

- Obtienen la ley general analizando los primeros términos sin analizar los términos superiores.
- Confunden sucesión aritmética y geométrica.
- No son capaces de identificar las sucesiones como un conjunto de elementos que tienen características comunes.
- Confunden la suma de los términos de una sucesión con la búsqueda del término general.
- Se les complica detectar ciertas regularidades.
- En una representación gráfica pueden obtener el siguiente término de la representación, pero no el término general de la sucesión.
- No consiguen obtener la sucesión numérica a partir del término general.
- No logran llevar a cabo un razonamiento para obtener una expresión que permita determinar la suma de los n primeros términos de una sucesión.
- No son capaces de observar que la suma de los términos de una sucesión se puede expresar en función de la diferencia o razón.

De Bajo, Sánchez y Gavilán (2015), se consideró lo siguiente:

- Przenioslo (2006), en donde se identifican, dos formas de ver a las sucesiones por parte de los estudiantes: sucesiones como una lista numérica en estudiantes de 16 a 18 años, y sucesiones como una función en estudiantes de 18 a 19 años. Para Przenioslo el concepto de sucesión numérica requiere el manejo de diferentes modos de representación.
- Sierpinska (1990), en donde se identifican diferentes concepciones sobre las sucesiones numéricas. Se considera, por una parte, a las sucesiones numéricas como una lista que se vincula con la existencia de una fórmula que permite obtener los términos, y por otra, como una lista larga (infinita) de números.
- En Mor, Noss, Hoyles, Kahn y Simpson (2006) se observó que las intuiciones de los estudiantes en relación a las sucesiones numéricas son intuitivamente recursivas (es

decir, entre términos sucesivos de una sucesión, más que como una relación entre el valor y la posición).

Asimismo, se tomó en cuenta que a los estudiantes les resulta difícil:

- Distinguir cuando nos referimos al valor de un término de una sucesión o al lugar que ocupa dicho término.
- Distinguir cuando una situación se puede resolver mediante una sucesión aritmética o geométrica.
- Comprender el concepto de sucesión como un conjunto ordenado.

1.3.3 Propuestas didácticas para el estudio de sucesiones

Por su parte, de las propuestas didácticas consultadas se consideraron algunos aspectos sobre la manera en la que estaban diseñadas las actividades.

- Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior (Gutiérrez, 2009). Tesis que se presentó para obtener el grado de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Se llevó a cabo en el Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, en la ciudad de México en el año 2009.

De este proyecto, se tomaron en cuenta algunos antecedentes históricos de las sucesiones y series; la investigadora muestra una breve revisión de los desarrollos alcanzados por civilizaciones previas a la aparición del cálculo en Europa; esto le permitió concluir que algunas sucesiones y series, se ocupaban para resolver problemas aritméticos y geométricos, sin utilizar el Cálculo Diferencial e Integral (al menos no como el que se usa actualmente). Con lo anterior, la hipótesis del trabajo de tesis es que los estudiantes, sin necesariamente tener conocimientos sobre el cálculo y/o el uso de la notación formal, pueden construir términos de una sucesión utilizando únicamente conocimientos de aritmética y álgebra.

Las actividades que se propusieron en el proyecto fueron llevadas a cabo en dos etapas. La primera llamada etapa gráfica, consistía en graficar diferentes funciones en las que debían observar sus comportamientos y compararlas entre sí para posteriormente responder unas preguntas. La segunda etapa llamada numérica, se trató sobre la realización de cálculos numéricos que consistían en determinar el valor de la función a partir de ciertos valores de la variable independiente, los cálculos anteriores fueron hechos apoyándose de la calculadora ya que el objetivo era que compararan los valores que tomaban las funciones para después responder las preguntas planteadas.

De lo anterior, se observaron dos aspectos: 1, la forma en la que estaban planteadas las preguntas, y 2, que cada pregunta elaborada tenía un propósito determinado; lo que llevó a considerar que la forma en la que se realizaban las preguntas corresponden a un propósito específico, lo que llevó a prestar mayor atención a cada pregunta que se hacía en el diseño de las actividades.

- Unidad didáctica. Sucesiones matemáticas. Progresiones aritméticas y geométricas (Ortega, 2012). Tesis que se presentó para obtener el grado de Maestría en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas.

De este proyecto se tomó en cuenta el desarrollo detallado de algunas sesiones en las que se llevaron a cabo las actividades. Por ejemplo, el diseñador muestra para cada actividad, los contenidos matemáticos que se pretenden en la actividad, el tipo de lenguaje utilizado, las expectativas de aprendizaje, los objetivos de la planificación, los materiales y recursos necesarios para realizar las actividades, entre otros.

Una muestra de lo anterior se tiene en la sesión 2, ¨sucesiones según su término general. Operaciones con sucesiones¨, en la que el objetivo es modelizar matemáticamente una regularidad. Para intentar cumplir con el objetivo, la actividad se plantea para que los estudiantes se den cuenta por sí mismos de la regla de recurrencia que siguen las sucesiones dadas, a partir de que se les solicita determinar el vigésimos y centésimo término.

Capítulo 2. La problemática, su justificación y objetivos

En este capítulo se presentan algunos aspectos relacionados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, en particular, al álgebra. Al considerar importante desarrollar en los estudiantes un conjunto de habilidades propias del pensamiento algebraico como parte central para el aprendizaje del álgebra, se ofrecen algunos elementos que justifican el porqué de la selección del tema matemático: sucesiones y series, aritméticas y geométricas.

Además, se presenta el objetivo central y los objetivos específicos que fueron planteados para intentar ofrecer una aportación al estudio del álgebra, particularmente, en el primer año del nivel medio superior. Como objetivo central se tiene la elaboración de una propuesta didáctica que va dirigida a los estudiantes que se encuentran cursando el nivel educativo antes mencionado.

2.1 La Problemática y su justificación

La enseñanza tradicional del álgebra, se basa en la aplicación de fórmulas que para los estudiantes no representa más que la realización de procedimientos de manera repetitiva. En Velásquez (2012), citando a Ursini y Trigueros (1997) se indica que las estrategias de los estudiantes están dominadas por procedimientos que no han sido interiorizados, lo cual los deja en, por ejemplo, la poca capacidad de analizar lo realizado para detectar posibles errores.

Velásquez (2012) también señala que, desde esta perspectiva, el uso memorístico de las matemáticas genera en los estudiantes un aprendizaje a corto plazo, situación contradictoria al desarrollo de competencias y de los pensamientos matemáticos contemplados en los lineamientos curriculares.

Por lo cual, para el desarrollo de este trabajo, se considera que, en el proceso de la enseñanza del álgebra, es más significativo para los estudiantes desarrollar un conjunto de habilidades propias del pensamiento algebraico, que les permita, al enfrentarse a una situación, construir expresiones matemáticas con la finalidad de operar, analizar e interpretar los resultados obtenidos en relación a la situación planteada.

Bajo esta perspectiva del desarrollo de habilidades propias del pensamiento algebraico es que es interesante el estudio de las sucesiones numéricas. Con el estudio de las sucesiones es posible reconocer, expresar y generalizar patrones o regularidades, para además modelar situaciones y así facilitar el contacto con el simbolismo algebraico. Reggiani (1994) indica que la generalización es parte indispensable en el proceso de desarrollo del pensamiento algebraico.

En el estudio de las sucesiones numéricas intervienen actividades como el reconocimiento y generalización de patrones que permiten establecer expresiones algebraicas mediante el uso de la observación y utilización de diferentes tipos de lenguajes matemáticos. Sin embargo, distintas investigaciones muestran evidencias sobre las dificultades que presentan los estudiantes con las sucesiones numéricas para comprenderlas.

En Ortega (2012), se muestran errores y dificultades que los estudiantes del nivel medio superior presentan al trabajar con las sucesiones numéricas, como, por ejemplo, dificultades para establecer y generalizar patrones o regularidades, o para usar distintas formas de representación (gráfica, tabular, algebraica, etc.)

Estas dificultades no sólo se evidencian en el nivel medio superior, sino que también se presenta en el nivel superior, por ejemplo, en Velásquez (2012) se cita a Posada y Jaramillo (2003) en donde se deja ver que a los estudiantes de cálculo integral se les dificulta la solución de algunos problemas que tienen que ver con sucesiones y series.

A través de la revisión de algunos trabajos relacionados con las sucesiones numéricas, es posible observar que esta problemática es de interés dentro del ámbito de la Matemática Educativa, sobretodo en el nivel educativo básico.

Dado lo anterior resulta importante poner atención también a niveles superiores, por lo que el presente trabajo se centra en la elaboración de una propuesta didáctica dirigida a estudiantes del nivel medio superior, con el propósito de que a través de las sucesiones numéricas realicen actividades de identificación y generalización algebraica de patrones, y asimismo que desarrollen un conjunto de habilidades propias del pensamiento algebraico.

2.2 Objetivos

2.2.1 Objetivo general

Diseñar una secuencia didáctica para el estudio de sucesiones y series, aritméticas y geométricas, dirigida a estudiantes del nivel medio superior, acorde al enfoque por competencias y con el propósito de promover el desarrollo de un conjunto de habilidades propias del pensamiento algebraico.

2.2.2 Objetivos específicos

- Identificar situaciones problema asociados al estudio de las sucesiones y series, aritméticas y geométricas.
- Determinar los tipos de lenguaje adecuados para el diseño de las actividades.
- Relacionar cada una de las competencias disciplinares propuestas en los planes de estudios asociadas al estudio de sucesiones y series, con los propósitos planteados en las actividades.

Capítulo 3. Elementos Teóricos y Metodológicos

En este capítulo se plantean los elementos del marco teórico que sustenta a esta propuesta: el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS)(Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2009)), en la cual se articulan aspectos implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El EOS proporciona herramientas teóricas y metodológicas que permiten diseñar procesos de enseñanza, además de poder describir lo que sucede y dar una valoración a su pertinencia. Algunas de las herramientas consideradas para el diseño de la propuesta son: prácticas matemáticas, objetos, significados sistémicos y criterios de idoneidad didáctica.

3.1 El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS)

En el capítulo anterior se señalaron algunas de las dificultades mostradas por los estudiantes en el estudio de las sucesiones numéricas. La realización de este trabajo se apoya en un marco teórico que permite caracterizar y determinar un significado -el cual se detalla más adelante- para dar cumplimiento al objetivo general trazado; así como otras herramientas consideradas importantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En Godino (2009) se menciona que el EOS es un marco teórico producto de una integración de varios marcos teóricos que se han venido desarrollando en el área de Matemática Educativa, y que tiene el propósito de unificar las formas de analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En él se consideran tres aspectos de la matemática: como actividad de resolución de problemas (socialmente compartida), lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado.

Es decir, en este enfoque, los sistemas de prácticas, objetos y significados matemáticos juegan un papel importante para describir procesos de enseñanza desde el punto de vista institucional y personal. Por lo que en este capítulo se declaran los aspectos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), que han sido tomados en consideración para dar cumplimiento a los objetivos planteados.

3.1.1 Sistemas de prácticas, objetos y significados matemáticos

Se considera a la práctica matemática como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994).

Al conjunto de prácticas matemáticas tanto operativas como discursivas que realiza un sujeto se le llama sistemas de prácticas.

De Godino (2009) se tiene que, en el estudio de las matemáticas, interesa considerar los sistemas de prácticas que son puestas de manifiesto por las personas ante una situación problemática, pues de ellas emergen objetos matemáticos y conforman significados. Para ello se tiene que, si los sistemas de prácticas, las realiza una persona para resolver determinados tipos de situaciones problemas, éstos constituirán su significado personal del objeto matemático; mientras que si son realizados por una institución (conjunto de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas), éstos constituirán el significado institucional.

Asimismo, de Godino (2009) se tiene que, a partir de los sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico, se introduce la tipología básica de significados, que se muestra en la Figura 3.1.1.

Con relación a los significados institucionales, en el EOS se consideran cuatro tipos, de los cuales para efecto del presente trabajo se toman los siguientes:

* **Referencial,** sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. La determinación de este significado se puede apoyar de llevar a cabo un estudio histórico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta una diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.
* **Pretendido,** sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

Figura 3.1.1. Tipos de significados institucionales y personales.

De Godino (2002) se tiene que los objetos matemáticos (todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas) se derivan de las prácticas matemáticas. En ellas se observa el uso de lenguajes, verbales y simbólicos, conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos.

En consecuencia, cuando una persona realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones – problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la configuración de la Figura 3.1.2

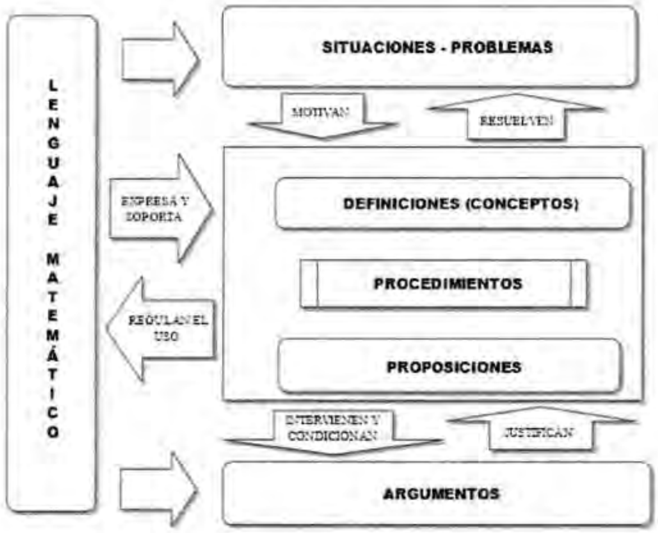


Figura 3.1.2. Configuración de objetos primarios.

Se tiene entonces la tipología de objetos matemáticos, llamados objetos primarios:

- **Lenguajes,** se refiere a las expresiones en sus diversos registros (natural, aritmético, algebraico, tabular, etc.)
- **Situaciones-problema,** son los contextos extra o intra matemáticos planteados que permiten la realización de sistemas de prácticas.
- **Conceptos-definición,** se refiere a los conocimientos introducidos mediante descripciones o definiciones, por ejemplo: variable, sucesión, sucesión numérica, etc.
- **Proposiciones,** son los enunciados realizados alrededor de los conceptos utilizados.
- **Procedimientos,** representa a los algoritmos, operaciones y/o técnicas plasmados para intentar dar respuesta a la situación planteada.
- **Argumentos,** se refiere a los enunciados que son utilizados para validar o explicar los procedimientos y proposiciones llevados a cabo.

3.1.2 Criterios de Idoneidad didáctica

La importancia de los sistemas de prácticas en el EOS se debe a que se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. Por lo que es conveniente que las actividades estén elaboradas tomando en cuenta criterios que sustenten un planteamiento idóneo. A estos criterios se le llaman criterios de idoneidad didáctica, y están presentes como guía para el diseño y su valoración.

En el EOS, se introducen seis criterios para valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Esos criterios son los siguientes:

- **Idoneidad epistémica,** se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- **Idoneidad cognitiva,** expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- **Idoneidad interaccional,** se refiere a las configuraciones didácticas que permiten, detectar conflictos semióticos (a priori), y resolver aquellos que se producen durante el proceso de instrucción.
- **Idoneidad mediacional,** representa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- **Idoneidad afectiva,** es el grado de implicación (interés, motivación, disposición, etc.) por parte de los estudiantes en el proceso de estudio.
- **Idoneidad ecológica,** se relaciona con el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

La Figura 3.1.2 representa mediante un hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o planificado, donde a priori se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno corresponde a las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de estudio implementado.

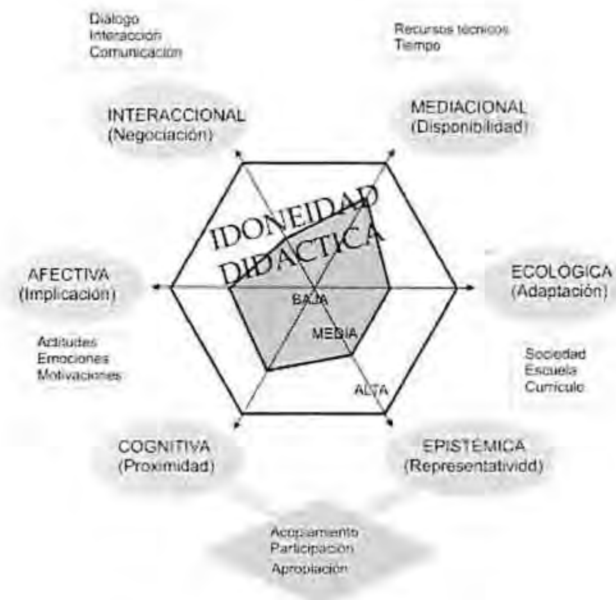


Figura 3.1.2. Idoneidad didáctica.

Para realizar un análisis más detallado, se toman en cuenta algunos puntos propuestos por Godino (2011), en donde para cada una de las idoneidades se señalan indicadores que sirven para ofrecer una valoración sobre la pertinencia de la propuesta.

3.2 Aspectos Metodológicos

A continuación, se presentan las acciones metodológicas que fueron consideradas para el logro de los objetivos planteados:

Caracterización del Significado Institucional de Referencia de las Sucesiones Numéricas

La caracterización del significado de referencia consistió en la consideración del análisis y la detección de los sistemas de prácticas y objetos matemáticos primarios presentes en las fuentes consultadas, donde se encontraba ubicado el tema matemático de interés: sucesiones y series, aritméticas y geométricas.

Los análisis se realizaron a fuentes oficiales, tales como los planes y programas de estudios creados bajo el marco de la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS) y el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), así como el nuevo Modelo Educativo para la Educación Obligatoria (2017). En particular a:

- El bloque III del programa de estudios propuesto por la Dirección General de Bachillerato (DGB), creado bajo el enfoque de la RIEMS.
- El bloque III del libro de texto de Matemáticas I (BAEM, 2014).
- El eje disciplinar "del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico" del nuevo currículo de Matemáticas 1 para el Bachillerato General.

Determinación del Significado Institucional Pretendido de las Sucesiones Numéricas

Una vez que se detectaron los sistemas de prácticas y los objetos primarios, se hizo una selección de éstos considerando que con ellos se cubrieran la mayoría de las competencias disciplinares; en particular las competencias propuestas en el nuevo modelo educativo.

Por lo que la determinación del significado pretendido se basa en la selección de los sistemas de prácticas y los objetos matemáticos primarios que se planearon promover con la secuencia didáctica.

Selección de Criterios de Idoneidad como guía para el diseño

Después de la determinación del significado pretendido, se realizó una adaptación a los indicadores de idoneidad didáctica que sirvieron como base para la elaboración y valoración del diseño de la secuencia didáctica.

Diseño preliminar de las actividades didácticas

Además de la determinación del significado pretendido, así como de los indicadores de idoneidad, se plantearon los objetivos de la propuesta didáctica, con lo que fue posible llevar a cabo una versión preliminar de las actividades que forman parte de la secuencia. Para esto, se consideró también un componente didáctico propuesto por Díaz Barriga (2013).

En dicho componente didáctico, la idea central recae en la importancia de la elaboración de una secuencia didáctica para organizar situaciones de aprendizaje que se desarrollen en el trabajo de los estudiantes. La línea a seguir para construir una secuencia didáctica, que se sugiere en Barriga (2013), está compuesta por actividades de inicio (o apertura), actividades de desarrollo y actividades de cierre. A continuación, se presenta una breve descripción sobre las actividades mencionadas.

- Actividades de inicio, permiten abrir el clima de aprendizaje, mediante el trabajo con un problema de la realidad o mediante una discusión en pequeños grupos sobre una pregunta que parta de interrogantes significativas para los alumnos, éstos reaccionarán trayendo a su pensamiento diversas informaciones que ya poseen.

- Actividades de desarrollo, tienen la finalidad de que el estudiante interaccione con una nueva información. Se afirma que hay interacción porque el estudiante cuenta con una serie de conocimientos previos —en mayor o menor medida adecuados y/o suficientes— sobre un tema, a partir de los cuáles le puede dar sentido y significado a una información. Para significar esa información se requiere lograr colocar en interacción: la información previa, la nueva información y hasta donde sea posible un referente contextual que ayude a darle sentido actual.
- Actividades de cierre, se realizan con la finalidad de lograr una integración del conjunto de tareas realizadas. A través de ellas se busca que el estudiante logre reelaborar la estructura conceptual que tenía al principio de la secuencia, reorganizando su estructura de pensamiento a partir de las interacciones que ha generado con las nuevas interrogantes y la información a la que tuvo acceso.

Valoración a priori de la secuencia didáctica

El proceso de valoración de la secuencia didáctica consistió en analizar de qué manera los indicadores de idoneidad estaban presentes, considerando la integración de las actividades.

Puesta en escena de las actividades didácticas

Se consideraron criterios sobre la selección de los estudiantes a los cuales se les aplicó las actividades; por ejemplo, se consideró el nivel educativo al que pertenecen, la modalidad y los recursos con los que cuenta la institución en la que estudian, entre otros. Esto con la intención de que el significado pretendido pueda ser alcanzado en su mayoría por los estudiantes.

La planificación para la puesta en escena consistió en proporcionar a cada uno de los estudiantes hojas de trabajo en la cual se mostraban todas las actividades de la secuencia didáctica.

Valoración a posteriori de la secuencia didáctica

Durante la puesta en escena de las actividades se realizaron observaciones y anotaciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las sucesiones y series, aritméticas y geométricas. Dichas observaciones, además de las hojas de trabajo obtenidas por parte de los estudiantes, sirvieron para valorar la pertinencia de la secuencia didáctica a partir de contrastar los resultados obtenidos con la valoración a priori.

Adecuaciones a la secuencia didáctica

La valoración a posteriori realizada con los criterios de idoneidad didáctica sirvió como base para afinar el diseño de algunas secciones de las actividades. A partir de estas modificaciones, en el anexo 3 se presenta el resultado final de la propuesta didáctica.

Capítulo 4. Diseño de la secuencia didáctica

En este capítulo se presenta el diseño de la secuencia didáctica, así como algunos análisis previos que fueron tomados en cuenta para dar cumplimiento a los objetivos planteados. En particular, se presentan los significados institucionales, así como los indicadores de idoneidad, que fueron considerados para la elaboración de la propuesta. Asimismo, se tienen las características con las que cuentan cada una de las actividades que conforman la secuencia didáctica.

La caracterización de los significados, de referencia y pretendido, se desarrolló con el propósito de que con la implementación de la propuesta se lleven a cabo los aprendizajes esperados en el estudio de las sucesiones y series, aritméticas y geométricas.

4.1 Caracterización del Significado Institucional de Referencia de las Sucesiones Numéricas

A través de la caracterización de los sistemas de prácticas y de los objetos matemáticos primarios fue posible conformar un significado de referencia de las sucesiones numéricas. Para tal efecto, se hicieron análisis a los programas de estudios de la DGB creados bajo la RIEMS y bajo el Nuevo Modelo Educativo, así como al libro de texto de Matemáticas 1 (BAEM, 2014).

Programa de estudios de la DGB creado bajo la RIEMS

Este programa está dirigido a la asignatura de Matemáticas 1. En él se encuentra un conjunto de competencias genéricas y disciplinares que están integradas en bloques para el logro de los aprendizajes pretendidos. Los bloques que componen el programa de la asignatura son 10.

