UNIVERSIDAD DE SONORA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Presenta el proyecto de Tesis titulado:
Una secuencia didáctica para el estudio de las ecuaciones y funciones lineales.

Elaborado por:

Ing. Javier Manuel Navarro Luna

Directora de Tesis:

M.C. Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez

HERMOSILLO, SONORA **JULIO DEL 2018**

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Introducción

El presente trabajo muestra el desarrollo realizado para la creación de una secuencia de actividades didácticas enfocada al aprendizaje de la función y ecuación lineal para el nivel medio superior.

En el capítulo 1 se aborda el contexto educativo en el que se desenvuelve el nivel medio superior en México, así como las dificultades y retos que enfrenta la educación en su búsqueda por una superación en la enseñanza y aprendizaje.

A partir de esto, en el capítulo 2 se observan los problemas y dificultades que se presentan en las aulas escolares y en los estudiantes alrededor del estudio del álgebra, y específicamente en los temas de función y ecuación lineal. A partir de estos problemas, se propone la creación de una secuencia didáctica con la intención de abonar a los esfuerzos realizados para la comprensión de los temas de función y ecuación lineal.

En el capítulo 3 se muestran los elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos que se utilizaron para el diseño y la elaboración del presente trabajo, así como la metodología utilizada para cumplir con los objetivos propuestos para la creación del proyecto.

Posteriormente se muestra detalladamente, en el capítulo 4, el procedimiento utilizado para el diseño de la secuencia y los elementos que fueron necesarios para su formación, así como el proceso de valoración para procurar que se logre un aprendizaje significativo en los alumnos por parte del material didáctico propuesto.

Por último, se presentan las conclusiones y recomendaciones asociadas a la secuencia didáctica a partir del análisis de la puesta en escena, que servirán para las iniciativas que se realicen posteriormente a este proyecto que se interesen en aportar más recursos para la enseñanza de la función y ecuación lineal, así como la posible aplicación de la secuencia didáctica en las aulas escolares.

1. Marco Referencial

1.1. Antecedentes

La educación es un tema de gran interés para las instituciones y dependencias gubernamentales. En México la organización encargada de su gestión es la Secretaria de Educación Pública (SEP), y, en el caso de la educación del nivel medio superior, la unidad administrativa que realiza los planes y programas respectivos en México es la Dirección General de Bachillerato (DGB).

En el interés de organizar a las instituciones educativas del nivel medio superior, en el 2008 se lanzó la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), la cual consiste en la creación del Sistema Nacional del Bachillerato (SNB). Con esta reforma se pretende unificar los procesos de planeación de las instituciones por medio de cuatro pilares: Construcción de un Marco Curricular Común, Definición y reconocimiento de las porciones de la oferta de la Educación Media Superior, la Profesionalización de los servicios educativos y la Certificación Nacional Complementaria (SGEEMS, s/f).

Como parte de las modificaciones de esta reforma educativa, la Dirección General del Bachillerato incorporó en su plan de estudios, a partir del Ciclo Escolar 2009-2010, los principios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior cuyo propósito es:

> "fortalecer y consolidar la identidad de este nivel educativo, en toda sus modalidades y subsistemas, proporcionar una educación pertinente y relevante al estudiante que le permita establecer una relación entre la escuela y su entorno, y facilitar el tránsito académico de los estudiantes entre los subsistemas y las escuelas" (DGB,2013).

En apoyo a esta reforma, la DGB cambia su plan de estudio enfocándose en las competencias como el eje central para el desarrollo de los estudiantes, con las cuales se cree que tendrán mejores herramientas para afrontar problemas y encontrar soluciones en su vida cotidiana, laboral o en estudios posteriores. Por tal motivo, se han realizado esfuerzos para impulsar el desarrollo de las competencias en los alumnos por medio de un nuevo plan de estudios que favorezca y potencialice las habilidades y los aprendizajes que apoyen al cumplimiento de los objetivos. Posteriormente, se llevó a cabo una nueva reforma educativa en el año 2017 la cual trajo consigo una actualización de los programas de estudios de la DGB, trayendo consigo algunas modificaciones en los planes de trabajo.

El objetivo principal de la nueva Reforma Educativa es el de garantizar el acceso a la escuela a todos los jóvenes independientemente de su entorno y que la educación recibida les proporcione aprendizajes y conocimientos significativos, relevantes y útiles para la vida, y con ello se espera que al terminar sus estudios los alumnos sean capaces de utilizar el racionamiento lógico, el pensamiento matemático y el método científico para analizar críticamente fenómenos, generar hipótesis, desarrollar argumentos, resolver problemas, justificar sus conclusiones y que sea capaz de adaptarse a los entornos cambiantes (SEP, 2017a).

La Secretaría de Educación Pública (2017b) menciona que dicha actualización se dio para que "el Marco Curricular Común tenga una mejor selección de contenidos y se concrete en el desarrollo de los aprendizajes claves", a su vez se plantea un sistema de desarrollo profesional docente para una formación inicial y continua de calidad con procesos de evaluación que fortalezcan los procesos educativos propuestos por la DGB y que son llevados a las aulas por los mismos docentes. Como parte de sus objetivos, se hace énfasis en brindarles el apoyo y las herramientas necesarias a los docentes para que las enseñanzas se realicen fructuosamente; uno de los documentos en los cuales se basa la reforma educativa que lleva por título "El planteamiento pedagógico de la Reforma Educativa" (2016c) menciona que:

> " El objetivo es que, dentro del marco nacional que seguirá definiendo la SEP, los docentes construyan interacciones educativas significativas con creatividad e innovación, con el fin de estimular a sus alumnos a alcanzar los resultados esperados."

Por desgracia, a pesar de todos estos esfuerzos realizados para mejorar los planes y programas de las instituciones educativas, distintas evaluaciones llevadas a cabo en México en los diferentes niveles de educación han expuesto los bajos conocimientos y competencias con los que egresan los estudiantes al cursar los niveles educativos, y esto representa actualmente una gran problemática para el país. Una de las evaluaciones antes mencionadas es el examen internacional para el nivel medio superior llamado PISA, siglas en ingles de Programme for International Student Assessment, en el cual nuestro país participó y tuvo un nivel bajo en el desarrollo de competencias en las distintas áreas evaluadas: lectura, matemáticas y ciencia.

Enfocándonos en el desempeño en Matemáticas, sólo el 4% de sus estudiantes se agrupan en los niveles 4 a 6 de dicho examen, donde trabajan con eficacia algunos modelos explícitos y además aplican sus conocimientos en contextos relativamente no habituales, mientras que el 55% se encuentra en el nivel 1 (o por debajo del nivel 1), donde los estudiantes solo son capaces de realizar tareas matemáticas muy sencillas, tales como leer un solo valor en una gráfica en la que se identifica claramente los nombres de las variables. Según el criterio del Programme for International Student Assessment (2012), muchos de estos estudiantes del nivel 1 probablemente "tendrán serias dificultades para usar las Matemáticas como una herramienta para beneficiarse de nuevas oportunidades educativas y de aprendizaje a lo largo de la vida, o para poder desarrollar un pensamiento o razonamiento matemático que les permita manejar abstracciones".

Es importante mencionar que de los 65 países participantes en dicha evaluación, 52 se encuentran por encima de la media de desempeño de México, lo que nos coloca en una gran desventaja competitiva en comparación con las demás personas en el resto del mundo, y a pesar de que se han intentado tomar medidas a gran escala, como la modificación de reformas y cambios en los sistemas administrativos de las instituciones, en ocasiones estas han sido frenadas por distintos fenómenos que imposibilitan lograr cambios a nivel nacional. Todo ello hace necesario tomar acciones de forma local que eleven el nivel educativo de los mexicanos, ya que, como menciona Yuste (1995), si queremos mantener un bienestar social debemos de apreciar las matemáticas a nivel individual y crear las condiciones que generen el conocimiento matemático colectivo necesario para propiciar el nivel tecnológico acorde con nuestro desarrollo.

1.2. Álgebra, ecuaciones y funciones lineales: resultados de investigación.

De las ramas de las matemáticas que se estudian en el nivel medio superior, nuestro interés está enfocado en el álgebra, esto debido a que, a pesar de la importancia y el tiempo dedicado a su estudio, es recurrente que los estudiantes que ingresan a la universidad aún tienen dificultades con la comprensión y manejo de los conceptos elementales, "los resultados de los exámenes de admisión a las universidades y los resultados de las evaluaciones de los alumnos en los cursos propedéuticos muestran que sus conocimientos de álgebra son pobres" (Trigueros, Quintero, Reyes, & Ursini, 1996).

Otros autores confirman este fenómeno diciendo que los alumnos que ingresan a la Universidad tienen dificultades en utilizar el álgebra como herramienta para la resolución de nuevos problemas (Alurralde e Ibarra, 2008), y que una de las observaciones más frecuentes que realizan los docentes de matemática al analizar las evaluaciones es la incidencia que tienen los estudiantes en los errores provenientes de etapas anteriores atribuibles a deficiencias de aprendizaje que no están relacionadas con los temas propios del algebra (Córdoba, 2013).

Según Escalante y Cuesta (2012), muchas de las investigaciones que se han realizado en la didáctica de las matemáticas se han estado ocupando, en el caso del álgebra, del estudio del pensamiento algebraico temprano, con especial interés en analizar las interrelaciones del lenguaje algebraico con el lenguaje natural y el de la aritmética, mientras que Socas (2011), después de una exhaustiva investigación, declara que a nivel internacional las investigaciones se han orientado en estos últimos treinta años al análisis de las características esenciales del pensamiento algebraico y a la descripción y estudio de respuestas y procesos de solución de estudiantes y profesores en tareas específicas en pensamiento algebraico.

Alurralde e Ibarra (2008) encontraron en sus investigaciones que las dificultades se presentan mayormente, en primer lugar, alrededor de las generalizaciones, cuando deben utilizar las letras como números generales y, en segundo lugar, cuando deben utilizar las letras como variables en relación funcional. Es por ello que López y colaboradores (2010) señalan que "la variable aparece generalmente en los contenidos de algebra como incógnita, como número generalizado o como variable en relación funcional" y que cada uno de estos usos implica un nivel diferente de abstracción para su manejo y su conceptualización requiere de ciertas capacidades básicas. Peral y Gómez (2003), expresan que la comprensión del concepto de variable proporciona la base para la transición de la aritmética al álgebra y es necesario para el uso significativo de toda la matemática avanzada.

Dentro del algebra, nuestro tema de interés se enfoca en la función y la ecuación lineal, por su gran importancia en la explicación de fenómenos físicos, químicos y sociales; además de que sirve para el entendimiento de estudios avanzados posteriores en las matemáticas. Peralta (2002) enfatiza esto al mencionar que los modelos lineales son importantes en matemáticas porque permiten resolver aquellos problemas que se comportan linealmente y aproximar otros cuya modelación es no lineal.

Roldán (2013) sostiene que varias investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la función han evidenciado dificultades debido a que tradicionalmente las escuelas centran su interés en mostrar el aspecto algebraico del concepto, dejando de lado un análisis profundo y su consecuencia es que los estudiantes terminan repitiendo rutinas sobre objetos algebraicos que poco sentido tienen para ellos. En el caso de la función lineal, autores como Ocares y Gonzáles (2012) concluyen que los estudiantes tienden a representar la función lineal como una fórmula y como una combinación de variables gráficas en la que no se visibilizan ni valoran los atributos propios de la función.

Por lo general, en cursos de álgebra en el nivel medio superior se prioriza el manejo de los procedimientos algebraicos brindando poca importancia a las representaciones gráficas, esto conlleva que no se exploren por completo los significados que la representación gráfica nos puede ofrecer (Arellano, 2009). Roldán (2013) menciona que en Wikipedia, página consultada frecuentemente por alumnos, la función lineal viene restringida a dos elementos principales: su expresión algebraica representada por un polinomio de primer grado, y su representación gráfica cartesiana representada con una recta; al ser Wikipedia una página altamente visitada, expone a una gran cantidad de alumnos a una errónea idea de que abordando estas dos representaciones se puede entender ampliamente el concepto de función lineal.

En relación con trabajos realizados específicamente acerca de la función y de la ecuación lineal, encontramos el trabajo de Peralta (2002) donde, citando a Duval (1992) y Hitt (1996), se menciona que a pesar de que las funciones lineales son el primer contacto que los estudiantes tienen con el concepto de función y parecieran ser las funciones más sencillas de estudiar, diversas investigaciones han mostrado que ciertas dificultades de aprendizaje que provocan no son simples. Por otra parte, Peralta (2002) resalta en su investigación la importancia de la función lineal por ser un concepto fundamental al interior de la matemática, como por ejemplo para el cálculo diferencial e integral, además de tener una gran diversidad de aplicaciones en otras áreas de conocimiento como la economía al modelar algunos fenómenos presentes en la Microeconomía, tal es el caso de los fenómenos de oferta y demanda de mercado.

Juárez (2011) señala que la variable en relación funcional presentó el más bajo porcentaje promedio de aciertos en una prueba aplicada a varios profesores de álgebra; esto parece indicar que para los profesores este uso de la variable es el que presenta mayor dificultad. En cuanto a la ecuación lineal con dos variables es importante resaltar los vínculos que posee con la función lineal y otras funciones. Santafé y Triana (2009) afirman que utilizando la ecuación lineal se puede entender la base del pensamiento variacional por medio de la comprensión del concepto de variable, pues es a partir de este que se introducen otros conceptos como el de función y límite, entre otros, que requieren de interpretación, codificación y expresión de patrones y regularidades. Esto recalca la importancia de estudiar la ecuación lineal con dos variables y la función lineal, y sus similitudes.

Por su parte, Galagovsky (2008) resalta la importancia de la ecuación lineal y de la relación que guarda con la función lineal al decir que “dentro de la enseñanza de matemáticas, el tópico de las ecuaciones lineales es un punto de inflexión a partir del cual la aritmética da lugar al álgebra; es decir, es el momento en que los estudiantes deben dar un salto cognitivo cualitativamente importante para comprender que una ecuación con dos incógnitas deja de tener una respuesta única, y se transforma en una función con dos variables, una dependiente y otra independiente”.

Panizza (1999) realizó una investigación enfocada en la relación existente entre la función lineal y la ecuación lineal con dos variables para su enseñanza en alumnos de bachillerato, y al pedirles que propusieran una solución a la ecuación $3x + 2y = 7$, solo un alumno pudo resolverlo apoyándose en el concepto de función, el 90% no pudo obtener una solución y el resto debió agregar otra ecuación para poder considerar un sistema de ecuaciones. Panizza (1999) concluye su investigación afirmando que la ecuación con dos variables no es reconocida por los alumnos como un objeto que define un conjunto infinito de pares de números y que el concepto de incógnita como una letra con un solo valor se adapta bien a la solución de ecuaciones lineales con dos variables dentro de un sistema de ecuaciones, pero al utilizar una ecuación lineal de dos variables fuera de un sistema, estropea su capacidad y funcionalidad al ser delimitada por los alumnos a un solo resultado, impidiendo ver la infinidad de soluciones posibles.

Los motivos por los que el significado de función lineal es limitado en ocasiones pueden ser distintos. Blázquez y Ortega (2001), citados por Córdoba (2013), mencionan que varias investigaciones en el campo de la educación matemática señalan que en general el sistema algebraico es el privilegiado por los profesores de matemática en su práctica docente. Otros problemas que se encontraron debido a la simplificación del concepto de función lineal fueron en la noción de pendiente al presentarse problemas en los alumnos con ligar el parámetro a en la expresión $y = ax + b$ con la inclinación de la recta, así como la dificultad en los estudiantes de identificar, en el lenguaje gráfico, la relación existente entre el punto por donde la recta corta al eje y con el valor del parámetro b en el registro algebraico (Córdoba, 2013).

Trigueros (1996) encontró que para resolver un problema que involucre la expresión $y = mx + b$ es necesario que el estudiante sea capaz de concebir las variables como números generales, es decir, los estudiantes deben ser capaces de trabajar con números generales, con constantes, con incógnitas, con variables en una relación funcional y poder pasar de una interpretación a otra, aun cuando estas diferentes caracterizaciones de la variable tengan la misma representación simbólica. Panizza (1996) asevera que es necesario avanzar en el conocimiento de la relación que existe entre el aprendizaje de la noción de incógnita y el de variable para expresar la compleja relación entre la aritmética y el álgebra.

En relación a las ecuaciones, Moreno y Cobo (1997) mencionan que para solucionar ecuaciones de primer grado se necesitan habilidades para establecer relaciones entre las cantidades numéricas, la incógnita y el concepto de igualdad. Otros problemas presentados en los alumnos hacen referencia a la dificultad de cambiar de representación los conceptos matemáticos abordados, por ejemplo Guzmán (2000), citado por de Herrera (2004), encontró que los estudiantes presentan dificultades para usar las operaciones aritméticas más elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones aun cuando saben aplicar perfectamente los algoritmos de resolución.

2. Problemática y Justificación

2.1. Planteamiento de la problemática

Derivado de todos los esfuerzos de investigación señalados para identificar las dificultades que se presentan en el aprendizaje del algebra en general, y de ecuaciones y funciones lineales en lo particular, hoy en día existe una necesidad de creación de materiales y herramientas que apoyen al aprendizaje de estos temas y, así, abordar las dificultades que se presentan a los alumnos en las instituciones educativas en la comprensión de estos conceptos algebraicos. Por tal motivo, se planteó la necesidad de realizar un proyecto de intervención, mediante el diseño de una secuencia de actividades didácticas, para el curso de Matemáticas 1 con el fin de mejorar las opciones y recursos con que cuentan los docentes para impartir las clases y alcanzar la enseñanza deseada en los temas de función y ecuación lineal con dos variables.

Con el diseño de una secuencia didáctica se pretendió crear situaciones y escenarios que contextualicen con temas extra matemáticos las problemáticas a resolver y con esto lograr que los estudiantes se familiaricen e interesen en el aprendizaje de los conceptos. Rivera (2000) menciona que el trabajar sin contexto alguno evita brindar un significado propio a las ecuaciones y que, al contrario, si se trabaja con modelos el alumno podrá comparar sus procedimientos con acciones y, así, utilizar el contexto como un mecanismo de apoyo para los procesos cognitivos que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas.

Para la planeación de la secuencia didáctica se consideró inicialmente el programa de estudio de la DGB, edición 2008, para Matemáticas 1 en el bloque VI llamado "Resuelve ecuaciones lineales" donde se aborda el tema de función lineal. Sin embargo, se consideró posteriormente su consistencia con el Nuevo Modelo Educativo presentado en 2017 por la SEP.

La secuencia didáctica intenta realizar un primer acercamiento formal a la función lineal, concepto que se ve más a fondo en el cuarto semestre del bachillerato dentro del tema de funciones, por medio de la ecuación lineal con dos variables, concepto con el que se trabaja en el primer semestre del bachillerato. Varias de las investigaciones mencionadas anteriormente reafirman las dificultades que tienen los alumnos de distinguir estos conceptos uno del otro, o más bien relacionarlos, y esto causa errores y barreras al momento de resolver problemas que necesiten ambos conceptos o pasar de uno a otro para su solución.

Para ello, se planteó la necesidad de una secuencia didáctica con actividades en distintos contextos cotidianos en los que se hace necesario el uso de la función y ecuación lineal con dos variables para su resolución, ello con el fin de que los contextos sirvan como apoyo para que los alumnos identifiquen de una forma dinámica la necesidad de utilizar un concepto u otro dependiendo de lo requerido en un mismo problema. De Herrero (2004) menciona que los alumnos deben de construir sus propios significados de los objetos matemáticos a través de actividades locales y luego globales y así puedan encontrar las soluciones óptimas a los problemas que se les presenten. Por su parte Galagovsky (2008) apoya la contextualización de los problemas diciendo que todo alumno debe aprender la importancia de las matemáticas como herramienta para la resolución de problemas cotidianos que probablemente se les presentaran en algún momento fuera de la escuela.

Además, se vio de gran importancia que dentro de las actividades planteadas en la secuencia didáctica se hiciera necesario el uso de distintas representaciones así como el cambio entre una y otra y con ello reforzar el aprendizaje de los conceptos ya que, como mencionan Moreno y Cobo (1997), utilizar exclusivamente el lenguaje simbólico en las ecuaciones lineales impide al estudiante la interpretación y el análisis profundo de este concepto, lo cual no sucede al utilizar distintas representaciones. Aunado a esto se presenta la aseveración que realiza Arellano (2009) diciendo que es de suma importancia construir expresiones algebraicas a partir de una gráfica y que esto debe de ser incluido en todos los programas matemáticos del nivel medio superior, por el papel importante que juega en el aprendizaje de las ecuaciones lineales y otros objetos matemáticos.

