UNIVERSIDAD DE SONORA

Escuela de Altos Estudios

"TEORIA DE PERTURBACIONES CANONICAS"

T E S I S

Que para obtener el título de

LICENCIADO EN FISICA

P R E S E N T A

HUMBERTO ARISPE CHAVEZ

HERMOSILLO, SONORA **ABRIL DE 1980**

CON TODO EL AMOR DE MI VIDA PARA

MAVY

BETITO

Y

KARINA

Agradezco al Físico Jorge Téllez
la sugerencia de este tema, así_
como las horas de infinita pacien
cia que dedicó a ayudarme en la_
elaboración del presente trabajo.

A TODOS MIS AMIGOS.

" TEORIA DE PERTURBACIONES CANONICAS "

I N D I C E

P R O L O G O

" La formulación Newtoniana de la Mecánica no es la única posible. Existen además la formulación Lagrangiana, la Hamiltoniana y la Variacional. Todas ellas de forma diferente, pero equivalente, constituyen la Mecánica Analítica.

Sin embargo, desde otro punto de vista, si podríamos hacer una distinción entre la formulación Newtoniana y la Analítica:

Según la primera, una fuerza sobre un cuerpo se considera que produce un movimiento definido, esto es, a cada causa corresponde un efecto que puede ser debidamente predicho en base al conocimiento de aquélla. Según el Principio de Hamilton, el movimiento de un cuerpo puede considerarse como una consecuencia de la estructura del Universo, en donde la evolución obedece cierto propósito, o encierra una información: que el Tiempo, la Energía, la Trayectoria, sea un MINIMO.

Claro está que la solución operacional de un problema mecánico no depende del punto de vista adoptado; pero históricamente, tales consideraciones han tenido una profunda influencia en el desarrollo de la Mecánica.

Desde un punto de vista matemático, Fermat resumió toda la carrera de un rayo de luz al pasar por medios de distintas densidades ópticas: la dirección que sigue la luz es aquélla que con todo propósito la hace llegar "a la mayor brevedad posible" al sitio donde REALMENTE llega. Toda desvia---

ción del camino que el rayo ha escogido, significará un retraso en el tiempo de llegada. Este es el célebre principio del Tiempo Mínimo de Fermat,- y que parece ser la quintaesciencia de la Teoría Ondulatoria.

Fue por tanto muy notable que un día, Hamilton descubriera que también la órbita de un punto de masa que se mueve en un campo de fuerza, está gobernada por un principio general de índole muy parecida.

Aunque el Principio de Hamilton no declara que el punto de masa elige la- vía más rápida, sí afirma algo tan similar, es decir, tan íntimamente relacionado con el principio del Tiempo Mínimo de Fermat, que nos encontramos ante un verdadero misterio: diríase que la Naturaleza ha hecho dos veces la misma cosa, una con la luz, mediante un mecanismo ondulatorio, y otra con los puntos de masa, pero mediante mecanismos un tanto misteriosos a menos que estuviéramos dispuestos a creer en algún carácter subyacente - de tipo ondulatorio también en el segundo caso..." (*)

(*) E. SCHROEDINGER "QUE ES UNA LEY DE LA NATURALEZA ? ". Breviarios. Núm 43

INTRODUCCION

Antes del advenimiento de la moderna teoría cuántica, se había encontrado que la Teoría atómica de Bohr, podía tratarse con mayor facilidad en términos de la teoría de Hamilton Jacobi. El tema fue objeto de extensos estudios por autores tales como Max Born.*

En la mayoría de los cursos de mecánica clásica, la teoría de transformaciones canónicas, y la ecuación de Hamilton Jacobi son cubiertas hacia la parte final del curso. La teoría clásica de perturbaciones podría ser un complemento excelente a estos cursos, después del estudio de la ecuación de Hamilton Jacobi, pero los métodos de Perturbación asociados al tema, han sido desplazados, con el evidente propósito de ser contemplados en el curso de Mecánica Cuántica.

Este es por tanto, el objetivo de mi trabajo: en vista de que en Licenciatura sólo hemos tenido acceso a los conceptos asociados a las Perturbaciones, a través de los cursos de Mecánica Cuántica, estos apuntes pretenden revivir el hecho de que dichos conceptos se originaron con la Mecánica Clásica, y que el tratamiento de la Teoría de Perturbaciones alcanzó su época más gloriosa con la Teoría de Hamilton Jacobi.

No se pretende, desde luego, efectuar una investigación profunda del tema; tal vez algunas cuestiones importantes hayan quedado sin revisar. Pero el interés del autor de este trabajo, es sólo presentar de la manera más clara posible para el estudiante de Licenciatura, la estructura clá

*MAX BORN "LA MECANICA DEL ATOMO" . UNGAR Nueva York, 1960 Cap.IV.

sica del tratamiento de las perturbaciones a partir de las ecuaciones de Hamilton Jacobi, y del tratamiento de algunos problemas en los que se ha incluído una perturbación.

A modo de ejemplo, utilizaremos con mucha frecuencia el Oscilador Armónico, en cuyo hamiltoniano incluiremos tres distintos potenciales perturbadores: λq^2, λq^3, λq^4.

El primer capítulo está dedicado a la Teoría de Hamilton Jacobi. Apartir de las ecuaciones de Lagrange obtenemos las ecuaciones de Hamilton, y revisamos la teoría de Transformaciones canónicas. Introducimos asimismo, el formalismo de las variables Angulo y Acción. Presentamos aquí dos ejemplos: El problema de Képler, y el Oscilador Armónico Tridimensional (sin perturbar). Al final hacemos una pequeña discusión de la conexión existente entre la Teoría de Hamilton Jacobi, y la antigua teoría cuántica de Bohr Sommerfeld.