Para cada uno de los bloques, el programa de estudios, además de presentar las competencias disciplinares, sugiere una serie de desempeños, así como actividades de aprendizaje que el estudiante debería de poder desarrollar al concluir el bloque para cumplir con el objetivo planteado en él. Asimismo, se presentan algunas listas de cotejo como instrumentos de evaluación con la intención de que el estudiante pueda reflexionar sobre su proceso de solución de las situaciones planteadas.

Lo anterior, además de las actividades de enseñanza propuestas para cada bloque, puede ser considerado por el docente al momento de diseñar actividades significativas integradoras, puesto que pueden ser de utilidad para que el diseño promueva los aprendizajes pretendidos de los estudiantes.

En el bloque 3 se encuentran las sucesiones y series, aritméticas y geométricas: ¨Realizas sumas y sucesiones de números. Se estudian sucesiones y series (aritméticas y geométricas) de números, bosquejando funciones discretas (lineales y exponenciales) ¨.

El objetivo de este bloque es el promover que el estudiante pueda utilizar distintos procedimientos aritméticos y/o algebraicos para representar relaciones entre magnitudes constantes y variables, (es decir, que pueda generalizar por medio de expresiones algebraicas los patrones de comportamiento observados en las sucesiones numéricas). Las competencias disciplinares que se promueven son las mencionadas en el Capítulo 1 de este trabajo (página 20).

Algunos de los desempeños con los que el estudiante debería contar al finalizar este bloque son: identificar y diferenciar las series y sucesiones numéricas y así como sus propiedades, clasificar las sucesiones numéricas en aritméticas y geométricas, determinar patrones de referentes a las sucesiones aritméticas y geométricas, construir gráficas para establecer el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas, emplear la calculadora para la verificación de resultados, realizar cálculos para obtener el enésimo término en una sucesión aritmética y geométrica.

Respecto a las actividades de aprendizaje, al estudiante se le brinda la oportunidad de desarrollar las siguientes: elaborar un mapa conceptual a partir de investigar sobre las series o sucesiones, aritméticas y geométricas; aprovechar la exposición del docente para realizar apuntes; calcular cualquier término de una sucesión aritmética o geométrica; calcular la suma de ciertos términos consecutivos de una serie aritmética o geométrica; resolver problemas con complejidad creciente en el que se demuestre la habilidad para establecer modelos y darle solución a partir de ellos utilizando la calculadora; proponer modelos para dar solución a las situaciones propuestas por el docente e inventar en equipos otros ejemplos en los que pueda consolidar lo aprendido.

Dentro de las actividades de enseñanza se tienen las siguientes: coordinar que investiguen lo relativo a series y sucesiones, aritméticas y geométricas; explicar con ejemplos las diferencias entre sucesiones aritméticas y geométricas; plantear situaciones para que sean resueltos por los estudiantes; promover el uso de la calculadora como instrumento para obtener el resultado de la suma de términos de una sucesión o para encontrar cualquier término; mostrar la solución de problemas con complejidad creciente relativas a series y sucesiones aritméticas y geométricas.

Referente a la evaluación de los aprendizajes pretendidos, en el programa se promueven algunos instrumentos, tales como, listas de cotejo para la coevaluación y autoevaluación, con la intención de que el estudiante pueda reflexionar sobre el proceso de solución de las situaciones planteadas.

Libro de texto de Matemáticas 1 (BAEM, 2014).

Como complemento al programa de estudios y a la caracterización del significado de referencia de las sucesiones numéricas, se consultó el libro de texto Matemáticas I (BAEM, 2014). Este libro fue elaborado bajo el marco de la Reforma Integral de la Educación Media Superior impulsada en el año 2008.

En este módulo se presentan una serie de temas matemáticos que ayudan a desarrollar las competencias genéricas y disciplinares propuestas por la RIEMS.

Los bloques pertenecientes a este libro de textos eran 9, y eran conformados por una o varias secuencias didácticas, además de problemas complementarios, de autoevaluación y reflexiones generales relacionadas con el bloque en cuestión. Las secuencias didácticas presentadas estaban organizadas en secciones de inicio, desarrollo y cierre.

El bloque 3 (realiza sumas y sucesiones de números), en particular, estaba compuesta por dos secuencias: secuencia didáctica 1 (representaciones algebraicas) y, secuencia didáctica 2 (sucesiones y series). Este bloque centraba la atención en el papel que juegan las expresiones algebraicas en las sucesiones y series numéricas.

Se eligió enfatizar sobre el análisis de la secuencia didáctica 2 ya que en ésta se tenía la oportunidad de trabajar en la identificación de patrones que permitía representar al enésimo término de una sucesión numérica, además de discriminar entre sucesiones aritméticas y geométricas.

La secuencia didáctica 2 estaba formada por una actividad de inicio, tres actividades de desarrollo y una actividad de cierre. Respecto al análisis sobre la detección de los objetos primarios presentes, se anexa el detalle (Anexo 2) de dos actividades (una de inicio y otra de desarrollo).

La selección de las dos actividades se debe a que la primera trata sobre los términos de una sucesión numérica que tiene la particularidad de no ser aritmética ni geométrica, y en la que, ante la dificultad de ésta, se le solicita al estudiante determinar una expresión recursiva más que la expresión algebraica que representa al enésimo término. Por su parte, la segunda actividad está relacionada con encontrar un procedimiento o estrategia que facilite determinar la suma de los términos de una sucesión que es aritmética.

Programa de estudios de la DGB creado bajo el Nuevo Modelo Educativo y el Nuevo Currículo de la EMS.

El Nuevo Modelo Educativo, resultado de una revisión realizada a los planes y programas de estudios de la Reforma anterior, presenta una adecuación de contenidos de Matemáticas 1. El propósito de la asignatura es que el estudiante aprenda a identificar, analizar y comprender el uso del lenguaje algebraico en una diversidad de contextos. Algunos de los aspectos que se consideraron como parte del cambio y que están presentes en el Nuevo Currículo de la EMS son: las competencias genéricas y disciplinares, los componentes y contenidos, centrales y específicos, los aprendizajes y productos esperados.

En el modelo educativo anterior, los contenidos se encuentran integrados en bloques, en este Nuevo Currículo se maneja por ejes disciplinares. El tema matemático que aquí interesa forma parte de los contenidos específicos del eje disciplinar denominado: del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico. Dentro de los componentes de este eje se manejan algunos elementos del álgebra básica tales como, los patrones, simbolización y generalización.

En otras palabras, las sucesiones y series numéricas, consideradas como uno de los contenidos específicos de este eje, forman parte del contenido central: de los patrones numéricos a la simbolización algebraica. Para este contenido específico se toman en cuenta: sucesiones y series numéricas particulares (números triangulares y números cuadrados, sucesiones aritméticas y geométricas), representadas mediante dibujos, tablas y puntos en el plano; al análisis de los comportamientos numéricos, ¿qué?, ¿cómo y cuánto cambia?; representaciones discretas de gráficas.

Respecto a las competencias disciplinares que se promueven para las sucesiones y series numéricas, se tiene que son las mencionadas en el Capítulo 1 de este trabajo (página 21). Asimismo, a estos contenidos, se le asocian algunas prácticas tales como: comparar, modelar, construir patrones, simplificar, expresar, estimar, verbalizar, resolver, graficar, generalizar, representar, relacionar magnitudes.

Con todo lo anterior, se mencionan a continuación algunos de los aprendizajes esperados que se pretende que se puedan desarrollar durante este eje disciplinar: se espera que el estudiante pueda ser capaz de reconocer patrones de comportamiento entre magnitudes; formular de manera coloquial escrita, numérica y gráfica los patrones de comportamiento; expresar mediante símbolos fenómenos de su vida cotidiana; diferenciar los cocientes y/x y y/x como tipos de relaciones constantes entre magnitudes; representar gráficamente fenómenos de variación constante en dominios discretos.

De la misma forma, se pretende que los productos esperados sean: usar estrategias variacionales (comparar, seriar, estimar) para diferenciar comportamientos lineales y no lineales; caracterizar los fenómenos de variación constante; representar gráficamente fenómenos de variación constante.

A partir del análisis realizado a los planes y programas de estudios antes mencionados, se tiene la caracterización del significado institucional de referencia, en el que se identifican los siguientes sistemas de prácticas y objetos matemáticos primarios.

Sistemas de prácticas

- Relacionar los términos de una sucesión con la posición que ocupan.
- Analizar los términos consecutivos de cualquier sucesión dada para determinar su comportamiento.
- Expresar a través de cualquier tipo de lenguaje (natural, tabular, algebraico, gráfico o aritmético) los patrones observados en las sucesiones.
- Generalizar por medio de expresiones algebraicas los patrones observados en las sucesiones numéricas.
- Simplificar las expresiones algebraicas construidas.
- Comparar los términos de una sucesión para construir patrones.
- Proponer modelos numéricos o algebraicos para dar solución a las situaciones propuestas.
- Resolver o estimar una solución para las situaciones presentadas.
- Comprobar los procedimientos utilizados para resolver las situaciones planteadas.
- Comprobar la validez de las expresiones algebraicas para el enésimo término, identificando las constantes: diferencia y cociente.
- Ordenar la información para identificar y determinar términos de las sucesiones numéricas.
- Reconocer las expresiones algebraicas del enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas.

- Discriminar a las sucesiones numéricas en aritméticas, geométricas o ninguna de las dos.
- Construir términos a partir de cualquier otro término (no necesariamente el primero) pertenecientes a las sucesiones numéricas.
- Asociar a las sucesiones aritméticas y geométricas con representaciones gráficas lineales y exponenciales discretas, respectivamente.
- Hacer uso de simbología y terminología matemática, como por ejemplo, n para determinar la posición de los términos.
- Concretizar el patrón de comportamiento observado en las sucesiones para determinar la expresión algebraica del enésimo término.
- Discriminar expresiones algebraicas que no cumplen con los requisitos planteados en la situación problema.
- Comprobar la validez de la expresión algebraica obtenida verificando los resultados a partir de los procedimientos realizados o sustituyendo algunos términos de la sucesión en ésta.
- Hacer uso de otros recursos no proporcionados, como, por ejemplo, la calculadora, para comprobar los procedimientos realizados.
- Generalizar el patrón de comportamiento observado en los procedimientos propuestos para proponer una expresión algebraica que determine la suma de términos consecutivos de una sucesión.
- Discriminar entre las expresiones algebraicas para el enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Analizar cómo influye la diferencia o el cociente entre términos consecutivos para la determinación de la expresión algebraica del enésimo término.
- Discriminar entre las expresiones algebraicas para determinar la suma de n términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Hacer uso de las expresiones algebraicas obtenidas para realizar la suma de términos consecutivos.

Objetos matemáticos primarios

Situaciones problema

- Determinación del patrón de comportamiento de las sucesiones numéricas.
- Identificación de las propiedades de las sucesiones y series, aritméticas y geométricas.
- Clasificación de las sucesiones numéricas en aritméticas y geométricas.
- Determinación de las constantes (diferencia y cociente) entre términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construcción de términos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construcción de modelos aritméticos o algebraicos para determinar el enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construcción de modelos aritméticos o algebraicos para determinar la suma de $n$términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Descripción del patrón de comportamiento gráfico de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Realización de cálculos para obtener cualquier término de una sucesión aritmética y geométrica tanto finita como infinita mediante las expresiones algebraicas correspondientes.
- Solución a problemas utilizando series y sucesiones aritméticas y geométricas.

Lenguajes

- Natural, para describir los patrones de comportamiento observados en las sucesiones numéricas, aritméticas y geométricas; para justificar los procedimientos realizados.
- Numérico, para determinar la diferencia o cociente, constantes, entre términos consecutivos de las sucesiones aritméticas o geométricas, respectivamente.
- Tabular, para determinar cómo es el cambio (creciente o decreciente) y el tipo de cambio (uniforme o no uniforme) entre términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.

- Algebraico, para encontrar la expresión algebraica del enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas; para construir la expresión algebraica que determina la suma de n términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Gráfico, para observar y analizar el patrón de comportamiento de las sucesiones.

Procedimientos

- Interpretar e identificar las características de tablas, gráficas, mapas, diagramas y texto.
- Determinar las variables dependientes e independientes para describir cómo es el cambio (creciente o decreciente) y el tipo de cambio (constante o no constante) para cualesquiera dos términos consecutivos de las sucesiones numéricas.
- Identificar los patrones de las sucesiones numéricas.
- Clasificar a las sucesiones en aritméticas o geométricas.
- Completar tablas con valores numéricos faltantes de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Obtener términos de las sucesiones aritméticas y geométricas utilizando la diferencia o el cociente.
- Determinar expresiones algebraicas de forma recursiva o explicita de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Encontrar la expresión algebraica para el enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Realizar sumas parciales de términos consecutivos de sucesiones finitas aritméticas y geométricas.
- Construir la expresión algebraica para determinar la suma de n términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Graficar términos de las sucesiones aritméticas y geométricas para describir el patrón de comportamiento (funciones discretas lineales o exponenciales).

- Realizar esquemas o mapas conceptuales sobre las sucesiones y series, aritméticas y geométricas.
- Utilizar la calculadora como cálculo de verificación de resultados.
- Aplicar la expresión algebraica correspondiente a una sucesión numérica.
- Dados dos términos no consecutivos, construir la expresión algebraica que determina al enésimo término de la sucesión numérica.

Conceptos

- Variable.
- Variable dependiente.
- Variable independiente.
- Cambio (creciente o decreciente).
- Tipo de cambio (constante o no constante).
- Sucesión numérica.
- Término.
- Expresión algebraica.
- Función (discreta lineal y discreta exponencial).
- Expresión recursiva.
- Sucesión aritmética.
- Sucesión geométrica.
- Enésimo término.
- Serie.
- Serie aritmética.
- Serie geométrica.

Proposiciones

- Una sucesión numérica es una colección ordenada de números que generalmente se construyen a partir de una regla dada.
- El término de una sucesión está relacionado con el lugar que ocupa en la sucesión.
- Propiedades de los números reales y sus operaciones.
- Una sucesión numérica se puede representar a través del término general, de una ley de recurrencia o de los primeros términos. Sin embargo, hay sucesiones para las que no se conoce ninguna ley de recurrencia o término general.
- Si en una sucesión, cada término es mayor que el anterior, se dice que es creciente.

- Si en una sucesión, todos los términos son iguales, se dice que es una sucesión constante.
- Si en una sucesión, cada término es menor que el anterior, se dice que es decreciente.
- De acuerdo al término general, se tienen, entre otros, dos tipos de sucesiones: aritméticas y geométricas.
- En una sucesión aritmética cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad constante, llamada diferencia.
- En una sucesión geométrica cada término se obtiene multiplicando al anterior una cantidad constante, llamada razón.
- Una sucesión es aritmética y geométrica a la vez si todos sus términos son iguales.
- Si a cualquier término de una sucesión aritmética, se le resta el término anterior y el resultado es mayor a 0, la sucesión es aritmética creciente.
- Si la resta de cualesquiera dos términos consecutivos de una sucesión es igual a 0, la sucesión es aritmética constante.
- Si a cualquier término de una sucesión aritmética, se le resta el término anterior y el resultado es menor a 0, la sucesión es aritmética decreciente.
- Si cualquier término de una sucesión geométrica, es dividido entre el término anterior y el resultado es mayor a 1, la sucesión es geométrica creciente.
- Si cualquier término de una sucesión geométrica, es dividido entre el término anterior y el resultado es igual a 1, la sucesión es geométrica constante.
- Si cualquier término de una sucesión geométrica, es dividido entre el término anterior y el resultado está entre 0 y 1, la sucesión es geométrica decreciente.
- Si cualquier término de una sucesión geométrica, es dividido entre el término anterior y el resultado es menor a 0, la sucesión es geométrica oscilante.
- El patrón de comportamiento gráfico de las sucesiones aritméticas es lineal discreto.
- El patrón de comportamiento gráfico de las sucesiones geométricas es exponencial discreto.

- Se puede encontrar la posición que ocupa un término en una sucesión dado el término general.
- No hay una única expresión algebraica para modelar una sucesión numérica.
- Existen sucesiones numéricas que no son aritméticas ni geométricas.

Argumentos

- Para justificar los procedimientos, afirmaciones y resultados obtenidos.

En la Figura 4.1.1 se presenta la configuración de los objetos matemáticos primarios que conforman el significado institucional de referencia.

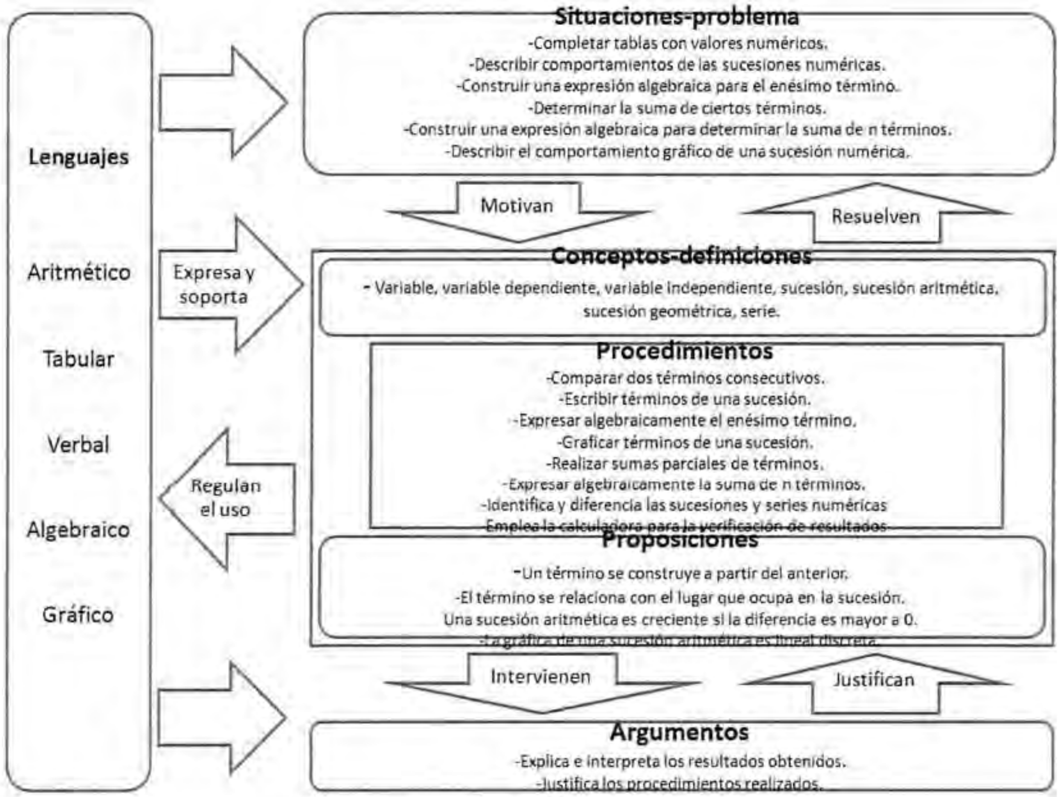


Figura 4.1.1. Configuración de objetos matemáticos primarios.

4.2 Determinación del Significado Institucional Pretendido de las Sucesiones Numéricas

A partir del significado de referencia se determinaron los sistemas de prácticas y objetos matemáticos primarios que se pretendían abordar en esta secuencia.

A continuación, se presentan los objetos matemáticos primarios que formaron parte del significado pretendido de esta propuesta didáctica.

Sistemas de prácticas

- Relacionar los términos de una sucesión numérica con la posición que ocupan.
- Analizar los términos consecutivos de cualquier sucesión numérica dada para determinar su comportamiento.
- Expresar a través de cualquier tipo de lenguaje (natural, tabular, algebraico, gráfico o aritmético) los patrones observados en las sucesiones numéricas.
- Generalizar por medio de expresiones algebraicas los patrones observados en las sucesiones numéricas.
- Proponer expresiones numéricas o algebraicas para las situaciones problemas.
- Comprobar los procedimientos utilizados en las situaciones planteadas.
- Resolver o estimar una solución para las situaciones presentadas.
- Comprobar la validez de las expresiones algebraicas para el enésimo término, identificando las constantes: diferencia y cociente.
- Ordenar la información para identificar y determinar términos de las sucesiones numéricas.
- Reconocer las expresiones algebraicas del enésimo término de las sucesiones numéricas, aritméticas y geométricas.
- Discriminar a las sucesiones numéricas en aritméticas, geométricas o ninguna de las dos.
- Construir términos a partir de cualquier otro término (no necesariamente el primero) pertenecientes a las sucesiones numéricas.

- Asociar a las sucesiones numéricas, aritméticas y geométricas, con representaciones gráficas lineales y exponenciales discretas, respectivamente.
- Hacer uso de simbología y terminología matemática, como por ejemplo, n para determinar la posición de los términos.
- Discriminar las expresiones algebraicas que no cumplen con los requisitos planteados en la situación problema.
- Comprobar la validez de la expresión algebraica obtenida verificando los resultados a partir de los procedimientos realizados o sustituyendo algunos términos de la sucesión en ésta.
- Hacer uso de otros recursos no proporcionados, como, por ejemplo, la calculadora, para comprobar los procedimientos realizados.
- Generalizar el patrón de comportamiento observado en los procedimientos propuestos para proponer una expresión algebraica que determine la suma de términos consecutivos de una sucesión.
- Discriminar entre las expresiones algebraicas para el enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Analizar cómo influye la diferencia o el cociente entre términos consecutivos para la determinación de la expresión algebraica del enésimo término.
- Discriminar entre las expresiones algebraicas para determinar la suma de n términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Hacer uso de las expresiones algebraicas obtenidas para realizar la suma de términos consecutivos.

Objetos matemáticos primarios

Situaciones problemas

- Determinación del patrón de comportamiento de las sucesiones numéricas.
- Identificación de las propiedades de las sucesiones y series, aritméticas y geométricas.

- Clasificación de las sucesiones numéricas en aritméticas y geométricas.
- Determinación de las constantes (diferencia y cociente) entre términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construcción de términos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construcción de modelos aritméticos o algebraicos para determinar el enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construcción de modelos aritméticos o algebraicos para determinar la suma de n términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Descripción del patrón de comportamiento gráfico de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Realización de cálculos para obtener cualquier término de una sucesión aritmética y geométrica finita mediante las expresiones algebraicas correspondientes.