2.2. Justificación

Con la creación de una secuencia didáctica intentamos coadyuvar a los esfuerzos realizados por la Secretaria de Educación Pública y a la Dirección General del Bachillerato para elevar el nivel de calidad de la educación impartida en México, y a su vez aceptar el reto que la reforma educativa plantea para la creación de nuevas investigaciones y materiales didácticos que se enfoquen en la disminución de las dificultades presentes en la enseñanza. La SEP (2016) resalta el papel importante que juega este tipo de herramientas en las aulas diciendo que es necesario el apoyo a los educadores con materiales didácticos que eleven el nivel de enseñanza y así poder contribuir al desarrollo profesional de los alumnos, es decir, que tengan acceso a recursos innovadores que se orienten al aprendizaje del alumno y a soluciones de problemas diarios y diversos.

Este proyecto es parte de un esfuerzo que se realiza con la intención de apoyar estas iniciativas y crear una gran cantidad de material didáctico que sirva a las generaciones presentes y futuras en apoyo a la enseñanza, ya sea para su aplicación o para posteriores investigaciones en temas similares. Retomando las distintas investigaciones que sirvieron de apoyo al realizar el presente trabajo, se observa que las dificultades en el aprendizaje de la función y ecuación lineal siguen surgiendo en distintas generaciones; investigaciones recientes (Juárez (2011), Socas (2011), Escalante y Cuesta (2012), Córdoba (2013), Roldán (2013)) siguen identificando problemas que otros investigadores habían notado años atrás (Alurralde e Ibarra (2008), Peralta (2002), Rivera (2000), Panizza (1999), Moreno y Cobo (1997), Triguero y colaboradores (1996)) lo que demuestra que continúa la necesidad de realizar intervenciones didácticas.

El apoyo a la disminución de dichos problemas toma una gran importancia debido a que la función y ecuación lineales son conceptos de gran utilidad y relevancia para estudios posteriores, así como para el desarrollo profesional de las personas; en el nivel medio superior, el ultimo nivel educativo obligatorio en México y donde se ven los temas de función y ecuación lineal, según una estadística realizada por la SEP presentada por Fuentes (2017), en el ciclo 2015-2016 existían alrededor de 4 millones 985 mil 80 alumnos inscritos en el nivel medio superior. La cifra presentada puede llegar a reflejar el gran peso que tienen las instituciones educativas en la población mexicana y la gran importancia de seguir apoyando con este tipo de proyectos a la enseñanza de las matemáticas.

La Reforma Educativa actual está enfocada en que el profesor no sea el catedrático que va y expone los temas matemáticos y recrea ejercicios para que los alumnos memoricen procedimientos; hoy en día sabemos que el recordar los procedimientos matemáticos no necesariamente conlleva a entenderlos y consecuentemente, el no entenderlos disminuye la posibilidad de poder utilizarlos para la resolución de problemas en situaciones cotidianas que puedan presentárseles a los estudiantes. Para evitar repetir estas prácticas catedráticas, hoy se reconoce al profesor como guía en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, más sin embargo gran parte de la responsabilidad del aprendizaje de los estudiantes recae en ellos mismos, siendo estos los encargados de crear sus propios significados de los conceptos matemáticos y aplicarlos para la solución de los problemas que se propongan en clase, para que de esta forma puedan utilizarlos para solucionar problemas que se les presenten posteriormente.

Por estas razones es importante diseñar material didáctico que sirva a los alumnos como guía y facilitador del aprendizaje de los distintos conceptos matemáticos, para que con ayuda del profesor, de libros de texto y de actividades y dinámicas, ellos mismos sean capaces de crear su propio conocimiento y significado acerca de los temas abordaros.

2.3. Objetivo General

Con base en lo presentado anteriormente, se plantea el objetivo general de este proyecto:

Diseñar una secuencia de actividades didácticas enfocada al análisis y resolución de problemas y situaciones contextualizadas en la vida cotidiana que promueva el aprendizaje de las funciones y ecuaciones lineales, dirigida a estudiantes del primer semestre del nivel medio superior.

Para lograrlo, será necesario cumplir con los siguientes objetivos específicos:

2.4. Objetivos Específicos

- Identificar problemas en situaciones contextualizadas que requieran el uso de las funciones y ecuaciones lineales para su resolución.
- Determinar los conceptos, características y procedimientos asociados a la función y ecuación lineal que se pretenden abordar a través de la secuencia.
- Planificar la organización e interacción en el aula, adecuadas para el desarrollo de las actividades planteadas.
- Adecuar la secuencia didáctica a los tiempos estipulados por la DGB para el tema de ecuaciones lineales en el primer semestre.

A partir de esto se inicia la planeación de la secuencia didáctica, con el sustento de un marco teórico que apoye el cumplimiento de los objetivos que se desean alcanzar con este proyecto.

3. Consideraciones Teóricas y Metodológicas

3.1. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos

Este trabajo se fundamenta en algunos elementos del *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (EOS), el cual trata de integrar diversos modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y adoptando principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino, 2008).

Este marco teórico tiene supuestos pragmáticos (los objetos emergen y evolucionan a partir de situaciones problemas) y realistas (los objetos pueden ser referenciados, por lo que poseen una realidad cultural) sobre los significados de los objetos matemáticos, y que como estructura tiene la utilización de herramientas teóricas y metodológicas que logren cumplir con el diseño de procesos de enseñanza y que además permita explicar con detalle cómo se lleva a cabo dicha enseñanza, el análisis y la valoración de su eficacia y que brinde la información necesaria para su mejoramiento.

Aunado a lo anterior, el EOS distingue las facetas institucionales y personales de los objetos matemáticos bajo estudio y de los que intervienen en las acciones encaminadas a resolver un problema matemático dado. En esta teoría se destaca el papel que, dentro de la actividad matemática, juegan los problemas para la enseñanza y aprendizaje de distintos objetos matemáticos. En la Figura 1 se puede observar un mapa donde se incluyen todas las ideologías, etapas y herramientas que conforman el EOS.

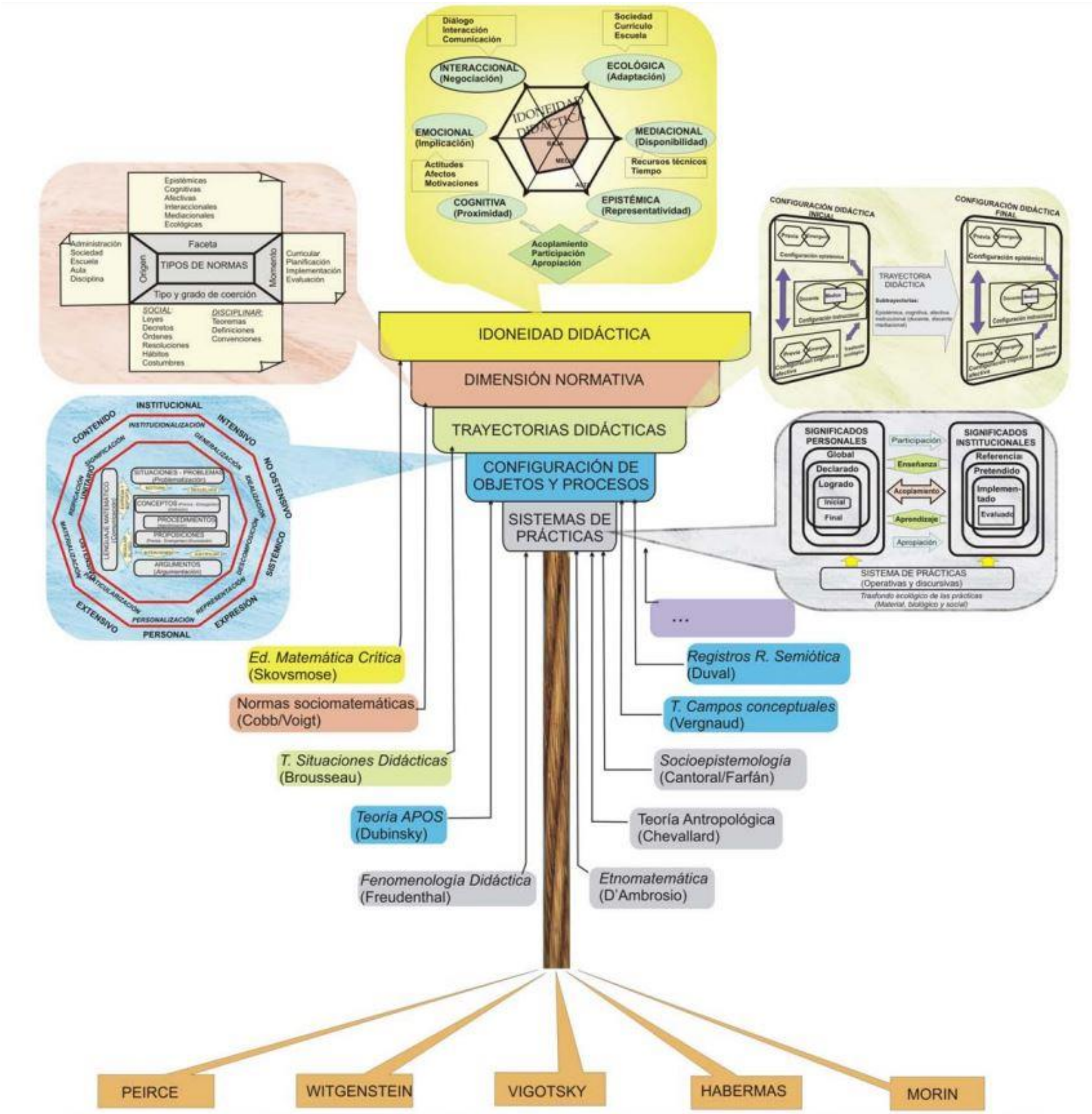


Figura 1 – Mapa de ideologías, enfoques y herramientas del EOS

3.1.1. Prácticas matemáticas

Entre las herramientas del EOS a considerar para este proyecto, se encuentran las *prácticas matemáticas*, las cuales son "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994). Como su nombre lo indica, son todas las prácticas, procesos, procedimientos, manifestaciones y acciones que se involucren en la resolución de problemas matemáticos.

A la persona o comunidad de personas que realizan las prácticas matemáticas para la resolución de un problema se le llama *sujeto*, y tales prácticas se diferencian dependiendo de quien las realice: son *prácticas matemáticas personales* a las acciones realizadas por una sola persona; y *prácticas matemáticas institucionales* a las que son realizadas y promovidas por una comunidad o institución. Al enseñar matemáticas en una institución educativa, el objetivo de esta es que las prácticas matemáticas personales, es decir los procedimientos y acciones de las personas que ahí asisten (en este caso estudiantes), se asemejen lo más posible a las prácticas matemáticas institucionales (la institución o escuela), las cuales se establecen mayormente por las enseñanzas del profesor y la información proveniente de libros escolares.

3.1.2. Objetos Matemáticos

Cuando se ligan las prácticas matemáticas con la resolución de problemas, Soto (s/f) menciona que "emergen o se construyen *entes matemáticos* que modifican o complementan a los ya existentes". Estos entes pueden surgir de los sistemas de prácticas matemáticas utilizados para la resolución de problemas, a estos se les llama *objetos matemáticos primarios*, y son los conocimientos que un sujeto requiere para la resolución de una determinada *situación problema*, que para ello se utilizará un determinado *lenguaje* verbal o simbólico. Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de *conceptos, proposiciones y procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, son satisfactorias. Se les conoce como objetos primarios debido a que juegan un papel importante en la resolución de problemas y son los que actúan en un nivel primario en el desarrollo de las prácticas matemáticas; los seis objetos primarios mencionados pueden constituir los conocimientos previos a poner en juego en estas prácticas, o bien, surgir de ellas como nuevos objetos y se les clasifica como *objetos intervinientes* y *objetos emergentes* de los sistemas de prácticas, respectivamente.

Los seis objetos primarios, que se pueden observar en la Figura 2, se mencionan a continuación:

- *Situaciones* – Ejercicios, ejemplos, problemas o situaciones surgidas dentro o fuera de las matemáticas.
- *Lenguaje* – Canal por el cual se comunican dos o más sujetos, algunos ejemplos son: verbal, numérico, gráfico, analítico, simbólico, entre otros.
- *Procedimientos* – Algoritmos, operaciones, técnicas, fórmulas
- *Conceptos* – Definiciones o descripciones
- *Proposiciones* – Teoremas y propiedades
- *Argumentos* – Enunciados utilizados para validar proposiciones o procedimientos

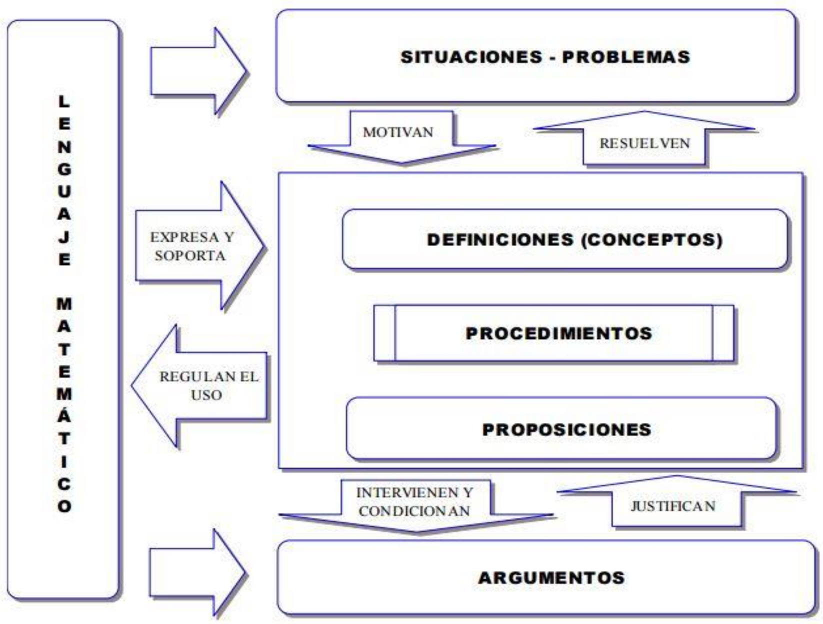


Figura 2 – Objetos matemáticos primarios

Estos objetos matemáticos emergentes, a su vez, se pueden distinguir en dos tipos distintos según de quien provenga, ya sea que emerjan del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas o que emerjan progresivamente de las prácticas sociales compartidas en una institución asociadas a un campo de problemas, a las cuales llamaremos <u>*objetos matemáticos personales*</u> y <u>*objetos matemáticos institucionales*,</u> respectivamente.

3.1.3. Significados Institucionales

De acuerdo a las prácticas matemáticas que realice el sujeto, los significados que tengan sobre los objetos matemáticos pueden variar, y entenderemos por *significado* como el sistema de prácticas matemáticas que se emplean al resolver un mismo tipo de problema, utilizando el objeto matemático o que encaminan a su construcción. Se puede decir que el significado es lo que un sujeto pueda hacer y decir sobre un objeto y este significado se distinguirá dependiendo si proviene de una sola persona o una institución, llamándole *significado personal* o *significado institucional*, respectivamente. El EOS establece que la enseñanza debe promover la participación del estudiante en los sistemas de prácticas que constituyen los significados institucionales, mientras que el aprendizaje supone la construcción de dichos significados por parte del estudiante.

El fin de este proyecto es el diseño de actividades didácticas que apoyen la formación de los alumnos, con el fin de que sus significados sobre objetos matemáticos se asemejen en lo posible a los significados institucionales, los cuales se conocen como *significados institucionales de referencia*. Los significados que conforman los sistemas de prácticas que se quieren difundir se les llama *significados institucionales pretendidos*, pero existen ocasiones en las que, por distintos motivos (plazos, eventos, contratiempos) no se logrará cumplir con la enseñanza de estos significados; los que sí se logren abordar se conocen como *significado institucional implementado*. Además, de todos estos significados institucionales, solo son algunos los que se llegan a evaluar y poner a prueba con la intención de intentar conocer el grado de comprensión logrado por parte de los alumnos; a estos se les conoce como *significado institucional evaluado*.

Como se dijo anteriormente, un objetivo que se desea alcanzar es que los significados personales se asemejen en la manera posible a los institucionales, pero estos también tienen distintas clasificaciones; el *significado global* consiste en la totalidad de prácticas matemáticas que un individuo puede potencialmente manifestar, el *significado declarado* es el que puede manifestar de una u otra forma, y el *significado* logrado es lo que la institución evalúa como correcto, según el apego que tenga a sus significados.

A diferencia del significado de un objeto matemático, la *comprensión* es una competencia que permite la utilización de un determinado objeto matemático de manera competente en las prácticas matemáticas. Existirán ocasiones en las que no se logre desarrollar las competencias necesarias para la comprensión de los objetos, esto sucede cuando se presentan diferencias entre los significados de dos o más sujetos, estas diferencias pueden hacer surgir dificultades y errores entre estos, y esto se conoce como *conflicto semiótico*, entendido como "toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas" (Godino 2002, p. 258).

3.1.4. Indicadores de idoneidad

Con la finalidad de cumplir con las exigencias que se requieren para realizar una intervención didáctica, fue necesario seguir reglas y normas para guiar y valorar dicha intervención. Esto se llevó a cabo por medio de la noción de *idoneidad didáctica*, la cual se define como un conjunto de herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. Consideramos que esta noción puede servir de punto de partida para un diseño instruccional que tenga en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica, implicadas en los procesos de estudio. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:

Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), con respecto a un significado de referencia.

Tabla 1 - Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática)

COMPONENTES	INDICADORES
Situaciones-problemas	• Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación • Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	• Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. • Nivel del lenguaje adecuado a los sujetos a quien se dirige • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen • Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado • Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos
Argumentos	• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen • Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	• Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. • Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas

En el marco del EOS se atribuye a las situaciones problemas un papel central, debido a que se asume que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinadas “tareas problemáticas”. Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas.

Idoneidad cognitiva: expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

Tabla 2 - Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	• Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) • Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	• Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo • Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje: (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos)	• Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia): • Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia meta cognitiva • La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia • Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

La idoneidad cognitiva cumple con 3 de 6 principios formulados por el National Council of Teachers of Mathematics (NTCM, 2000), el principio de igualdad, de aprendizaje y de evaluación.

Idoneidad interaccional: expresa el grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales y, por otra parte, permiten resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

Tabla 3 - Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

COMPONENTES	INDICADORES
Interacción docente-discente	• El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) • Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) • Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento • Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. • Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase
Interacción entre alumnos	• Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes • Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos • Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión
Autonomía	• Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa	• Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

La importancia del discurso, el diálogo y la conversación en la clase se centran en la idea de que los estudiantes pueden proporcionar a los profesores una ventana sobre el pensamiento de estos.

Idoneidad mediacional: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Los profesores efectivos maximizan el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión de los estudiantes, estimular su interés, e incrementar su progreso en las matemáticas. Cuando la tecnología se usa estratégicamente, puede proporcionar acceso a las matemáticas para todos los estudiantes

Tabla 4 - Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

COMPONENTES	INDICADORES
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	• Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido
	• Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	• El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida
	• El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora)
	• El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	• El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida
	• Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema
	• Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión

Idoneidad afectiva: grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio. Está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

Tabla 5 - Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

COMPONENTES	INDICADORES
Intereses y necesidades	• Las tareas tienen interés para los alumnos • Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional
Actitudes	• Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes • Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. • Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	• Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. • Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

La resolución de problemas matemáticos lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan en mayor o menor grado la respuesta cognitiva requerida.

Desde el punto de vista educativo, el logro de unos estados afectivos que interaccionen positivamente con el dominio cognitivo tienen que ser objeto de consideración por parte de las instituciones educativas, y, en particular, por el profesor.

Idoneidad ecológica: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Por entorno entendemos todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. Así, nos podemos referir a todo lo que viene en general condicionada por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas.

Tabla 6 - Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

COMPONENTES	INDICADORES
Adaptación al currículo	• Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares
Apertura hacia la innovación didáctica	• Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva • Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo
Adaptación socio-profesional y cultural	• Los contenidos contribuyen a la formación socio - profesional de los estudiantes
Educación en valores	• Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico
Conexiones intra e interdisciplinares	• Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares

Las matemáticas se deben enseñar de manera que sean útiles para el ciudadano y los profesionales, no como un sistema cerrado ajeno a las aplicaciones que constituyen su origen y razón de ser.

Para crear actividades didácticas ricas en aprendizaje y enseñanza dentro de lo que dice el EOS, es necesario que todas las idoneidades parciales sean valoradas de igual forma, para lograr esto se evalúan cada una de ellas, de acuerdo a las características ya mencionadas anteriormente y que se muestran en la Figura 3.