En el segundo capítulo estudiaremos las perturbaciones. Este capítulo lo hemos dividido en dos partes, correspondientes a la Teoría de Perturbaciones estacionarias, y la Teoría de Perturbaciones Dependientes del Tiempo.

PRIMERA PARTE.- Analizaremos tres métodos distintos para tratar el problema del Oscilador anarmónico unidimensional: dos métodos directos y la teoría de Perturbaciones Canónicas. Al final de esta unidad, hacemos una pequeña discusión de las ventajas y desventajas de cada uno de dichos mecanismos de solución. Pasamos enseguida al caso multidimensional: Analizamos primero el caso No degenerado, y presentamos como ejemplo el oscilador anarmónico Bidimensional. Para el tratamiento del caso Degene

rado no presentamos ejemplo; únicamente nos concretamos a discutir el procedimiento que se maneja en este caso y hacemos algunas consideraciones breves sobre los problemas físicos inherentes a los que se aplica la teoría.
Pasamos enseguida a ver el caso Dependiente del tiempo. Para simplificar el trabajo, únicamente nos referimos al caso unidimensional y presentamos dos ejemplos: el movimiento lineal, y de nuevo el oscilador anarmónico.
Para terminar, hacemos un breve resumen,de este trabajo, sus resultados y sus limitaciones. Creemos que con lo discutido, se cumple el objetivo básico de este trabajo: Esbozar el desarrollo y aplicación de la Teoría Clásica de Perturbaciones.

CAPITULO I

TEORIA DE HAMILTON JACOBI

Entre nuestros más primitivos conceptos del mundo físico, está el de la localización de los objetos.Dicha localización tenemos que hacerla en el espacio.Podemos definir entonces el movimiento como el cambio de la posición en el espacio.

Es función de la Mecánica construir las leyes y determinar las consecuencias del movimiento.

Dentro de la infinita riqueza de la Naturaleza, la Mecánica ha hecho aportaciones muy valiosas al estudio del movimiento; lo maravilloso y tal vez sorprendente de este asunto es que , a pesar de haber sido casi abatida generación tras generación, a través de los años, la vieja maquinaria de la Mecánica se niega a morir, y permanece todavía como fuente de indagación científica.

La Mecánica define las cantidades que son vitales para la descripción del movimiento, para descubrir las leyes que lo gobiernan, y establecer aquella clase de observadores que están de acuerdo con dichas leyes.

Una vez establecido el sistema de referencia apropiado,podemos estructurar nuestros principios dinámicos, partiendo de Newton, o bien de algún principio de extremo.

Partiremos de un principio de extremo: el PRINCIPIO DE HAMILTON.*

I.1 ECUACIONES DE LAGRANGE.

Consideremos un sistema mecánico arbitrario. Supongamos que sus partes están conectadas por condiciones holonómicas sólamente,** de modo que el número de grados de libertad del sistema sea f. Introduciremos ahora un

*Ver Apéndice.

**Condiciones de la forma $\Phi(q_1, q_2, \ldots q_s)$ = const. q_i: coordenadas conjunto de f coordenadas generalizadas $q_1,\ldots q_f$, y un conjunto de f velocidades generalizadas $\dot{q}_1,\ldots\dot{q}_f$.

La expresión más general para determinar el movimiento de un sistema mecánico, está dada por una función L (Lagrangiana) que depende de las variables mencionadas y el tiempo:

I.001 (a) $$L = L(q_1,\ldots q_f,\dot{q}_1,\ldots\dot{q}_f,t)$$

o más abreviadamente:

I.001 (b) $$L = L(q_i,\dot{q}_i,t) \qquad i = 1,2,\ldots f.$$

Es posible demostrar que esta función describe la trayectoria real de un sistema mecánico, si satisface el conjunto de f ecuaciones diferenciales:

I.002 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Conjunto denominado de Euler-Lagrange.

En física galileana, el lagrangiano es de la forma:

I.003 $$L = T - V$$

donde T es la Energía Cinética, y V la Energía Potencial del Sistema. Podemos definir el momento p_i como:

I.004 $$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

y la fuerza que actúa sobre la iésima partícula será:

I.005 $$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Si L no es función o no depende de la coordenada q_k, entonces se dice que el Lagrangiano es cíclico en q_k, o dicho de otro modo, q_k es una coordenada ignorable. De I.005, tendremos:

I.006 $$F_k = \frac{d}{dt} p_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow p_k = \text{const.}$$

I.2 ECUACIONES DE HAMILTON

La dinámica Lagrangiana describe el movimiento de un sistema físico en términos de las posiciones y las velocidades de las partículas que componen el sistema. Como las ecuaciones de Lagrange I.002 son de segundo orden, el movimiento del sistema estará completamente determinado si existen condiciones iniciales que caractericen el estado de dicho sistema en algún instante de tiempo.

En ese sentido, las q_i y las $\dot{q}_i$ juntas, forman un conjunto de 2f variables independientes, de modo que el estado del sistema puede ser descrito como un punto en un espacio 2f-dimensional llamado "de Configuración".

Obtendremos ahora una formulación en la cual las variables independientes serán COORDENADAS GENERALIZADAS y MOMENTOS GENERALIZADOS. Supondremos sistemas holonómicos y fuerzas derivables de un potencial. El estado del sistema será representado ahora como un punto en un espacio 2f-dimensional, llamado "espacio Fase".