Lenguajes

- Natural, para describir los patrones de comportamiento observados en las sucesiones numéricas, aritméticas y geométricas; para justificar los procedimientos realizados.
- Numérico, para determinar las constantes (diferencia y cociente), entre términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Tabular, para determinar cómo es el cambio (creciente o decreciente) y el tipo de cambio (constante o no constante) entre términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Algebraico, para encontrar la expresión algebraica del enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas; para construir la expresión algebraica que determina la suma de n términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Gráfico, para observar y describir el patrón de comportamiento gráfico de las sucesiones

Procedimientos

- Interpretar e identificar las características de tablas, gráficas, mapas, diagramas y texto.
- Determinar las variables dependientes e independientes para describir cómo es el cambio (creciente o decreciente) y el tipo de cambio (constante o no constante) para cualesquiera dos términos consecutivos de las sucesiones numéricas.
- Identificar los patrones de las sucesiones numéricas.
- Clasificar a las sucesiones en aritméticas o geométricas.
- Completar tablas con valores numéricos faltantes de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Obtener términos de las sucesiones aritméticas y geométricas utilizando la diferencia o el cociente.
- Determinar expresiones algebraicas de forma recursiva o explícita de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Encontrar la expresión algebraica para el enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Realizar sumas parciales de términos consecutivos de sucesiones finitas aritméticas y geométricas.
- Construir la expresión algebraica para determinar la suma de n términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Graficar términos de las sucesiones aritméticas y geométricas para describir el patrón de comportamiento (funciones discretas lineales o exponenciales).
- Realizar esquemas o mapas conceptuales sobre las sucesiones y series, aritméticas y geométricas.
- Utilizar la calculadora como cálculo de verificación de resultados.
- Aplicar la expresión algebraica correspondiente a una sucesión numérica.
- Dados dos términos no consecutivos, construir la expresión algebraica que determina al enésimo término de la sucesión numérica.

Conceptos

- Cambio (creciente o decreciente).
- Tipo de cambio (constante o no constante).
- Sucesión numérica.
- Término.
- Función (discreta lineal y exponencial)
- Expresión algebraica.
- Sucesión aritmética.
- Sucesión geométrica.
- Enésimo término.
- Serie.
- Serie aritmética.
- Serie geométrica.

Proposiciones

- Una sucesión numérica es una colección ordenada de números que generalmente se construyen a partir de una regla dada.
- El término de una sucesión está relacionado con el lugar que ocupa en la sucesión.
- Propiedades de los números reales y sus operaciones.
- Una sucesión numérica se puede representar a través del término general, de una ley de recurrencia o de los primeros términos. Sin embargo, hay sucesiones para las que no se conoce ninguna ley de recurrencia o término general.
- Si en una sucesión, cada término es mayor que el anterior, se dice que es creciente.
- Si en una sucesión, todos los términos son iguales, se dice que es una sucesión constante.
- Si en una sucesión, cada término es menor que el anterior, se dice que es decreciente.
- De acuerdo al término general, se tienen, entre otros, dos tipos de sucesiones: aritméticas y geométricas.
- En una sucesión aritmética cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad constante, llamada diferencia.
- En una sucesión geométrica cada término se obtiene multiplicando al anterior una cantidad constante, llamada razón.
- Una sucesión es aritmética y geométrica a la vez si todos sus términos son iguales.

- El patrón de comportamiento gráfico de las sucesiones aritméticas es lineal discreto.
- El patrón de comportamiento gráfico de las sucesiones geométricas es exponencial discreto.
- Se puede encontrar la posición que ocupa un término en una sucesión dado el término general.
- No hay una única expresión algebraica para modelar una sucesión numérica.
- Existen sucesiones numéricas que no son aritméticas ni geométricas.

Argumentos

- Los argumentos que se espera que empleen los estudiantes durante el desarrollo de las actividades didácticas son los relacionados a justificarlos procedimientos, afirmaciones y resultados obtenidos

La Figura 4.1.2 muestra la configuración epistémica que conforma a esta secuencia didáctica.

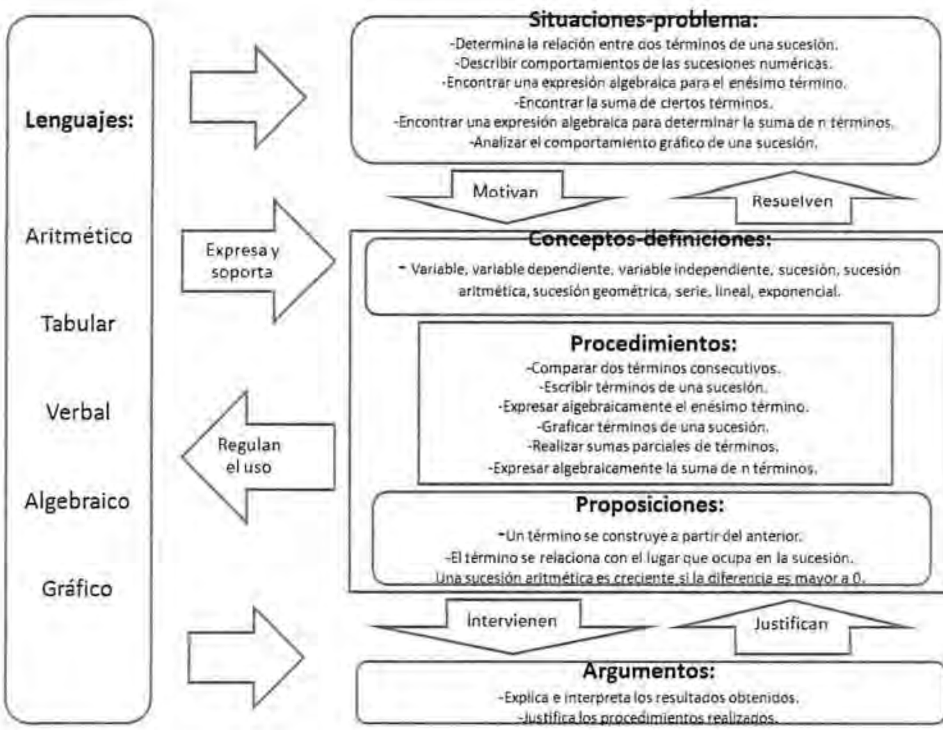


Figura 4.1.2. Configuración epistémica pretendida.

4.3 Selección de Criterios de Idoneidad didáctica como guía para, el diseño y su valoración

Hasta el momento se ha caracterizado el significado institucional de referencia y determinado el significado institucional pretendido para el desarrollo de esta propuesta. Ahora, dado el interés para que el estudio de las sucesiones numéricas conduzca a los estudiantes a generar el significado institucional pretendido, se seleccionaron indicadores de idoneidad didáctica como guía para diseñar y valorar si la propuesta cumple con los requisitos necesarios para que sea considerada pertinente.

Entre los criterios de idoneidad se tiene que un contenido de estudio matemático tiene mayor grado de idoneidad epistémica si los significados pretendidos se corresponden con los significados de referencia. Por lo que se consideraron los indicadores establecidos en la Tabla 4.3.1.

Los indicadores de idoneidad cognitiva definen el grado en que los significados pretendidos son accesibles a los estudiantes, es decir, están en su zona de desarrollo próximo (Tabla 4.3.2). De manera similar se consideraron indicadores de idoneidad interaccional (Tabla 4.3.3), mediacional (Tabla 4.3.4), afectiva (Tabla 4.3.5) y ecológica (Tabla 4.3.6).

Indicadores
• Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones en la que los estudiantes deberán analizar la relación entre dos variables para: Identificar a las sucesiones aritméticas y las geométricas. Construir una expresión algebraica para determinar al enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas. Construir una expresión algebraica para determinar la suma de n términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.

Describir el patrón de comportamiento gráfico de las sucesiones aritméticas y geométricas. • Se hace uso de diferentes modos de expresión matemática (natural, numérica, tabular, algebraica, y gráfica) para una misma situación planteada, en la cual los estudiantes: Puedan observar la relación entre sus representaciones. Tengan la oportunidad de dar una interpretación a estos modos de expresión matemática. • Las situaciones están planteadas con la intención de que los objetos matemáticos primarios se identifiquen y articulen para fomentar sistemas de prácticas que promuevan el significado pretendido de las sucesiones y series, aritméticas y geométricas. En ellas: Las definiciones, procedimientos o proposiciones propuestos son, a nuestra consideración, los fundamentales del tema matemático para los estudiantes del nivel medio superior. Los estudiantes tienen que generar o negociar, procedimientos y argumentos, de manera individual, en equipo y grupal. Esto con la finalidad de que puedan construir o proporcionar definiciones o proposiciones correspondientes al tema matemático. • El nivel de lenguaje utilizado es el adecuado para los estudiantes del nivel medio superior, por ejemplo: En el uso del lenguaje natural, se evita manejar palabras con las que los estudiantes no estén familiarizados. El lenguaje matemático utilizado (definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos), está adaptado a lo que se sugiere en el plan de estudios tomado como referencia. • Las actividades propuestas están ordenadas de tal manera que forman una secuencia didáctica, y en la cual cada una tiene sus objetivos planteados.

Tabla 4.3.1. Indicadores de idoneidad epistémica

Indicadores
• Los estudiantes del nivel medio superior tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de las sucesiones y series, aritméticas y geométricas, por ejemplo: Está familiarizado con el análisis sobre la relación entre dos variables reales. Está familiarizado con el uso de expresiones algebraicas en el contexto de los números reales. Es capaz de identificar o conjeturar sobre el patrón presente en una sucesión numérica dada, así como el patrón de comportamiento de una representación gráfica. • Los objetos matemáticos primarios pretendidos (situaciones problema, lenguaje, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos) tienen una dificultad manejable con la que los estudiantes: Pueden negociar la aparición de éstos con la finalidad de resolver la actividad planteada. Pueden hacer uso de las relaciones entre éstos de manera libre y consiente. • Se incluyen situaciones adicionales a las que forman parte de la secuencia didáctica, para reforzar los conocimientos adquiridos sobre el tema matemático de interés: Las actividades complementarias, son con la intención de que los estudiantes puedan poner en práctica la teoría estudiada del tema matemático. Los problemas de autoevaluación, con la finalidad de que el estudiante pueda darse cuenta, por sí mismo de los conocimientos que necesita mejorar. • Se promueve el acceso y logro de todos los estudiantes del nivel medio superior hacia los sistemas de prácticas que conforman el significado pretendido de las sucesiones y series, aritméticas y geométricas.

Tabla 4.3.2. Indicadores de idoneidad cognitiva

Los indicadores de idoneidad interaccional dan cuenta del grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado, favorecen la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas. En la Tabla 4.3.3 se muestran algunos indicadores relacionados a las interacciones profesor-estudiantes y estudiantes-estudiantes.

Indicadores
• El profesor a cargo de la implementación de las actividades didácticas: Hace una presentación a manera general sobre lo que trata cada una de las actividades planteadas en las hojas de trabajo. Facilita la inclusión de todos los estudiantes en las distintas dinámicas de la clase (individual, en equipo y grupal), evitando la exclusión en alguna de éstas. Contempla momentos en los que los estudiantes tendrán que asumir la responsabilidad del estudio. Utiliza recursos argumentativos para implicar y captar la atención de los estudiantes. Reconoce y resuelve los conflictos de los estudiantes (hace preguntas relacionadas con la situación para que se pongan en juego los objetos primarios pretendidos). Hace una institucionalización sobre el tema matemático de interés, enfatizando los conceptos claves del tema.

• Las actividades están propuestas con la intención de que a través de ellas los estudiantes: Busquen llegar a consensos con base al mejor argumento matemático. Prioricen el diálogo y comunicación no solo entre los estudiantes sino también hacia el profesor. Traten de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. Respetan los momentos de trabajo implementados por el profesor. Pongan en juego los sistemas de prácticas y objetos primarios pretendidos.

Tabla 4.3.3. Indicadores de idoneidad interaccional

Por su parte, los indicadores de idoneidad mediacional corresponden al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Indicadores
• El horario para la implementación de las actividades es el apropiado, considerando que: El tiempo planeado por el profesor a cargo es el suficiente de acuerdo a la disposición de la institución en la cual son llevados a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje. La mayoría de los estudiantes está presente en cada una de las sesiones empleadas. El tiempo transcurrido entre una sesión y otra no es mayor a dos días. • Las condiciones del aula son aceptables, puesto que permiten que: Con el número y la distribución de los estudiantes se pueda llevar a cabo la enseñanza pretendida. Haya el menor número de distractores e interrupciones posibles.

• Las hojas de trabajo utilizadas favorecen a: Introducir situaciones, lenguajes, procedimientos y argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. Que los estudiantes hagan uso de la calculadora como un recurso de verificación de resultados. Que el tiempo empleado por los estudiantes para la realización de las actividades planteadas sea el suficiente. Que se dedique mayor atención a los contenidos más importantes y que presentan mayor dificultad sobre las sucesiones y series, aritméticas y geométricas.

Tabla 4.3.4. Indicadores de idoneidad mediacional

Los indicadores de idoneidad afectiva se relacionan con el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes.

Indicadores
• Las situaciones propuestas en las actividades implementadas por el profesor: Son de interés para los estudiantes por la manera en que éstas están planteadas. Atraen la atención de la mayoría de los estudiantes. Son cercanas a la realidad de los estudiantes. Promueven la participación, perseverancia y responsabilidad de todos los presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. • La relación entre el profesor y los estudiantes: Favorece la comunicación en las distintas dinámicas de la clase. Beneficia a que el argumento se valore en sí mismo y no por quien lo dice.

Tabla 4.3.5. Indicadores de idoneidad afectiva

Por último, se tienen los indicadores de idoneidad ecológica que se refieren el grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza.

Indicadores
• Los contenidos se corresponden con las directrices curriculares del nivel educativo al cual va dirigida la propuesta. • Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares, es decir, permiten el trabajo interdisciplinario con otras asignaturas. Por ejemplo, con la asignatura de Matemáticas V, denominada: pensamiento y lenguaje variacional; puesto que se considera que se hace uso del tratamiento de distintas representaciones de cambio en distintos contextos (tablas, gráficas, texto). Además, se utilizan situaciones para representar el cambio, y la posición en una gráfica a través de bosquejar cambios de tipo discreto.

• La implementación, en tiempo y forma, se apega a los lineamientos con los que cuenta la institución en la que se lleva a cabo.

Tabla 4.3.6. Indicadores de idoneidad ecológica

4.4 Descripción de las actividades

Esta propuesta es una secuencia didáctica en la que se utilizan contextos cercanos a la realidad de los estudiantes, con el fin de que se sientan más familiarizados y sirvan como motivación para aumentar las posibilidades en cuanto a participación y generación de aprendizaje, poniendo en juego estrategias, ideas y conocimientos previos. La secuencia didáctica se encuentra en el Anexo 2.

La selección de los indicadores de idoneidad didáctica, sirvieron como base para establecerlos objetivos y las características de las actividades didácticas con los cuales se tuvo la intención de que se desarrollen las competencias disciplinares que se promueven en los planes y programas de estudios.

Para el diseño de la secuencia didáctica propuesta en este trabajo, se tiene un objetivo general del cual se desprenden los objetivos específicos correspondientes a las actividades de inicio, desarrollo y cierre. El objetivo general es promover que el estudiante resuelva situaciones problemas en los cuales:

a) Identifique e intérprete las características principales de las sucesiones aritméticas y geométricas.

b) Construya expresiones algebraicas que le permita determinar cualquier término de las sucesiones aritméticas y geométricas.

c) Construya expresiones algebraicas que le permita sumar términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.

Los objetivos específicos se muestran dentro de este mismo Capítulo 4, de la sección 4.4.1 a la 4.4.3. En la tabla 4.4 se tiene la relación que muestra de qué forma se pretende que se desarrollen las competencias a partir de los sistemas de prácticas. De esta manera, se realizó también la relación correspondiente de los sistemas de prácticas que se consideraron para lograr los objetivos específicos.

Competencias	Sistemas de prácticas
Competencia 1	• Relacionar los términos de una sucesión numérica con la posición que ocupan. • Relacionar los términos de una sucesión numérica con la posición que ocupan. • Expresar a través de cualquier tipo de lenguaje (natural, tabular, algebraico, gráfico o aritmético) los patrones observados en las sucesiones numéricas. • Generalizar por medio de expresiones algebraicas los patrones observados en las sucesiones numéricas. • Proponer expresiones numéricas o algebraicas para las situaciones problemas. • Ordenar la información para identificar y determinar términos de las sucesiones numéricas. • Hacer uso de simbología y terminología matemática, como por ejemplo, n para determinar la posición de los términos. • Generalizar el patrón de comportamiento observado en los procedimientos propuestos para proponer una expresión algebraica que determine la suma de términos consecutivos de una sucesión.
	• Construir términos a partir de cualquier otro término (no necesariamente el primero) pertenecientes a las sucesiones

Competencia 2	numéricas. • Discriminar las expresiones algebraicas que no cumplen con los requisitos planteados en la situación problema. • Hacer uso de otros recursos no proporcionados, como, por ejemplo, la calculadora, para comprobar los procedimientos realizados. • Resolver o estimar una solución para las situaciones presentadas.
Competencia 3	• Comprobar los procedimientos utilizados en las situaciones planteadas. • Resolver o estimar una solución para las situaciones presentadas. • Comprobar la validez de la expresión algebraica obtenida verificando los resultados a partir de los procedimientos realizados o sustituyendo algunos términos de la sucesión en ésta.
Competencia 4	• Asociar a las sucesiones, aritméticas y geométricas, con representaciones gráficas lineales y exponenciales discretas. • Comprobar la validez de las expresiones algebraicas para el enésimo término, identificando las constantes: d y r.
Competencia 5	• Analizar los términos consecutivos de cualquier sucesión numérica dada para determinar su comportamiento. • Comprobar la validez de las expresiones algebraicas para el enésimo término, identificando las constantes: d y r. • Discriminar a las sucesiones numéricas en aritméticas, geométricas o ninguna de las dos. • Analizar cómo influye la diferencia o el cociente entre términos consecutivos para la determinación de la expresión algebraica del enésimo término.
	• Reconocer las expresiones algebraicas del enésimo término de las sucesiones numéricas, aritméticas y geométricas. • Discriminar entre las expresiones algebraicas para el enésimo

Competencia 7	término de las sucesiones aritméticas y geométricas. • Discriminar entre las expresiones algebraicas para determinar la suma de n términos consecutivos de las sucesiones numéricas. • Hacer uso de las expresiones algebraicas obtenidas para realizar la suma de términos consecutivos.

Tabla 4.4. Competencias disciplinares y sistemas de prácticas

4.4.1 Actividades de inicio

Los objetivos específicos de las actividades de inicio son que el estudiante:

a) Reconozca la relación que existe entre el número de términos y la posición que ocupan.

b) Reconozca la relación que existe entre términos consecutivos de una sucesión.

c) Construya términos de la sucesión.

d) Realice sumas parciales de términos consecutivos.

La sección de inicio está integrada por dos actividades. Para la realización de las dos actividades se han tomado contextos extra matemáticos, donde se pretende que el estudiante trabaje de manera individual en la identificación de regularidades. El tiempo estimado para la realización de estas actividades es de una sesión.

- Actividad 1. Los candelabros de techo. Se presentan 3 candelabros en los que la cantidad de foquitos que hay en cada nivel del candelabro es diferente. Se le solicita al estudiante determinar el tipo de candelabro que tiene la menor cantidad de focos.

Con esta actividad se pretende que el estudiante complete una tabla y a partir de ahí justifique y describa los datos presentados. Podrá observar que un término es construido a partir del anterior más un valor constante (diferente o igual para cualesquiera dos términos consecutivos). Se presentan dos sucesiones aritméticas y otra sucesión que no es aritmética.

- Actividad 2. Cafeterías temáticas. La situación se plantea mencionando la tendencia que existe en la innovación de las cafeterías; como parte de la decoración en una cafetería se presentan 3 libreros formados por estantes en los que se encuentran libros acomodados.

En esta actividad el estudiante tiene que interpretar los valores numéricos de la tabla presentada, con la finalidad de que pueda observar y describir dos tipos de comportamientos en las secuencias de números. Se presentan dos sucesiones geométricas y una aritmética.

En ambas actividades no se les solicita determinar la expresión para el término general. Por otro lado, se le hacen preguntas al estudiante para las cuales tendrá que realizar sumas parciales con los términos consecutivos de las sucesiones numéricas.

Es general, las actividades de inicio tienen la intención de que el estudiante pueda detectar las características principales con las que cuentan las sucesiones, es decir, notar una diferencia en cuanto a la manera de cómo se obtienen sus elementos a partir del anterior.

Los sistemas de prácticas y los objetos matemáticos primarios que se pretenden que desarrollen los estudiantes para lograr los objetivos planteados en las actividades de inicio se muestran en la Tabla 4.4.1 y en la Figura 4.4.1, respectivamente.

Objetivo	Sistemas de prácticas
a)	• Observar uno a uno los términos que forman parte de las sucesiones numéricas dadas. • Analizar los términos consecutivos de una sucesión numérica. • Analizar los términos y la posición que ocupan en la sucesión. • Complementar los datos proporcionados en una tabla.

b)	• Construir el término siguiente de una sucesión a partir del término anterior. • Construir un término de la sucesión a partir del primer término dado.
c)	• Calcular sumas parciales de algunos términos consecutivos. • Comprobar el resultado de las sumas parciales con ayuda de la calculadora

Tabla 4.4.1. Sistemas de prácticas. Actividades de inicio.

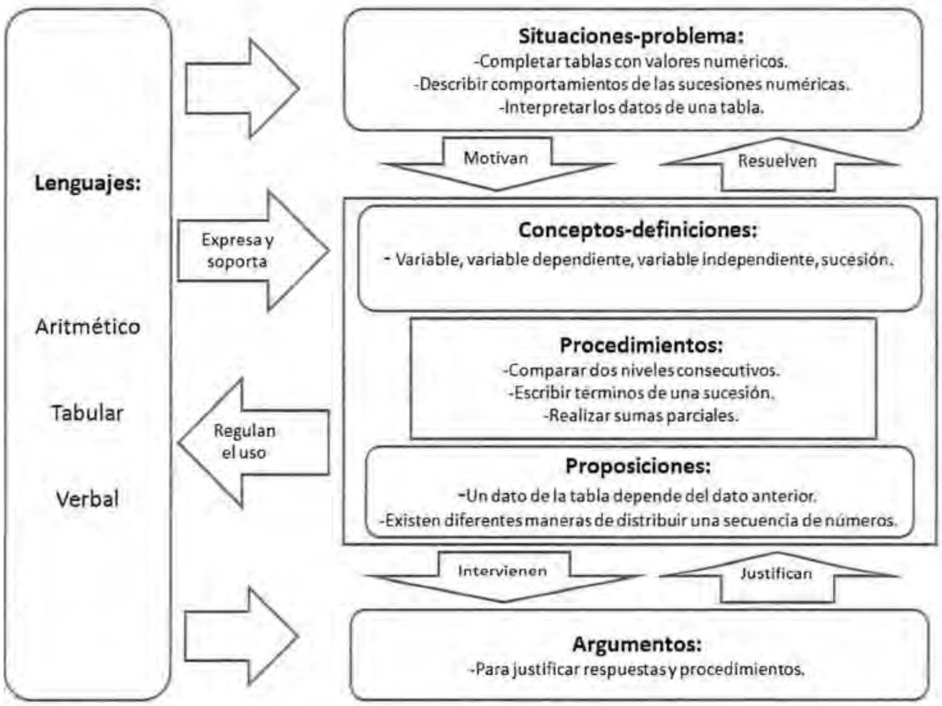


Figura 4.4.1. Configuración de objetos primarios. Actividades de inicio.