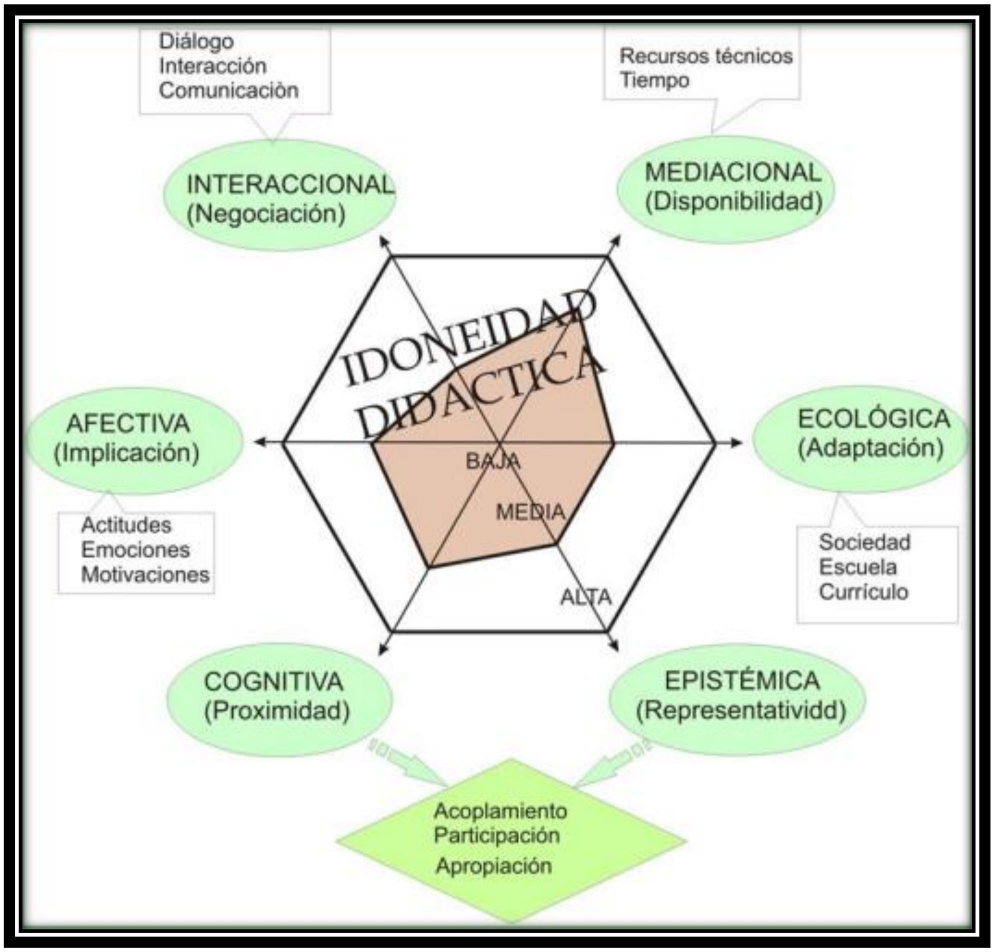


Figura 3 – Idoneidad Didáctica

Representamos gráficamente mediante un hexágono regular las idoneidades que se desean alcanzar por medio del cumplimiento de los componentes de cada indicador; cada esquina del polígono representa una dimensión didáctica. El hexágono irregular interno corresponde al nivel de cumplimiento de las idoneidades didácticas logradas el proceso de realización de la secuencia; entre mayor sea el cumplimiento de los componentes de una dimensión ideológica, mayor será la cercanía de las aristas de los dos hexágonos.

3.2. Aspectos Metodológicos

En esta sección, se plantean las acciones y consideraciones metodológicas para el diseño de una secuencia didáctica, con la cual se promueve el estudio de la función y ecuación lineal con dos variables. Para ello, se decidió seguir el siguiente trayecto:

a) **Determinación del significado institucional de referencia**

Seleccionar las fuentes de información de partida para identificar los conceptos que se desean enseñar, además de llevar a cabo la tarea de determinar sus significados de acuerdo a lo propuesto por la DGB para su enseñanza en el nivel medio superior.

b) **Determinación del significado institucional pretendido**

Se prosigue a delimitar los significados que se pretende promover con la secuencia didáctica, enfocándose a que los alumnos puedan modelar situaciones mediante funciones lineales, además de que reconozcan a $y = mx + b$, una ecuación de dos variables, como la forma de una función lineal.

c) **Selección de características del diseño, con base en los criterios de idoneidad didáctica y sus indicadores**

Como parte del diseño de las actividades didácticas, se contempló utilizar como apoyo las facetas de la idoneidad didáctica que propone el EOS, de esta forma, al satisfacer en la manera posible los requisitos que plantean, se espera de que las actividades promuevan una enseñanza eficaz sobre el tema abordado.

d) **Diseño preliminar de la secuencia**

La secuencia didáctica se planeó con seis actividades en las cuales se hace necesario el uso de funciones y ecuaciones lineales para la resolución de problemas en distintas situaciones. Habiendo encontrado las situaciones que ayudaran a promover los significados pretendidos, se procedió a diseñar las actividades para que orientaran al alumno hacia el aprendizaje de los objetos matemáticos involucrados.

e) Análisis a priori de la secuencia didáctica con los indicadores de idoneidad

Con la secuencia didáctica ya terminada, se elaboró un análisis de las actividades utilizando como herramienta las idoneidades didácticas que propone el EOS, esto como medida preventiva antes de ser puesta a prueba por alumnos.

f) Puesta en escena

Se planeó una aplicación de la secuencia didáctica preliminar a alumnos del nivel medio superior, con la intención de detectar errores de redacción, inconsistencia en las situaciones o problemas por el nivel de dificultad, esto por medio de comentarios y sugerencias realizadas por los alumnos, por comportamientos o problemas observados por el profesor que aplica las actividades o por los errores y conflictos que se observen en las hojas de trabajo.

g) Análisis de resultados de la puesta en escena con los indicadores de idoneidad

Después de revisar las respuestas y comentarios elaborados por los alumnos en la puesta en escena, se procede a realizar un análisis de la secuencia con los indicadores de idoneidad para valorar en qué medida se cumplió con lo esperado.

h) Adecuaciones a la secuencia didáctica

Al finalizar el análisis, se realizan las adecuaciones a la secuencia según los errores, conflictos semióticos y faltas identificadas en las actividades por parte de los alumnos y del diseño.

4. Propuesta didáctica

A continuación se presentan los elementos que se consideraron para el diseño de la secuencia didáctica; así como la puesta en escena, cambios y modificaciones posteriores para su adecuación.

4.1. Significado Institucional de Referencia

Para el significado de referencia, se toma como base la referencia bibliográfica propuesta en el Bloque VI para Matemáticas I del programa de la DGB, en el cual se incluyen los temas de ecuación y función lineal, en particular el texto propuesto por Fleming W. y Varberg D. (1991); además, el libro elaborado por Vargas y colaboradores (2014), el cual fue utilizado por el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora para el primer semestre del nivel medio superior.

Además, se tomaron en consideración los resultados de investigación revisados y reportados en el primero capítulo de este documento; se toma especial interés en el trabajo titulado "La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito" realizado por Panizza, en el cual se presentan las dificultades que tienen los alumnos en identificar las similitudes que existen entre la función y la ecuación lineal, así como los problemas que se pueden presentar en los alumnos debido a la escaza comprensión de estos dos objetos.

A continuación se enlistan los objetos matemáticos primarios aquí encontrados para los temas relacionados a función y ecuación lineal.

Objetos primarios:

- Situaciones problema
    - Determinar si una expresión algebraica es una ecuación o una identidad
    - Encontrar el valor de x que haga verdadera la igualdad de una ecuación lineal
    - Realizar transformaciones entre grados Celsius y Farenheit dada la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$
    - Encontrar el tiempo necesario a transcurrir para hacer crecer un capital principal por medio de una tasa de interés simple, hacia una cantidad dada
    - Encontrar el tiempo en el que dos objetos que se mueven con distinta velocidad hacia una misma dirección, se encontraran
    - Encontrar la cantidad en litros de dos sustancias, con distinta concentración, que se necesitarán al mezclarse para encontrar un punto específico de concentración.
    - Problemas donde se pide encontrar el área y perímetro de polígonos regulares.
    - Representar la velocidad de una reacción química por medio de una gráfica
    - Graficar la velocidad de un objeto en caída libre.
    - Analizar el comportamiento de una función lineal en forma gráfica.
    - Encontrar la velocidad de una reacción química.
    - Encontrar la velocidad de un objeto en caída libre.
    - Comportamiento de una función lineal en una gráfica.
    - Encontrar las proporciones necesarias para la elaboración de distintas cantidades de alimentos y bebidas.
    - Comparar dos planes de desarrollo comercial por medio de gráficas y proyecciones.
    - Elaboración de y planeación de costos y ganancias de una microempresa.
    - Crear una proyección de crecimiento para una empresa por medio de una función lineal.

- Lenguajes
  - Algebraico – en la forma de:

    $P = \frac{1}{2}t$, $P = t$ y $P = \frac{3}{2}t$. , $y = -3x$. , $y = mx$, $f(x) = mx$. ,,

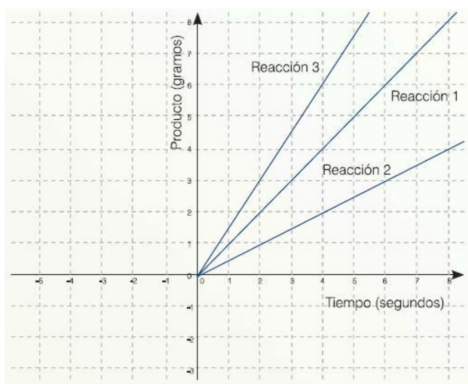
    $E = 2.26f + 66.38$, $f = \left(\frac{1}{2.59}\right)(e - 49.74)$, $y = mx + b$, $f(x) = mx + b$.

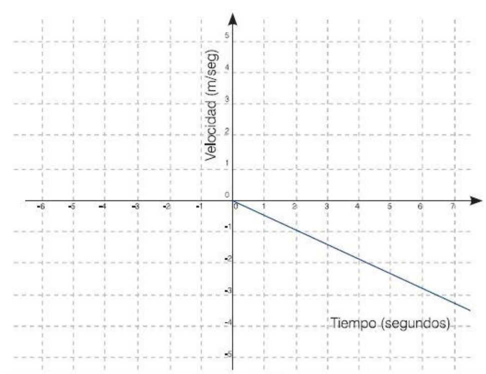
  - Verbal – usado para la interpretación de números, gráficos y proyecciones, entre otros, algunos ejemplos son:

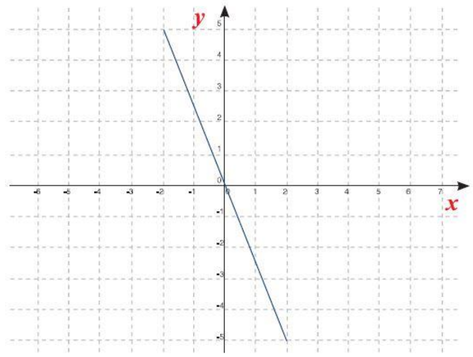
    ¿Cómo interpretas el hecho de que las tres rectas mostradas tengan diferente inclinación?

    ¿Por qué la gráfica de velocidad contra tiempo se encuentra en el cuarto cuadrante? ¿Qué interpretación puedes dar de este hecho?

  - Gráfico – representado datos en planos cartesianos, como ejemplos:







- o Tabular – usado con el lenguaje algebraico y aritmético pero con el apoyo de tablas de conversión u organización, algunos ejemplos:

Tiempo (seg)	*Velocidad (m/seg)*
0	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	
3.8	

x	*y*
-2	
-0.5	
0	
0.5	
1	
2	
3.5	

- Conceptos

De acuerdo a los textos seleccionados, los conceptos se presentaron con distintas configuraciones; en el libro de Fleming W. y Varberg D. (1991), los conceptos se presentan primero en un lenguaje verbal pasando de la función a la función lineal y asimismo a la ecuación lineal, para terminar en el lenguaje algebraico y gráfico, mientras que en el libro elaborado por Vargas y colaboradores (2014), los conceptos se muestran primero en una forma verbal y gráfica empezando por el concepto de función lineal y terminando con la ecuación lineal, donde en el desarrollo del tema se va presentando el lenguaje algebraico. A continuación se enlistan todos los conceptos observados a través de las secciones mencionadas.

- Igualdad
- Identidad
- Variación
- Ecuación lineal
- Función
- Dominio de la función
- Rango de la función
- Formula
- Variable dependiente
- Variable independiente
- Proporcionalidad
- Cambio
- Incógnita
- Gráfica de una función
- Recta
- Gráfica
- Eje
- Relación
- Ordenadas
- Abscisas
- Razón de cambio
- Pendiente
- Expresión algebraica
- Variación
- Tangente
- Magnitudes
- Función lineal
- Correlación

* Procedimientos
    - Aplicación de propiedades aritméticas y algebraicas
    - Transformaciones algebraicas
    - Demostración de una identidad
    - Graficar funciones a partir de una expresión algebraica
    - Graficar funciones a partir de una tabla de valores
    - Análisis y comparación de funciones por medio de rectas en una gráfica
    - Sustituir y validar un número por una variable dentro de una ecuación lineal con una incógnita
    - Llenado de una tabla con los puntos de una recta en una gráfica
    - Regla de tres
    - Despeje de una variable en una ecuación lineal
    - Encontrar la expresión correspondiente a una recta
    - Sustituir y validar un número por una variable dentro de una función lineal con dos incógnitas

- Argumentos
    - Explicación del comportamiento de rectas en un plano cartesiano.
    - Explicar el procedimiento con el cual identificas el crecimiento de una magnitud en una gráfica de acuerdo a otra magnitud variable.
    - Declarar los conocimientos matemáticos aplicados para resolver un problema específico.
    - Justificación de respuesta
- Proposiciones
    - Si se suma la misma cantidad (o se resta) a ambos lados de la ecuación, sus soluciones no cambian.
    - Al multiplicar (o dividir) ambos lados de una ecuación por la misma cantidad distinta de cero, no cambian sus soluciones.
    - A cada valor del dominio de una función le corresponde un solo valor del rango.
    - y es directamente proporcional a x cuando $y = kx$ para alguna constante k
    - Siempre que la razón entre dos valores correspondientes de dos magnitudes variables es una constante, se dice que ambas magnitudes son directamente proporcionales o, simplemente, que son proporcionales y a la constante se le denomina constante de proporcionalidad.
    - En $f(x) = ax + b$, cuando el valor de b es 0, se trata de una función cuya gráfica corresponde a una línea recta que pasa por el origen de coordenadas y si $b \neq 0$, se trata de una línea recta desplazada b unidades sobre el eje de las y arriba o abajo del eje de las x, en dependencia si el valor de la b es positivo o negativo.
    - Cuando determinamos el valor de x en el cual la función lineal $f(x) = ax + b$ cruza o interseca el eje de las abscisas o eje x, nos estamos planteando resolver la ecuación lineal $ax + b = 0$
    - En las funciones lineales, se dice que el valor de x para el cual y es igual a 0, es una raíz o un cero de la función.

- Sí, en el caso de las expresiones de la forma $y = mx$, tenemos que x e y son directamente proporcionales, pues m es una constante. Consecuentemente, desde este punto de vista m puede interpretarse como la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes que son proporcionales.
- La constante m de la expresión algebraica $y = mx$ representa la razón de crecimiento de la variable y entre el crecimiento de la variable x. Esto puede interpretarse como el cambio del valor de la variable cuando la variable se incrementa en una unidad.
- En el caso de una función lineal cuya expresión analítica es de la forma $y = mx$, llamaremos variable independiente a la x y variable dependiente a la y. El carácter dependiente de la variable conduce a que con frecuencia se emplee la expresión "y está en función de x", idea que se expresa algebraicamente escribiendo $y = f\ (x)$, lo cual suele leerse diciendo "y es igual a f de x".
- En el caso de una función como las que hemos estudiado aquí es entonces frecuente que se escriban expresiones como $f\ (x) = 4x, f\ (x) = -3x$, etc., y de forma general $f\ (x) = mx$.
- Tomando en cuenta las formas posibles de las funciones cuyas gráficas corresponden a líneas rectas, decimos que la expresión algebraica de una función lineal es $y = mx + b$, lo cual también suele expresarse como $f\ (x) = mx + b$.
- Observamos que, en general, cuando hablamos de una función lineal, podemos hacerlo a partir de diferentes formas de representarla o de referirnos a la misma. Es posible hacerlo por medio de una gráfica, de una expresión analítica o de parejas ordenadas de números. Así, cada función puede representarse de cualquiera de estas tres formas.
- Cuando hablamos de una función lineal, es necesario referirse al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. A este conjunto de valores lo denominamos con el nombre de dominio de la función.
- En dependencia de los valores del dominio de la función, los valores posibles de la variable dependiente tienen sus propias restricciones. Al conjunto de valores posibles de la variable dependiente le llamaremos rango de la función.

4.2. Significado Institucional Pretendido

Se presentan los elementos básicos del significado pretendido para el diseño de la secuencia didáctica

Objetos primarios:

- Situaciones problema
  - Analizar el comportamiento de una función lineal en forma gráfica.
  - Encontrar el valor de x que haga verdadera la igualdad de una ecuación lineal
  - Comportamiento de una función lineal en una gráfica.
  - Encontrar las proporciones necesarias para la elaboración de distintas cantidades de alimentos y bebidas.
  - Comparar dos planes de desarrollo comercial por medio de gráficas y proyecciones.
  - Elaboración de y planeación de costos y ganancias de una microempresa.
  - Crear una proyección de crecimiento para una empresa por medio de una función lineal.

- Conceptos
  - Cambio
  - Función lineal
  - Ecuación lineal
  - Pendiente
  - Gráfica
  - Proporcionalidad
  - Abscisas
  - Ordenadas
  - Incógnita
  - Función
  - Variación
  - Expresión algebraica
  - Correlación
  - Coordenadas
  - Ejes
  - Variable

- Lenguajes
    - Algebraico
    - Verbal
    - Gráfico
    - Tabular

- Procedimientos
    - Operaciones aritméticas
    - Interpretación verbal de una gráfica
    - Identificar coordenadas en un plano cartesiano
    - Aplicación de propiedades aritméticas y algebraicas
    - Transformaciones algebraicas
    - Demostración de una identidad
    - Graficar funciones a partir de una expresión algebraica
    - Graficar funciones a partir de una tabla de valores
    - Análisis y comparación de funciones por medio de rectas en una gráfica
    - Sustituir y validar un número por una variable dentro de una ecuación lineal con una incógnita
    - Regla de tres
    - Despeje de una variable en una ecuación lineal
    - Encontrar la expresión correspondiente a una recta
    - Sustituir y validar un número por una variable dentro de una función lineal con dos incógnitas

- Argumentos
  - Explicación del comportamiento de rectas en un plano cartesiano.
  - Explicar el procedimiento con el cual identificas el crecimiento de una magnitud en una gráfica de acuerdo a otra magnitud variable.
  - Declarar los conocimientos matemáticos aplicados para resolver un problema específico.
  - Justificación de respuesta

- Proposiciones
  - En $f(x) = ax + b$, cuando el valor de b es 0, se trata de una función cuya gráfica corresponde a una línea recta que pasa por el origen de coordenadas y si $b \neq 0$, se trata de una línea recta desplazada b unidades sobre el eje de las y arriba o abajo del eje de las x, en dependencia si el valor de la b es positivo o negativo.
  - En las funciones lineales, se dice que el valor de x para el cual y es igual a 0, es una raíz o un cero de la función.
  - La constante m de la expresión algebraica $y = mx$ representa la razón de crecimiento de la variable y entre el crecimiento de la variable x. Esto puede interpretarse como el cambio del valor de la variable cuando la variable se incrementa en una unidad.
  - En el caso de una función lineal cuya expresión analítica es de la forma $y = mx$, llamaremos variable independiente a la x y variable dependiente a la y. El carácter dependiente de la variable conduce a que con frecuencia se emplee la expresión "y está en función de x", idea que se expresa algebraicamente escribiendo $y = f(x)$, lo cual suele leerse diciendo "y es igual a f de x".
  - En el caso de una función como las que hemos estudiado aquí es entonces frecuente que se escriban expresiones como $f(x) = 4x, f(x) = -3x$, etc., y de forma general $f(x) = mx$.

- Tomando en cuenta las formas posibles de las funciones cuyas gráficas corresponden a líneas rectas, decimos que la expresión algebraica de una función lineal es $y = mx + b$, lo cual también suele expresarse como $f\,(x) = mx + b$.
- Observamos que, en general, cuando hablamos de una función lineal, podemos hacerlo a partir de diferentes formas de representarla o de referirnos a la misma. Es posible hacerlo por medio de una gráfica, de una expresión analítica o de parejas ordenadas de números. Así, cada función puede representarse de cualquiera de estas tres formas.
- Cuando hablamos de una función lineal, es necesario referirse al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. A este conjunto de valores lo denominamos con el nombre de dominio de la función.
- En dependencia de los valores del dominio de la función, los valores posibles de la variable dependiente tienen sus propias restricciones. Al conjunto de valores posibles de la variable dependiente le llamaremos rango de la función.

4.3. Características del diseño con base en los criterios de idoneidad didáctica

Para marcar un punto de partida en la planeación y diseño de la secuencia didáctica, se tomaron como referente los componentes de los criterios de idoneidad propuestos por Godino en el EOS, donde el menciona que:

> "la noción de idoneidad didáctica puede aportar elementos originales y significativos para elaborar una teoría de diseño instruccional, apropiada para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y otras áreas curriculares. Una teoría de la instrucción en un área de contenido específico no puede dar recetas de actuación para cada circunstancia, pero sí principios y criterios generales basados en resultados contrastados por la investigación para los cuales existe consenso en la comunidad científica correspondiente" (Godino, 2011).