El cambio de base de las variables $(q_i, \dot{q}_i, t)$ a las nuevas variables (q_i, p_i, t), puede efectuarse mediante un proceso matemático llamado "Transformación de Legendre" *

La diferencial total de la Ecuación de Lagrange es (de I.001)

I.007 $$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

O bien, usando I.004:

I.008 $$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

*Ver Apéndice

Por otro lado, podemos escribir:

I.009 $$\sum_i p_i\, d\dot{q}_i = d\left(\sum_i p_i\, d\dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i\, dp_i$$

que sustituída en I.008 y haciendo operaciones,

I.010 $$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_i \dot{q}_i\, dp_i - \sum_i \dot{p}_i\, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

El término de la izquierda de I.010 es la diferencial exacta de una fun-- ción que depende de las coordenadas y de los momentos, o sea precísamente la función que buscamos. Podemos llamarle dH.

Entonces:

I.011 $$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

H se llama la Función de Hamilton. $H = H(q_i, p_i, t)$

Por otro lado, la diferencial total de esta función es :

I.012 $$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Comparando I.012 con I.010, obtenemos:

I.013 $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de "ECUACIONES CANONICAS DE HAMILTON". Difieren de las ecuaciones de Lagrange, en que éstas constituyen un con-- junto de 2f ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en tanto que aquéllas, son un conjunto de f ecuaciones diferenciales de segundo orden. Si el lagrangiano L del sistema se conoce, el Hamiltoniano H del sistema puede obtenerse de I.011.

Si el sistema es tal que el hamiltoniano no depende del tiempo, y además las fuerzas son derivables de un potencial, entonces *

I.014 $$H = T + V = E$$

Las ecuaciones I.013, por su sencillez y simetría se llaman CANONICAS, y las variables q , p se llaman conjugadas.

En la práctica, la condición más sencilla para resolver el sistema de ecua I.013, consiste en que alguna de las coordenadas sea cíclica. Para ésto, podemos establecer un mecanismo que nos permita encontrar un conjunto de variables en el cual el mayor número de coordenadas sea ignorable. Podemos hacerlo mediante una transformación de las coordenadas (q_i , p_i) a las nuevas coordenadas (Q_i , P_i)

I.3 TRANSFORMACIONES CANONICAS

Cuando se aplica directamente la formulación hamiltoniana para resolver un problema mecánico dado, generalmente pueden encontrarse las mismas dificultades que con la formulación de Lagrange. Sin embargo, podemos encontrar una transformación en la cual TODAS LAS COORDENADAS SEAN CICLICAS.

En ese caso, TODOS los momentos son constantes:

I.015 $$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \alpha_i$$

*Ver el Apéndice (Hamiltoniano independiente del Tiempo)

Tenemos entonces que $H = H(\alpha_i)$

Además:

I.016 $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i$$

en donde ω_i es función sólo de las α_i's .

y por tanto:

I.017 $$q_i = \omega_i t + \beta_i$$

Es posible encontrar el conjunto de coordenadas Q_i , P_i a partir del antiguo conjunto q_i , p_i , a través de las ecuaciones:

I.018 $$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t) \qquad P_i = P_i(q_i, p_i, t)$$

El nuevo conjunto se dice que es canónico si las ecuaciones de movimiento a que da lugar, tienen la misma forma que I.013 :

I.019 $$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \qquad \frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

en donde estamos llamando K al Hamiltoniano asociado a las nuevas variables: $K = K(Q_i, P_i, t)$

El nuevo lagrangiano L' deberá tener la forma $L' = \sum P_i \dot{Q}_i - K$

Combinando esta última ecuación con I.011, y aplicando el Principio de Hamilton: *

*Ver Apéndice.

I.020 $$\sum_i p_i \dot{q}_i - H - \left(\sum P_i \dot{Q}_i - K \right) = \frac{dF}{dt}$$

F se llama la Función generadora de la Transformación. Una vez especificada la forma de F, se pueden encontrar las ecuaciones I.018.

Distinguiremos cuatro diferentes combinaciones de variables para F :

I.021 $$F = F_1\ (q_i, Q_i, t) \qquad F = F_2\ (q_i, P_i, t)$$
$$F = F_3\ (p_i, Q_i, t) \qquad F = F_4\ (p_i, P_i, t)$$

con las cuales obtenemos las ecuaciones canónicas correspondientes

I.022 $$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \qquad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

I.023 $$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

I.024 $$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \qquad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

I.025 $$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \qquad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Como ilustración podemos considerar una función generadora del tipo F_2 :

I.026 $$F_2 = \sum_i q_i P_i$$

De modo que se obtienen las siguientes ecuaciones de transformación:

I.027 $$p_i = P_i \qquad Q_i = q_i \qquad K = H$$

que corresponden precísamente a una transformación identidad. *

I.4 ECUACIONES DE HAMILTON JACOBI.

Una transformación canónica puede usarse para simplificar el mecanismo de solución de las ecuaciones dinámicas. Pero ahora iremos más lejos: buscaremos una transformación a un conjunto de coordenadas y momentos en el cual se tenga:

$$P_i = \text{constante} \qquad Q_i = \text{constante}$$

Para ésto requeriremos:

I.028 $$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0 \qquad -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0$$

que se satisface sólo si :

I.029 $$K = 0$$

Pero la relación entre K y H es, de acuerdo con las ecuaciones de transformación:

* Este resultado será utilizado más adelante.