4.4.2 Actividades de desarrollo

Los objetivos específicos de las actividades de inicio son que el estudiante:

a) Construya términos alejados de los términos dados de la sucesión a partir de reconocer la relación entre los términos consecutivos dados.

b) Determine una expresión algebraica para representar al enésimo término de una sucesión numérica.

c) Construya una expresión algebraica para determinar la suma de n términos consecutivos de una sucesión.

Esta sección está integrada por dos actividades tomadas de contextos extra matemáticos. El propósito de éstas es que los estudiantes, la mayor parte trabajen en equipo y, construyan una expresión algebraica para determinar al enésimo término o término general de las sucesiones.

- Actividad 3. El árbol navideño. Se presenta un árbol el cual ha sido decorado por niveles con diferentes cantidades de esferas en cada nivel.

Esta actividad se centra en el estudio de las sucesiones aritméticas. Los estudiantes construyen la sucesión aritmética a partir de observar términos alejados de la sucesión. Se les pide que a partir de los términos $15, 16, 17, 18$ y 19, argumenten si es posible determinar la cantidad de esferas que hay en el nivel1, asimismo se les pide establecerlos primeros 14 términos.

- Actividad 4. El escultor. Se presenta la situación de un escultor quién tiene la necesidad de construir una base para una estructura formada por piezas cuadradas.

Esta actividad se centra en el estudio de las sucesiones geométricas. En ella los estudiantes construyen una sucesión geométrica integrada por 5 términos, a partir de la visualización o uso de herramientas algebraicas mediante la comparación de áreas de cuadrados.

Además, con las actividades 4 y 5, se les solicita a los estudiantes encontrar una expresión algebraica para determinar el enésimo término. También se les presenta una estrategia para sumar términos de una sucesión (aritmética y geométrica) permitiendo que más adelante los estudiantes puedan construir una expresión algebraica para determinar la suma de n términos consecutivos.

En general, las actividades que forman parte del desarrollo tienen la finalidad de que empiecen a surgir las expresiones para el enésimo término y para la suma de n primeros términos, que posteriormente se institucionalizarán en el cierre de la secuencia. Para esto, deberán quedar claras las características principales de las sucesiones.

Los sistemas de prácticas y los objetos matemáticos primarios que se pretenden que desarrollen los estudiantes para lograr los objetivos planteados en las actividades de inicio se muestran en la Tabla 4.4.2 y en la Figura 4.4.2, respectivamente.

Objetivos	Sistemas de prácticas
a)	• Analizar las sucesiones dadas para determinar, por ejemplo, la posición que ocupa un término. • Obtener términos a partir de cualquier otro término (no necesariamente el primero) perteneciente a la sucesión y la diferencia o razón. • Asociar a las sucesiones aritméticas y geométricas con representaciones gráficas lineales y exponenciales discretas, respectivamente. • Hacer uso de simbología y terminología matemática, como por ejemplo, $n$para determinar la posición de los términos.

b)	• Concretizar el patrón de comportamiento observado en las sucesiones para determinar la expresión algebraica del enésimo término. • Proponer expresiones algebraicas y discriminar aquellas que no cumplen con los requisitos planteados en la situación problema. • Comprobar la validez de la expresión algebraica obtenida para verificar los resultados a partir de los procedimientos realizados.
c)	• Emplear la calculadora para comprobar los resultados de las sumas parciales realizadas. • Concretizar el patrón de comportamiento observado en los procedimientos propuestos para proponer una expresión algebraica que determine la suma de términos consecutivos de una sucesión. • Comprobar la validez de la expresión algebraica obtenida, sustituyendo algunos términos de la sucesión en ésta.

Tabla 4.4.2. Sistemas de prácticas. Actividades de desarrollo.

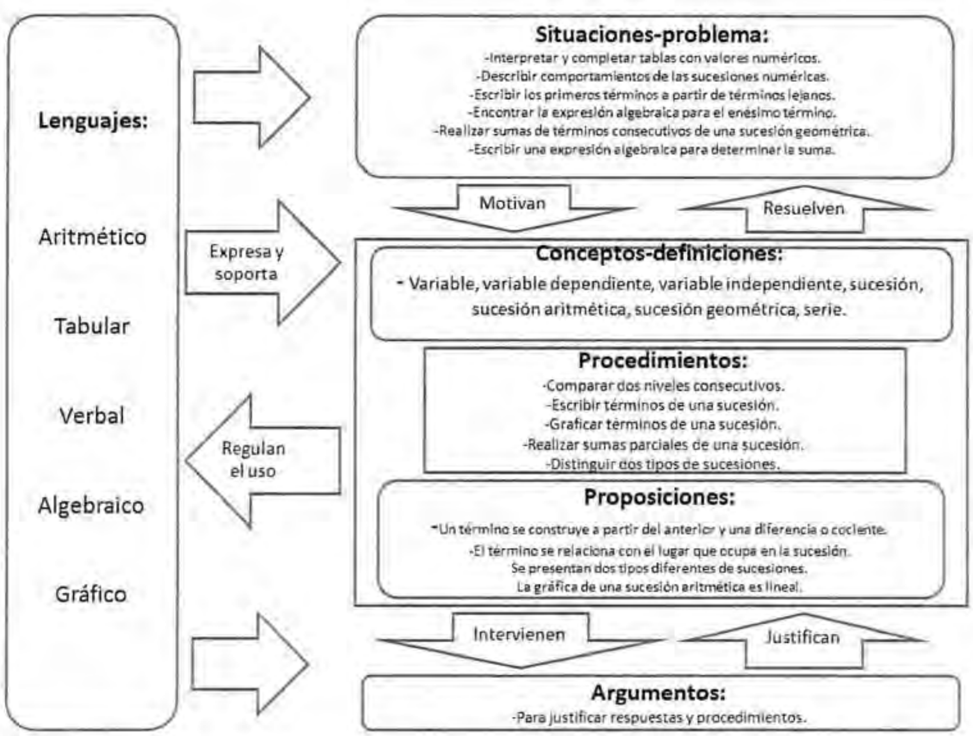


Figura 4.4.2. Configuración de objetos primarios. Actividades de desarrollo.

4.4.3 Actividades de cierre

Los objetivos específicos de las actividades planteadas en el cierre de la secuencia son que el estudiante:

a) Reconozca las sucesiones aritméticas y geométricas.

b) Reconozca la expresión algebraica para el enésimo término.

c) Reconozca la expresión algebraica para la suma de$n$ términos consecutivos.

Esta parte de la secuencia didáctica está compuesta por4 actividades, las cuales tienen como finalidad el institucionalizar los conceptos tratados en durante las actividades anteriores.

- Actividad 6. Clasificación y representación algebraica. Se presentan mediante una tabla, los tres tipos de sucesiones vistas durante la secuencia.

Esta actividad es con la intención de presentar al estudiante tres diferentes arreglos numéricos. En cada uno de ellos se le pide al estudiante determinar la diferencia y el cociente entre términos consecutivos, además de la suma de los términos y la expresión algebraica para el enésimo término.

- Actividad 7. La suma de Gauss. Se presenta a manera de relato la historia que cuenta el cómo Gauss encontró la suma de los primeros 100 números naturales.

- Actividad 8. La suma geométrica. Se le presenta al estudiante una estrategia para determinar la suma de términos de una sucesión geométrica.

Las actividades 7 y 8 tienen el propósito de que las estrategias presentadas sean significativas para el estudiante. Se empieza con una cantidad pequeña de términos con la intención de que una vez aplicada la estrategia observada, ellos puedan verificar el resultado con su calculadora.

- Actividad 9. Representación algebraica para la suma de n términos.Se le solicita al estudiante construir expresiones algebraicas para encontrar la suma de cierta cantidad de términos.

En general, las actividades planteadas en el cierre tienen la intención de retomar lo estudiado durante todas las actividades anteriores para institucionalizar la teoría vista del tema matemático.

Los sistemas de prácticas y los objetos matemáticos primarios que se pretenden que desarrollen los estudiantes para lograr los objetivos planteados en las actividades de inicio se muestran en la Tabla 4.4.3 y en la Figura 4.4.3, respectivamente.

Objetivos	Sistemas de prácticas
a)	• Discriminar las sucesiones numéricas en aritméticas, geométricas o ninguna de las dos. • Analizar la simbología y terminología matemática utilizada.
b)	• Discriminar entre las expresiones algebraicas para el enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas. • Analizar cómo influye la diferencia o el cociente entre términos consecutivos para la determinación de la expresión algebraica del enésimo término.
c)	• Discriminar entre las expresiones algebraicas para determinar la suma de n términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas. • Hacer uso de las expresiones algebraicas obtenidas para realizar la suma de términos consecutivos.

Tabla 4.4.3. Sistemas de prácticas. Actividades de cierre.

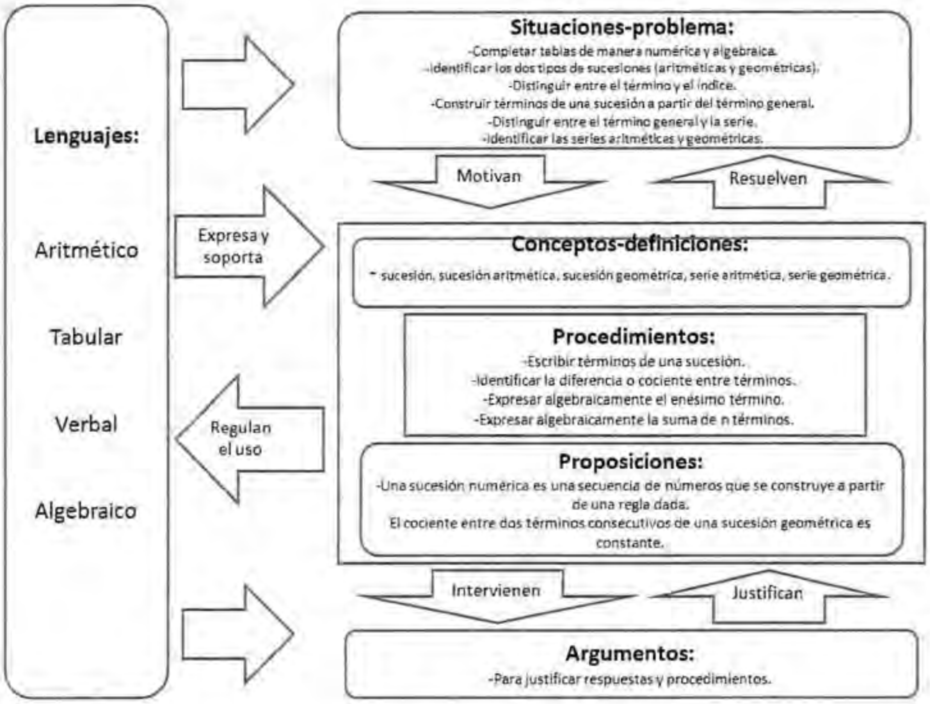


Figura 4.4.3. Configuración de objetos primarios. Actividades de cierre.

4.5 Análisis a priori de la secuencia didáctica bajo los criterios de idoneidad didáctica

Con base en los criterios de idoneidad didáctica y sus respectivos indicadores, antes de llevar a escena las actividades se hizo una valoración de la secuencia didáctica. Cabe señalar que el planteamiento del diseño se realizó apuntando a idoneidades altas, por lo que, a priori, la valoración para cada idoneidad se considera como alta. Los resultados se muestran a continuación.

Idoneidad epistémica

Las actividades que forman parte de la secuencia didáctica fueron diseñadas con la intención de que los estudiantes desarrollen sistemas de prácticas para construir el significado pretendido sobre las sucesiones y series, aritméticas y geométricas. Los siguientes puntos son lo que se tomaron en cuenta para dar la valoración sobre la idoneidad epistémica:

- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones en la que los estudiantes podrán analizar la relación entre dos variables para:
    - Identificar a las sucesiones aritméticas y geométricas.
    - Construir una expresión algebraica para determinar al enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas.
    - Construir una expresión algebraica para determinar la suma de n términos consecutivos de las sucesiones aritméticas y geométricas.
    - Describir el patrón de comportamiento gráfico de las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Se hace uso de diferentes modos de expresión matemática (natural, numérica, tabular, algebraica, y gráfica) para una misma situación planteada, en la cual los estudiantes:
    - Pueden observar la relación entre sus representaciones.
    - Tienen la oportunidad de dar una interpretación a estos modos de expresión matemática.
- El nivel de lenguaje utilizado es el adecuado para los estudiantes del nivel medio superior, puesto que, por ejemplo, el lenguaje matemático está adaptado a lo que se sugiere en el plan de estudios tomado como referencia.
- Las actividades propuestas están ordenadas de tal manera que forman una secuencia didáctica, y en la que cada situación está planteada con la intención de que los objetos matemáticos primarios se identifiquen y articulen para fomentar sistemas de prácticas que promuevan el significado pretendido de las sucesiones y series, aritméticas y geométricas. Considerando:
    - Las definiciones, procedimientos o proposiciones propuestos son, a nuestra consideración, los fundamentales del tema matemático para los estudiantes del nivel medio superior.
    - Los estudiantes tienen que generar o negociar, procedimientos y argumentos, de manera individual, en equipo y/o grupal. Esto con la finalidad de que puedan

construir o proporcionar definiciones o proposiciones correspondientes al tema matemático.

De la tabla 4.5.1 a la tabla 4.5.6, se encuentran los objetos matemáticos primarios que se pretenden promover con cada una de las actividades que forman parte de la secuencia didáctica.

Situación problema 1.	**¿Cuál es el tipo de candelabro que cuenta con el menor número de focos?** Se presentan 3 tipos de candelabros compuestos por 5 niveles, en los que en cada nivel la cantidad de focos es diferente y siguen un patrón. En algunos niveles no se proporciona el número de focos correspondientes.
Lenguajes	Numérico y numérico tabular para caracterizar los cambios en el número de focos entre los diferentes niveles.
Procedimientos	Calcular el número de focos de los niveles que faltan a partir de: Determinar el cambio (creciente o decreciente) y el tipo de cambio (uniforme o no uniforme) en el número de focos para dos niveles consecutivos. Realizar la suma para encontrar el número total de focos para cada tipo de candelabro. Y el tipo de variación en el número de focos en la totalidad de los niveles. Comparar el número total de focos necesarios para cada candelabro.
Conceptos	Cambio. Tipo de cambio.
Proposiciones	El valor de un término de la sucesión depende del valor del número anterior.
Argumentos	Para el caso de la cantidad faltante: Caso 1: Porque la cantidad de focos aumenta de 4 en 4.

	Caso 2: Porque las diferencias entre dos niveles consecutivos están aumentando de 2 en 2. Caso 3: Porque la cantidad de focos aumenta de 3 en 3. El candelabro A es el que tiene la menor cantidad de focos.

Tabla 4.5.1. Objetos primarios de la actividad 1.

Situación problema 2.	**¿Cuál es la estrategia utilizada para el acomodo de los libros?** Se presentan 3 estantes en los cuales se han acomodado libros.
Lenguajes	Natural, para comparar y describir el comportamiento sobre el número de libros acomodados por Regina en cada estante.
Procedimientos	Interpretar y describir los datos dados en una tabla. Comparar la cantidad de libros que hay en dos estantes consecutivos. Distinguir entre dos tipos de arreglos de sucesiones. Encontrar el estante en el que Regina acomodó la mayor cantidad de libros.
Conceptos	Expresión recursiva. Variación uniforme. Variación no uniforme.
Proposiciones	Un término de la una sucesión depende del término anterior y del lugar que ocupa en la sucesión. Se presentan dos tipos diferentes de sucesiones.
Argumentos	Para identificar regularidades en los valores numéricas que forman una sucesión. Para dar una descripción sobre el acomodo de los libros en cada estante.

Tabla 4.5.2. Objetos primarios de la actividad 2.

Situación problema 3.	**Construir una expresión algebraica que relacione a los niveles del árbol con sus respectivas cantidades de esferas.**
Lenguajes	Natural: para comparar y describir el comportamiento sobre la cantidad de esferas en cada nivel del árbol. Aritmético: para determinar la cantidad de esferas en los primeros 14 niveles del árbol. Tabular: para construir términos y describir el patrón de comportamiento de tablas con valores numéricos. Gráfico: para parafrasear sobre el patrón de comportamiento que sigue un arreglo de términos en una gráfica.
Procedimientos	Dadas las cantidades de esferas utilizadas en los niveles del 15 al 19 para adornar un árbol, determinar las esferas utilizadas en los primeros 14 niveles. Determinar el número total de esferas necesarias. Graficar términos de las sucesiones.
Conceptos	Variable. Variable dependiente e independiente.
Proposiciones	Un término se construye a partir del anterior y la diferencia constante asociada a la sucesión. El término se relaciona con el lugar que ocupa en la sucesión. Se pueden determinar los primeros términos a partir de términos lejanos ya que siguen un mismo patrón.
Argumentos	Para identificar y describir regularidades en los valores numéricas que forman una sucesión.

Tabla 4.5.3. Objetos primarios de la actividad 3.

Situación problema 4.	**Determinar el área total de piezas cuadradas de madera a utilizar para construir una escultura.**
Lenguajes	Algebraico: para realizar cálculos y determinar el área de las piezas cuadradas de madera. Natural: para describir el comportamiento que siguen las piezas cuadradas con respecto a sus áreas. Numérico: para utilizar números enteros que les ayuden a determinar el patrón de comportamiento. Tabular: para determinar el área de cada pieza de madera de una estructura cuya primera pieza tiene un área n. Gráfico: para interpretar los valores proporcionados y construir el término siguiente de una sucesión.
Procedimientos	Determinar el área de cada pieza cuadrada de madera. Determinar el área total de madera necesaria para construir una estructura. Graficar e interpretar los términos determinados.
Conceptos	Crecimiento. Tipo de crecimiento. Términos. Sucesión. Sucesión geométrica. Teorema de Pitágoras. Área de cuadrados. Expresión recursiva. Expresión algebraica.
Proposiciones	El teorema de Pitágoras reducido a un triángulo isósceles. Un término se construye a partir del anterior y el cociente constante asociado a la sucesión. El término se relaciona con el lugar que ocupa en la sucesión.
Argumentos	Para justificar procedimientos y respuestas.

Tabla 4.5.4. Objetos primarios de la actividad 4.

Situación problema 5.	**Establecer la expresión algebraica que determina al enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas.**
Lenguajes	Algebraico: para construir las expresiones algebraicas del enésimo término. Gráfico: para conjeturar sobre su comportamiento y construir otros términos. Tabular: para organizar e interpretar la información numérica. Verbal: para parafrasear sobre el comportamiento en tablas y gráficas.
Procedimientos	Completar tablas de manera numérica y algebraica. Identificar los dos tipos de sucesiones (aritméticas y geométricas). Construir términos de una sucesión a partir del enésimo término. Distinguir entre el término y el índice. Distinguir entre el término general y la suma de términos. Identificar la diferencia constante o cociente constante entre términos consecutivos. Expresar algebraicamente el enésimo término de una sucesión numérica.
Conceptos	Crecimiento. Tipo de crecimiento. Términos. Sucesión. Sucesión aritmética. Sucesión geométrica. Variable. Variable dependiente e independiente. Sucesión. Expresión algebraica.
	Una sucesión numérica es una secuencia de números que se construye a

Proposiciones	partir de una regla dada. La diferencia entre dos términos consecutivos de una sucesión aritmética es constante. El cociente entre dos términos consecutivos de una sucesión geométrica es constante. Cualquier sucesión puede ser representada mediante su término general. El patrón de comportamiento gráfico de una sucesión aritmética es lineal. El patrón de comportamiento gráfico de una sucesión geométrica es no lineal.
Argumentos	Para identificar y describir regularidades en los valores numéricas que forman una sucesión. Para justificar las expresiones algebraicas construidas. Para parafrasear sobre el comportamiento que siguen los términos de una gráfica.

Tabla 4.5.5. Objetos primarios de la actividades 5 y 6.

Situación problema 6.	**Establecer la expresión algebraica que determina la suma de los primeros n términos de las sucesiones aritméticas y geométricas.**
Lenguajes	Algebraico: para construir las expresiones algebraicas para la suma de n términos. Tabular: para interpretar y completar tablas.

	Verbal: para parafrasear sobre el comportamiento del arreglo de números sugerido para realizar la suma de términos consecutivos.
Procedimientos	Determinar los patrones de las sucesiones. Clasificar a las sucesiones numéricas en aritméticas y geométricas. Determinar el número y los términos a sumar. Realizar un arreglo de números para facilitar la suma de términos consecutivos. Expresar algebraicamente la suma de términos consecutivos de una sucesión numérica.
Conceptos	Variable. Variable dependiente e independiente. Sucesión. Sucesión aritmética. Sucesión geométrica. Expresión algebraica. Serie.
Proposiciones	No es lo mismo el término y el índice de una sucesión numérica. No es lo mismo el término general y la suma de términos.
Argumentos	Para identificar y describir regularidades en los valores numéricas que forman una sucesión. Para justificar las expresiones algebraicas construidas. Para parafrasear sobre el comportamiento que siguen los términos determinados en una tabla

Tabla 4.5.6. Objetos primarios de las actividades 7 y 8.

Idoneidad cognitiva

Las actividades tienen la intención de que los estudiantes las resuelvan mediante el desarrollo de ciertos sistemas de prácticas. Para dar una valoración cognitiva se consideró que el significado pretendido estuviera en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, tomando en cuenta que:

- Según los planes y programas de estudios, los estudiantes de este nivel han tenido experiencias con conocimientos necesarios para poder determinar el patrón de comportamiento de algunas sucesiones numéricas, entre ellas, las sucesiones y series, aritméticas y geométricas, por ejemplo:
    - Está familiarizado con el análisis sobre la relación entre dos variables reales.
    - Está familiarizado con el uso de expresiones algebraicas en el contexto de los números reales.
    - Puede ser capaz de identificar o conjeturar sobre el patrón presente en una sucesión numérica dada, así como el patrón de comportamiento de una representación gráfica.
- Se considera que los objetos matemáticos primarios pretendidos se pueden alcanzar, ya que tienen un grado de dificultad manejable debido a que fueron tomados en cuenta a partir de realizar un análisis de los planes y programas de estudios dirigidos a este nivel educativo. Con los objetos matemáticos primarios presentes, los estudiantes tendrán la oportunidad de:
    - Negociar la aparición de éstos con la finalidad de resolver o conjeturar sobre la posible resolución de la actividad planteada.
    - Hacer uso de las relaciones entre éstos de manera libre y consiente.