Partiendo de esto, se procuró que las situaciones problemas presentadas a los alumnos por medio de la secuencia didáctica cumplieran con promover la emergencia de los objetos matemáticos deseados, y asimismo que sus significados personales se asemejen a los significados institucionales pretendidos. Por este motivo, utilizamos los componentes de cada indicador de los criterios de idoneidad como una guía para la planeación de la secuencia. Estos componentes se pueden observar en las Tablas 1, 2, 3, 4, 5 y 6, en el capítulo 3.

4.4. Diseño preliminar de la secuencia didáctica

Como se mencionó anteriormente, la secuencia didáctica queda conformada por seis actividades en las cuales se hace necesario el uso de funciones lineales para la comprensión del comportamiento de distintas situaciones. Una vez seleccionadas las situaciones que ayudarían a promover los significados pretendidos se procedió a diseñar las actividades que orientarían a los estudiantes hacia el aprendizaje de los objetos matemáticos involucrados. A continuación hacemos una breve descripción de las actividades y sus objetivos. La secuencia didáctica se incluye en la sección de Anexos.

<u>Objetivo de la secuencia</u> – Modelar situaciones mediante funciones lineales, para llegar a reconocer a $y = mx + b$, como una ecuación de dos variables y como la forma de una función lineal.

Al terminar, se espera que el alumno sea capaz de:

- Resolver problemas relativos a situaciones que requieran el uso de funciones y ecuaciones lineales.

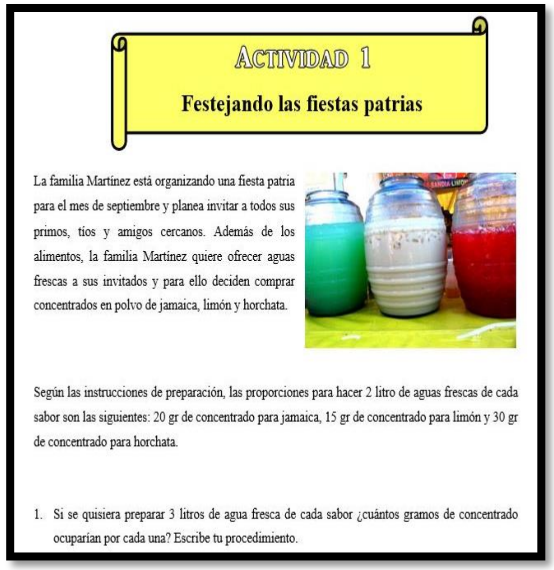
- Describir el comportamiento de las variables y/o soluciones de problemas que se modelan con funciones y ecuaciones lineales, de forma verbal, algebraica y gráfica.

- Representar relaciones numéricas y algebraicas entre los elementos de diversas situaciones.

- Construir e interpretar la función y ecuación lineal mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

Actividad 1 – Festejando las fiestas patrias

Objetivo de la actividad: como actividad de inicio, lo que se pretende es movilizar los conocimientos y habilidades necesarios para la comprensión de las funciones lineales, tales como: graficar una recta, identificación de una variable y despejar una variable.



ACTIVIDAD 1

Festejando las fiestas patrias

La familia Martínez está organizando una fiesta patria para el mes de septiembre y planea invitar a todos sus primos, tíos y amigos cercanos. Además de los alimentos, la familia Martínez quiere ofrecer aguas frescas a sus invitados y para ello deciden comprar concentrados en polvo de jamaica, limón y horchata.

Según las instrucciones de preparación, las proporciones para hacer 2 litro de aguas frescas de cada sabor son las siguientes: 20 gr de concentrado para jamaica, 15 gr de concentrado para limón y 30 gr de concentrado para horchata.

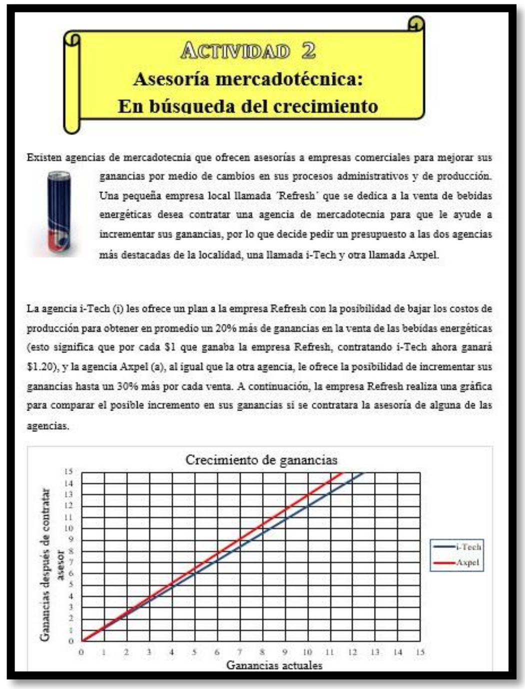
1. Si se quisiera preparar 3 litros de agua fresca de cada sabor ¿cuántos gramos de concentrado ocuparían por cada una? Escribe tu procedimiento.

Figura 4 – Actividad 1

Se solicita ayudar a una familia a determinar los requerimientos para la preparación de aguas frescas para un festejo patrio. Por medio de despejes, operaciones aritméticas y algebraicas, se intentará encontrar las proporciones correspondientes para la realización de las bebidas requeridas utilizando el lenguaje verbal, tabular y gráfico.

Actividad 2 – Asesoría mercadotécnica: en búsqueda del crecimiento

Objetivo de la actividad: las preguntas en esta actividad están enfocadas a la lectura y representación de una gráfica, con la intención de que los alumnos analicen el comportamiento de dos funciones lineales de forma $y = mx$ y comiencen a identificar las características de cada una, como la inclinación y el punto en el origen.


ACTIVIDAD 2

Asesoría mercadotécnica:

En búsqueda del crecimiento

Existen agencias de mercadotecnia que ofrecen asesorías a empresas comerciales para mejorar sus ganancias por medio de cambios en sus procesos administrativos y de producción. Una pequeña empresa local llamada ´Refresh´ que se dedica a la venta de bebidas energéticas desea contratar una agencia de mercadotecnia para que le ayude a incrementar sus ganancias, por lo que decide pedir un presupuesto a las dos agencias más destacadas de la localidad, una llamada i-Tech y otra llamada Axpel.

La agencia i-Tech (i) les ofrece un plan a la empresa Refresh con la posibilidad de bajar los costos de producción para obtener en promedio un 20% más de ganancias en la venta de las bebidas energéticas (esto significa que por cada $1 que ganaba la empresa Refresh, contratando i-Tech ahora ganará $1.20), y la agencia Axpel (a), al igual que la otra agencia, le ofrece la posibilidad de incrementar sus ganancias hasta un 30% más por cada venta. A continuación, la empresa Refresh realiza una gráfica para comparar el posible incremento en sus ganancias si se contratara la asesoría de alguna de las agencias.

Figura 5 – Actividad 2

Una empresa local productora de bebidas energéticas solicita asesoría para aumentar el margen de utilidad, lo que hace necesario comparar dos asesores para elegir el que más le convenga. Por medio de una gráfica que muestra el posible incremento en las ganancias al decidir contratar una empresa asesora, analizaremos toda la información que se puede extraer de los datos graficados, como incremento, pendiente y comparación de gráficas, y con ello poder pronosticar el comportamiento de los números para proyecciones posteriores.

Actividad 3 – Asesoría mercadotécnica: La contratación

Objetivo de la actividad: Aquí se pide al alumno describir el comportamiento de la función por medio de una expresión algebraica, además ahora se presenta una gráfica donde se observan dos funciones lineales de la forma $y = mx + b$ con el fin de que la analice respondiendo a las cuestiones planteadas. Por último se pide que establezca la expresión algebraica, que representa la situación planteada.

ACTIVIDAD 3
Asesoría mercadotécnica:
La contratación

La empresa Refresh aún no sabe que asesor le convendrá más a su producto debido a los costos de contratación que tendrán que pagar. Los precios, los cuales son un único pago inicial, son los siguientes:

$5,000 para contratar i-Tech, y $15,000 para contratar Axpel.

Como ya se mencionó anteriormente, el producto que ellos comercializan son bebidas energéticas, por lo que sus ganancias por unidad no son muy altas y no saben que tanto dinero deberían de invertir. La ganancia que obtiene por vender 1 litro de bebida es de $10.

Recordando lo antes visto, se pronostica que al contratar i-Tech las ganancias crecerán en un 20%, y contratando Axpel un 30%.

1. Obtén la nueva ganancia al vender un litro después de contratar a:

   a) i-Tech (i)

   b) Axpel (a)

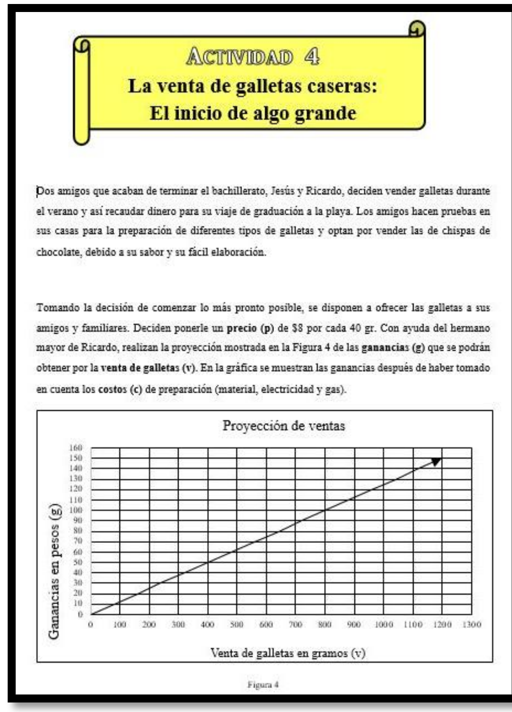
2. ¿De cuánto sería la nueva ganancia, después de contratar un asesor, por la venta de 20 litros de bebida? Desarrolla tu procedimiento para cada asesor

Figura 6 – Actividad 3

Una empresa local productora de bebidas energéticas solicita asesoría para aumentar el margen de utilidad, lo que hace necesario comparar dos asesores para elegir el que más le convenga. Después de analizar la información proporcionada por la gráfica, se procede a tomar la decisión de cuál será la empresa que dará mejor rendimiento, es decir, la que generará más ganancias. Para ello se tomará en cuenta la cantidad de bebidas promedio vendidas mensualmente, el posible incremento en las ganancias que cada empresa ofrece, y el costo de contratación de cada una, reuniendo todos estos datos, se realizará una gráfica con las dos funciones con forma $y = mx + b$ para su comparación y así elegir la más conveniente.

Actividad 4 – La venta de galletas caseras: el inicio de algo grande

Objetivo de la actividad: que el alumno comience a determinar las expresiones algebraicas de las funciones que describan las situaciones planteadas, y que con ella se reconozca su importancia en la resolución de problemas.



ACTIVIDAD 4

La venta de galletas caseras:
El inicio de algo grande

Dos amigos que acaban de terminar el bachillerato, Jesús y Ricardo, deciden vender galletas durante el verano y así recaudar dinero para su viaje de graduación a la playa. Los amigos hacen pruebas en sus casas para la preparación de diferentes tipos de galletas y optan por vender las de chispas de chocolate, debido a su sabor y su fácil elaboración.

Tomando la decisión de comenzar lo más pronto posible, se disponen a ofrecer las galletas a sus amigos y familiares. Deciden ponerle un **precio (p)** de $8 por cada 40 gr. Con ayuda del hermano mayor de Ricardo, realizan la proyección mostrada en la Figura 4 de las **ganancias (g)** que se podrán obtener por la **venta de galletas (v)**. En la gráfica se muestran las ganancias después de haber tomado en cuenta los **costos (c)** de preparación (material, electricidad y gas).

Figura 4

Figura 7 – Actividad 4

Dos amigos que deciden poner un negocio de venta de galletas caseras, por lo que es necesario ayudarlos a tomar decisiones de su negocio y así ayudarles en su crecimiento para llegar al éxito. Por medio del análisis de la gráfica de una función mostrada en una proyección de ventas, se requiere extraer información necesaria para definir los datos que participan en la realización de dicha función lineal. Posteriormente se requiere saber más información sobre la función; gracias a los datos abstraídos de la gráfica será posible pronosticar el comportamiento de los números en caso de su incremento.

Actividad 5 – La venta de galletas caseras: una microempresa de éxito

Objetivo de la actividad: que el alumno identifique la forma de una función en el lenguaje algebraico y gráfico, y que comience a reconocer las distintas formas en que se presenta dependiendo del lenguaje usado. Se continúa trabajando con $y = mx + b$

ACTIVIDAD 5

La venta de galletas caseras:
Una microempresa de éxito

Jesús y Ricardo, los amigos que comenzaron la venta de galletas, tuvieron tal éxito que deciden expandir su proyecto y no solo reunir dinero para su viaje, si no tomarlo como una gran oportunidad de negocio, por lo que deciden crecer y para ello rentan un departamento en el cual podrán producir las galletas con mayor facilidad y en mayor cantidad, pero ahora tendrán que pagar $1,000 pesos mensuales por la renta, por lo que toman la decisión de cambiar el precio a $200 por cada 1000 gr de galletas.

1. Si el costo de producción de las galletas no ha cambiado: materiales, electricidad y gas; ¿cuál sería el costo por cada 1000 gr de galletas vendidas? Recuerda que ya se obtuvo el costo de producción de galletas en el punto 4 de la Actividad 4

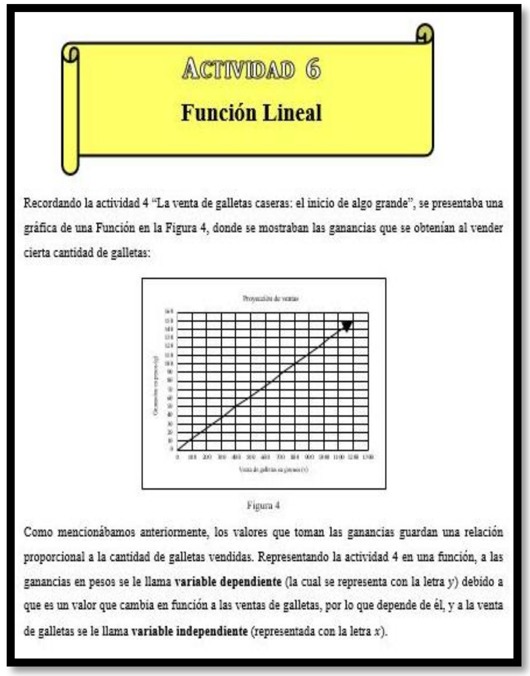
2. ¿Cuál sería la ganancia por cada 1000 gr de galletas vendidas? Compara tu resultado con el de tus compañeros

Figura 8 – Actividad 5

Dos amigos que deciden poner un negocio de venta de galletas caseras, por lo que es necesario ayudarlos para tomar decisiones de su negocio y así ayudarles en su crecimiento para llegar al éxito. Una vez analizado los datos que juegan un papel en la realización de galletas, y habiendo determinado los costos y ganancias por la venta de las galletas, se decide expandir el negocio para incrementar la producción, lo que conllevara costos adicionales, que deberán de ser tomados en cuenta mensualmente. Analizaremos la función de forma $y = mx + b$, donde $b = \ renta\ mensual\ de\ local,$ y con ello poder realizar proyecciones mensuales y anuales de las ganancias.

Actividad 6 – Función Lineal

Objetivo de la actividad: lograr que se institucionalicen los saberes emergidos a lo largo de la secuencia didáctica y reforzarlos con actividades en contextos matemáticos.



ACTIVIDAD 6

Función Lineal

Recordando la actividad 4 "La venta de galletas caseras: el inicio de algo grande", se presentaba una gráfica de una Función en la Figura 4, donde se mostraban las ganancias que se obtenían al vender cierta cantidad de galletas:

Figura 4

Como mencionábamos anteriormente, los valores que toman las ganancias guardan una relación proporcional a la cantidad de galletas vendidas. Representando la actividad 4 en una función, a las ganancias en pesos se le llama **variable dependiente** (la cual se representa con la letra y) debido a que es un valor que cambia en función a las ventas de galletas, por lo que depende de él, y a la venta de galletas se le llama **variable independiente** (representada con la letra x).

Figura 9 – Actividad 6

Se presenta la gráfica de una función lineal y se deberá describir las características de ella, además de encontrar algunos valores específicos de y para distintos valores de x. Se analizará el comportamiento de la pendiente, así como la relación de los números representados en los ambos ejes, se pondrá en práctica todos los objetos primarios utilizados anteriormente en las actividades y se institucionalizarán los conceptos aprendidos a través de la secuencia.

4.5. Análisis a priori de la secuencia con los indicadores de idoneidad

Al término del diseño de la secuencia didáctica, se realizó un análisis de las actividades con los indicadores de idoneidad descritas en el EOS, esto con el fin de revisar el cumplimiento de los criterios de idoneidad que nos permiten obtener una valoración lo más alta posible.

- Idoneidad epistémica

Tabla 7 – A priori. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática)

COMPONENTES	INDICADORES
Situaciones	Se presenta una secuencia didáctica donde se incluyen seis actividades. Cada actividad tiene sus objetivos: las primeras dos actividades plantean situaciones de problematización, donde los estudiantes requieran herramientas, significados y procedimientos que se supone han revisado con anterioridad. Las actividades 3, 4 y 5 presentan situaciones donde, gracias a los significados y procedimientos propios que intervienen en la resolución de los problemas, se procura hacer emerger nuevos objetos matemáticos que se adaptan mejor a la forma de solucionar problemas semejantes, y por último, la actividad 6 busca reforzar y ejercitar los conocimientos que se pusieron en juego durante la secuencia didáctica y que de esta forma se institucionalicen los saberes y puedan aplicarlos en distintos contextos dentro y fuera de las matemáticas.
Lenguajes	A lo largo de las actividades, se hace necesario el uso de distintos lenguajes como el verbal, gráfico, algebraico y tabular, los cuales ya se han visto con anterioridad; además, se busca la reflexión mediante preguntas posteriores que requieren la comprobación de los métodos utilizados y se pide se expresen y justifiquen sus respuesta de forma verbal. Con ello se espera que el alumno autoevalúe sus respuestas y observe la congruencia de sus soluciones.
Reglas	Las actividades requieren procedimientos adecuados para los alumnos (procedimientos y conceptos ya vistos con anterioridad según el programa curricular), de modo que pusieran a prueba sus conocimientos previos; las situaciones presentadas favorecen la reflexión y la comprobación de sus procedimientos utilizados, del modo que el contexto pueda

	darles una idea parcial sobre si sus prácticas son correctas para la resolución del problema.
Argumentos	Se plantean cuestionamientos reflexivos para que los alumnos justifiquen sus respuestas, desarrollen sus procedimientos y que expliquen verbalmente sus significados sobre algunos procedimientos y situaciones mostradas, con el fin de que validen sus prácticas.
Relaciones	Las distintas actividades hacen necesario el uso de diferentes objetos primarios (incógnita, variable), procedimientos (regla de 3, sustitución) y lenguajes (algebraico, grafico, verbal) a lo largo de la secuencia, además de requerir constante interacción entre estos.

- Idoneidad cognitiva

Tabla 8 – A priori. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos (Componentes similares a la dimensión epistémica)	De acuerdo al programa curricular propuesto por la DGB, los alumnos ya habrán trabajado previamente con los conocimientos necesarios para la resolución de la actividad, por lo que se espera que los alumnos sean capaces de comprender y resolver las situaciones que se presentan y a su vez aprender de los objetos matemáticos que las conforman.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	La actividad 6 se creó con la intención de que los alumnos refuercen los conocimientos aprendidos a lo largo de la secuencia didáctica por medio de problemas matemáticos que involucren el uso de la función y ecuación linean en distintos lenguajes, además se cuenta con preguntas de reflexión y momentos didácticos dentro de las actividades para que los alumnos puedan rectificar sus respuestas y compararla con la de sus compañeros
Aprendizaje	Las actividades pretenden que las mismas situaciones y contextos les ayuden a realizar una autoevaluación de sus respuestas, y que de este modo validen si sus procedimientos son correctos.

- Idoneidad afectiva

Tabla 9 – A priori. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

COMPONENTES	INDICADORES
Intereses y necesidades	Se busca problematizar al alumno por medio de situaciones cotidianas, esto con el fin de que se sientan atraídos o identificados a la situación y tengan un interés genuino por el aprendizaje de las matemáticas y el uso que se le puede dar en distinta situaciones de su vida.
Actitudes	Las actividades se trabajan de manera individual con interacciones grupales, por lo que debe de poner en juego la responsabilidad, autocritica, disciplina y persistencia; la argumentación se presenta de forma personal y por escrito y posiblemente al finalizar cada actividad.
Emociones	Las actividades están planeadas para intentar promover la importancia y el uso aplicado a situaciones cotidianas fuera de la matemática escolar, con la intención de que despierte en ellos un interés personal sobre el aprendizaje de la ecuación y función lineal.