I.030 $$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Por tanto tendremos:

I.031 $$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Es conveniente ahora tomar como función generadora una función del tipo 2 $F = F_2(q_i, P_i, t)$. Luego, I.031 se escribirá:

I.032 $$H\left(q_i, \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Esta expresión de conoce como ECUACION DE HAMILTON JACOBI (HJ).
Debido a que $i = 1,2,\ldots f.$, la integración de esta ecuación involucra $f+1$ constantes independientes.
Sea S una función solución de I.032. Dicha ecuación quedará:

I.033 $$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

La función S se llama FUNCION PRINCIPAL DE HAMILTON.
La integración de esta ecuación sólo provee de información acerca de la dependencia en las viejas coordenadas q_i y el tiempo; parece no decir nada acerca de los nuevos momentos en S. Sólo sabemos que deben ser constantes.
Sean las constantes de integración : $\alpha_1, \ldots \alpha_{f+1}$. Si S es solución de I.033, entonces $S + \alpha$ también lo es, ya que una constante aditiva no afecta la solución. Por tanto, una de las $f + 1$ constantes de integración debe ser aditiva. Esta constante no tiene importancia en lo que concierne

a la transformación.

Por tanto, la solución completa de I.033 puede escribirse:

I.034 $$S = S\,(q_1, \ldots q_f, \alpha_1, \ldots \alpha_f, t)$$

en donde ninguna de las α_i's es aditiva.

Ahora estamos en libertad de escoger las constantes de integración como - los nuevos momentos, con lo cual se cumple el requerimiento inicial para- esta transformación:

$$P_i = \alpha_i$$

Las ecuaciones de transformación quedan:

I.035 $$p_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i} \qquad Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos la solución buscada:

$$q_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t)$$

que resuelve el problema en función del tiempo. y de las condiciones iniciales.

I.5 SEPARACION DE VARIABLES EN LA ECUACION DE HJ

El único método general que conocemos para resolver la ecuación de HJ es- llamado Separación de variables.

Este método trabaja sólo para ciertos hamiltonianos, y con determinadas - coordenadas generalizadas, pero cuando trabaja, es muy fácil resolver la- ecuación de HJ.

En los casos en que aplicaremos la separación de variables, el hamiltonia no será independiente del tiempo. Si nos restringimos a tales hamiltonianos, la ecuación de HJ es:

I.036 $$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Trataremos entonces de encontrar una solución de la forma

I.037 $$S = W\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) + T(t)$$

Sustituyendo I.037 en I036 tendremos:

I.038 $$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = -\frac{dT}{dt}$$

de donde: $T = -\alpha_1 t$

Por tanto

I.039 $$S = W - \alpha_1 t$$

y

I.040 $$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1$$

La ecuación I.040 es una ecuación diferencial parcial para W, la cual es llamada FUNCION CARACTERISTICA DE HAMILTON.

Si el sistema es completamente separable, entonces

I.040 (b) $$W(q_1, \ldots q_f, \alpha_1, \ldots \alpha_f) = \sum_f W_i(q_i, \alpha_1, \ldots \alpha_f)$$

y la ecuación de H-J se separa en f ecuaciones de la forma:

I.040 (c) $$H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \alpha_1, \ldots \alpha_f\right) = \alpha_i$$

I.6 VARIABLES DE ANGULO Y ACCION

El formalismo de HJ es una poderosa técnica para extraer información acerca de los sistemas periódicos, sin necesidad de obtener completamente las soluciones dinámicas. En estos sistemas periódicos, es común distinguir dos tipos de movimiento: LIBRACION Y ROTACION.

En una Libración, las coordenadas y el momento conjugado, son funciones periódicas de t, con la misma frecuencia, mientras que en una rotación, la coordenada no es en sí misma periódica, pero el momento conjugado se repite cada vez que la coordenada pasa a través de un cierto intervalo q_0.

Para sistemas multidimensionales, cuando la ecuación de HJ es separable, el concepto de Libración y rotación se aplica a la proyección de la órbita en cada plano.

Introduciremos un nuevo par de variables que nos serán de gran ayuda para estudiar movimientos que son periódicos, como el del oscilador armónico o el del Problema de Képler.

Podemos entonces esquematizar nuestra nueva transformación así:

$Q_i = w_i$ (variable angular) $\quad$ $P_i = J_i$ (variable de acción)

Las variables de acción, podemos definirlas así:

I.041 $$J_i = \oint p_i \, dq_i$$

en donde la integración se realiza sobre un período completo de las q_i.

De I.035 y I.040, tendremos:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_1, \dots \alpha_f)$$

por tanto:

I.042 $$J_i = \oint \frac{\partial W(q_j, \alpha_j)}{\partial q_i} dq_i$$

Como la integración se realiza sobre q_i , la dependencia con respecto a este parámetro desaparece, por lo que :

I.043 $$J_i = J_i(\alpha_j)$$

Por otra parte, si alguna de las q_i's es cíclica, su momento conjugado será constante, de modo que:

I.044 $$J_i = p_i \oint dq_i = 2\pi p_i$$

De I.043, podemos expresar las α_i's como funciones de las J_i's, por lo que tendremos

I.045 $$W = W(q_i, J_i)$$

De I.035 se tendrá:

I.046 $$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i(q_i \qquad , J_1, \ldots J_f)}{\partial q_i} = p_i(q_i, J_1, J_2, \ldots J_f)$$

de donde I.040c se escribirá:

I.047 $$H_i\left(q_i, p_i(q_i, J_i)\right) = \alpha_i$$

Despejando tendremos:

I.048 $$q_i = q_i(\alpha_1, \ldots \alpha_f \ , J_1, \ldots J_f)$$

Por lo ya mencionado, en virtud de I.043 concluímos:

I.049 $$q_i = q_i(J_1, \dots J_f)$$

por lo cual, I.047 quedará finalmente:

I.050 $$H(q_i, p_i) = H(J_1, \dots J_f)$$

Las coordenadas conjugadas a J se conocen variables angulares w_i y pueden encontrarse mediante I.035

I.051 $$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$$

Del mismo modo, y de acuerdo a I.019 :

I.052 $$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_i)}{\partial J_i} = \nu_i(J_i) \qquad \dot{J}_i = -\frac{\partial H(J_i)}{\partial w_i} = 0$$

de donde obtenemos:

I.053 $$w_i = \nu_i(J_i)\,t + \beta_i \qquad J_i = \text{constante}$$

Consideremos un cambio en las variables angulares, Δw_i, cuando una de las coordenadas q_i pasa a través de un ciclo:

I.054 $$\Delta w_i = \oint \delta w_i$$

donde δw_i es un cambio infinitesimal en w_i debido a un cambio infinitesimal en q_i

I.055 $$\delta w_i = \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j$$

Combinando I.051, I.054 y I.055 tendremos:

I.056 $$\Delta w_i = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial J_i} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_j dq_j$$
$$= \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = \delta_{ij}$$

o sea

I.057 $$\Delta w_i = 1 = \nu_i \tau_i$$

Ya que de I.053 se tiene

$$\Delta w_i = w_i - w_i' = \nu_i (t - t') = \nu_i \tau_i = 1$$

entonces:

I.058 $$\nu_i = \frac{1}{\tau_i}$$

O sea que las constantes ν_i son las frecuencias del movimiento.

La gran ventaja de este formalismo, es que permite obtener las frecuencias de un movimiento periódico, sin necesidad de encontrar la solución completa del movimiento del sistema.

El procedimiento consiste en expresar el Hamiltoniano en términos de las variables de acción y ángulo, y usar I.052 para determinar las frecuencias.

I.7 SISTEMAS DEGENERADOS

De acuerdo con lo anterior, cuando el valor de la coordenada angular cambia en la unidad, la coordenada q_i pasa a través de un ciclo completo. Como ya vimos, en el caso de un movimiento de libración, q_i debe ser una -- función periódica de w_i con período fundamental $\Delta w_i = 1$.
Siempre es posible expresar una coordenada periódica como la suma de movimientos armónicos simples, que involucren la frecuencia fundamental ν_k y todos sus armónicos. Si consideramos una función que contenga varias q_k's entonces, en una serie de Fourier de esta función, deben aparecer las frecuencias ν_k correspondientes a cada q_k.
Por ejemplo, las coordenadas cartesianas X_i pueden ser expresadas en términos de las coordenadas q_k, y cualquier expansión de Fourier de las X_i's, contendrá todas las combinaciones lineales posibles de las frecuencias -- fundamentales del sistema:

$$X_i = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_n} a_{j_1 \ldots j_n} e^{2\pi i (j_1 w_1 + \ldots + j_n w_n)} \tag{I.059}$$

en donde las j_i's son enteros que corren de $-\infty$ a $+\infty$. Como función del -- tiempo, I.059 puede expresarse así:

$$X_i = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_n} a_{j_1 \ldots j_n} e^{2\pi i \left[(j_1 \nu_1 + \ldots + j_n \nu_n) t + (j_1 \beta_1 + \ldots + j_n \beta_n) \right]} \tag{I.060}$$

Ahora, a menos que las ν_i's sean fracciones racionales una de la otra, - I.060 no representará una función simplemente periódica; en tanto que el- factor $e^{2\pi i j_1 \nu_1 t}$ regresa a su valor original cuando t cambia por $\frac{1}{\nu_1}$, los otros factores no exhiben esta misma periodicidad. La función como un todo, no es simplemente periódica; se dice que es MULTIPLE o CONDICIONALMENTE PERIODICA. La órbita de un oscilador armónico de más de una dimensión es un ejemplo de movimiento condicionalmente periódico.

La condición formal para que las frecuencias sean fracciones racionales una de otra, es que existan f - 1 relaciones de la forma:

I.061 $$\sum_{i=1}^{f} j_{ki} \nu_i = 0$$

con los j_i's enteros. Resolviendo esas ecuaciones podemos expresar cualquier ν_i como una fracción racional de cualquiera de las otras frecuencias. Si hay sólamente m relaciones de la forma I.061, el sistema se llama m-degenerado. Si m = f - 1, entonces el sistema es COMPLETAMENTE DEGENERADO.

Los ejemplos más simples de degeneración ocurren cuando dos o más de las frecuencias son iguales. Si dos de las constantes de fuerza de un oscilador armónico tridimensional son iguales, entonces las correspondientes frecuencias son iguales, y el sistema es simplemente degenerado. Si todas las constantes son idénticas, el sistema es completamente degenerado.

Siempre que la degeneración está presente, las frecuencias fundamentales ya no son independientes y el movimiento periódico del sistema puede ser descrito por un número de frecuencias menor al total existente. La reducción puede efectuarse mediante una transformación puntual de las variables de acción y ángulo.