Idoneidad interaccional

La valoración se hizo a partir de considerar que la elaboración de las actividades presentes en las hojas de trabajo se realizó con base en lo observado durante una prueba piloto (la cual no se reporta). En dicha prueba piloto se pudieron advertir problemas de redacción y lenguaje, además de la falta de momentos de trabajo que facilitaran el desarrollo de los sistemas de prácticas pretendidas. Por ello es que en la planificación de la secuencia didáctica están presentes los siguientes puntos:

- El profesor a cargo de la implementación, por medio de las actividades tendrá la oportunidad de:
    - Hacer una presentación sobre el contexto de las actividades planteadas.
    - Facilitar la inclusión de todos los estudiantes en las distintas dinámicas de la clase (individual, en equipo y grupal), evitando la exclusión en alguna de éstas.
    - Contemplar momentos en los que los estudiantes asuman la responsabilidad.
    - Utilizar recursos argumentativos para captar la atención de los estudiantes.
    - Reconocer y resolver los conflictos de los estudiantes (mediante preguntas relacionadas con la situación para que se pongan en juego los objetos primarios pretendidos).
    - Concluir las sesiones de estudio con la institucionalización sobre el tema matemático.
- Mediante las actividades propuestas los estudiantes tendrán la posibilidad de:
    - Buscar llegar a consensos con base al mejor argumento matemático.
    - Priorizar el diálogo y comunicación no solo entre ellos mismos sino también hacia el profesor.
    - Tratar de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos.
    - Respetar los momentos de trabajo, así como poner en juego los sistemas de prácticas y los objetos primarios pretendidos.

Idoneidad mediacional

Durante la elaboración de la secuencia didáctica se tenía en consideración de que posiblemente no se contara con entera libertad de disponer de las sesiones necesarias para implementar todas las actividades. Por ello se tomaron en cuenta los siguientes puntos:

- La planeación de la implementación de las actividades pretende que:
    - De acuerdo a los planes y programas de estudio, el tiempo empleado para llevar a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje sea el suficiente.
    - No haya necesidad de desviar, interrumpir o truncar la ejecución de alguna sesión para centrar la atención en algún otro tema matemático.
- Se espera que las condiciones del aula sean aceptables, debido a que permitan:
    - Contar con el equipamiento básico para la implementación.
    - El menor número de distractores e interrupciones posibles.
- Las hojas de trabajo utilizadas pretenden favorecer a:
    - Introducir situaciones, lenguajes, procedimientos y argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.
    - Que los estudiantes hagan uso de la calculadora como un recurso de verificación de resultados.
    - Que el tiempo empleado por los estudiantes para la realización de las actividades planteadas sea el suficiente.
    - Que se dedique mayor atención a los contenidos considerados más importantes y/o que presentan mayor dificultad en las sucesiones numéricas de interés.

Idoneidad afectiva

Para el desarrollo de las actividades se consideraron contextos cercanos a la realidad de los estudiantes, los cuales fueron planteados con la intención de que los estudiantes pudieran cuestionar los resultados obtenidos, y no solo dar por hecho lo dicho por el profesor o por algún compañero. Los siguientes son los puntos que se consideraron para proporcionar una valoración:

- Las situaciones propuestas son implementadas con la intención de que el profesor tenga la oportunidad de:
    - Captar el interés de la mayoría o todos los estudiantes.

    - Promover la participación, perseverancia y responsabilidad de todos los presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Se pretende que, mediante las actividades planteadas, la relación entre el profesor y los estudiantes permita:
    - Favorecer la comunicación en las distintas dinámicas de la clase.
    - Beneficiar para que el argumento se valore en sí mismo y no por quien lo dice.

Idoneidad ecológica

La valoración como tal de esta idoneidad se debe a que la institucionalización de los conocimientos matemáticos estudiados, está apegada a lo que se sugiere en los planes de estudios tomados en cuenta para el diseño.

Además, se considera que los medios utilizados para llevar a cabo la puesta en escena se ajustan al proyecto educativo que se maneje considerando los lineamientos de la reforma educativa en curso.

Por otro lado, se incluyen otros contenidos que se corresponden con la misma u otras asignaturas consideradas en las directrices curriculares, por ejemplo, dentro de la misma se tiene que se relaciona con el contenido central: Uso de las variables y las expresiones algebraicas; puesto que el estudiante tiene la posibilidad de desarrollar un lenguaje simbólico para la generalización y la representación de la variable como número generalizado, incógnita o relación de dependencia.

De igual manera, se considera que los contenidos tratados se relacionan con algunos otros pertenecientes a la asignatura de Matemáticas II, denominada: Del tratamiento del espacio, la forma y la medida, a los pensamientos geométricos y trigonométricos; puesto que se considera que los estudiantes tienen la opción de hacer uso del teorema de Pitágoras como procedimiento para resolver la situación problema 4 perteneciente a la secuencia didáctica.

Capítulo5. La puesta en escena, análisis y resultados

En este capítulo se mencionan los aspectos principales, así como los análisis y resultados observados de la puesta en escena de las actividades didácticas, la cual se llevó a cabo con un grupo de estudiantes que se encontraban cursando el segundo semestre de sus estudios del nivel medio superior.

Los análisis y resultados realizados están hechos considerando como base los elementos teóricos seleccionados. A partir de lo anterior, se presentan las modificaciones que se hicieron a algunas de las secciones de las actividades, con la intención de afinar el diseño. Por último, se muestran las conclusiones consideradas más relevantes del proyecto de tesis.

5.1 Características de la puesta en escena

La puesta en escena de las actividades didácticas se realizó en una escuela preparatoria incorporada al Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. La modalidad de la institución es presencial y el turno es matutino.

Las hojas de trabajo de las actividades que fueron implementadas, se encuentran en el Anexo 1. De manera general se presentan las siguientes características de la puesta en escena:

- Se llevó a cabo con un grupo de estudiantes que se encontraba cursando el segundo semestre.
- El grupo estaba a cargo de un maestro cuya formación es Licenciado en Matemáticas.
- La implementación de las actividades se realizó durante tres sesiones de 50 minutos cada una.
- Fue conducida por la diseñadora de las actividades didácticas, además de la presencia, en las primeras dos sesiones, de una maestra que no era la titular del grupo. La maestra presente tenía la libertad de realizar intervenciones; sin embargo,

solo realizó intervenciones para solicitar a los estudiantes poner atención y pasar lista.

- Los estudiantes presentes en el proceso de implementación fueron 31. Cada estudiante contó con su propio juego de hojas de trabajo correspondientes a la secuencia didáctica, que en total estaba formada por 20 páginas.

De las tres sesiones utilizadas para implementar la secuencia didáctica por medio de las hojas de trabajo fue posible observar lo siguiente:

- La primera sesión fue dedicada para resolver actividades de manera individual, esto con la intención de poder observar con mayor atención cómo los estudiantes determinaban el patrón de comportamiento de las sucesiones numéricas dadas. Prácticamente las actividades cuyos momentos de trabajo estaban planificadas para desarrollarse en equipo fueron realizadas en la segunda y tercera sesión.
- Las actividades dirigidas a realizarse de manera individual fueron llevadas a cabo en un tiempo menor al planeado por la diseñadora. Esto benefició para que pudiera haber una retroalimentación de las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes. El tiempo restante de la sesión se utilizó para organizar los equipos con los cuales se trabajaría en las sesiones posteriores.
- Para el trabajo en equipo los estudiantes se agruparon de manera libre, pero con la condición de no estar formado por más de cuatro personas. La conductora supervisaba constantemente los equipos para asegurarse de que todos o la mayoría de los estudiantes participaran en la realización de las actividades.
- La decisión que tomó la conductora fue que una vez que las actividades eran contestadas por la mayoría de los estudiantes, solicitaba que externaran sus respuestas con la finalidad de argumentar a favor o en contra de los puntos de vista de otros compañeros.
- Cabe destacar que, durante el trabajo en equipo, hubo mucha participación por parte de los integrantes de éstos hacía la conductora y hacía los demás equipos de trabajo. Sin embargo, el tiempo empleado para contestar las actividades destinadas a trabajar

en equipo no fue el suficiente, por ello se tuvo que tomar parte del tiempo destinado a la tercera sesión.

- Debido a las restricciones de tiempo, la conductora tomó la decisión de dar por finalizado el trabajo en equipo para pasar a institucionalizar los contenidos matemáticos involucrados en el desarrollo de las actividades.

5.2 Análisis a posteriori de la secuencia didáctica bajo los criterios de idoneidad didáctica

Con base en las características de la puesta en escena y considerando los criterios de idoneidad y sus respectivos indicadores, se tiene una valoración a posteriori de la idoneidad didáctica de la propuesta.

Idoneidad epistémica

Se valora la idoneidad epistémica a posteriori como alta, ya que se considera que a través de las hojas de trabajo se lograron desarrollar la gran mayoría de los sistemas de prácticas y objetos matemáticos primarios pretendidos con la secuencia. Es decir, mediante las hojas de trabajo se tuvo la oportunidad de que se pusieran en juego:

- Conocimientos previos como medio para, por ejemplo, construir algunos de los términos pertenecientes a las sucesiones numéricas dadas; entre ellos, se pudo hacer uso de nociones como los relacionados a las propiedades de los números reales y sus operaciones.
- Otros conocimientos que no están estrechamente relacionados con las sucesiones numéricas, como lo es, por ejemplo, el teorema de Pitágoras. Lo anterior, se pudo utilizar como medio para determinar términos de una sucesión numérica, en particular para la sucesión geométrica generada en la actividad 4 de la secuencia.
- Lenguajes en sus diferentes formas, con los que se tiene la oportunidad de generar una interpretación para justificarlas ideas o resultados obtenidos. Por ejemplo, la

interpretación a los diferentes lenguajes que aparecen en la secuencia, por mencionar alguno, en su forma tabular, sirvió para que se pudieran proporcionar y validar argumentos que justificara el porqué de la determinación del patrón de comportamiento de las sucesiones numéricas dadas.

- Procedimientos propuestos durante la secuencia didáctica. Por mencionar algunos se tienen:

En la situación problema 1, se sugirió que, para determinar la suma de ciertos términos consecutivos, es necesario identificar el patrón de comportamiento de una sucesión numérica que sirva para determinar todos los términos que se requieren sumar, a partir de comparar términos consecutivos.

En la situación problema 3, se expuso que, para determinar cómo es el cambio (creciente o decreciente) y el tipo de cambio (uniforme o no uniforme) en una sucesión numérica, se centre la atención sobre parejas de términos que son consecutivos.

En la situación problema 4, se propuso un procedimiento para determinar la suma de los primeros 9 términos de una sucesión aritmética; apoyándose de lo anterior, se tuvo la oportunidad de reconstruir el procedimiento, pero ahora para determinar la suma de los primeros 12 términos de una sucesión aritmética.

- Procedimientos empleados para resolver las situaciones planteadas. Entre ellos se tienen los siguientes:

En la situación problema 2, se tuvo la facilidad de hacer uso de la calculadora como medio para calcular la suma de 4 o 5 términos consecutivos.

La situación problema 6, se prestó para que se pudiera realizar la clasificación de las sucesiones en aritméticas o geométricas. Además de determinar las expresiones algebraicas relacionadas a determinar, el enésimo término y, la suma de términos consecutivos.

- El uso de conceptos empleados para resolver las actividades planteadas, por ejemplo, con la mayoría de las actividades, es posible poner en juego el significado que se tiene sobre lo que es o cómo se representa una expresión algebraica.

También se pudieron hacer uso de nociones sobre lo que representa que un cambio sea creciente o decreciente, así como que el tipo de cambio sea constante o no constante.

- Proposiciones, tales como:

Los relacionados con las propiedades de los números reales. Un ejemplo de esto se tiene al momento de realizar la suma de términos consecutivos, ya que, por ejemplo, se considera que, para obtener el resultado, se hace uso de propiedades tales como, la propiedad asociativa o la propiedad conmutativa, de la suma.

Una sucesión numérica es creciente si un término es siempre mayor al término anterior, para cualesquiera dos términos consecutivos. Si, por el contrario, cada término es menor que el anterior, entonces la sucesión es decreciente.

En una sucesión aritmética cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad constante. En una sucesión geométrica cada término se obtiene multiplicando al anterior una cantidad constante.

- Argumentos para justificar los procedimientos empleados, así como los resultados obtenidos. Por ejemplo, se considera que las situaciones problemas permitieron que se emplearan, entre otros, los siguientes argumentos:

La situación problema 1, permitió presentar el siguiente argumento: el candelabro tipo A es el que cumple con el requisito establecido, ya que contiene la menor cantidad de focos. Caso similar a este argumento, es el que se presentó en la situación 2, puesto que se obtuvo que: en el estante de arquitectura se acomodaron la mayor cantidad de libros. De lo anterior, se considera que el hecho de hacer uso de la calculadora para determinar la suma de términos consecutivos, obedece a que se le contempla como un instrumento de autoridad.

En la situación problema 3, se obtuvo como argumento lo siguiente: es posible determinar la cantidad de esferas para cualquier nivel del árbol si se sigue con el mismo patrón de comportamiento.

En la situación problema 5, se sugirió el siguiente argumento: es posible observar que, a partir de la tabla mostrada referente a una sucesión aritmética, para determinar la suma de cualesquiera términos consecutivos sólo es necesario conocer el primer y último término, así como la cantidad de términos a sumar.

Idoneidad cognitiva

La idoneidad cognitiva a posteriori fue valorada como media, debido a que durante la implementación de las actividades se observaron casos en los cuales, por un lado, los estudiantes pudieron desarrollar los sistemas de prácticas, así como los objetos matemáticos esperados; y por otro lado se presentaron dificultades que impidieron llevar a cabo la realización de las situaciones planteadas.

Se contempla, además, que de manera general, los estudiantes exhibieron algunos conocimientos previos necesarios para el estudio de las sucesiones y series, aritméticas y geométricas; permitiendo así, que hicieran el intento para resolver las situaciones que les fueron presentadas. Entre esas concepciones de los estudiantes, se tiene la referente a lo que es una expresión algebraica y en donde predominó lo siguiente: es aquella donde se utilizan números, letras y símbolos de operaciones.

- A continuación, se muestran algunos de los resultados obtenidos a partir de observar los sistemas de prácticas desarrollados por los estudiantes del nivel medio superior. Primeramente, se muestran algunos de los objetos matemáticos primarios que se acercaron a lo que se pretendía con el desarrollo de la propuesta.

Situación problema 1: ¿Cuál es el tipo de candelabro que cuenta con el menor número de focos?

La situación que se presentaba para que fuera resuelta por los estudiantes, consistió en determinar, a partir de considerar 3 tipos de candelabros, aquel que cumpliera con los requisitos planteados. Para la realización de esta actividad se llevaron a cabo lenguajes de tipo numérico y numérico tabular, los cuales fueron utilizados para determinar los cambios correspondientes a la cantidad de focos entre dos niveles consecutivos cualesquiera.

En la Figura 5.2.1 se puede observar que dentro de los procedimientos que se efectuaron para resolver la situación, están, por ejemplo, para el caso del candelabro tipo A: se calculó el número de focos de los niveles que faltan a partir de determinar que para los niveles consecutivos en los que se proporcionaban los datos, el cambio era creciente y además constante; posteriormente, se realizó la suma para encontrar el número total de focos.

Lo anterior fue realizado para los tres tipos de candelabros. Para finalizar, se hizo una comparación sobre la cantidad total de focos para cada candelabro, y así determinar cuál de ellos cumplía con los requisitos planteados.

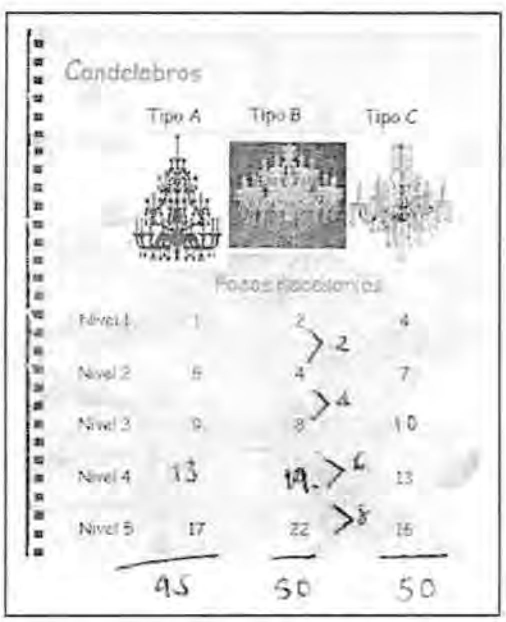
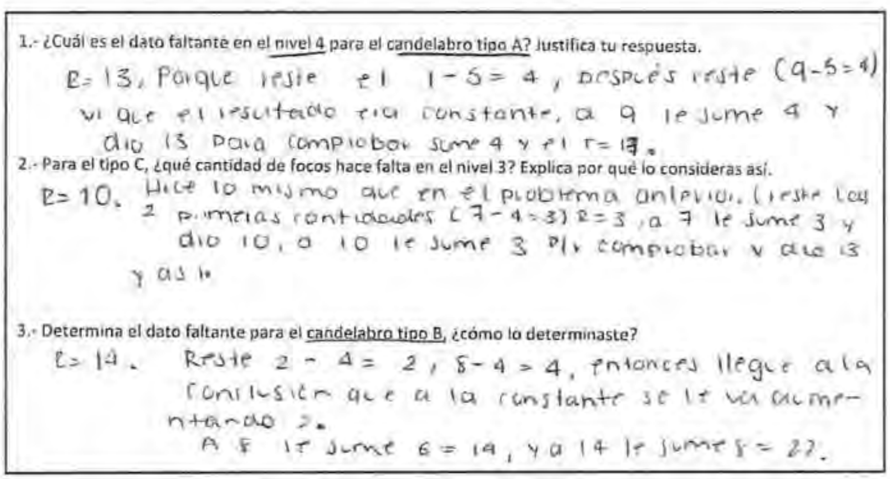


Figura 5.2.1. Procedimiento utilizado por un estudiante

Se considera que dentro de las proposiciones utilizadas por los estudiantes están: el valor de un término en una sucesión depende del valor del término anterior; una sucesión es creciente si siempre un término es mayor al término anterior; la propiedad asociativa de la suma, permite realizar la suma de varios términos.

Respecto a los argumentos que se supone fueron tomados en cuenta por los estudiantes en el desarrollo de esta situación se tienen los siguientes: para el candelabro tipo 1 la cantidad de focos aumenta de 4 en 4, para el tipo 2 las diferencias entre dos niveles consecutivos están aumentando de 2 en 2 y para el tipo 3 la cantidad de focos aumenta de 3 en 3; el candelabro A es el que tiene la menor cantidad de focos (figura 5.2.2).

Sin embargo, a pesar de que los argumentos utilizados para contestar estas preguntas estaban de acuerdo a lo pretendido, se pueden observar errores de lenguaje aritmético en, por ejemplo: "$1-5=4$". Es decir, se considera que existen dificultades al momento de expresar en lenguaje simbólico lo obtenido en lenguaje natural. Este tipo de error de lenguaje aritmético fue evidenciado también por varios estudiantes durante algunas otras situaciones problemas.



1.- ¿Cuál es el dato faltante en el nivel 4 para el candelabro tipo A? Justifica tu respuesta.

R= 13, Porque reste el 1 - 5 = 4, después reste (9-5=4) vi que el resultado era constante, a 9 le sume 4 y dio 13 para comprobar sume 4 y el r= 17.

2.- Para el tipo C, ¿qué cantidad de focos hace falta en el nivel 3? Explica por qué lo consideras así.

R= 10. Hice lo mismo que en el problema anterior. (reste las 2 primeras cantidades (7 - 4 = 3) R= 3, a 7 le sume 3 y dio 10, a 10 le sume 3 p/ comprobar y dio 13 y asi.

3.- Determina el dato faltante para el candelabro tipo B, ¿cómo lo determinaste?

R= 14. Reste 2 - 4 = 2, 8 - 4 = 4, entonces llegue a la conclusión que a la constante se le va aumentando 2.
A 8 le sume 6 = 14, y a 14 le sume 8 = 22.

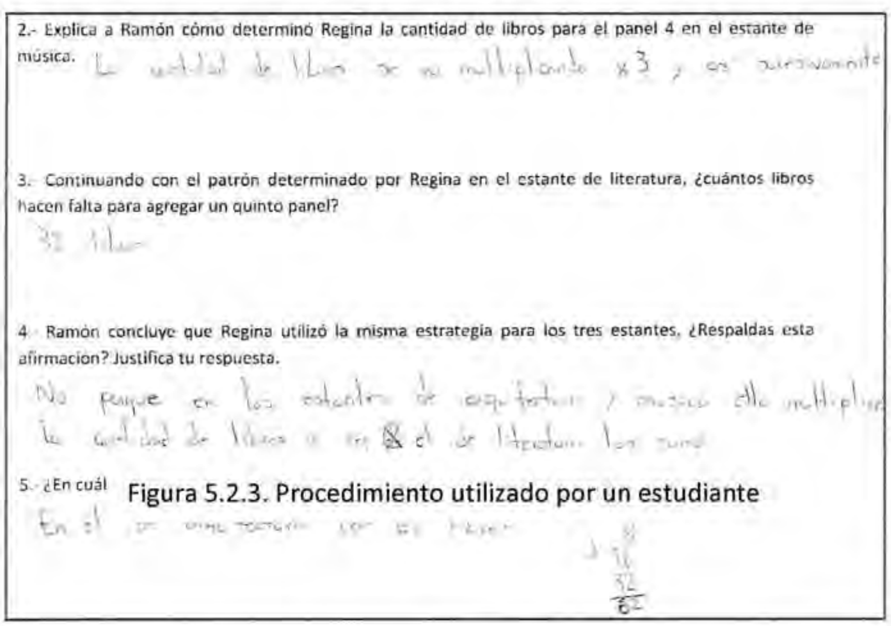
Figura 5.2.2. Argumento utilizado por un estudiante

Situación problema 2: ¿Cuál es la estrategia utilizada para el acomodo de los libros?

Esta situación está planteada a manera de presentar un rol entre dos personajes, en los cuales uno de ellos, Regina, ha acomodado libros en 3 estantes y se solicita ayudar al segundo de ellos, Ramón, para determinar cuál fue la estrategia que utilizó Regina. El tipo de lenguaje que fue utilizado por los estudiantes es natural para comparar y describir el comportamiento sobre el número de libros acomodados en cada estante.

Entre los procedimientos que fueron llevados a cabo por los estudiantes, en particular, para el estante 1 se tienen que: se interpretó y describió los datos proporcionados en la tabla, y después se compararon la cantidad de libros que hay en dos estantes consecutivos (figura 5.2.3). Otro de los procedimientos utilizados es el referente a realizar la suma de términos consecutivos, utilizando la calculadora, para determinar el estante en el que se acomodaron la mayor cantidad de libros.

Los procedimientos anteriores permitieron distinguir dos tipos de arreglos de sucesiones, los cuales se pueden considerar como algunas de las proposiciones utilizadas por los estudiantes para justificar sus respuestas.


2.- Explica a Ramón cómo determinó Regina la cantidad de libros para el panel 4 en el estante de música. La cantidad de libros se va multiplicando x3 y es sucesivamente

3.- Continuando con el patrón determinado por Regina en el estante de literatura, ¿cuántos libros hacen falta para agregar un quinto panel?

32 libros

4.- Ramón concluye que Regina utilizó la misma estrategia para los tres estantes. ¿Respaldas esta afirmación? Justifica tu respuesta.

No porque en los estantes de arquitectura y musica ello multiplica la cantidad de libros y en el de literatura los suma

5.- ¿En cuál

Figura 5.2.3. Procedimiento utilizado por un estudiante

En el de arquitectura ya que es mayor

8
16
32
64

Figura 5.2.3. Argumento utilizado por un estudiante

Por su parte, en la figura 5.2.4 se muestran algunos de los argumentos utilizados para identificar el incremento respecto al número de libros colocados en cada panel y así dar una descripción.