- Idoneidad interaccional

Tabla 10 – A priori. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

COMPONENTES	INDICADORES
Interacción docente-discente	Para la puesta en escena de la secuencia didáctica, el papel del profesor será el de asesor para las dudas o aclaraciones que puedan darse al resolver las actividades; el profesor dará las indicaciones para la resolución de la secuencia y observará el comportamiento de los alumnos durante el tiempo que trabajen con las actividades, el profesor solo resolverá dudas sobre los problemas y las situaciones presentadas, además recibirá comentarios y sugerencias que los alumnos realicen.
Interacción entre alumnos	Todas las actividades están diseñadas para un primer momento de trabajo individual, y se promueve la formulación de preguntas y respuestas entre alumnos.
Autonomía	El que las actividades fueran individuales se pensó para que el alumno se problematizara con las situaciones y se

	responsabilizara en la resolución de los problemas. Las actividades traen consigo preguntas de reflexión y justificación, con el fin de que los alumnos jueguen un papel de autoevaluadores y puedan crearse una idea de si su solución es adecuada para la situación.

- Idoneidad mediacional

Tabla 11 – A priori. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

COMPONENTES	INDICADORES
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	Para la resolución de las actividades, a los alumnos solo se les solicita trabajar con pluma o lápiz y calculadora, todos sus procedimientos serán por escrito en las hojas de trabajo que se les brindarán al comenzar las actividades. Las actividades fueron pensadas en contextos en los cuales la mayoría de los alumnos puedan haber tenido una interacción cercana, o por lo menos sean fáciles de comprender e imaginar.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	La secuencia didáctica materializada en hojas de trabajo puede ayudar a mejorar la organización en el aula, considerando el número de alumnos, de modo que sea posible la interacción entre alumnos y alumno-profesor.
Tiempo (De enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje)	De acuerdo a los temas y el enfoque presentados en las actividades, se espera que el tiempo para su resolución sea el adecuado para que los alumnos contesten de la manera más completa las problemáticas presentadas. Las dos primeras actividades, son actividades cortas con el fin de poner en práctica los procedimientos y conceptos necesarios para la construcción de la ecuación y función lineal, tres de las seis actividades tienen como finalidad trabajar directamente sobre los conceptos de los objetos matemáticos de la ecuación y función lineal, y solo una actividad está pensada como de reforzamiento de los conceptos vistos a lo largo de la secuencia didáctica.

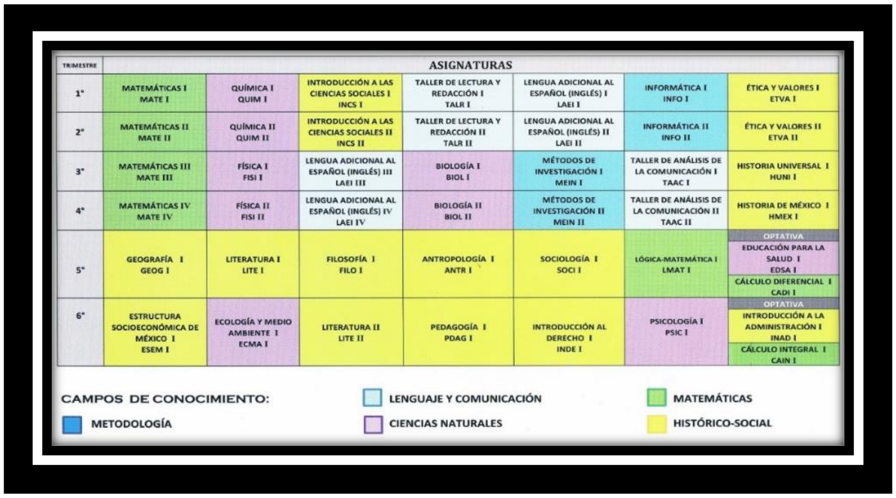
- Idoneidad ecológica

Tabla 12 – A priori. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

COMPONENTES	INDICADORES
Adaptación al currículo	La secuencia didáctica se creó pensada para su uso en el primer semestre en el programa de la DGB para el nivel medio superior, momento en el que se ve el tema de ecuaciones lineales.
Apertura hacia la innovación didáctica	La forma para trabajar las actividades es de manera escrita con hojas de trabajo, y se delimita a la resolución matemática y reflexión por medio de argumentación y justificación de las respuestas. Se diseñan problemas en situaciones cotidianas para que ayuden a facilitar la comprensión de los objetos matemáticos por medio de la resolución de problemas en distintos contextos.
Adaptación socio-profesional y cultural	Cuatro de seis actividades que componen a la secuencia didáctica, tratan un tema económico y financiero.
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contextos se sitúan en ámbitos económicos y financieros y el contenido matemático está enfocado hacia el aprendizaje y enseñanza de la función y ecuación lineal.

4.6. Puesta en escena

La secuencia didáctica que se diseñó en el presente proyecto, se aplicó en una institución educativa privada de nivel medio superior de la ciudad de Hermosillo, Sonora, México. Esta institución maneja un plan de estudios de un año y seis meses, durante los cuales se ofrecen cinco cursos de matemáticas (algebra, trigonometría, probabilidad y estadística, cálculo y lógica matemática). En la Figura 4 se muestra el mapa curricular de la institución.



TRIMESTRE	ASIGNATURAS						
1°	MATEMÁTICAS I MATE I	QUÍMICA I QUIM I	INTRODUCCIÓN A LAS CIENCIAS SOCIALES I INCS I	TALLER DE LECTURA Y REDACCIÓN I TALR I	LENGUA ADICIONAL AL ESPAÑOL (INGLÉS) I LAEI I	INFORMÁTICA I INFO I	ÉTICA Y VALORES I ETVA I
2°	MATEMÁTICAS II MATE II	QUÍMICA II QUIM II	INTRODUCCIÓN A LAS CIENCIAS SOCIALES II INCS II	TALLER DE LECTURA Y REDACCIÓN II TALR II	LENGUA ADICIONAL AL ESPAÑOL (INGLÉS) II LAEI II	INFORMÁTICA II INFO II	ÉTICA Y VALORES II ETVA II
3°	MATEMÁTICAS III MATE III	FÍSICA I FISI I	LENGUA ADICIONAL AL ESPAÑOL (INGLÉS) III LAEI III	BIOLOGÍA I BIOL I	MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN I MEIN I	TALLER DE ANÁLISIS DE LA COMUNICACIÓN I TAAC I	HISTORIA UNIVERSAL I HUNI I
4°	MATEMÁTICAS IV MATE IV	FÍSICA II FISI II	LENGUA ADICIONAL AL ESPAÑOL (INGLÉS) IV LAEI IV	BIOLOGÍA II BIOL II	MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN II MEIN II	TALLER DE ANÁLISIS DE LA COMUNICACIÓN II TAAC II	HISTORIA DE MÉXICO I HMEX I
5°	GEOGRAFÍA I GEOG I	LITERATURA I LITE I	FILOSOFÍA I FILO I	ANTROPOLOGÍA I ANTR I	SOCIOLOGÍA I SOCI I	LÓGICA-MATEMÁTICA I LMAT I	OPTATIVA: EDUCACIÓN PARA LA SALUD I EDSA I / CÁLCULO DIFERENCIAL I CADI I
6°	ESTRUCTURA SOCIOECONÓMICA DE MÉXICO I ESEM I	ECOLOGÍA Y MEDIO AMBIENTE I ECMA I	LITERATURA II LITE II	PEDAGOGÍA I PDAG I	INTRODUCCIÓN AL DERECHO I INDE I	PSICOLOGÍA I PSIC I	OPTATIVA: INTRODUCCIÓN A LA ADMINISTRACIÓN I INAD I / CÁLCULO INTEGRAL I CAIN I

Figura 10 – Mapa curricular de la institución

Se eligió esta institución como muestra para la aplicación y revisión de la secuencia didáctica debido a la accesibilidad con los alumnos, ya que se ha trabajado con ellos anteriormente en cursos regulares, lo que brindó una excelente interacción con los alumnos para las indicaciones de trabajo, así como el orden en las actividades y la retroalimentación posterior a la puesta en escena.

En la aplicación de la secuencia, participaron ocho alumnos del 4° trimestre: a pesar de que, según el mapa curricular de la DGB las funciones lineales están programadas para el primer semestre del nivel medio superior, en el programa de estudio de la institución invitada, es hasta el 4° trimestre donde se ve el tema de las funciones lineales desde el lenguaje gráfico, ello debido a que las asignaturas están ajustadas por la modalidad de estudios de 1 año 6 meses. Por tal motivo, no se vio inconveniente trabajar con estudiantes del 4° trimestre, cuando se trabaja el tema de función lineal y su gráfica.

Los alumnos seleccionados para la implementación de la secuencia didáctica fueron ocho alumnos con un manejo regular-alto en matemáticas; se eligió este número con la intención de que existiera una interacción más cercana y libre entre alumno-alumno y alumno-profesor, además de que se pudiera indagar de una mejor forma en la revisión de las hojas de trabajo realizadas por los alumnos.

4.7. Análisis de resultados de la puesta en escena con los indicadores de idoneidad

Después de revisar y analizar las respuestas y comentarios elaborados por los alumnos en la puesta en escena, se procedió a realizar un análisis posterior de la secuencia, con los indicadores de idoneidad didáctica, para identificar en qué medida se cumplió con lo esperado. Como se puede observar en la Figura 11, a partir del análisis de las idoneidades que se logró con los resultados de la puesta en escena, se hizo una valoración del cumplimiento de cada una de las dimensiones que abarca dicha idoneidad.

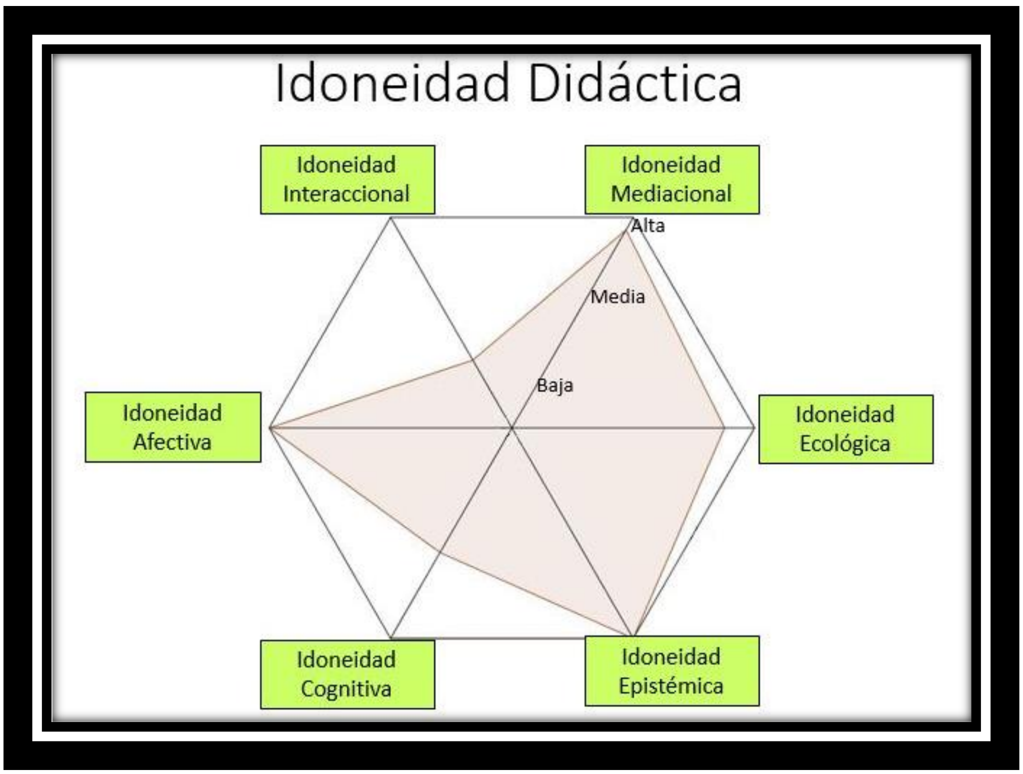


Figura 11 – A pos. Idoneidad didáctica

Cada vértice del hexágono representa una de las seis dimensiones que abarca la idoneidad didáctica propuesta por el EOS. Para simbolizar el cumplimiento de los componentes de cada dimensión, se utilizan las diagonales del hexágono, donde el centro representa el cumplimiento más bajo, y se interpreta gradualmente hasta el vértice, que, representa el nivel de cumplimiento más alto de la componente correspondiente.

En el análisis de los resultados, se pudo observar que se tuvo un rendimiento alto en cuanto a la idoneidad epistémica, esto atribuido al seguimiento y apego a las enseñanzas que promueve el programa de la DGB; las dos primeras actividades ayudaron a los alumnos a retomar los procedimientos y objetos matemáticos intervinientes en el entendimiento y aprendizaje de la función y ecuación lineal, posteriormente las actividades 3, 4 y 5 cumplieron su función al ayudar a los alumnos a que emergieran en ellos los objetos matemáticos ya mencionados, por último la actividad 6 sirvió para institucionalizar los conocimientos adquiridos a través de la secuencia didáctica, además de ser un apoyo para retomar y repasar lo aprendido en cada una de las actividades.

Los problemas se presentan en distintos lenguajes, mayormente verbal, tabular, algebraico y gráfico; el fin de ello fue de, como mencionaron distintos autores, investigaciones y como sugiere el EOS, utilizar distintos lenguajes en la enseñanza de objetos matemáticos incrementa la posibilidad de entender, comprender y aprenderlos de una forma más eficaz, con significados más profundos y en menor tiempo. A pesar de que en los problemas donde se presentó el lenguaje gráfico se mostró dificultad para los alumnos en su resolución, en sus argumentos se distingue cómo los alumnos tuvieron una mejor comprensión de la situación gracias al uso de este lenguaje.

Para la dimensión afectiva se tuvo un rendimiento alto según la idoneidad didáctica; gracias a que las situaciones se contextualizaron en escenarios cotidianos relacionados con temas de finanzas y estimaciones (situaciones que probablemente se les haya presentado, que estén familiarizados con ellas o sean temas de interés), se vio en ellos una gran disposición a resolver los problemas presentados, despertando el interés de los alumnos en el aprendizaje de los objetos matemáticos necesarios para solucionar efectivamente los problemas y así poder utilizarlos en situaciones que se puedan presentar posteriormente.

En la dimensión mediacional se obtuvo un rendimiento alto debido a que los recursos para poder resolver las secuencias didácticas por parte de los alumnos fueron los necesarios. Al ser una secuencia didáctica presentada en forma escrita, los alumnos contaron con todas las herramientas necesarias para su resolución. Además, los tiempos estimados para la puesta en escena fue justo el necesario para que los alumnos pudieran terminar de contestar todas las actividades sin presiones y tomando pausas para preguntas, comentarios y reflexiones.

El alto rendimiento en la idoneidad ecológica se atribuye a que, a pesar de que los alumnos que resolvieron la secuencia didáctica pertenecen a un sistema con variantes al de la DGB, decidimos apegarnos a este último, ya que es el que más cobertura tiene en cuanto a la cantidad de instituciones de educación media superior que utilizan dicho sistema para crear sus planes y programas de trabajo. Con esto abarcamos los requisitos mínimo necesarios que se proponen para el tema de ecuación lineal en el primer semestre del nivel medio superior, más sin embargo no limitado a este, con la intención de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la ecuación y función lineal. Además procuramos por medio de la estructuración de la secuencia didáctica que los alumnos sean capaces de utilizar los objetos matemáticos aprendidos en distintas áreas y asignaciones escolares, así como la utilización de estos para la resolución de problemas que se puedan presentar en su vida diaria.

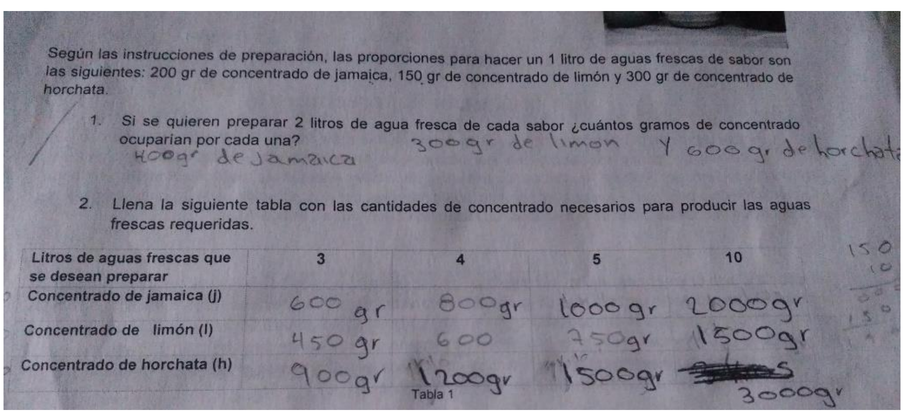
Con la idoneidad cognitiva, creemos que un motivo fuerte por el cual a los alumnos se les presentó dificultad en la resolución de algunas actividades, fue el grado de profundidad sobre los problemas presentados; debido a que la escuela maneja un programa calendarizado por trimestres, los cursos son recortados y el refuerzo de las enseñanzas son pocas, por lo que los conceptos y procedimientos requeridos por las actividades para la resolución de los problemas, pudieron representarse una dificultad agregada para ellos. Los errores más comunes se presentaron en el entendimiento del objetivo del problema y en la graficación de datos, lo que reafirma la importancia de hacer énfasis en este tipo de lenguaje en la enseñanza y el aprendizaje de objetos matemáticos relacionados.

Por último, la idoneidad interaccional tuvo una valoración baja debido a la dinámica con la que se trabajó; como el papel del profesor solo fue el de dar indicaciones, contestar dudas o recibir comentarios y el de observar los comportamientos de los alumnos a lo largo de la puesta en escena, el nivel en el que se involucró fue mínimo por que no se dieron indicaciones para los momentos didácticos, la razón de esto fue que se quería observar en qué manera las situaciones eran entendibles para los alumnos y si utilizaban el contexto para validar sus respuestas. Sin embargo, se vio que es necesario y de gran importancia la programación de estos momentos como parte de la secuencia didáctica y no como una decisión libre, esto por la gran diferencia que puede significar en el aprendizaje de los alumnos el tener momentos didácticos para comparar, validar y argumentar sus respuestas, con sus compañeros y con el profesor.

4.7. Adecuaciones a la secuencia didáctica

Al finalizar el análisis mostrado anteriormente, se procedió a rediseñar la secuencia apoyándonos en los errores y faltas identificadas, por parte de los alumnos y del diseño, en la estructura de la actividad.

En la actividad 1, redujimos el número de gramos de las fórmulas para la preparación de bebidas, ello debido a que le agregaba dificultad a los problemas el cual no era necesario para el fin de la actividad, además de que se asemeja más a la realidad en la preparación de dichas bebidas. También eliminamos una columna de la tabla donde se pide identificar la cantidad de gramos necesarios para distintos pedido, con esto acortamos el tiempo necesario para contestar la actividad y no modifica la intención de esta.


Según las instrucciones de preparación, las proporciones para hacer un 1 litro de aguas frescas de sabor son las siguientes: 200 gr de concentrado de jamaica, 150 gr de concentrado de limón y 300 gr de concentrado de horchata.

1. Si se quieren preparar 2 litros de agua fresca de cada sabor ¿cuántos gramos de concentrado ocuparian por cada una?
400gr de jamaica 300gr de limon Y 600gr de horchata

2. Llena la siguiente tabla con las cantidades de concentrado necesarios para producir las aguas frescas requeridas.

Litros de aguas frescas que se desean preparar	3	4	5	10
Concentrado de jamaica (j)	600 gr	800gr	1000 gr	2000gr
Concentrado de limón (l)	450 gr	600	750gr	1500gr
Concentrado de horchata (h)	900gr	1200gr	1500gr	3000gr

Tabla 1

Figura 12 – Corrección 1

En la actividad 2 solo se realizaron correcciones menores en la redacción de las actividades para mejorar su comprensión, ya que hubo alumnos que no entendieron los que se les pedía, mientras que los que sí entendieron dieron una respuesta acertada.

En la actividad 3 agregamos una intervención entre compañeros para que puedan comparar sus respuestas a la pregunta donde se le pide al alumno crear una expresión algebraica que modele el crecimiento en las ganancias de la empresa Refresh con la posible contratación de los asesores, esto debido a que se les dificultó el encontrar dicha expresión y es a partir de esta con lo que trabajan los siguientes puntos, provocando que además fallen en los siguientes cuestionamientos.