Es conveniente resumir las m condiciones de degeneración en la forma:

I.062 $$\sum_{i=1}^{f} j_{ki}\, \nu_i = 0 \qquad k = 1,2,\ldots m.$$

Consideremos una transformación de las variables (w,J) a las nuevas variables (w',J') definida de acuerdo a la función generadora del tipo dos $F_2 = \sum_i f_i(q_i,t)P_i$:

I.063 $$F_2 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{f} J_k'\, j_{ki}\, w_i + \sum_{k=m+1}^{f} J_k'\, w_k$$

En virtud de $$w' = \frac{\partial F_2}{\partial J_i'}$$

se tiene

I.064 $$w' = \begin{cases} \sum_{i=1}^{f} j_{ki}\, w_i & i = 1,2,\ldots m. \\ w_k & k = m+1,\ldots f. \end{cases}$$

Las nuevas frecuencias

I.065 $$\nu_k' = \dot{w}_k' = \sum_{i=1}^{f} j_{ki}\, \nu_i = 0 \qquad k = 1,2,\ldots m.$$

$$= \nu_k \qquad k = m+1,\ldots f.$$

m frecuencias son cero, y tenemos ahora f - m frecuencias independientes. Correspondientemente, las variables de acción están dadas por:

I.066 $$J_i = \frac{\partial F_2}{\partial w_i} = \sum_{k=1}^{m} J_k'\, j_{ki} + \sum_{k=m+1}^{f} J_k\, \delta_{ki}$$

Debido a que $\nu_i' = \frac{\partial H}{\partial J_i'}$ el hamiltoniano será independiente de las variables J_i' cuyas frecuencias son cero. En un sistema completamente degenerado, el hamiltoniano puede hacerse depender de sólo una de las variables de acción.

I.8 EJEMPLO 1 : EL PROBLEMA DE KEPLER

Consideremos una partícula moviéndose bajo la influencia de una fuerza inversa del cuadrado de la distancia, y cuyo hamiltoniano no involucra al tiempo explícitamente, por lo que podemos aplicar el método de la sección I.5.

En términos de coordenadas polares esféricas, la expresión para dicho hamiltoniano es la siguiente:

I.067 $$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}p_\varphi^2\right) - \frac{K}{r}$$

Debido a la independencia del tiempo, podemos usar I.040:

I.068 $$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] - \frac{K}{r} = \alpha_1$$

Supongamos además $W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi)$

Entonces, I.068 puede escribirse:

I.069 $$\operatorname{sen}^2\theta\left[r^2\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 - 2mrk - 2mr^2\alpha_1\right] = -\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2$$

de donde obtenemos las siguientes tres ecuaciones:

I.070 (a) $$\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2 = a_1^2$$

I.070 (b) $$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{a_1^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = a_2^2$$

I.070 (c) $$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 - \frac{2mK}{r} - 2m\alpha_1 + \frac{a_2^2}{r^2} = 0$$

La ecuación I.070 (a), expresa la conservación del momento angular alrede dor del eje Z, o sea:

I.071 $$p_\varphi = a_1$$

Además I.070 (b) puede escribirse

I.072 $$p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = a_2^2$$

Por otro lado, el hamiltoniano en coordenadas polares (r, ψ), es:

I.073 $$H = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2}\right] - \frac{k}{r}$$

Comparando I.073 con I.067, se tiene

I.074 $$p_\psi^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Pero por I.072

I.075 $$p_\psi^2 = a_2^2$$

Las variables de acción en coordenadas esféricas son: (De acuerdo con I.041)

I.076 (a) $$J_\varphi = \oint p_\varphi \, d\varphi$$

I.076 (b) $$J_\theta = \oint p_\theta \, d\theta$$

I.076 (c) $$J_r = \oint p_r \, dr$$

Para evaluar las integrales I.076, es necesario conocer el período de libración. Observemos la figura 1:

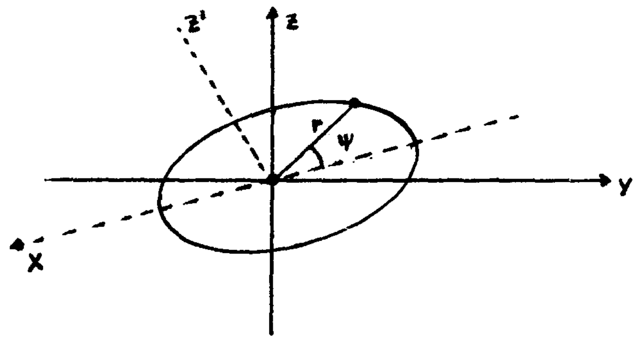

FIGURA 1

Mientras la partícula realiza una órbita completa, φ cambia en 2π, lo mismo que ψ. Por tanto, podemos evaluar las integrales mencionadas así:

Para sistemas conservativos, $T = \frac{p_i \dot{q}_i}{2}$

En coordenadas esféricas, esta expresión es la siguiente:

I.077 $$T = \frac{p_r \dot{r}}{2} + \frac{p_\theta \dot{\theta}}{2} + \frac{p_\varphi \dot{\varphi}}{2}$$

En coordenadas planas

I.078 $$T = \frac{p_r \dot{r}}{2} + \frac{p_\psi \dot{\psi}}{2}$$

Comparando I.077 y I.078 obtenemos:

I.079 $$p_\theta \dot{\theta} = p_\psi \dot{\psi} - p_\varphi \dot{\varphi}$$

Por tanto:

I.080 $$p_\theta d\theta = p_\psi d\psi - p_\varphi d\varphi$$

Introduciendo I.080 en I.076 (b) :

I.081 (a) $$J_\theta = 2\pi p_\psi - 2\pi p_\varphi = 2\pi(a_2 - a_1)$$

Asimismo

I.081 (b) $$J_\varphi = 2\pi p_\varphi = 2\pi a_1$$

y

I.081 (c) $$J_r = \oint \left[2mEr^2 + 2mkr - \frac{1}{4\pi^2}\left[J_\theta + J_\varphi\right]^2\right]^{1/2} \frac{dr}{r}$$

En esta última ecuación hemos usado el hecho de que $H = \alpha_1 = E$ *

Las raíces del integrando I.081 (c) se obtienen de un modo un poco más com plicado **

I.082 $$J_r = -(J_\theta + J_\varphi) + \pi K\left(\frac{2m}{-E}\right)^{1/2}$$

de donde:

I.083 $$H = E = -\frac{2\pi^2 mK^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}$$

Las tres variables de acción aparecen sólo en forma de suma, por tanto, to das las frecuencias del movimiento son iguales : (de I.052)

I.084 $$\nu = \frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_\varphi} = \frac{4\pi^2 mK^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^3}$$

*Ver en el Apéndice "El Hamiltoniano como Constante de Movimiento".