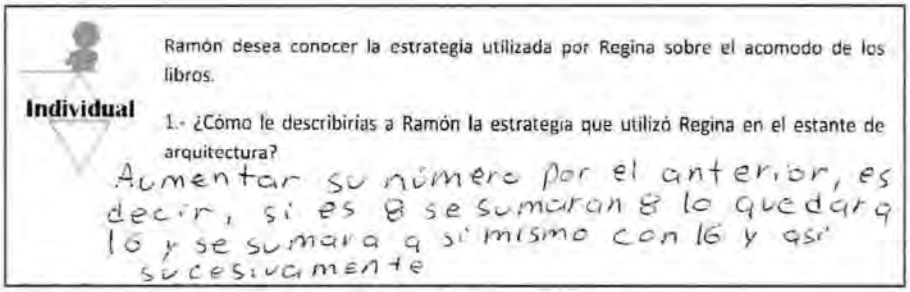


Figura 5.2.4. Argumento utilizado por un estudiante

El argumento presentado por este estudiante es que la estrategia empleada por Regina se basa en sumar a sí mismo la cantidad de libros que hay en un panel para determinar los que debe haber en el siguiente panel.

A pesar de que la mayoría de los argumentos proporcionados se acercaban a lo que se pretendía, se encontraron algunos otros argumentos con los que se pueden considerar errores de lenguaje natural en, por ejemplo, la dificultad para comprender lo que se solicitó en la pregunta 3 de la situación problema 2 (figura 5.2.5).

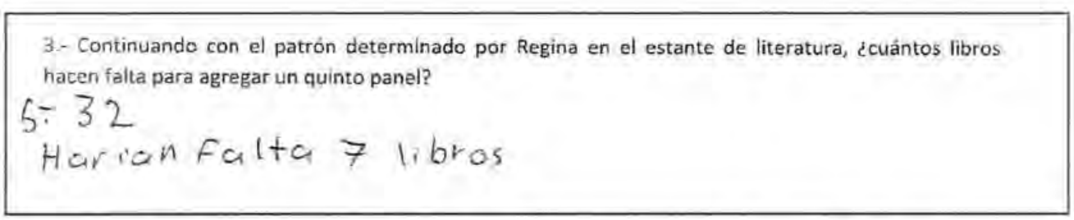


Figura 5.2.5. Error de lenguaje natural presentado por un estudiante

Lo anterior se considera como un error de lenguaje natural ya que, la interpretación que se le dio a la pregunta planteada no fue la esperada. La pregunta solicitaba determinar, siguiendo el mismo patrón, cuántos libros debería haber en un quinto panel, a lo que el estudiante confundió con, determinar cuántos libros más se necesitan (a partir de conocer los libros en el cuarto panel) para completar los libros necesarios en un quinto panel.

Situación problema 3: Construir una expresión algebraica que relacione a los niveles del árbol con sus respectivas cantidades de esferas.

Se presenta una situación en la cual, a través de un contexto extra matemático y familiar al estudiante, el problema consiste en construir una expresión algebraica para determinar cualquier término (en este caso se refiere a la cantidad de esferas en un árbol navideño). Los tipos de lenguajes que se emplearon fueron: natural, cuando dieron una descripción sobre el comportamiento respecto a la cantidad de esferas; aritmético, cuando determinaron la cantidad de esferas en los primeros 9 niveles; tabular, cuando construyeron los primeros términos 14 términos y proporcionaron una descripción sobre el patrón de comportamiento de los términos.

En la figura 5.2.6 se tiene uno de los procedimientos utilizados por algún equipo: se calculó el total de esferas en los primeros 14 niveles a partir de que se observó el comportamiento del número de esferas entre los niveles consecutivos que van del 15 al 19.

Figura 5.2.6. Procedimiento utilizado por un estudiante

Los argumentos empleados son los referentes a determinar que el cambio es creciente y constante, lo que se puede observar en la figura 5.2.7. Sin embargo, en la Figura 5.2.8 se puede observar que algunos argumentos no van de acuerdo a lo que se esperaba, puesto que el patrón determinado por este equipo fue de +3, y se esperaba que se observara que es +4.

7.- Establezcan una expresión algebraica que permita determinar la cantidad de esferas necesarias para cualquier nivel del árbol. Escriban el procedimiento que utilizaron.

[illegible]

Figura 5.2.7. Argumento utilizado por un estudiante

2.- ¿Qué diferencia en la cantidad de esferas hay entre el nivel 15 y el nivel 16?

que le agregaron 3 esferas al nivel 16

3.- ¿Qué diferencia en la cantidad de esferas hay entre el nivel 18 y el nivel 19?

hay 4 esferas de diferencias

4.- ¿Cómo es la diferencia en la cantidad de esferas entre dos niveles consecutivos?

de 3 esferas y 4

Figura 5.2.8. Argumento no esperado, manifestado por un estudiante

Lo mostrado en la figura 5.2.8 fue muy regular encontrarlo en la mayoría de los equipos, a excepción de uno. El equipo al cual se hace referencia consideró que a partir de tener los términos comprendidos entre los niveles 15 y 19, no es posible determinar al primero de términos (figura 5.2.9). Lo anterior no fue de acuerdo a lo que se pretendía, y hace suponer que, para estos estudiantes, en una sucesión numérica el patrón de comportamiento no es suficiente para determinar cualquier término.

4.- Con las preguntas y respuestas anteriores, ¿es posible determinar la cantidad de esferas en el nivel1, siguiendo el mismo patrón? Argumenten su respuesta.

no por que se tienen que restar mas cada vez

Figura 5.2.9. Argumento no esperado, manifestado por un estudiante

Dentro de los casos en los que se mencionan que hubo dificultades, se tiene esta situación, puesto que, como ya se mencionó, se tuvo un equipo para el cual no se pueden determinar los primeros términos a partir de términos lejanos. Asimismo, se observaron dificultades para graficar términos de una sucesión aritmética y/o para conjeturar sobre el patrón de comportamiento de los términos (figura 5.2.10).

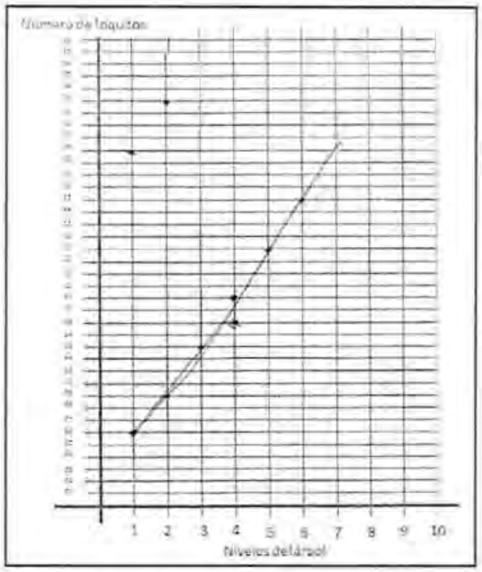


Figura 5.2.10. Error de lenguaje gráfico, manifestado por un estudiante

El error de lenguaje tipo gráfico que se señala anteriormente es debido a que se considera que, a pesar de que se estuvo trabajando con los términos y su correspondencia con los números naturales, no es suficiente para que el estudiante observe que se trata de una gráfica en la que el patrón de comportamiento es lineal discreto.

Situación problema 4: determinar el área total de piezas cuadradas de madera a utilizar para construir una escultura.

Fue posible observar en algún equipo que para llevar a cabo esta situación utilizaron algunos lenguajes como los siguientes: algebraico, cuando realizaron cálculos para determinar el área de las piezas cuadradas de madera; natural, cuando proporcionaron una descripción sobre el comportamiento que siguen las piezas cuadradas con respecto a sus áreas; numérico, ya que utilizaron, por ejemplo, el teorema de Pitágoras como procedimiento y determinar así el área de dos piezas cuadradas de madera.

La figura 5.2.11 muestra los siguientes procedimientos utilizados por algún equipo que logró resolver la situación problema: primero determinaron el área de cada una de las cinco piezas cuadradas de madera, a partir de esto, calcularon el área total de madera necesaria para construir la base de la estructura.

7.- Si el escultor decide utilizar para la pieza más pequeña un área de 9 cm^2, ¿cuál es el área correspondiente a las otras piezas que conforman la base? Completen la siguiente tabla:

Pieza	1	2	3	4	5
Área	9	18	36	72	144

8.- ¿Cuál es el área total de madera necesaria para las 5 piezas de la base? Pueden hacer uso de la calculadora si lo consideran necesario.

279 cm

Figura 5.2.11. Procedimiento utilizado por un estudiante

Los procedimientos anteriores fueron muy comunes en la mayoría de los equipos; sin embargo, la diferencia más notable entre estos es el relacionado con el cálculo del área para cada una de las 5 piezas cuadradas de madera. Por ejemplo, uno de los equipos hizo uso de la herramienta visual para realizar el cálculo, el cual se evidencia en la figura 5.2.12.

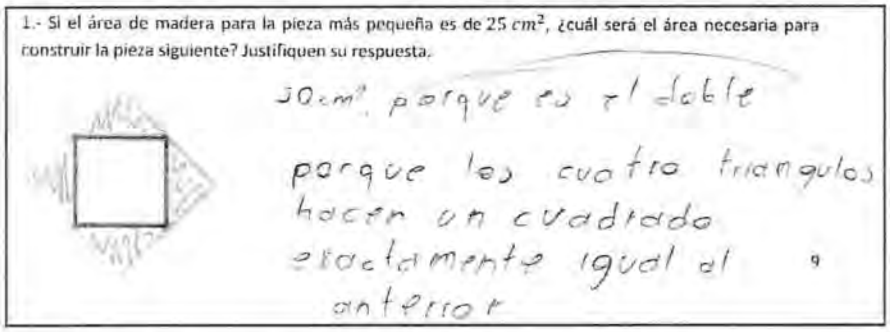


Figura 5.2.12. Procedimiento utilizado por un equipo.

Otro de los equipos recurrió a herramientas algebraicas para determinar el área de cada pieza solicitada. En particular, como ya se mencionó, se hizo uso del teorema de Pitágoras; en una primera ocasión el equipo no mostró inconvenientes; sin embargo, cuando tuvo la necesidad de realizar el procedimiento por segunda ocasión, se encontró con la dificultad de manejar valores no enteros (5.2.13). Lo anterior llevó a que el equipo se planteara que sería conveniente ¨redondear¨ las cantidades resultantes.

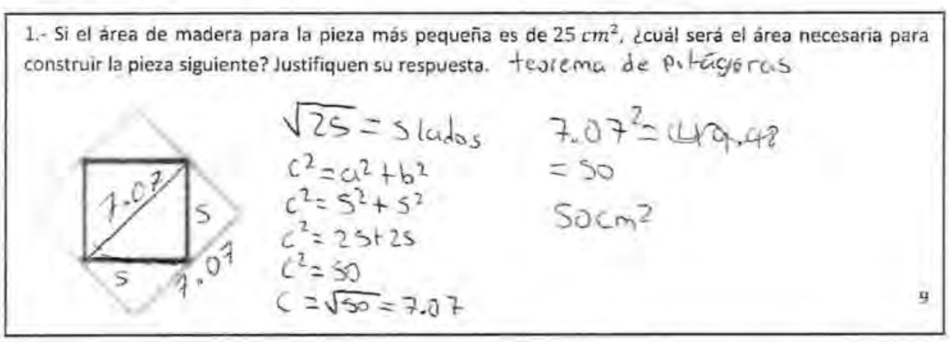


Figura 5.2.13. Procedimiento utilizado por un equipo.

Entre los argumentos empleados está el que justifica el área de la segunda pieza que conforma la base para el equipo que consideró la herramienta visual como medio para determinar las áreas.

En esta situación, se consideran dificultades de lenguaje algebraico, por ejemplo, para el equipo que hizo uso del teorema de Pitágoras para determinar las áreas, puesto que resultó poco conveniente debido a que tenían que hacer uso de números decimales con los cuales mostraron poca familiaridad. Asimismo, se observaron dificultades para graficar términos de una sucesión geométrica y para conjeturar sobre el patrón de comportamiento de los términos (figura 5.2.14).

Similar a la situación problema 3, el error de lenguaje tipo gráfico que se señala es porque se considera que el estudiante no fue capaz de observar que se trata de una gráfica en la que el patrón de comportamiento es no lineal y discreto.

Figura 5.2.14. Error de lenguaje gráfico, manifestado por un equipo.

Situación problema 5: establecer la expresión algebraica que determina al enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas.

En esta situación se les pide a los estudiantes generalizar el patrón de comportamiento mediante una expresión algebraica, para ello se encontraron lenguajes como los siguientes: algebraico, cuando generalizaron el comportamiento de los términos de las sucesiones numéricas; natural, cuando se dieron cuenta de la recursividad de los términos y así parafrasearon sobre el comportamiento en tablas y gráficas; tabular, cuando interpretaron y completaron las tablas.

Entre los procedimientos que fueron posibles observar en algún equipo están que: identificaron los dos tipos de patrones de comportamiento de los términos dados y posteriormente completaron las tablas haciendo uso de herramientas numéricas, una vez que determinaron los valores numéricos correspondientes a los términos, proporcionaron una expresión algebraica que, a consideración de ellos, generalizaba el patrón observado (figura 5.2.15 y 5.2.16).

7.- Establezcan una expresión algebraica que permita determinar la cantidad de esferas necesarias para cualquier nivel del árbol. Escriban el procedimiento que utilizaron.

$4n+1$ Multiplicar 4 veces el nivel y sumarle 1

Figura 5.2.15. Procedimiento utilizado por un equipo.

6.- Completa la siguiente tabla con los datos correspondientes a la cantidad de foquitos para los niveles faltantes.

Nivel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Foquitos	5	9	13	17	21	25	29	33	37

7.- Establezcan una expresión algebraica que permita determinar la cantidad de foquitos necesarios para cualquier nivel del árbol. Escriban su procedimiento empleado.

X= foquitos nivel actual $X = 5 + 4(y-1)$

y = nivel anterior

Figura 5.2.16. Procedimiento utilizado por un equipo.

A pesar de que la expresión algebraica correspondiente al enésimo término de una sucesión aritmética fue cercana a la esperada, se tuvieron errores para construir la correspondiente a las sucesiones geométricas. Este tipo de dificultades fue presentado en todos los equipos (figura 5.2.17).

4.- En la siguiente tabla, escriban las áreas correspondientes a las piezas que conforman la estructura.

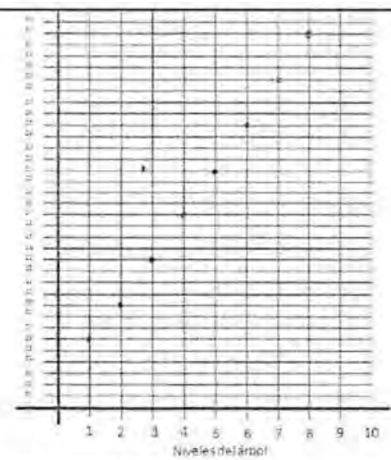
Pieza de la estructura	Área (cm^2)
1	25
2	49.8
3	99.6
4	199.2
5	398.4

5.- Continuando con el comportamiento observado en la tabla, construyan una expresión algebraica que les permita conocer el área para cualquier pieza que forma parte de la estructura. Escriban el procedimiento utilizado.

2n

Figura 5.2.17. Error de tipo algebraico manifestado por un equipo.

Respecto a los argumentos, se muestran en la figura 5.2.18 los que fueron utilizados por uno de los equipos: justificaron el patrón de comportamiento observado en las sucesiones numéricas dadas, así como las expresiones algebraicas construidas; además, conjeturaron el comportamiento que siguen los términos de una gráfica.



¿Qué patrón siguen los puntos de la gráfica que obtuvieron?

Que avanza o sube de cuatro cuadritos en cuatro cuadritos

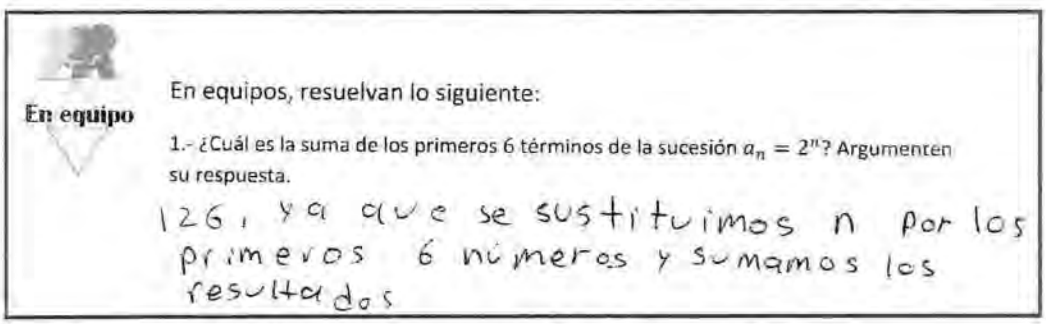
Figura 5.2.18. Argumento manifestado por un equipo.

Situación problema 6: establecer la expresión algebraica que determina la suma de los primeros n términos de las sucesiones aritméticas y geométricas.

En esta situación se les pide a los estudiantes generalizar el patrón de comportamiento mediante una expresión algebraica pero ahora sobre el comportamiento del procedimiento propuesto para determinar la suma de términos consecutivos, para ello se encontraron lenguajes de tipo algebraico, tabular, entre otros.

Respecto al lenguaje: algebraico, se obtuvo cuando generalizaron el comportamiento de los términos para la suma de n términos; natural, cuando conjeturaron de manera verbal y escrita (aunque ésta no se puede evidenciar debido a las dificultades que mostraron los estudiantes para representar las ideas generadas) sobre el comportamiento observado en el arreglo numérico sugerido para realizar la suma de términos consecutivos; tabular, cuando interpretaron y completaron las tablas.

Del mismo modo, se tienen los procedimientos desarrollados por algún equipo, entre los cuales se tiene que: observaron los patrones de los valores numéricos dadas para construir los términos faltantes, después calcularon la suma haciendo uso de la calculadora y posteriormente, debatieron en equipo cuando intentaron construir una expresión algebraica referente a la suma de los términos consecutivos de la sucesión (figura 5.2.19).


En equipo

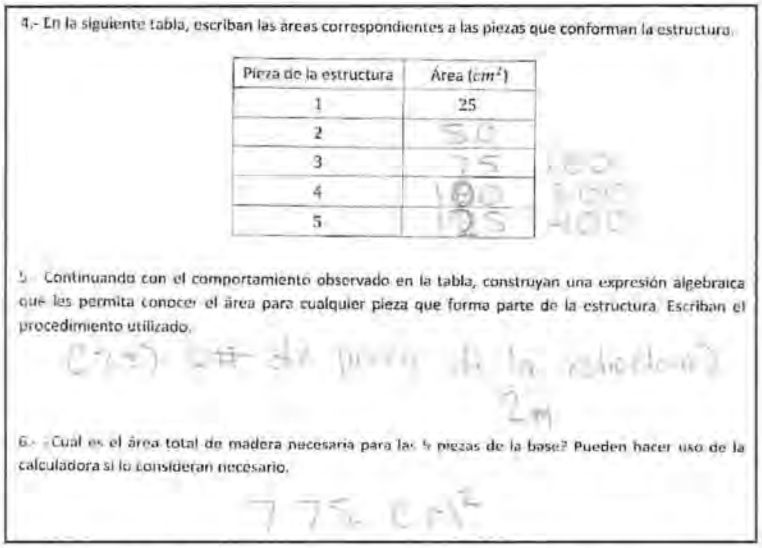
En equipos, resuelvan lo siguiente:

1.- ¿Cuál es la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 2^n$? Argumenten su respuesta.

126, ya que se sustituimos n por los primeros 6 números y sumamos los resultados

Figura 5.2.19. Procedimiento manifestado por un equipo.

En cuanto a los argumentos que empleo este equipo está el observado en la figura 5.2.20. Éstos fueron utilizados para justificar las expresiones algebraicas construidas, parafraseando sobre el comportamiento que siguen los términos determinados dados en la tabla.



4.- En la siguiente tabla, escriban las áreas correspondientes a las piezas que conforman la estructura.

Pieza de la estructura	Área (cm^2)
1	25
2	50
3	75
4	100
5	125

5.- Continuando con el comportamiento observado en la tabla, construyan una expresión algebraica que les permita conocer el área para cualquier pieza que forma parte de la estructura. Escriban el procedimiento utilizado.

6.- ¿Cuál es el área total de madera necesaria para las 5 piezas de la base? Pueden hacer uso de la calculadora si lo consideran necesario.

775 cm^2

Figura 5.2.20. Procedimiento manifestado por un equipo.

En términos generales referentes a los aspectos favorables, se tiene que, dentro de los objetos matemáticos pretendidos se pudo observar que los estudiantes hicieron uso de la mayoría de los lenguajes, procedimientos y argumentos. Además, se considera que pusieron en práctica algunas de las nociones que tenían sobre los conceptos como: crecimiento, tipo de crecimiento, término, sucesión numérica, teorema de Pitágoras, área de cuadrados, expresión recursiva, expresión algebraica.

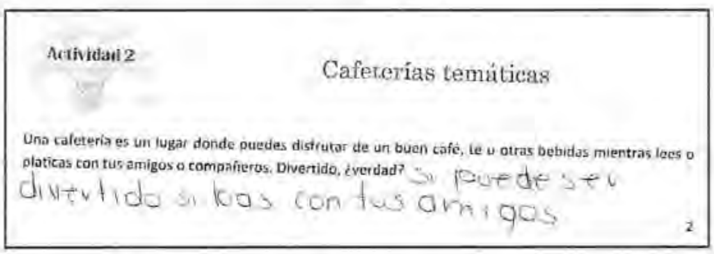
Asimismo, se piensa que los estudiantes pudieron hacer uso de proposiciones como las siguientes: no es lo mismo el término y el índice de una sucesión numérica, no es lo mismo el término general y la suma de términos, las sucesiones aritméticas se obtienen a partir de la diferencia constante entre cada pareja de términos consecutivos, las sucesiones geométricas se obtienen a partir del cociente constante entre cada pareja de términos consecutivos.

Por otro lado, respecto a los puntos negativos, se tiene que hubo dificultades referentes a lo siguiente: al realizar la gráfica de los términos que forman parte de una sucesión numérica y conjeturar sobre el patrón de comportamiento; al construir una expresión algebraica para determinar el enésimo término de una sucesión geométrica; al construir una expresión algebraica para determinar la suma de los primeros términos de una sucesión geométrica.

Idoneidad mediacional

A posteriori se valora la idoneidad mediacional como media, debido a que:

- Las hojas de trabajo no generaron la confianza suficiente para que los estudiantes plasmaran todas sus ideas sobre ellas, lo que limitó el análisis, a pesar de que la conductora pudo captar algunas de estas ideas no escritas. Sin embargo, se considera que los contextos empleados llamaron la atención sobre los estudiantes, ya que, por ejemplo, en la figura 5.7.1 se puede observar algunos de los comentarios realizados.
- Durante el desarrollo de la actividad 4 hubo un distractor, ya que los valores numéricos encontrados no eran enteros y esto ocasionaba que algunos estudiantes prestaran más atención al valor como tal que en ver lo que pasaba con las áreas de las figuras planteadas. No obstante, se pudo sobrellevar y sirvió para que los estudiantes pudieran interactuar entre ellos para negociar sus argumentos.