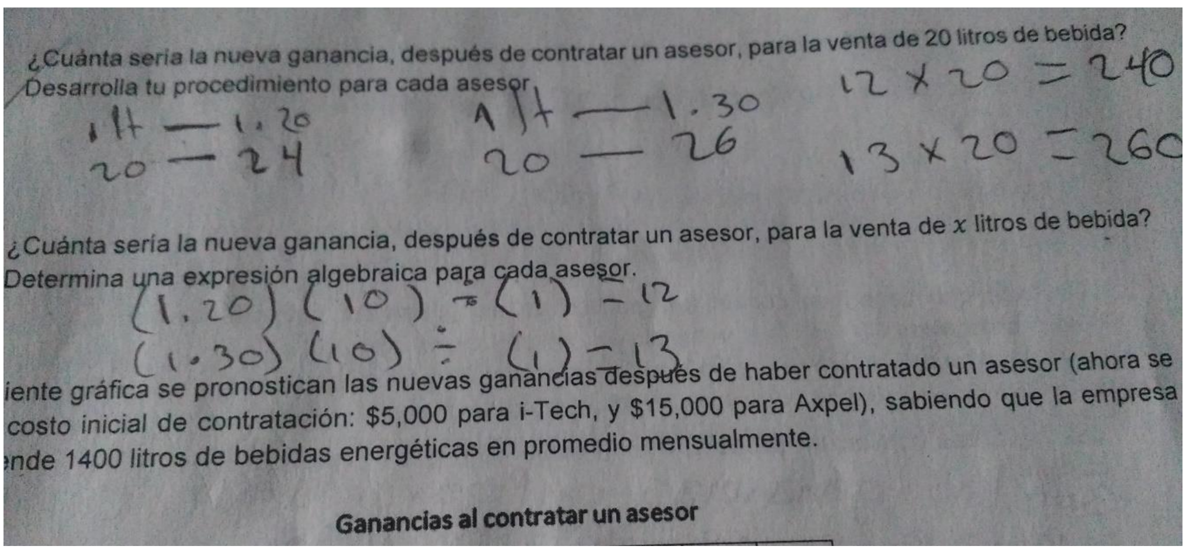


Figura 13 – Corrección 2

Agregando esta intervención se espera que los alumnos puedan comparar con sus compañeros la expresión que crearon e identifiquen si con ella se puede modelar el comportamiento de las ganancias al contratar los asesores. Además, se agregó un pequeño apartado donde se recuerda la importancia y utilización de las expresiones algebraicas en la resolución de problemas.

En la gráfica de la Figura 14 se le cambió la escala del eje y con la intención de que fuera más fácil para el alumno identificar y entender las propiedades de las rectas y consecuentemente les ayude a contestar los siguientes cuestionamientos. Se eliminó la pregunta 4 debido a que la actividad 3 era de las más extensas y así disminuir su dificultad y tiempo necesario para su resolución, y en la pregunta 6 se hizo un cambio de redacción para que se enfocara al significado de la situación real y no tanto matemático, pero resguardando la intención de este punto, con el propósito de que los alumnos expresen en un lenguaje verbal lo que observan.

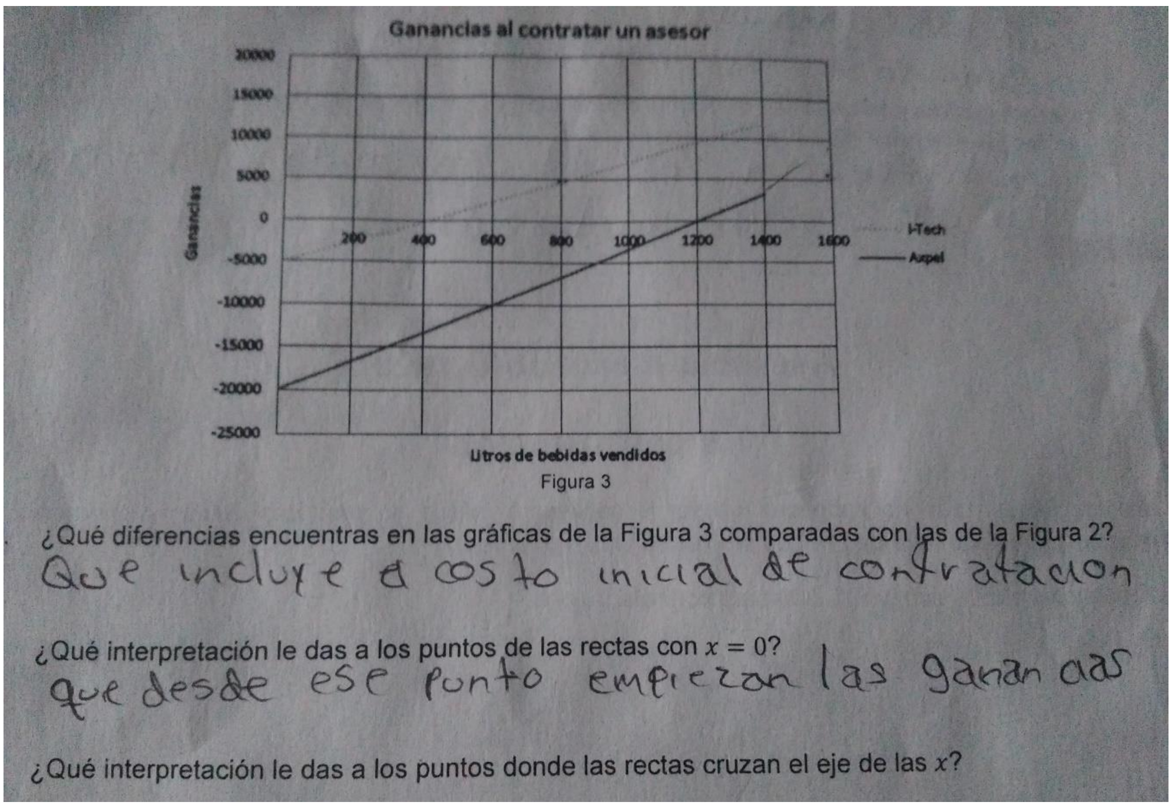


Figura 14 – Corrección 3

Por último se agregó un momento en la pregunta 7 para que los alumnos puedan comparar sus expresiones algebraicas con la de sus compañeros con el fin de que ellos mismos sean capaces de identificar si su expresión cumple con las propiedades de las funciones que representan las ganancias tentativas al contratar un asesor, y de no ser así puedan corregirlas y continuar con la actividad.

En la actividad 4 se agregó una primera pregunta, donde se pide realizar una “fórmula” para encontrar las ganancias debido a que se observó que, al brindarles distintas variables en el texto ya sea costos, ganancias, ventas y precio, los alumnos tendían a confundirlos al intentar utilizar todos en distintas preguntas, y con la pregunta agregada se espera que les ayude a ordenar sus ideas y evitar confusiones posteriores.

Se agregó la petición de que justifiquen su respuesta en la pregunta 2, con la intención de que se pueda observar el método que utilizaron para encontrar las ganancias, además de que se pide que compare con sus compañeros la respuesta encontrada para que, de no haber encontrado la ganancia correcta a la venta de galletas, pueda corregir y seguir con la siguientes preguntas teniendo información correcta.

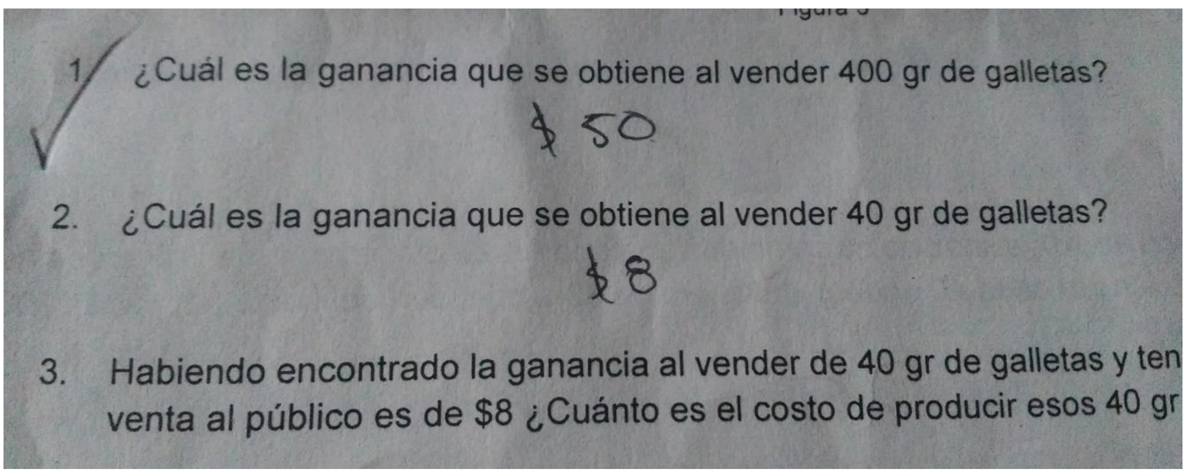
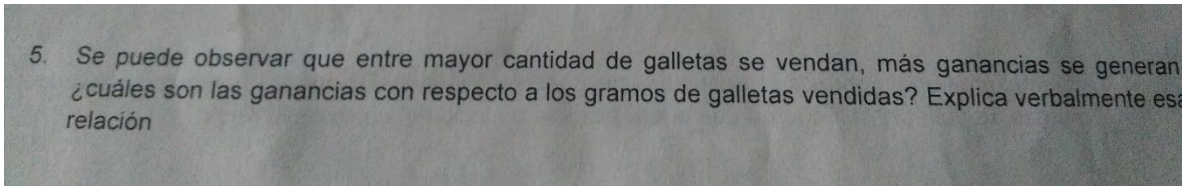

1. ¿Cuál es la ganancia que se obtiene al vender 400 gr de galletas?
$50
2. ¿Cuál es la ganancia que se obtiene al vender 40 gr de galletas?
$8
3. Habiendo encontrado la ganancia al vender de 40 gr de galletas y ten
venta al público es de $8 ¿Cuánto es el costo de producir esos 40 gr

Figura 15 – Corrección 4

Se eliminó la pregunta 5, la cual no es indispensable para el objetivo de la actividad, para disminuir el tiempo requerido para la resolución de la actividad. Después de encontrar la expresión algebraica de la función que describe la actividad, se agregó una institucionalización de la Función con el fin de ir familiarizando al alumno con la función lineal y que, casi a mitad de la secuencia, identifique y relacione cuál es el objeto matemático que se está utilizando en las actividades.



5. Se puede observar que entre mayor cantidad de galletas se vendan, más ganancias se generan ¿cuáles son las ganancias con respecto a los gramos de galletas vendidas? Explica verbalmente esa relación

Figura 16 – Corrección 5

Para la actividad 5, se bajó el costo de la renta de 1,200 a 1,000. Esto se hizo para poder modificar la escala de la gráfica y así se mejorara el aspecto y la facilidad de lectura de esta; además de que disminuyera la dificultad de las preguntas 7 y 8, al reducir la cantidad de galletas necesarias para cumplir con los objetivos. Se agregó otro momento para comparar la respuesta de la pregunta 2, ya que a partir de esta respuesta es con lo que trabajarán para resolver las siguientes preguntas.

En la pregunta 5, donde se pide graficar la función que represente las ganancias de la venta de galletas, se agregó una pregunta antes, donde se solicita que se llene una tabla con las ganancias de distintos pedidos. Esto se hizo con dos fines: el primero, es que utilicen los valores que obtengan como apoyo para graficar la función, ya que se observó que todos tuvieron dificultades para realizar esa actividad y, el segundo, es agregar el cambio del lenguaje algebraico al tabular, y del tabular al gráfico, lo cual no se pedía en ninguna actividad anterior.

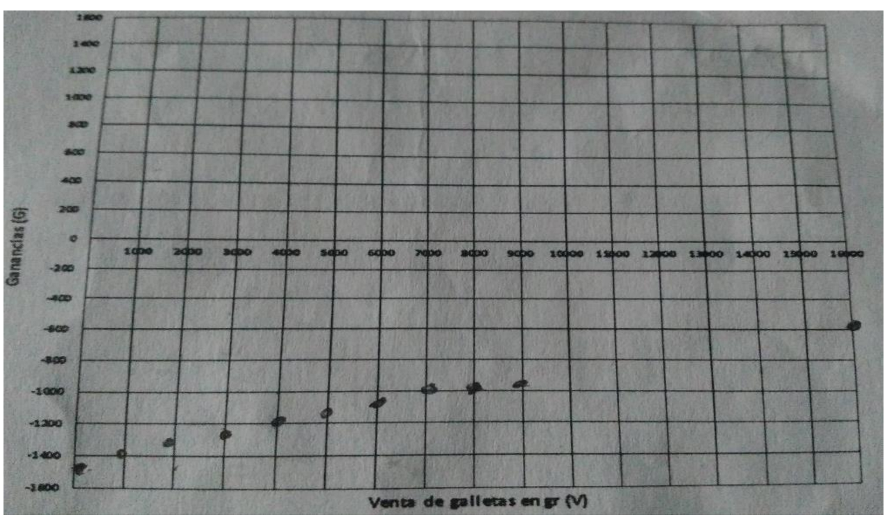
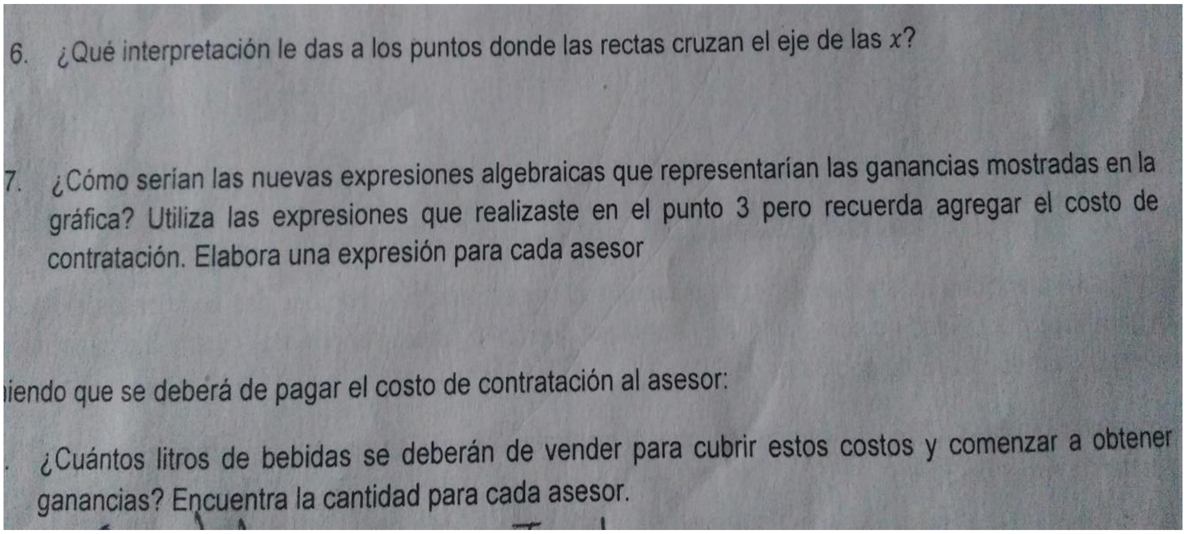


Figura 17 – Corrección 6

Por último se eliminaron las preguntas 6 y 8 para adecuar el tiempo necesario para la resolución de la actividad. Esto no cambia el objetivo principal de la actividad.



6. ¿Qué interpretación le das a los puntos donde las rectas cruzan el eje de las x?

7. ¿Cómo serían las nuevas expresiones algebraicas que representarían las ganancias mostradas en la gráfica? Utiliza las expresiones que realizaste en el punto 3 pero recuerda agregar el costo de contratación. Elabora una expresión para cada asesor

iendo que se deberá de pagar el costo de contratación al asesor:

. ¿Cuántos litros de bebidas se deberán de vender para cubrir estos costos y comenzar a obtener ganancias? Encuentra la cantidad para cada asesor.

Figura 18 – Corrección 7

La actividad 6 tuvo varias modificaciones en la redacción de las definiciones y proposiciones que se presentan, así como la redacción de algunas preguntas para que fueran más enriquecedoras; sin embargo, sigue vigente el objetivo de institucionalizar los objetos matemáticos y reforzar lo visto en las actividades previas. En la primera pregunta se cambió el tipo de función mostrada debido a que no se vio pertinente mostrar un tipo de función que no se utilizara en las actividades anteriores.

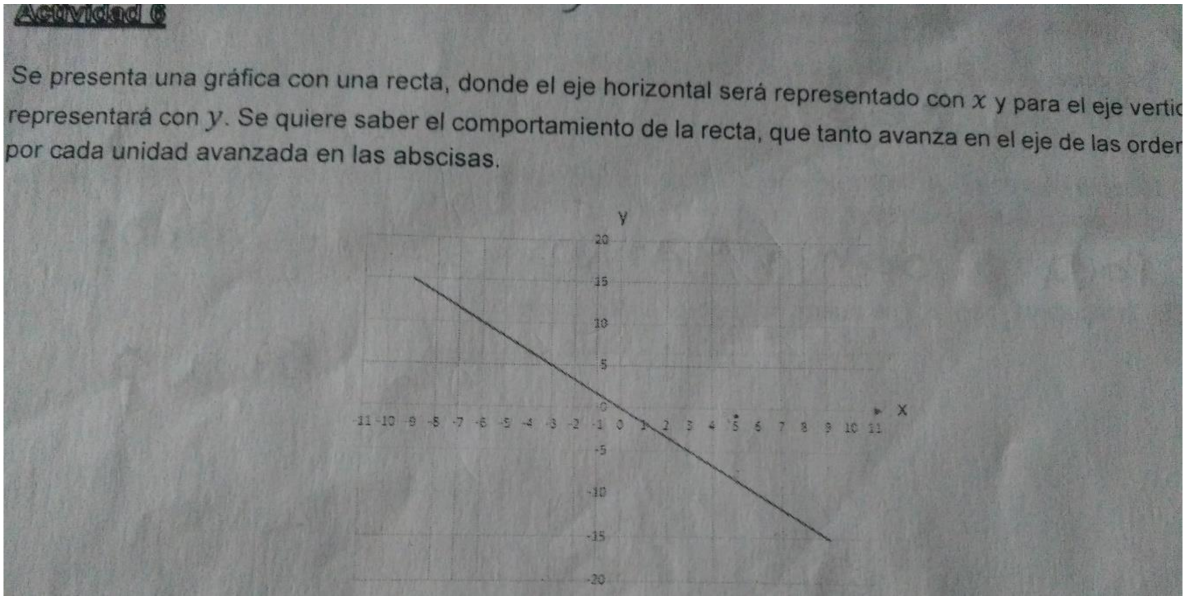


Figura 19 – Corrección 8

Se añadió distinta información sobre la pendiente así como diferentes cuestionamientos con la intención de que se institucionalice lo ya visto en las actividades, usando estas como referencia para entender los objetos matemáticos en una aplicación real. Por último se agregó un ejercicio final donde se muestra una función de la forma $y = mx + b$, ya trabajada en las actividades, para que se identifique y se aprenda el papel que juega la constante b en la función lineal de forma algebraica y gráfica.

Con estas modificaciones se pretende elevar los indicadores de idoneidad a un nivel alto, especialmente en la idoneidad interaccional que fue la que obtuvo un nivel bajo, y así cumplir con el objetivo de promover una enseñanza y un aprendizaje significativo de la función lineal a los alumnos del nivel medio superior.

Conclusiones y Recomendaciones

Los alumnos siguen teniendo dificultades con las situaciones en las que se involucren las funciones y ecuaciones lineales para su resolución; la importancia que tienen estos objetos matemáticos en la vida diaria y en los estudios posteriores al nivel medio superior, hacen recaer una gran importancia en estos tipos de materiales didácticos que promueban una mejor comprensión de estos objetos matemáticos.

Además, los planes y programas de trabajo para el nivel medio superior cada vez son más reducidos, por lo que es menos el tiempo que se le dedica a cada tema en matemáticas. Esto reafirma la necesidad de seguir investigando en el tema de material didáctico para abordar las dificultades de aprendizaje en este nivel.

Estas son algunas conclusiones creadas a partir de todo el trabajo realizado con el presente proyecto:

- Los alumnos muestran una respuesta positiva hacia el trabajo de problemas matemáticos situados en contextos extra matemáticos. El utilizar temas de interés para los alumnos, como son situaciones presentadas en otras asignaturas escolares y que se presentan día con día en su entorno ayudó a que los alumnos tuvieran un sincero interés en resolver los problemas y entender la utilidad de los objetos matemáticos aplicados en su vida cotidiana.

- Se presentaron problemas en el paso de un lenguaje verbal a un lenguaje gráfico. Como se revisó en varias investigaciones, el lenguaje gráfico sigue presentando dificultades para los alumnos que cursan el nivel medio superior; sin embargo, se observó que los alumnos que lograron resolver los problemas relacionados a este lenguaje, resultaron con un mejor entendimiento de la situación, dentro y fuera del contexto donde se presentó.

- El contexto juega un papel importante en la interpretación de una función del lenguaje gráfico al verbal. Los alumnos tienen dificultad para darle sentido a los números de acuerdo a lo que representan. Por tal motivo, el problematizar a los alumnos en contextos que ellos puedan conocer, analizar y entender, les ayuda a representar los resultados que obtienen como soluciones a un problema y no solo como un número perdido que necesitan encontrar, dándole sentido a los procedimientos realizados para llegar al resultado.