Actividad 2

Cafeterías temáticas

Una cafetería es un lugar donde puedes disfrutar de un buen café, te u otras bebidas mientras lees o platicas con tus amigos o compañeros. Divertido, ¿verdad? Si puede ser divertido si bas con tus amigos

2

Figura 5.2.21. Comentario manifestado por un estudiante.

- Hizo falta tiempo, por lo menos una sesión más, para poder implementar con mayor atención todas las actividades de la secuencia didáctica y formalizar de mejor manera los conocimientos vistos durante las sesiones anteriores.

A pesar de lo anterior, durante el trabajo en equipo, hubo estudiantes que hicieron uso de recursos como la regla y la calculadora para aportar en ideas y argumentos que pudieran dar respuesta a las situaciones planteadas.

En general el tiempo empleado por los estudiantes para intentar dar respuesta a las situaciones problema fue el suficiente ya que no se perdió tiempo en hacer que los estudiantes asumieran su participación. Por parte de la conductora, el tiempo empleado no bastó para que se pudiera poner más atención a lo referente a las sumas de n términos consecutivos.

Por otro lado, el tiempo utilizado se invirtió únicamente en lo referente a lo planificado por la conductora para que las actividades propuestas promovieran la realización de los sistemas de prácticas pretendidas y la utilización de los objetos matemáticos primarios esperados.

Considerando el número y la distribución de los estudiantes, así como las condiciones del aula y el horario, estas fueron favorables para llevar a cabo la puesta en escena. Es decir, fue posible que la puesta en escena fluyera sin problemas.

Idoneidad interaccional

Se considera la idoneidad interaccional como media puesto que:

- La conductora realizó una presentación sobre el contexto de las actividades de inicio y la primera actividad de desarrollo, no así para las actividades restantes.
- La conductora realizaba intervenciones constantes en los diferentes momentos de trabajo, utilizando argumentos para captar la atención de los estudiantes.
- Durante la puesta en escena se detectaron dificultades (mencionadas en la idoneidad cognitiva a posteriori). Algunas de éstas pudieron ser atendidas por la conductora para lograr que los estudiantes pudieran seguir avanzado en el desarrollo de las actividades. Sin embargo, otras no pudieron ser resueltas debido a la falta de tiempo; ya que las mayores dificultades se presentaron en la parte final de la secuencia.
- No hubo muchas discusiones grupales para las actividades del cierre debido a la falta de tiempo y que los estudiantes esperaban que la conductora les dijera si estaban bien o mal. No obstante, la conductora pudo detectar algunos conflictos entre los significados personales de los estudiantes; por ejemplo, la dificultad para distinguir entre sucesión y serie.

Por otro lado, la planificación que se había realizado con la intención de facilitar la inclusión de todos los estudiantes en la dinámica de la clase se cumplió en gran medida.

En general, el diálogo entre los estudiantes y la conductora durante los momentos de trabajo individual, en equipo y grupal sí sirvió para proponer, negociar y validar los objetos matemáticos presentes en el desarrollo de las actividades, tales como los procedimientos y argumentos.

Idoneidad afectiva

Se valora la idoneidad afectiva como media por factores como los siguientes:

- El hecho de que estuviera presente una maestra y que ésta les pasara lista mientras les decía que se distribuyeran con el menor tiempo posible y en silencio, por toda el aula de clases, hizo que en un principio los estudiantes pensaran que se trataba de un examen y se notara cierta tensión "por no haber estudiado".
- Entregar al mismo tiempo todas las hojas de trabajo correspondientes a las actividades que formaban parte de la secuencia, además de solicitarles que las respondieran con pluma sin tachar alguna de sus respuestas influyó en que algunos de los estudiantes no se sintieran con la comodidad de escribir todas sus ideas; dos de ellos, por el contrario, solicitaron hojas extras para realizar sus procedimientos.
- Una que otra de las preguntas elaboradas en las actividades de desarrollo estaban con falta de claridad o extensas, lo que propició que se pudiera perder un poco el interés por parte de algunos equipos de trabajo. Sin embargo, esto no afectó en la actitud positiva que mostraron para participar en el desarrollo de toda la secuencia didáctica.

Por otro lado, la manera en que se abordaron las situaciones propuestas fue de interés para los estudiantes, los cuales tuvieron participación activa. Esto se puede concluir ya que la conductora pudo escuchar comentarios relacionados a los contextos, tales como "lo leí y se me antojó un coffee"; incluso, ante la pregunta presente como parte de la formulación de la situación sobre si era divertido juntarse a leer, hubo quiénes contestaban en sus hojas de trabajo "si", "no" o "si, si vas con tus amigas".

Idoneidad ecológica

Se considera a la idoneidad ecológica como alta debido a que:

- De los planes y programas de estudios de la asignatura, se consideraron las competencias disciplinares ahí propuestas y fueron adaptadas a los sistemas de prácticas desarrolladas para construir el significado pretendido.
- Los contenidos presentes en las actividades se correspondieron con los planes de estudio, y no se generaron conflictos con otros contenidos de la misma o diferente asignatura. Por el contrario, algunas de los contenidos utilizados por los estudiantes para dar respuesta a las situaciones problema se relacionaron con otros contenidos matemáticos.
- En general, esta propuesta está sustentada en un marco teórico utilizado en el área de la Matemática Educativa, además de considerar algunos resultados de otras investigaciones realizadas dentro de la propia Matemática Educativa.

En la Figura 5.2, se representa, de acuerdo a Godino (2011) la idoneidad didáctica de la puesta en escena de la secuencia didáctica.

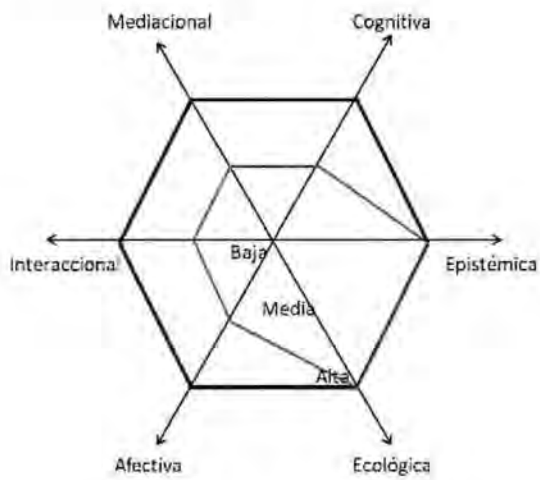


Figura 5.2. Idoneidad didáctica del diseño de la propuesta didáctica.

5.3 Adecuaciones a la secuencia didáctica

A partir de todos los análisis que se realizaron a las actividades que forman parte de la secuencia didáctica, se hicieron modificaciones con la intención de afinar el diseño de algunas secciones de las actividades. Entre los cambios que se hicieron destacan los siguientes:

- Situación problema 2. Se modificó la tercera pregunta planteada para la situación. A pesar de que la pregunta fue respondida por la mayoría de los estudiantes de acuerdo a lo que se esperaba, se decidió modificarla para intentar evitar que se presentaran casos como los observados en esta implementación.

Con la modificación a la pregunta se espera que quede claro para los estudiantes el hecho de que se pide determinar el término siguiente dado el anterior, y no el patrón de comportamiento.

- Situación problema 3. Se modificaron algunas de las preguntas planteadas, con la intención de que se promueva la exhibición de argumentos de una manera más estricta. En la puesta en escena se pudo observar la ausencia de preguntas que solicitaran con mayor atención el empleo de argumentos.

Además, se agregaron un par de preguntas más, en la primera se les solicita a los estudiantes realizar el cálculo de la suma de los primeros 14 términos consecutivos, y la segunda es con la intención de que puedan darse cuenta de la necesidad de construir una expresión algebraica para facilitar el cálculo.

Conclusiones

Las conclusiones consideradas más relevantes se estructuran de acuerdo a los siguientes apartados.

Diseño de la secuencia didáctica

A continuación, se presentan las conclusiones generadas a partir de analizar los resultados obtenidos tanto en la elaboración del diseño como en su implementación y valoración a priori y posteriori.

Se considera que el uso del lenguaje algebraico, tomado como parte del contenido central y al cual se le dedicó más tiempo, estaba de acuerdo a lo que se promueve en los planes de estudios dirigidos al nivel medio superior. Lo anterior fue posible debido a que se les solicitaba de manera iterativa a los estudiantes que construyeran expresiones algebraicas a partir de generalizar los patrones de comportamiento observados de las sucesiones numéricas presentadas; sin embargo, poco más de la mitad del grupo mostró dificultades a pesar de haber podido determinar el patrón de comportamiento o de haber seguir los procedimientos propuestos en las hojas de trabajo.

La manera en la que estaban ordenadas las actividades permitió presentar la institucionalización de los contenidos matemáticos involucrados en el desarrollo de las actividades de forma adecuada, ya que estaba apegado de acuerdo a lo propuesto en los planes de estudios dirigidos al nivel medio superior.

Debido a los resultados arrojados, se considera que para algunos de los estudiantes, es más complicado el estudio de las sucesiones geométricas a comparación de las aritméticas, por lo que se sugiere que se le preste mayor atención al estudio de las sucesiones geométricas.

En el diseño no se usó la tecnología como medio para desarrollar el estudio de las sucesiones. Sin embargo, se considera que algunas de las actividades podrían mejorar o adaptarse y tal vez potenciarse, a través de algún software, en particular la situación problema 4.

Logro de los objetivos

Se valora que se logró llevar a cabo el objetivo general presentado en este proyecto, ya que se obtuvo el diseño de la propuesta didáctica en la que se estudian las sucesiones y series, aritméticas y geométricas. Lo anterior se concluye ya que, para la elaboración de las actividades, en un primer momento se identificaron algunas situaciones problemas que estaban ligadas al estudio de las sucesiones numéricas.

Una vez que se tenían considerados algunos tipos de problemas para incorporar en el diseño, se realizaron cuestionamientos para determinar los lenguajes más adecuados para las actividades. Además de lo anterior, se realizaron algunas pruebas pilotos que ayudaron a afinar el diseño de las actividades.

Como parte de los propósitos, en particular el que se refiere a realizar la correspondencia de los objetivos de cada actividad con las competencias disciplinares.

Utilidad del marco teórico

El marco teórico permitió hacer una descripción detallada de los conceptos matemáticos empleados. Por ejemplo, el hecho de considerar relevante la interacción de los estudiantes con sus compañeros y docente.

Este marco teórico está abierto a que se pueda hacer uso de otras consideraciones didácticas, para este caso, los elementos teóricos fueron complementados con la propuesta didáctica de Díaz Barriga sobre el diseño de secuencias.

Otra de los beneficios es que permite dar una valoración del diseño antes de llevarla a escena, y no solamente quedarse con que es suficiente considerar los elementos teóricos antes de elaborar las actividades. Lo anterior, además, permitió que se pudieran hacer ajustes a algunas partes del diseño.

Por su parte, se considera que una de las desventajas puede ser que las herramientas de este marco teórico no contemplan explícitamente el uso de tecnología como parte del diseño. En el diseño de esta propuesta no está presente el uso de tecnología y sin embargo, se valora que el diseño cumple con los objetivos propuestos.

Se piensa también que los indicadores, los cuales sirvieron como guía para la elaboración de las actividades, están propuestos de manera muy general, lo que resultó complicado al momento de realizar los análisis. Sin embargo, esta dificultad ayudó a poder ver cosas, sobre todo cuando se intentó profundizar en los objetos matemáticos primarios.

Bondades y limitaciones del diseño. Posibles líneas a seguir.

El haber realizado la valoración sobre el proceso de la implementación de las actividades didácticas, nos permite señalar algunas pautas para la mejora del diseño y la implementación de la secuencia.

Se piensa que el docente a cargo del grupo de estudiantes puede emplear algún software que permita desarrollar de mejor manera la actividad 4, ya que se considera que el uso de software podría potenciar la situación en el sentido de que la visualización podría servir de apoyo para identificar el patrón de comportamiento. Lo anterior, sobre todo si el docente cree que los estudiantes no tienen los conocimientos suficientes para utilizar el teorema de Pitágoras.

Referencias bibliográficas

- Acuerdo número 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad (2008). Reforma Integral de Educación Media Superior en México: El Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad. Recuperado de http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5061936&fecha=26/09/2008
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking, 9(1), 267-300.
- Bajo Benito, J. M., Sánchez Matamoros, G., Gavilán Izquierdo, J. M. (2015). Las progresiones como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica en alumnos de segundo ciclo de enseñanza secundaria obligatoria. Universidad de Sevilla.
- Bedoya, Jemberson (2015). Progresiones aritméticas y geométricas (ppt).
- Benavides Najera, J. A (1999). Propuesta didáctica: resolución de problemas en el álgebra de preparatoria. San Nicolás de la Garza, Nuevo León, México. Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Butto Zarzar, C., Rojano, M. T. (2010). Pensamiento algebraico temprano. Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco, México.
- Campos, C. (2011). ¿Qué sabemos acerca de la RIEMS?. Recuperado de https://doctorsimulacro.wordpress.com/2011/06/22/%C2%BFque-sabemos-acerca-de-la-riems/
- Cantoral Uriza, R. (2016). Nuevo currículo de la Educación Media Superior. Campo disciplinar de Matemáticas. Bachillerato General. Programas de las asignaturas del Bachillerato General (asignaturas de formación básica y propedéutica). Recuperado de http://planeacioneducativa.uienl.edu.mx:8044/SeguridadGlobal/Publico/MediaSuperior/NUEVO_CURRICULO_MATEMATICAS_BACHILLERATO_GENERAL.pdf

- Díaz Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2009). Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Granada.
- Gómez Triana J. (Octubre, 2013). El pensamiento algebraico, algo más que letras. Una mirada desde la perspectiva semiótica cultural. Bogotá, D.C: Instituto Técnico Industrial.
- Gómez Triana, J. E., Vergel Causado, R. (2013). La generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas desde una perspectiva semiótica cultural. Tesis de maestría. Bogotá, D.C: Universidad Pedagógica Nacional.
- González, J., Medina, P., Vilanova, S. y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. Universidad Nacional de Mar de Plata.
- Gutiérrez Rodríguez, N. (2009). Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior. Programa de Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional.
- Hoyos, V., Rodríguez, G. (2015). Actividades de generalización de patrones con alumnos de bajo rendimiento escolar de séptimo grado. México: Universidad Pedagógica Nacional.
- La Reforma Integral de Educación Media Superior (2008). Recuperado de http://www.oei.es/historico/pdfs/reforma_educacion_media_mexico.pdf
- Nuño Mayer, A. (2017). Modelo educativo para la educación obligatoria.
- Nuño Mayer, A. (2016). Propuesta curricular para la educación obligatoria. Recuperado de https://www.gob.mx/cms/uploads/docs/Propuesta-Curricular-baja.pdf
- Ortega Pérez, M (2012). Unidad didáctica. Sucesiones matemáticas. Progresiones aritméticas y geométricas. Recuperado de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_Ortega_Manuel_2012.pdf
- Programa de álgebra. Nivel Medio Superior. Dirección general de Bachillerato.

- Subsecretaría de Educación Media Superior (2016). Dirección General de Bachillerato. Documento base del Bachillerato General. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/documentobase/DOC_BASE_16_05_2016.pdf
- Székely Pardo, M. (2009). Avances y transformaciones en la Educación Media Superior.
- Tarazona, S. L., Vega, M. E. (2007). Estrategias metodológicas para el aprendizaje de las progresiones aritméticas en noveno grado. Universidad industrial de Santander.
- Velásquez, F. D (2012). El estudio de las sucesiones y series desde la teoría del aprendizaje significativo. Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Velásquez Naranjo, L. J. (2012). Enseñanza de sucesiones numéricas para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado cuarto de básica primaria. Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Anexo 1. Objetos primarios de las actividades del libro de texto Matemáticas 1 (BAEM, 2014).

Situación problema 1.	Se presentan los tres primeros términos de una sucesión, formada por latas sobrepuestas, y se solicita:  Construir el número de latas correspondientes al cuarto término. Determinarcuántas latas tiene el quinto término Determinar cuántas latas tiene el doceavo término. Describir el comportamiento del número de latas respecto al número del término. Describir la relación que hay entre un término de la sucesión y el término anterior. **Encontrar una expresión algebraica que represente a cualquier término de la sucesión a partir del término anterior.**
Lenguajes	Natural, para describir la relación: Entre dos términos consecutivos, El término y su posición. Numérico y numérico tabular para determinar, (respecto al número de latas para dos términos consecutivos) cómo es: 1.- El cambio (creciente o decreciente)y,

	2.- El tipo de crecimiento o decrecimiento (constante o no constante). Algebraico, para determinar una expresión recursiva que represente a cualquier término de la sucesión a partir del término anterior.
Procedimientos	Para calcular el número de latas de algún término en particular: Determinar cómo es el cambio para los primeros tres términos dados, Describir el comportamiento entre dos términos consecutivos tomando en cuenta la posición de éstos, Ubicar la posición del término solicitado, Encontrar el número de latas a partir del término anterior. Para encontrar una expresión algebraica que represente a cualquier término de la sucesión a partir del término anterior: Generalizar el procedimiento utilizado para determinar el número de latas de un término en particular.
Conceptos	Crecimiento. Tipo de crecimiento. Sucesión. Término. Expresión recursiva.
Proposiciones	A través de los primeros tres términos dados es posible obtener cualquier otro término. El número de latas de un término de la sucesión depende del término anterior.
Argumentos	Para el caso del término faltante en la imagen: En el cuarto término habría 10 latas porque al término anterior se le suma el valor del término que se pide. La sucesión es creciente porque para dos términos consecutivos (respetando el orden: el mayor menos el menor) la diferencia es positiva. El tipo de crecimiento no es constante, porque si comparamos las diferencias, éstas no son iguales.

Tabla 4.1.1. Objetos primarios de la actividad 1.

Situación problema **2.**	**Determinar cuánto se reunirá de dinero si se venden todos los boletos de una rifa.** Se realiza una rifa en la que el comprador no sabe de antemano cuánto debe pagar para participar en ella, pues el costo del boleto está en función del número seleccionado; por ejemplo, si el número que obtuviste es el 5 te corresponde pagar cinco pesos Al organizar esta rifa se decide hacer 100 boletos numerados del 1 al 100. Si cada cuadro de la siguiente cuadrícula representa uno de los boletos que se venderán,  Utilizando la calculadora, determina la cantidad de dinero que se reunirá, si se venden todos los boletos. ¿Cómo le hiciste para calcular el dinero que se reunirá, si se venden todos los boletos? A partir de la expresión algebraica proporcionada, calcular la suma de los primeros tres, seis y veinte términos.
Lenguajes	Numérico, para determinar el total de dinero reunido si se venden todos los boletos. Natural, para describir el procedimiento utilizado para calcular el total de dinero reunido si se venden todos los boletos. Algebraico, para a partir de la expresión algebraica dada, encontrar la suma de los primeros tres, seis y veinte términos.

Procedimientos	Utilizar la calculadora para determinar la cantidad de dinero que se reunirá, si se venden todos los boletos. Describir el procedimiento utilizado para calcular el total del dinero. Interpretar la expresión algebraica para sustituir los datos proporcionados y determinar así la suma de los primeros tres, seis y veinte términos.
Conceptos	Sucesión. Término. Expresión algebraica.
Proposiciones	La expresión algebraica dada, representa la suma de los primeros n números de la sucesión aritmética.
Argumentos	El total del dinero reunido se obtiene al sumar los 100 números naturales correspondientes a cada uno de los boletos.

Tabla 4.1.2. Objetos primarios de la actividad 2.

Anexo 2. La secuencia didáctica

BLOQUE 3

Realiza sumas y sucesiones de números

Secuencia didáctica 1.-

Actividades de inicio

Actividad 1

Los candelabros de techo

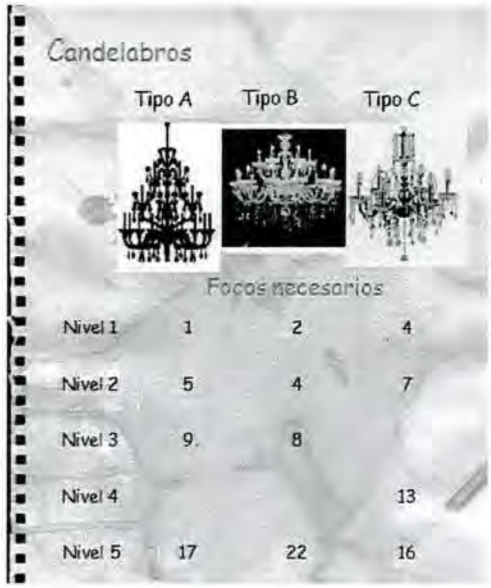
Los señores Rodríguez, dueños de un salón para eventos, tienen previsto llevar a cabo una remodelación de éste. Entre los cambios que buscan está el innovar la manera en que se ilumina el salón, para ello han considerado adquirir candelabros con la finalidad de que la luz se envíe hacia diferentes lugares.

Como primera medida para cumplir este objetivo, los señores Rodríguez contactaron a diferentes proveedores de candelabros para solicitar información sobre la variedad y características de los productos que tienen a la venta y así, poder elegir la propuesta que más les convenga.

A partir de la información obtenida de los proveedores, seleccionaron las tres mejores propuestas. Posteriormente, realizaron un registro sobre la cantidad de focos que necesitarían para cada candelabro.

Los tres tipos de candelabros están formados por 5 niveles, en los cuales, la cantidad de focos que hay en cada nivel es diferente.

A continuación, se presenta el registro elaborado por los señores Rodríguez.


Candelabros

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
	Focos necesarios		
Nivel 1	1	2	4
Nivel 2	5	4	7
Nivel 3	9	8	
Nivel 4			13
Nivel 5	17	22	16

Los señores Rodríguez, observaron ciertas regularidades en los datos numéricos. Sin embargo, por accidente derramaron café sobre sus anotaciones, haciendo que se perdieran algunos datos.

A partir de los datos proporcionados, identifica las regularidades en los valores numéricos para completar el registro.

1.- ¿Cuál es el dato faltante en el nivel 4 para el candelabro tipo A? Justifica tu respuesta.

2.- Para el tipo C, ¿qué cantidad de focos hace falta en el nivel 3? Explica por qué lo consideras así.

3.- Determina el dato faltante para el candelabro tipo B, ¿cómo lo determinaste?

Debido a que los tres tipos de candelabros cumplen con la característica de iluminar en su mayoría al salón, los señores Rodríguez tomaron la decisión de adquirir el tipo de candelabro que contenga la menor cantidad de focos, ¿Cuál es el tipo de candelabros que cumple con este requisito?

Actividad 2

Cafeterías temáticas

Una cafetería es un lugar donde puedes disfrutar de un buen café, té u otras bebidas mientras lees o platicas con tus amigos o compañeros. Divertido, ¿verdad?

Los clásicos establecimientos de cafeterías consisten de una barra y mesas en las que te sirven el producto de tu preferencia. Sin embargo, en los últimos años ha iniciado una tendencia por crear cafeterías temáticas novedosas con la finalidad de ofrecer una experiencia única.

En Japón podemos encontrar cafeterías en las que puedes convivir con animales como gatos, conejos y cabras; otras donde en lugar de mesas y sillas te ofrecen hamacas colgadas del techo. En Corea del Sur encontramos una cafetería en forma de cámara gigantesca. En Portland, EUA, está la cafetería tenebrosa, donde el café y ataúdes comparten espacio, etc.

Hay muchas temáticas que se han ido creando con la finalidad de ofrecer mayor comodidad, relajación o motivación; además, la alta competitividad entre las empresas de esta rama los ha llevado a innovar cada vez más sus locales y con ello atraer más clientes.

Ramón y Regina, una pareja de hermanos, decidieron unirse a esta tendencia y establecer una cafetería cuya temática fue inspirada en las 7 bellas artes (pintura, teatro, danza, arquitectura, música, literatura y escultura).

Como parte de la decoración, ubicaron estantes formados por paneles sobre los cuales clasificaron los libros con los que contaban. Entre los estantes podemos encontrar los dirigidos a: arquitectura, música y literatura.

Dado que, a Regina le gusta jugar y buscar regularidades con los números naturales, sin comentarle a Ramón, decidió acomodar los libros de la siguiente manera:

Paneles	Libros en el estante de arquitectura	Libros en el estante de música	Libros en el estante de literatura
1	2	1	25
2	4	3	18
3	8	9	11
4	16	27	4
5	32		

Individual

Ramón desea conocer la estrategia utilizada por Regina sobre el acomodo de los libros.

1.- ¿Cómo le describirías a Ramón la estrategia que utilizó Regina en el estante de arquitectura?

2.- Explica a Ramón cómo determinó Regina la cantidad de libros para el panel 4 en el estante de música.

3.- Continuando con el patrón determinado por Regina en el estante de literatura, ¿cuántos libros hacen falta para agregar un quinto panel?

4.- Ramón concluye que Regina utilizó la misma estrategia para los tres estantes, ¿Respaldas esta afirmación? Justifica tu respuesta.

5.- ¿En cuál estante Regina acomodó más libros?

Actividades de desarrollo

Actividad 3

El árbol navideño

Con motivo de las fiestas Decembrinas, los integrantes de Esqueda, Fronteras, un pueblo del estado de Sonora, acordaron solicitar al ayuntamiento que instalara en la plaza, un árbol navideño.

El ayuntamiento decidió aceptar la solicitud, por lo que se ubicó en el centro de la plaza un árbol de 5 $metros$ de altura. Y además de proporcionar el árbol, también colaboró con los accesorios para adornarlo, pero pidió a los jóvenes que se hicieran cargo de la decoración.

Algunos jóvenes propusieron que el acomodo de las esferas fuera como se muestra en la siguiente figura

Debido a que la estatura de los jóvenes que apoyaron en la decoración no permitía colocar las esferas en los primeros 14 niveles, decidieron solicitar ayuda a uno de los bomberos del pueblo.

A algunas personas mayores, les pareció peculiar la manera en la que se decoró el árbol con las esferas, por lo que se propusieron determinar la estrategia que utilizaron los jóvenes. Para ello, hicieron las siguientes preguntas a los jóvenes:

1.- ¿Cuántos esferas colocaron en el nivel 15?

2.- ¿Qué diferencia en la cantidad de esferas hay entre el nivel 15 y el nivel 16?

3.- ¿Qué diferencia en la cantidad de esferas hay entre el nivel 18 y el nivel 19?

4.- ¿Cómo es la diferencia en la cantidad de esferas entre dos niveles consecutivos?

En equipo, respondan lo siguiente:

4.- Con las preguntas y respuestas anteriores, ¿es posible determinar la cantidad de esferas en el nivel1, siguiendo el mismo patrón? Argumenten su respuesta.

5.- Siguiendo el mismo patrón, ¿cuántas esferas colocó el bombero en el nivel2?

6.- Completa la siguiente tabla con los datos correspondientes a la cantidad de esferas para los niveles faltantes.

Nivel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Esferas			13	17	21			33	37

7.- Establezcan una expresión algebraica que permita determinar la cantidad de esferas necesarias para cualquier nivel del árbol. Escriban el procedimiento que utilizaron.

8.-Determinen cuál es la cantidad total de esferas necesarias para los primeros 9 niveles. Pueden hacer uso de la calculadora si lo consideran necesario.

Una manera diferente de encontrar la suma para los primeros 9 niveles es acomodar la cantidad de esferas de la siguiente forma:

	5	9	13	17	21	25	29	33	37
+	37	33	29	25	21	17	13	9	5
	42	42	42	42	42	42	42	42	42

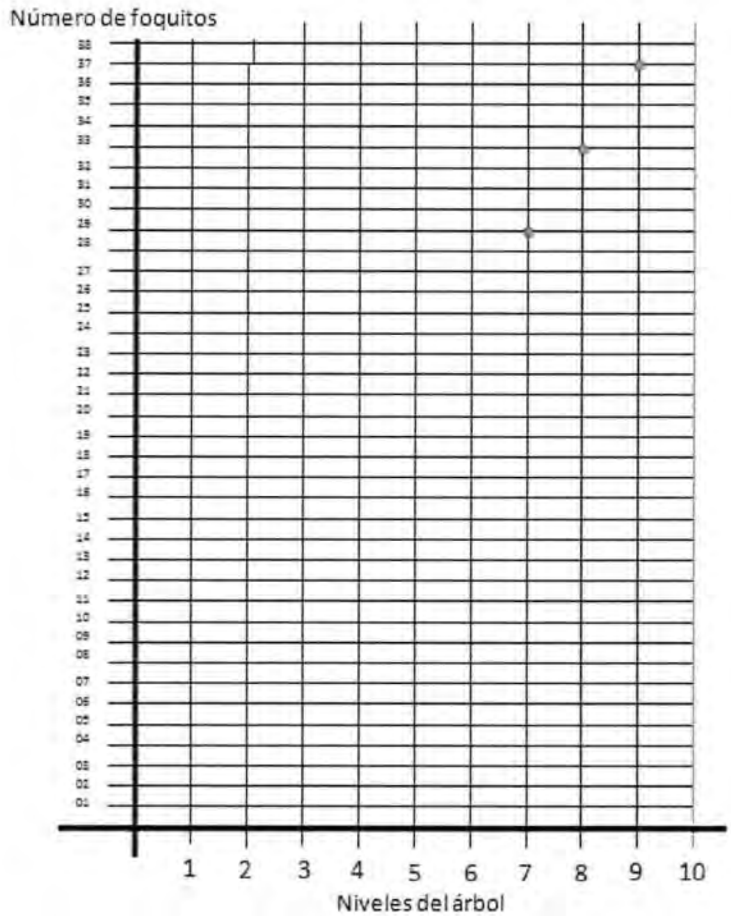
9.- Apoyándose de la tabla anterior determinen la cantidad total de esferas acomodadas por el bombero.

10.- Construyan una tabla como la anterior para determinar el número total de esferas en los primeros 12 niveles.

11.- Construyan una tabla como la anterior para determinar el número total de esferas utilizadas para decorar el árbol.

12.- Usando una tabla como la anterior y la expresión que encontraron en el punto 7, determinen el número de esferas para los primeros n niveles del árbol.

13.- En la gráfica siguiente se muestra la cantidad de esferas utilizadas en los niveles 7, 8 y 9. Grafiquen la cantidad de esferas correspondientes a los 6 niveles anteriores.



¿Qué patrón siguen los puntos de la gráfica que obtuvieron?

Actividad 4

El escultor

La escultura es una forma de expresión artística consistente en tallar, moldear, esculpir o cincelar un material para crear una forma. Los materiales de trabajo de la escultura pueden ser de los más variados, desde el barro, la piedra y la madera, hasta el mármol, la cera, el yeso y diferentes tipos de metales (bronce, hierro, cobre, plata, oro).

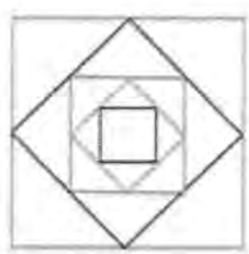
Uno de los usos de la escultura es el estético, en el cual se busca representar la belleza, ideales artísticos o bien, crear objetos de carácter decorativo para interiores o exteriores.

Hace unos meses, el señor Morales, un escultor que trabaja con madera, decidió establecer un negocio dedicado a la venta de productos elaborados con este material. Su trabajo se centra en la innovación de muebles para el hogar o en la creación de figuras decorativas.

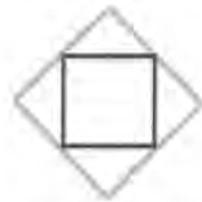
Entre los productos que ofrece para uso diario en el hogar, se pueden encontrar muebles como mesas y sillas, además de artículos para decoración.

Al señor Morales se le solicitó de forma inmediata una base para la siguiente estructura:

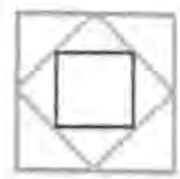
La base de la estructura consiste en 5 piezas cuadradas de madera. El plano de la estructura se puede observar en la siguiente figura:



Ayuden al escultor a encontrar una estrategia que le ayude a determinar la cantidad total de madera a utilizar, contestando en equipos las siguientes preguntas.



1.- Si el área de madera para la pieza más pequeña es de $25\ cm^2$, ¿cuál será el área necesaria para construir la pieza siguiente? Justifiquen su respuesta.



2.- Determinen el valor del área para la tercera pieza. Escriban el procedimiento empleado.

3.- Compara las áreas correspondientes a:

a) La segunda pieza en comparación de la primera pieza. Argumenten su respuesta.

b) La tercera pieza en comparación de la segunda pieza. Argumenten su respuesta.

4.- En la siguiente tabla, escriban las áreas correspondientes a las piezas que conforman la estructura.

Pieza de la estructura	Área (cm^2)
1	25
2	
3	
4	
5	

5.- Continuando con el comportamiento observado en la tabla, construyan una expresión algebraica que les permita conocer el área para cualquier pieza que forma parte de la estructura. Escriban el procedimiento utilizado.

6.- ¿Cuál es el área total de madera necesaria para las 5 piezas de la base? Pueden hacer uso de la calculadora si lo consideran necesario.

7.- Si el escultor decide utilizar para la pieza más pequeña un área de 9 cm^2, ¿cuál es el área correspondiente a las otras piezas que conforman la base? Completen la siguiente tabla:

Pieza	1	2	3	4	5
Área	9				

8.- ¿Cuál es el área total de madera necesaria para las 5 piezas de la base? Pueden hacer uso de la calculadora si lo consideran necesario.

La siguiente es una estrategia para sumar las áreas correspondientes a las 5 piezas que conforman la base de la estructura:

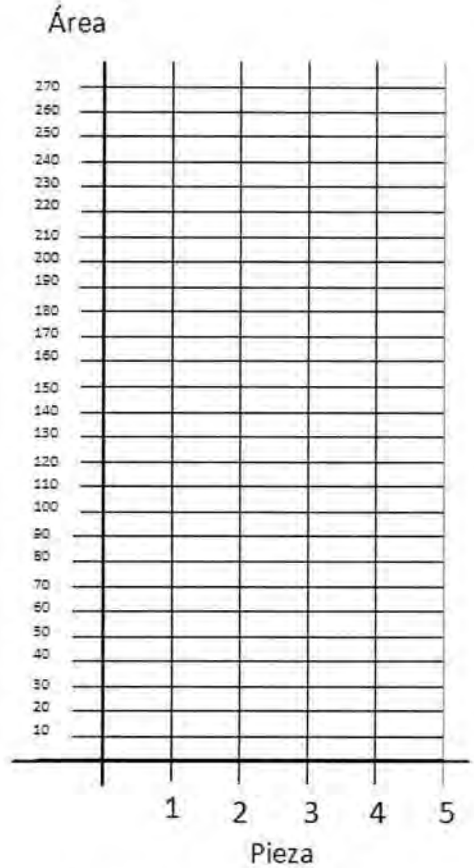
$$\begin{array}{rrrrrrr} & & 18 & 36 & 72 & 144 & 288 \\ - & 9 & 18 & 36 & 72 & 144 & \\ \hline & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 288 \end{array}$$

9.- Si en este caso, el escultor decide utilizar más piezas, ¿Cuál sería el área de la décima pieza? Determinen una expresión algebraica para el área de cualquier pieza.

10.- Construyendo una tabla como la anterior, determinen el área total necesaria para construir la base, si se van a utilizar diez piezas.

11.- Construyendo una tabla como la anterior, determinen el área total necesaria para construir la base, si se van a utilizar n piezas.

12.- En la siguiente gráfica, bosquejen los datos obtenidos en el punto 7.



¿Qué patrón siguen los puntos de la gráfica que obtuvieron?

Actividades de cierre

Actividad 5 Clasificación y representación algebraica del enésimo término

Durante las actividades de inicio y desarrollo se te han presentado situaciones en las que ha sido necesario recurrir a una colección ordenada de números para contestar a las preguntas planteadas.

De las situaciones planteadas que daban origen a la construcción de colecciones ordenadas de números, también se te presentaron momentos en los que se te solicitó determinar una expresión algebraica para representar a cualquier elemento de la colección.

A estas colecciones ordenadas de números se les conoce como sucesión.

Una sucesión numérica es una colección ordenada de números. Generalmente, se construyen a partir de una regla dada, que puede darse mediante una expresión algebraica que se evalúa ordenadamente en los números naturales 1,2,3, ...

Los términos de una sucesión por lo regular se representan de la siguiente manera:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots,$$

donde el subíndice denota la posición de cada término.

Al término a_n se le conoce como **enésimo término** o **término general**.

Es decir, el enésimo término representa a cualquier término de una sucesión.

Hasta la actividad 4, tuviste la oportunidad de observar y construir varios tipos de sucesiones numéricas como las siguientes:

1) $5, 9, 13, 17, 21, \dots$
2) $1, 3, 9, 27, 81, \dots$
3) $2, 4, 8, 14, 22, \dots$

Aquí, estamos interesados en estudiar las características de las primeras dos sucesiones, las llamadas sucesiones aritméticas y geométricas. Por lo que definimos a continuación a las sucesiones aritméticas en relación con el enésimo término.

Las sucesiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos (el de mayor índice menos el de menor índice) es una constante (d), y se pueden representar de la siguiente manera para algún número a_1:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ \ldots,\ a_1 + (n-1)d,\ \ldots$$

Por su parte, las sucesiones geométricas con relación al enésimo término se definen como

Las sucesiones geométricas son aquellas en las que el cociente de dos términos consecutivos (el de mayor índice sobre el de menor índice) es una constante(r), llamada razón, y se pueden representar de la siguiente manera para algún número a_1:

$$a_1,\ a_1(r),\ a_1(r)^2,\ a_1(r)^{\,3},\ \ldots,\ a_1(r)^{n-1},\ \ldots$$

De manera individual, contesta lo siguiente:

1.- La sucesión numérica 4, 7, 10, 13, 17, ... ¿Qué tipo de sucesión es? Escribe los siguientes 4 términos y determina el valor de la constante.

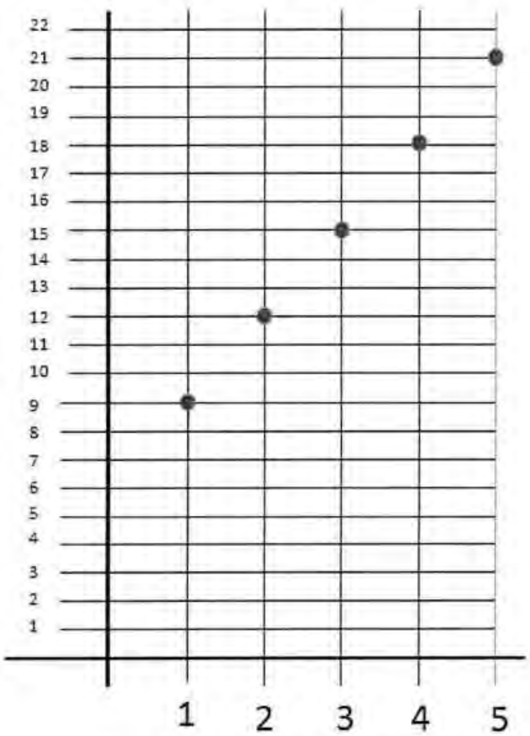
2.- La sucesión numérica 2, 4, 8, 16, 32, ... ¿Qué tipo de sucesión es? Escribe los siguientes 4 términos y determina el valor de la constante.

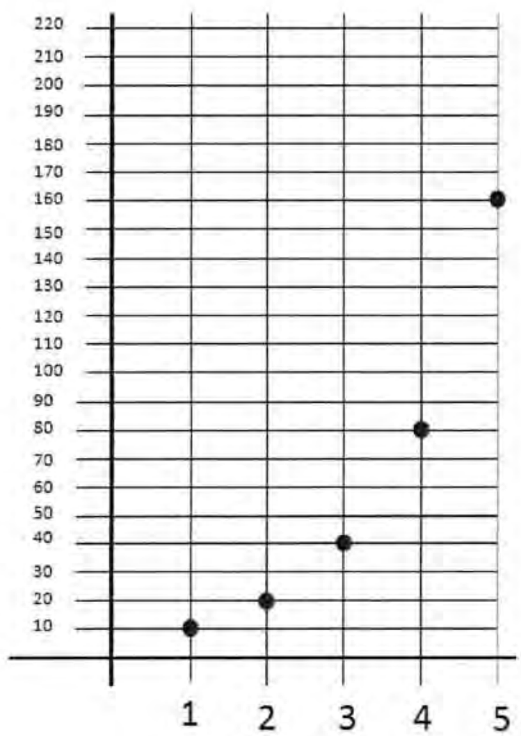
3.- La sucesión numérica 1,3, 9, 27, 81, ... ¿Qué tipo de sucesión es? Determina el valor de la constante.

4.- Construye una sucesión aritmética con diferencia $d = 2$.

5.- Construye una sucesión aritmética con razón $r = 2$.

6.- Identifica a qué tipo de sucesión corresponde las siguientes gráficas, y determina la expresión algebraica para el enésimo término. Justifica tu respuesta.





Actividad 6

La suma de Gauss

Hace muchos años, un profesor, ante un grupo de alumnos con una edad promedio de 10 años de edad, estaba molesto por el mal comportamiento del grupo, por lo que les planteó un problema en el pizarrón anticipando que, dada su complejidad, les llevaría mucho tiempo resolverlo.

El problema fue el siguiente: calcular la suma de los cien primeros números.

Johann Carl Friedrich Gauss (30 Abril 1777 – 23 Febrero 1855) fue un matemático, astrónomo, geodesta y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, entre ellos, la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, el álgebra, etc. Considerado el ***príncipe de los matemáticos***.

Para sorpresa del maestro, a los pocos minutos de exponer el problema, uno de los niños, Gauss, resolvió el problema.

Su argumento fue similar a lo siguiente:

"Mire maestro, antes de empezar a sumar mecánicamente los 100 *primeros números me di cuenta de que si sumaba el primero y el último obtenía* 101*; al sumar el segundo y el penúltimo también se obtiene* 101*, al igual que de sumar el tercer con el antepenúltimo, y así sucesivamente hasta llegar a los números centrales que son* 50 *y* 51*, que también suman* 101*. Entonces lo que hice fue multiplicar* 101×50 *para obtener mi resultado de* 5050*."*

Esto quiere decir,

	1	2	3	4	...	97	98	99	100
+	100	99	98	97	...	4	3	2	1
	101	101	101	101	101	101	101	101	101

Como puedes observar, la suma se está realizando dos veces al añadir 100 veces la cantidad de 101, por lo que la suma total de los primeros 100 números es:

$$Suma = \frac{(100)(101)}{2} = 5050$$

Individual

1.- ¿Qué tipo de sucesión forman los números del 1 al 100? Fundamenta tu respuesta.

2.- Realiza la suma de los primeros 10 números.

3.- Encuentra la suma de los primeros 25 números.

4.- La suma de los primeros 50 números es:

5.- Escribe una expresión algebraica que te permita determinar la suma para los primeros n números naturales.

Actividad 7

La suma geométrica

De manera similar a la mostrada en la actividad 6, podemos encontrar la suma para los primeros términos de una sucesión geométrica.

En equipo

En equipos, resuelvan lo siguiente:

1.- ¿Cuál es la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 2^n$? Argumenten su respuesta.

2.- La suma de los siguientes términos de una sucesión $1, 3, 9, 27, 81$ es:

3.- ¿Cuál es el término siguiente de la sucesión anterior?

A continuación se te presenta una manera para sumar la sucesión $1, 3, 9, 27, 81$.

		3	9	27	81	243
$-$	1	3	9	27	81	
	-1	0	0	0	0	243

Como pueden observar, los términos de la sucesión que se quieren sumar se colocan en la parte de abajo; la sucesión de la parte superior es la originada de multiplicar por la razón, $r = 3$ a la sucesión original. Por lo que, la suma se está realizando $3 - 1$, es decir, 2 veces, con lo que tenemos:

$$Suma = \frac{243 - 1}{3 - 1} = \frac{242}{2} = 121$$

4.- Con el procedimiento anterior, verifiquen la suma encontrada en la pregunta 1.

5.- ¿Cuál es el valor de la razón r de la sucesión$1, 4, 16, 64, 256$? Determinen la suma.

Actividad 8 Representación algebraica para la suma de los primeros n términos

Durante las actividades anteriores, además de reconocer y representar el enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas, también tuviste que determinar la suma de ciertos términos consecutivos para dar respuesta a preguntas relacionadas con las situaciones planteadas.

A la suma de términos consecutivos de una sucesión aritmética se le conoce como **serie aritmética**, mientras que a la suma de términos consecutivos de una sucesión geométrica se le conoce como **serie geométrica.**

A continuación, se te presentan las expresiones algebraicas que determinan la suma de términos consecutivos para las sucesiones aritméticas y geométricas, respectivamente.

Serie aritmética. La expresión algebraica para sumar los primeros n términos en una sucesión aritmética es de la siguiente manera:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2},$$

donde

a_n es el valor del último término a sumar,
n es el número de términos a sumar,
a_1 es el primer término a sumar.

Serie geométrica. La expresión algebraica para sumar los primeros n términos en una sucesión geométrica es de la siguiente manera:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1},$$

donde

a_n es el valor del último término a sumar,
r es la razón,
a_1 es el primer término a sumar.

Individual

Completa la siguiente tabla

Sucesión numérica		Tipo de sucesión (argumenta tu respuesta)	Expresión algebraica para el enésimo término	Expresión algebraica para la suma de n términos
1)				
Posición	Término			
1	3			
2	9			
3	15			
4	21			
5	27			
2)				
Posición	Término			
1	1			
2	$1/2$			
3	$1/4$			
4	$1/8$			
5	$1/16$			
3)				
Posición	Término			
1	5			
2	10			
3	15			
4	20			
5	25			