- La interacción y los momentos definidos para discusión, juegan un papel muy importante en la resolución de los problemas. Los momentos didácticos para comparar, discutir y argumentar entre alumno-alumno y alumno-profesor son momentos claves para analizar y definir los procedimientos y métodos más adecuados para la resolución de cierto tipos de problemas, ayudando a profundizar en el aprendizaje de los alumnos sobre los objetos matemáticos primarios. Sin embargo, se corroboró que si estos momentos no son programados y organizados por el profesor, el efecto que se pudiera lograr en la profundización de los aprendizajes en los alumnos disminuye.

Para posibles trabajos posteriores interesados en el aprendizaje de la función y ecuación lineal, recomendamos que:

- Se realicen investigaciones enfocada a las similitudes y diferencias que existen entre la función y ecuación lineal con dos incógnitas, así como el trabajo en conjunto de las dos.
- Se transmita la importancia de estos objetos matemáticos a los alumnos a través de material didáctico para que se interesen en el aprendizaje profundo de estos.
- Desarrollen actividades didácticas en las que se aborden situaciones lineales donde se presente una pendiente negativa; es decir, que la situación muestre un decrecimiento y así los alumnos puedan entender su significado y aplicación.
- Pensar en la inclusión de TIC's para este tipo de actividades, con el fin de promover una posible mejor interacción entre las situaciones y los alumnos, además de que pudiera ayudar a reducir los tiempos utilizados para su resolución.

Referencias

Alurralde, F., & Ibarra, L. (2008). *El uso de las letras en álgebra: Análisis de una evaluación de estudiantes de primer año de ingeniería.* Revista de Educación Matemática.

Aponte, P., Alméciga, L., & Torres, D. (2013). *Apuntes para la enseñanza de objetos matemáticos inmersos en el álgebra escolar: Un paso por diversas investigaciones.*

Arellano, F., & Oktaç, A. (2009). *Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica.*

Castellanos, M., & Obando, J. A. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico.*

Córdoba, L., Díaz, M., Haye. E., & Montenegro, F. (2013). *Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas.*

Dirección General del Bachillerato. (2013). *Programa de estudio: Matemáticas I*. México: Autor.

Escalante, J. E., & Cuesta, A. (2012). *Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios.* Educación matemática, *24*(1), 107-132.

Fleming W. y Varberg D. (1991). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Prentice Hall.

Fuentes, M. (2017). *México social: educación superior, la desigualdad.* Excelsior. Recuperado de: http://www.excelsior.com.mx/nacional/2017/08/08/1180263

Galagovsky, L. R., & Cittadini, P. E. (2008). *Enseñanzas de ecuaciones lineales en contexto*. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, *26*(3), 359-374.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2008*). Poster EOS (Síntesis actualizada del EOS en formato poster; se muestran las fuentes y conexiones con otros marcos teóricos).*

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). *Un Marco Teórico Integrativo para la Educación Matemática.*

Godino, J. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Brasil: XIII CIAEM-IACME.

de Herrero, S. M. S. (2004). *Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *7*(1), 49-78.

Juárez, J. (2011). *Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV*. Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 76, 83-103.

López, A., Moreno, B., & Souza, M. (2010). *Reconocimiento de la identidad de la variable algebraica en estudiantes brasileños y mexicanos.*

Manfredi, V. (2007). *Funciones matemáticas ¿para qué se utilizan?: la realidad de las funciones lineales.* Revista argentina de psicopedagogía, (61), 9.

Moreno, I. D., & Cobo, L. D. (1997). *Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita*. *Revista EMA, 2*(3), 247-258.

National Council of Teachers of Mathematics (2000*). Principles and standards for school mathematics (Vol. 1).*

Ocares, G. M., & González, M. P. (2012). *Estudio de la función lineal en estudiantes con déficit auditivo: ¿Un problema de tiempo o ritmo de aprendizaje?* Número 31–Septiembre de 2012, 85.

Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999). *La ecuación lineal con dos variables*. Enseñanza de las Ciencias, 17(3), 453-461

Peral, L., & Gómez, J. (2003*). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario.* Mosaicos Matemáticos, 11.

Peralta García, J. (2002). *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal.* Memorias de la XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Universidad de Sonora. México, 166-173.

Programme for International Student Assessment. (2012). *México en PISA 2012: Resumen Ejecutivo*. Recuperado de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11149/1/images/Mexico_PISA_2012_Resumen_Ejecutivo.pdf

Rivero, F. (2000). *Resolviendo las ecuaciones lineales con el uso de modelos.* Notas de matemática, (201), 1.

Roldán, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8 y 9 grados de educación básica.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu. co/12943/1/1186875.2013. pdf.

Santafé, O., & Triana, A. (2009). *Variable: una construcción desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico.*

Secretaría de Educación Pública. (2016). *Modelo educativo 2016: El planteamiento pedagógico de la reforma educativa.*

Secretaría de Educación Pública. (2017a). *Los fines de la educación en el siglo XXI*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2017b). *Nuevo modelo educativo*. México: Autor.

Sistema de Gestión Escolar de la Educación Media Superior. (s/f). *Resumen Ejecutivo*. México. Secretaria de Educación Pública.

Socas, M. (2011). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación*. NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77, 5-34.

Trigueros, M., Quintero, R., Reyes, A., & Ursini, S. (1996*). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra*. Congreso.

Vargas, J., Rodríguez, M., Del Castillo, A., Villalba, M., Ibarra, S., Grijalva, A., Armenta, M., Ávila, R., Urrea, M., Soto, J., Bravo, J. (2014). *Matemáticas 1: Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos*. Grupos de servicios gráficos del centro S. A. de C. V. México

Yuste, F. C. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* (Vol. 115). Graó.

Anexos

-Lee cuidadosamente y ayuda a resolver los siguientes problemas.

Actividad 1

Festejando las fiestas patrias

La familia Martínez está organizando una fiesta patria para el mes de septiembre y planea invitar a todos sus primos, tíos y amigos cercanos. Además de los alimentos, la familia Martínez quiere ofrecer aguas frescas a sus invitados y para ello deciden comprar concentrados en polvo de jamaica, limón y horchata.

Según las instrucciones de preparación, las proporciones para hacer 2 litro de aguas frescas de cada sabor son las siguientes: 20 gr de concentrado para jamaica, 15 gr de concentrado para limón y 30 gr de concentrado para horchata.

1. Si se quisiera preparar 3 litros de agua fresca de cada sabor ¿cuántos gramos de concentrado ocuparían por cada una? Escribe tu procedimiento.

2. Llena la siguiente tabla con las cantidades de concentrado necesarias para producir las aguas frescas requeridas.

Litros de aguas frescas que se desean preparar	**4L**	**6 L**	**7.5L**
Gramos de concentrado de jamaica (j)			
Gramos de concentrado de limón (l)			
Gramos de concentrado de horchata (h)			

Tabla 1

3. Construye una gráfica donde se representen los gramos de concentrado necesarios para preparar las aguas frescas para las tres bebidas y compara tu gráfica con la de tus compañeros.

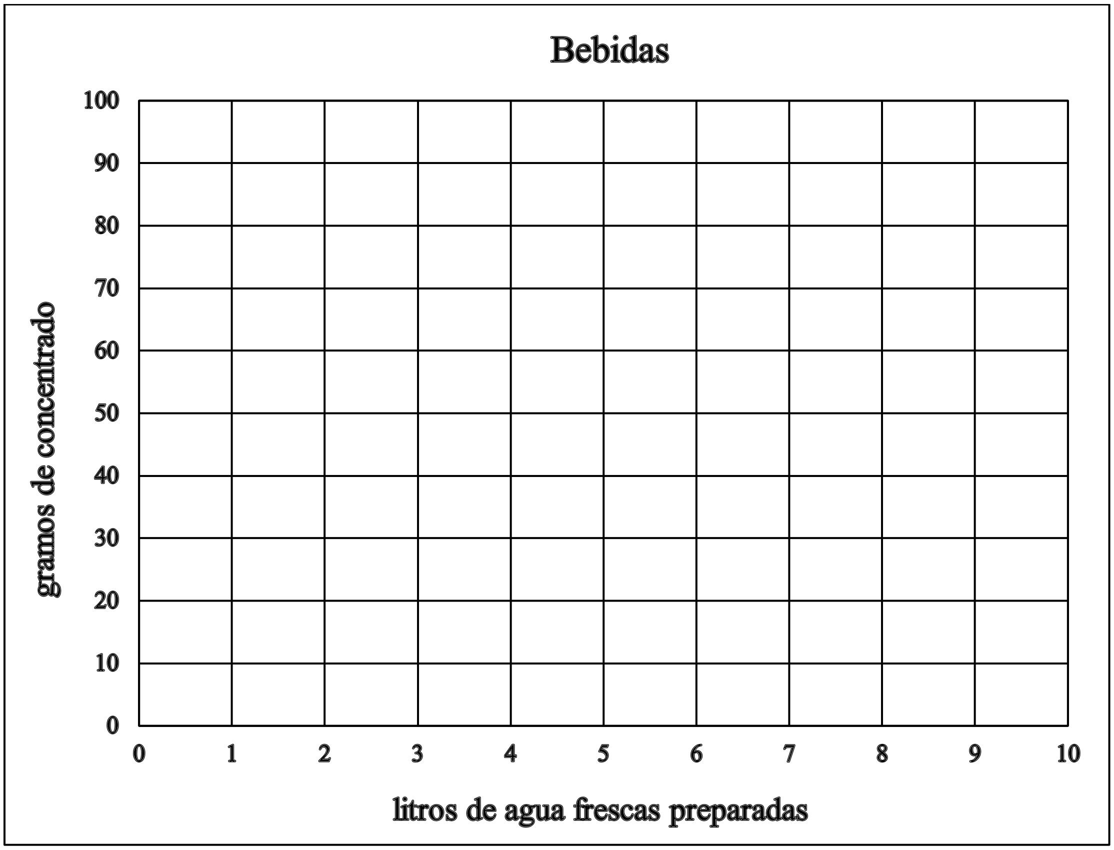


Figura 1

4. Si se requiere hacer 15 litros de bebida de jamaica para los invitados, ¿cuantos gramos de concentrado de jamaica son necesarios? Escribe tu procedimiento

5. Si solo se tuvieran 240 gr de concentrado de horchata, ¿cuántos litros de bebidas se podrían preparar de cada uno? Justifica tu respuesta

Actividad 2

Asesoría mercadotécnica:
En búsqueda del crecimiento

Existen agencias de mercadotecnia que ofrecen asesorías a empresas comerciales para mejorar sus ganancias por medio de cambios en sus procesos administrativos y de producción. Una pequeña empresa local llamada ´Refresh´ que se dedica a la venta de bebidas energéticas desea contratar una agencia de mercadotecnia para que le ayude a incrementar sus ganancias, por lo que decide pedir un presupuesto a las dos agencias más destacadas de la localidad, una llamada i-Tech y otra llamada Axpel.

La agencia i-Tech (i) les ofrece un plan a la empresa Refresh con la posibilidad de bajar los costos de producción para obtener en promedio un 20% más de ganancias en la venta de las bebidas energéticas (esto significa que por cada $1 que ganaba la empresa Refresh, contratando i-Tech ahora ganará $1.20), y la agencia Axpel (a), al igual que la otra agencia, le ofrece la posibilidad de incrementar sus ganancias hasta un 30% más por cada venta. A continuación, la empresa Refresh realiza una gráfica para comparar el posible incremento en sus ganancias si se contratara la asesoría de alguna de las agencias.

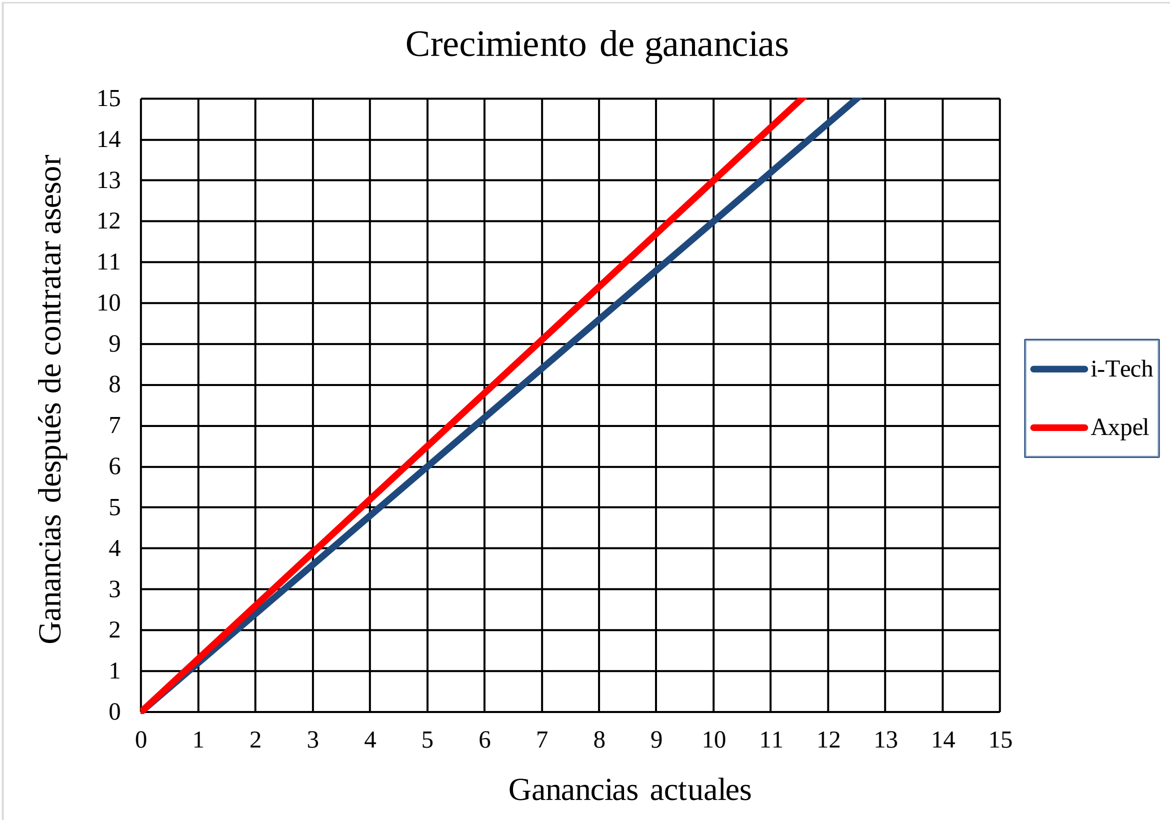


Figura 2

1. Basándonos en la gráfica de la Figura 2, ¿cuáles serían las ganancias después de contratar un asesor si se tiene una ganancia actual de $5?

   a) Con el asesor i-Tech (i)

   b) Con el asesor Axpel (a)

2. Observando la gráfica, interpreta con tus palabras el hecho de que la gráfica de las ganancias:

   a) pase por el punto (10,12) con i-Tech

   b) pase por el punto (10,13) con Axpel

3. Describe qué tienen en común las 2 rectas de las ganancias contratando a los asesores representadas en la gráfica

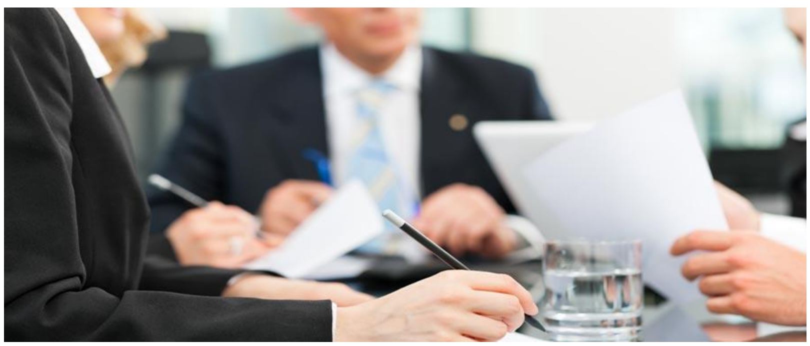
4. Las 2 rectas que representan las ganancias con los distintos asesores comienzan desde el mismo punto (0,0) ¿Cuál será el significado de esto? ¿a qué crees que se deba? Danos tu opinión

5. Las dos gráficas mostradas tienen distinta inclinación ¿A qué crees que se deba la diferencia? Argumenta tu respuesta

Actividad 3
Asesoría mercadotécnica: La contratación

La empresa Refresh aún no sabe que asesor le convendrá más a su producto debido a los costos de contratación que tendrán que pagar. Los precios, los cuales son un único pago inicial, son los siguientes:

$5,000 para contratar i-Tech, y $15,000 para contratar Axpel.



Como ya se mencionó anteriormente, el producto que ellos comercializan son bebidas energéticas, por lo que sus ganancias por unidad no son muy altas y no saben que tanto dinero deberían de invertir. La ganancia que obtiene por vender 1 litro de bebida es de $10.

Recordando lo antes visto, se pronostica que al contratar i-Tech las ganancias crecerán en un 20%, y contratando Axpel un 30%.

1. Obtén la nueva ganancia al vender un litro después de contratar a:

   a) i-Tech (i)

   b) Axpel (a)

2. ¿De cuánto sería la nueva ganancia, después de contratar un asesor, por la venta de 20 litros de bebida? Desarrolla tu procedimiento para cada asesor

3. ¿De cuánto sería la nueva ganancia, después de contratar un asesor, por la venta de x litros de bebida? Desarrolla tu procedimiento para cada asesor y compara tu expresión algebraica con el de tus compañeros

Recordemos que las **expresiones algebraicas** son muy útiles para resolver problemas, con ellas podemos encontrar el procedimiento matemático adecuado que nos ayude a encontrar distintas soluciones a pesar de que cambien los valores, como es en el caso del punto 3.

En la siguiente gráfica se pronostican las nuevas ganancias después de haber contratado un asesor (ahora se incluye el costo inicial de contratación: $5,000 para i-Tech, y $15,000 para Axpel), con el estimado de que la empresa Refresh vende 1400 litros de bebidas energéticas en promedio mensualmente.

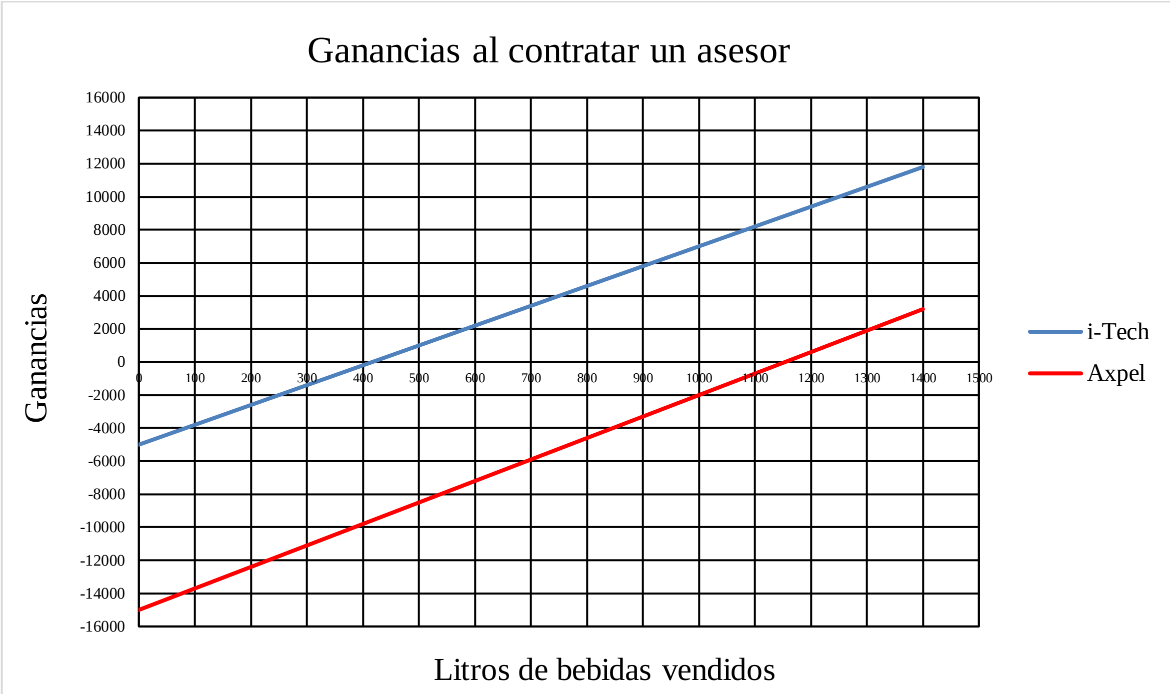


Figura 3

4. ¿Por qué las gráficas no comienzan en $y = 0$? Argumenta tu respuesta

5. Ambas gráficas cruzan el eje de las x, ¿Qué representa esto para la empresa Refresh?

Asumiendo que se deberá de pagar el costo de contratación al asesor:

6. ¿Cómo serían las nuevas expresiones algebraicas incluyendo los costos de contratación? Utiliza las expresiones que realizaste en el punto 3 para apoyarte y compara tus expresiones con tus compañeros.

7. ¿Cuántos litros de bebidas se deberán de vender para cubrir los costos de contratación y comenzar a obtener ganancias? Encuentra la cantidad para cada asesor.

8. ¿Cuál de los dos asesores convendría contratar al plazo de doce meses? Justifica tu respuesta y comenta con tus compañeros que asesor contratarías tu

Actividad 4

La venta de galletas caseras: El inicio de algo grande

Dos amigos que acaban de terminar el bachillerato, Jesús y Ricardo, deciden vender galletas durante el verano y así recaudar dinero para su viaje de graduación a la playa. Los amigos hacen pruebas en sus casas para la preparación de diferentes tipos de galletas y optan por vender las de chispas de chocolate, debido a su sabor y su fácil elaboración.

Tomando la decisión de comenzar lo más pronto posible, se disponen a ofrecer las galletas a sus amigos y familiares. Deciden ponerle un **precio (p)** de \$8 por cada 40 gr. Con ayuda del hermano mayor de Ricardo, realizan la proyección mostrada en la Figura 4 de las **ganancias (g)** que se podrán obtener por la **venta de galletas (v)**. En la gráfica se muestran las ganancias después de haber tomado en cuenta los **costos (c)** de preparación (material, electricidad y gas).

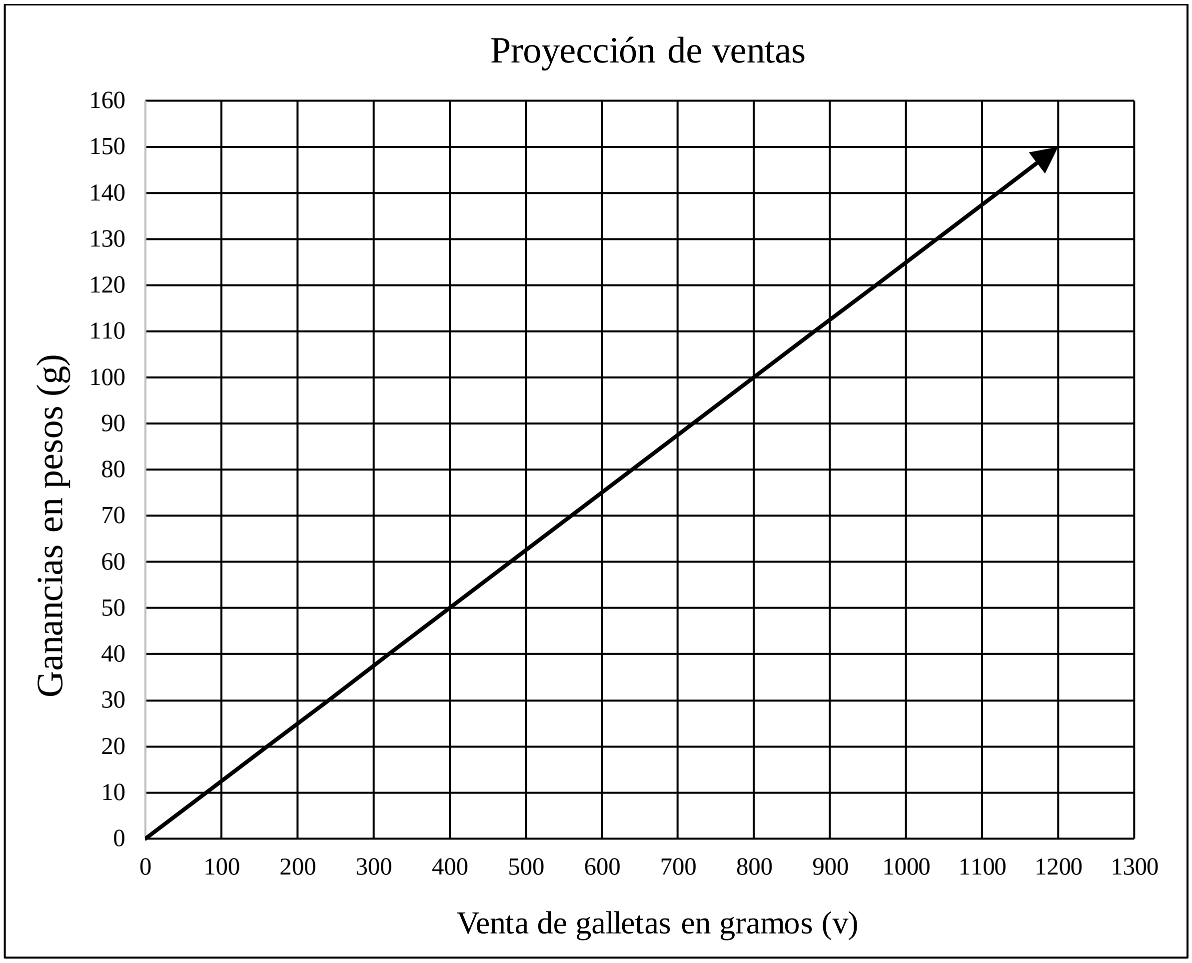


Figura 4

1. Elabora una fórmula para obtener las ganancias y compara con tus compañeros

2. Según la gráfica mostrada en la Figura 4, ¿cuál es la ganancia que se obtiene al vender 400 gr de galletas?

3. ¿Cuál es la ganancia que se obtiene al vender 40 gr de galletas? Justifica tu respuesta y compara con la de tus compañeros

4. Habiendo encontrado la ganancia al vender de 40 gr de galletas y teniendo en cuenta que el precio de venta al público es de $8 ¿Cuánto es el costo de producir esos 40 gr de galletas?

5. ¿Cuál sería la ganancia por cada uno de los siguientes pedidos?

Venta en gr (v)	**720gr**	**1200gr**	**2400gr**	**4000gr**
Ganancias (g)				

Tabla 2

6. Si a Jesús y Ricardo les llegara un pedido de 5000 gr de galletas para un evento, ¿cuáles serían las ganancias? Desarrolla tu procedimiento

7. ¿Cómo expresarías algebraicamente las ganancias para cualquier cantidad de gramos de galletas vendidas? Compara con tus compañeros tu expresión

Habiendo encontrado la expresión, se podrá saber cuál será la ganancia para cualquier pedido que se pueda presentar aun antes de producirlos y venderlos, esto representa una gran ayuda para Ricardo y Jesús debido a que podrán saber las ganancias que podrían tener y así saber que tan viable es su negocio.

8. Con ayuda de la expresión algebraica encontrada, si Ricardo y Jesús están interesados en obtener $8,000 pesos para su viaje de graduación ¿cuántos gramos de galletas necesitan vender?

Actividad 5

La venta de galletas caseras: Una microempresa de éxito

Jesús y Ricardo, los amigos que comenzaron la venta de galletas, tuvieron tal éxito que deciden expandir su proyecto y no solo reunir dinero para su viaje, si no tomarlo como una gran oportunidad de negocio, por lo que deciden crecer y para ello rentan un departamento en el cual podrán producir las galletas con mayor facilidad y en mayor cantidad, pero ahora tendrán que pagar $1,000 pesos mensuales por la renta, por lo que toman la decisión de cambiar el precio a $200 por cada 1000 gr de galletas.

1. Si el costo de producción de las galletas no ha cambiado: materiales, electricidad y gas; ¿cuál sería el costo por cada 1000 gr de galletas vendidas? Recuerda que ya se obtuvo el costo de producción de galletas en el punto 4 de la Actividad 4

2. ¿Cuál sería la ganancia por cada 1000 gr de galletas vendidas? Compara tu resultado con el de tus compañeros

3. Encuentra las ganancias que se obtendrían si se vendieran 7500 gr de galletas. Desarrolla tu procedimiento

4. ¿Qué expresión algebraica representaría las nuevas ganancias mensuales? Recuerda incluir el costo de la renta.

5. Encuentra las ganancias para las distintas cantidades de galletas vendidas.

Venta en gr (v)	**0gr**	**2000gr**	**4000gr**	**7000gr**	**10000gr**	**12000gr**
Ganancias (g)						

Tabla 3

6. Gráfica las ganancias encontradas en la Tabla 3.

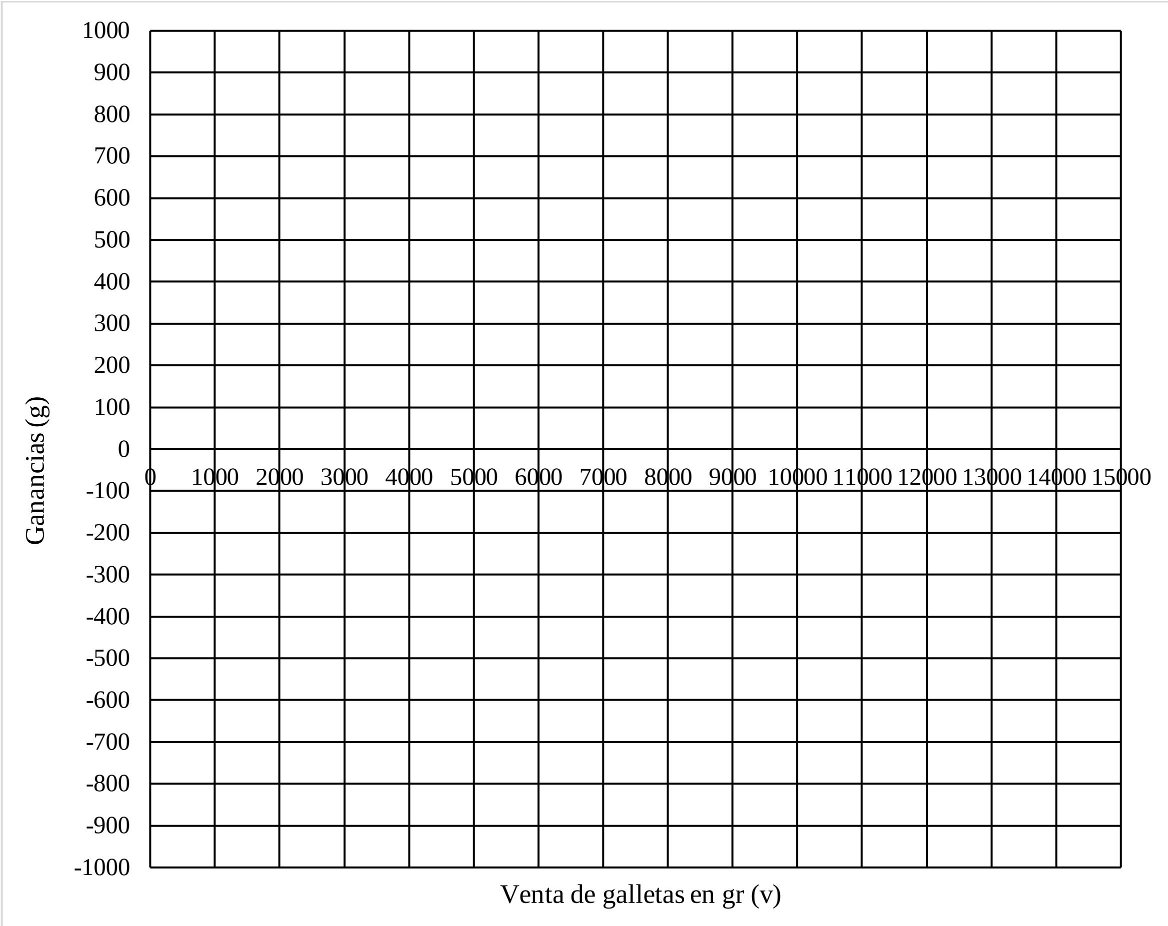


Figura 5

7. Como Ricardo y Jesús deben de pagar la renta, primero deben de cubrir este gasto antes de comenzar a ver ganancias, ¿Cuántos gramos de galletas deberán vender para cubrir el pago de la renta? Desarrolla tu procedimiento

Actividad 6

Función Lineal

Recordando la actividad 4 "La venta de galletas caseras: el inicio de algo grande", se presentaba una gráfica en la Figura 4, donde se mostraban las ganancias que se obtenían al vender cierta cantidad de galletas:

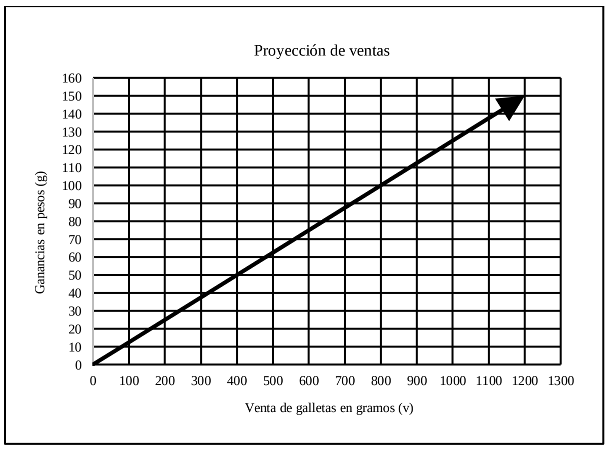


Figura 4

Como mencionábamos anteriormente, los valores que toman las ganancias guardan una relación proporcional a la cantidad de galletas vendidas. Representando la actividad 4 con una recta, las ganancias en pesos se identifica algebraicamente como **variable dependiente** (la cual se representa con la letra y) debido a que es un valor que cambia en función a las ventas de galletas, por lo que depende de él, y a la venta de galletas se le llama **variable independiente** (representada con la letra x), porque los cambios de valores no dependen de otra variable.

Si la variable independiente crece, la variable dependiente también crece, y lo hace en una proporción constante, al conjunto de todos los valores que pueden tomar las variables se representa con una **Función Lineal**, y algebraicamente se representa de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y = mx}$$

La m representa a la **pendiente**, la cual gráficamente es la inclinación de la recta o se puede entender como las unidades que avanza la recta en el eje y por cada unidad que avanza en el eje x.

A continuación se presenta la gráfica de una función lineal, donde el eje horizontal será representado con x y para el eje vertical se representará con y. Observando la imagen, contesta las siguientes preguntas.

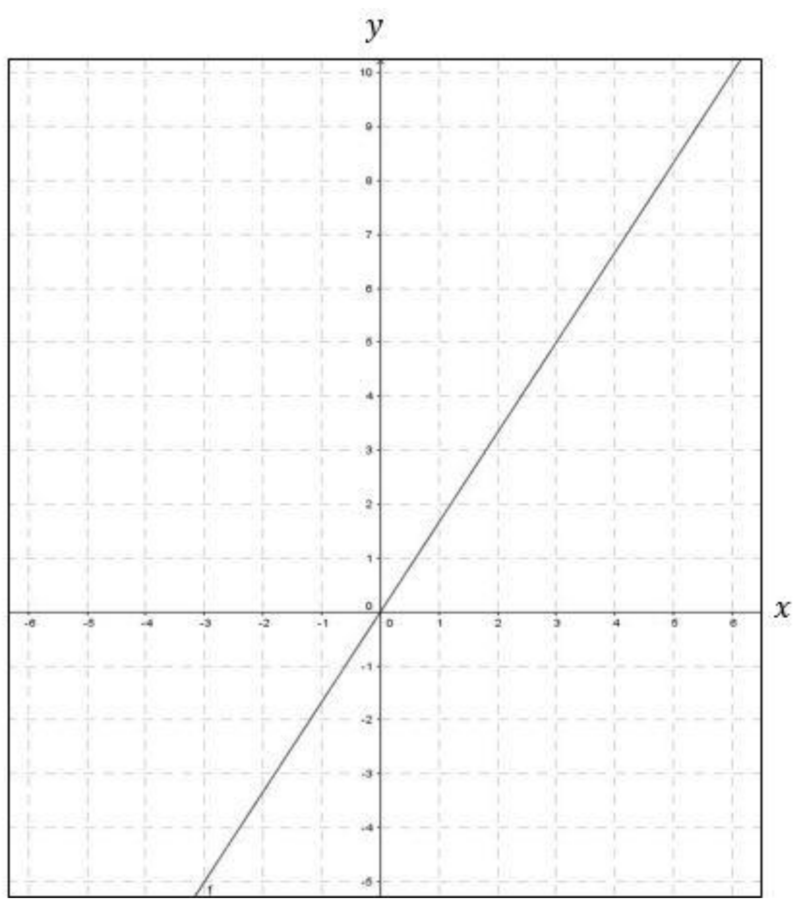


Figura 6

1. Encuentra los valores de la recta en el eje y para los siguientes valores en x

x	y
3	
6	
-3	
-6	
1	

2. El valor de y en $x = 9$ sería igual a 15, ¿a qué se debe esto? Justifica tu respuesta

3. ¿Cuál sería el valor de y cuando $x = 30$? Desarrolla tu respuesta

4. ¿Cuál es el valor de m en esta función?

5. Elabora la expresión algebraica que represente la función lineal graficada en la Figura 6.

Recordando la actividad 2 y 3 donde se le presento una cuestión a la empresa ´Refresh´ sobre qué agencia mercadotécnica contratar para su producto, se pronosticaba que si contrataban a la empresa i-Tech, sus costos disminuirían un 20%, los cuales se verían reflejados como ganancias. Esta situación anterior se puede representar algebraicamente con $y = mx$, donde x representaría las ganancias actuales, m el incremento en las ganancias actuales, y y las ganancias después de la contratación.

A continuación se presenta otra gráfica, observa y contesta lo siguiente

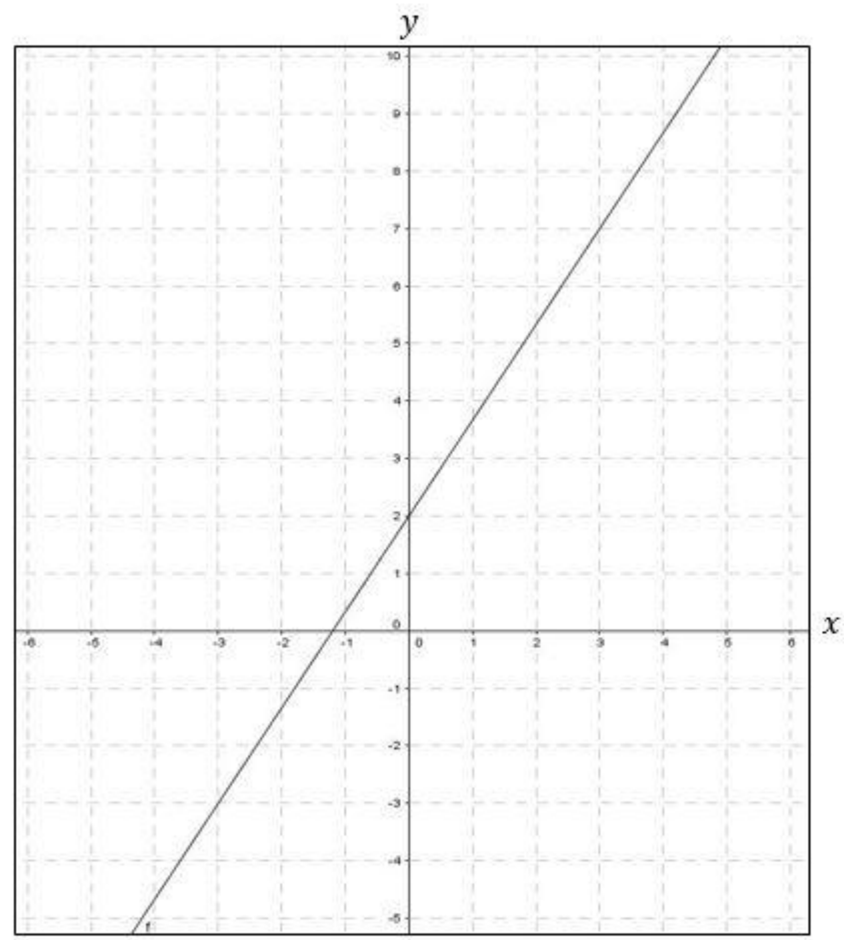


Figura 7

6. ¿Ha cambiado la pendiente? Justifica tu respuesta

7. ¿Qué diferencia encuentras en la gráfica de la Figura 7 a la de la Figura 6?

A pesar de que la recta de la Figura 7 es muy parecida a la Figura 6, se le ha agregado un factor nuevo el cual hace que la recta cambie de posición, este factor se representa como $\boldsymbol{b}$ y se agrega algebraicamente a la función lineal de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Gráficamente se puede entender como el punto por donde la recta de la función lineal corta al eje y cuando $x = 0$.

Retomando la actividad 5, al momento de decidirse contratar la agencia, la empresa ´Refresh´ debía de pagar un costo único de contratación, que tenía un costo de $5000 para contratar a la empresa i-Tech, eso quería decir que para saber cuáles serían las ganancias se debe de tomar en cuenta los gasto de contratación, por lo que la función se representaba como $y = 12x - 5000,$ con la forma de $y = mx + b$, donde y representa las ganancias, m la ganancia por ventas, x la cantidad de litros de bebida vendidas y b el costo de inversión. En este caso se agregó la constante b, que representa el punto donde la recta de la función pasa por el eje y cuando $x = 0$.