**Ver Apéndice

Podemos encontrar el período del movimiento despejando $J_r + J_\theta + J_\varphi$ de la ecuación I,083 y sustituyendo en I.084, y aplicando $\nu = \frac{1}{\tau}$:

I.085 $$\tau = \pi K \sqrt{\frac{-m}{2E^3}}$$

Esta fórmula corresponde a la tercera Ley de Képler, con semieje mayor $a = -\frac{K}{2E}$ .Como vimos, este es un movimiento Completamente degenerado, por lo que es conveniente reducir el número de frecuencias, mediante la transformación indicada en la sección I.7

TRATAMIENTO DE LA DEGENERACION

Utilizando I.062, tendremos:

I.086 $$\begin{aligned} \nu_\varphi - \nu_\theta &= 0 \\ \nu_\theta - \nu_r &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, de acuerdo a I.063, se tiene:

I.087 $$F_2 = (w_\varphi - w_\theta) J_1' + (w_\theta - w_r) J_2' + w_r J_3'$$

De acuerdo con $w_i = \frac{\partial F_2}{\partial J_i}$ tendremos:

I.088 $$\begin{aligned} w_1' &= w_\varphi - w_\theta = 0 \\ w_2' &= w_\theta - w_r = 0 \\ w_3' &= w_r \end{aligned}$$

Por otro lado $J_i = \frac{\partial F_2}{\partial w_i}$ con lo cual tenemos:

I.089 $$\begin{aligned} J_\varphi &= J_1' \\ J_\theta &= J_2' - J_1' \\ J_r &= J_3' - J_2' \end{aligned}$$

Despejando de aquí se tiene

$$J_1' = J_\varphi$$

I.090 $$J_2' = J_\theta + J_\varphi$$

$$J_3' = J_\theta + J_\varphi + J_r$$

En términos de estas variables, el Hamiltoniano queda finalmente:

I.091 $$H = - \frac{2\pi^2 m k^2}{J_3'^{\,2}}$$

Lo cual muestra la afirmación anterior, de que en caso de Degeneración completa, el Hamiltoniano es función de sólo una de las J's.

I.9 EJEMPLO 2 : EL OSCILADOR ARMONICO TRIDIMENSIONAL

Consideremos ahora un oscilador armónico en tres dimensiones, con constantes de fuerza desiguales k_1, k_2, k_3 a lo largo de cada eje, y cuyo hamiltoniano es independiente del tiempo:

I.092 $$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2} + \frac{k_3 q_3^2}{2}$$

Sea S la función Principal de Hamilton, separable del modo siguiente:

I.093 $$S = W(q_1, q_2, q_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \alpha_3 t$$

De aquí tendremos:

I.094 $$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2 + m k_1 q_1^2 + m k_2 q_2^2 + \\ + m k_3 q_3^2 = 2m\alpha_3$$

Sea W a su vez separable del modo siguiente:

$$W = W_1(q_1, \alpha_1) + W_2(q_2, \alpha_2) + W_3(q_3, \alpha_3)$$

Entonces, I.094 se transforma en :

I.095 (a) $$\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 + mk_1 q_1^2 = \alpha_1^2$$

I.095 (b) $$\left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2 + mk_2 q_2^2 = \alpha_2^2$$

I.095 (c) $$\left(\frac{\partial W_3}{\partial q_3}\right)^2 + mk_3 q_3^2 = 2m\alpha_3 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2$$

Por otro lado, de acuerdo a I.041 y de que $p_i = \dfrac{\partial W_i}{\partial q_i}$

I.096 (a) $$J_1 = \oint p_1 dq_1 = \oint \sqrt{\alpha_1^2 - mk_1 q_1^2}\, dq_1$$

I.096 (b) $$J_2 = \oint p_2 dq_2 = \oint \sqrt{\alpha_2^2 - mk_2 q_2^2}\, dq_2$$

I.096 (c) $$J_3 = \oint p_3 dq_3 = \oint \sqrt{2m\alpha_3 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - mk_3 q_3^2}\, dq_3$$

De donde

I.097 (a) $$J_1 = \frac{\pi \alpha_1^2}{\sqrt{mk_1}}$$

I.097 (b) $$J_2 = \frac{\pi \alpha_2^2}{\sqrt{mk_2}}$$

I.097 (c) $$J_3 = \frac{\pi\left(2m\alpha_3 - \frac{J_1\sqrt{mk_1}}{\pi} - \frac{J_2\sqrt{mk_2}}{\pi}\right)}{\sqrt{mk_3}}$$

Despejando α_3 e identificándola con la Energía del Sistema:

I.098 $$H = E = \frac{J_1\sqrt{mk_1}}{2m\pi} + \frac{J_2\sqrt{mk_2}}{2m\pi} + \frac{J_3\sqrt{mk_3}}{2m\pi}$$

Por tanto obtenemos el conjunto de frecuencias:

I.099 (a) $$\nu_1 = \frac{\partial H}{\partial J_1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

I.099 (b) $$\nu_2 = \frac{\partial H}{\partial J_2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

I.099 (c) $$\nu_3 = \frac{\partial H}{\partial J_3} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_3}{m}}$$

Ahora calcularemos W_1, W_2 y W_3, de I.051, para obtener q_1, q_2 y q_3, de acuerdo a I.094 y I.095:

I.100 $$W = \int\sqrt{\alpha_1^2 - mk_1q_1^2}\,dq_1 + \int\sqrt{\alpha_2^2 - mk_2q_2^2}\,dq_2 + \int\sqrt{2m\alpha_3 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - mk_3q_3^2}\,dq_3$$

Sustituyendo las α's de I.097 :

I.101 $$W = \int\sqrt{\frac{J_1\sqrt{mk_1}}{\pi} - mk_1q_1^2}\,dq_1 + \int\sqrt{\frac{J_2\sqrt{mk_2}}{\pi} - mk_2q_2^2}\,dq_2 + \int\sqrt{\frac{J_3\sqrt{mk_3}}{\pi} - mk_3q_3^2}\,dq_3$$

Por otro lado: $w_1 = \dfrac{\partial W}{\partial J_1}$ con lo cual tenemos:

I.102 $$w_1 = \frac{\sqrt{mk_1}}{2\pi}\int\frac{dq}{\sqrt{\frac{J_1\sqrt{mk_1}}{\pi} - mk_1q_1^2}}$$

Haciendo la sustitución : $q_1 = \sqrt{\dfrac{J_1}{\pi\sqrt{mk_1}}}\,\operatorname{sen}\theta$ y haciendo operaciones, llegamos a:

$$w_1 = \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}^{-1} q_1\sqrt{\frac{\pi\sqrt{mk_1}}{J_1}}$$

de donde obtenemos q_1 :

I.103 (a) $$q_1 = \sqrt{\frac{J_1}{\pi\sqrt{mk_1}}}\,\operatorname{sen} 2\pi w_1$$

Del mismo modo

I.103 (b) $$q_2 = \sqrt{\frac{J_2}{\pi\sqrt{mk_2}}}\ \operatorname{sen} 2\pi W_2$$

I.103 (c) $$q_3 = \sqrt{\frac{J_3}{\pi\sqrt{mk_3}}}\ \operatorname{sen} 2\pi W_3$$

En estas soluciones, el factor $\sqrt{\frac{J}{\pi\sqrt{mk}}}$ corresponde a la amplitud de la -- trayectoria.

Por otro lado, $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ con lo cual, tomando W de I.101:

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} = \sqrt{\frac{J_1\sqrt{mk_1}}{\pi} - mk_1 q_1^2}$$

$$p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2} = \sqrt{\frac{J_2\sqrt{mk_2}}{\pi} - mk_2 q_2^2}$$

$$p_3 = \frac{\partial W}{\partial q_3} = \sqrt{\frac{J_3\sqrt{mk_3}}{\pi} - mk_3 q_3^2}$$

Ahora tomando q_i de I.103 (a), (b), (c), se tiene:

$$p_i = \sqrt{\frac{J_i\sqrt{mk_i}}{\pi} - \frac{mk_i J_i}{\pi\sqrt{mk_i}}\operatorname{sen}^2 2\pi W_i} = \sqrt{\frac{J_i\sqrt{mk_i}}{\pi}}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 2\pi W_i}$$

o sea finalmente:

I.103 (d) $$p_1 = \sqrt{\frac{J_1\sqrt{mk_1}}{\pi}}\cos 2\pi W_1$$

I.103 (e) $$p_2 = \sqrt{\frac{J_2\sqrt{mk_2}}{\pi}}\cos 2\pi W_2$$

I.103 (f) $$p_3 = \sqrt{\frac{J_3\sqrt{mk_3}}{\pi}}\cos 2\pi W_3$$

CASO DEGENERADO

Para el caso en que $k_1 = k_2 = k_3$ se tiene, de la ecuación I.098, que

I.104 $$H = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\left(J_1 + J_2 + J_3\right)$$

y de I.099, las tres frecuencias son iguales.

Utilizando de nuevo I.062, tendremos:

$$\nu_1 - \nu_2 = 0$$

I.105 $$\nu_2 - \nu_3 = 0$$

Tomando F_2 de acuerdo con I.063:

I.106 $$F_2 = (w_1 - w_2)\,J_1' + (w_2 - w_3)\,J_2' + w_3 J_3'$$

Debido a que $w_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial J_i}$, tendremos, al igual que en I.088

I.107
$$\begin{aligned} w_1' &= w_1 - w_2 = 0 \\ w_2' &= w_2 - w_3 = 0 \\ w_3' &= w_3 \end{aligned}$$

de donde:

I.108
$$\begin{aligned} J_1 &= J_1' \\ J_2 &= J_2' - J_1' \\ J_3 &= J_3' - J_2' \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} J_1' &= J_1 \\ J_2' &= J_1 + J_2 \\ J_3' &= J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

con lo cual:

I.109 $$H = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}\,J_3'$$

En este caso, al igual que en el ejemplo anterior, se ha hecho depender a H sólamente de la variable J para la cual la frecuencia correspondiente - es diferente de cero.

Por último:

I.110 $$\nu = \frac{\partial H}{\partial J_3'} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{\omega}{2\pi}$$

I.10 COMENTARIO

Quizás el método enunciado para la resolución de estos problemas no sea - el más rápido; incluso la utilidad práctica de ésta técnica, puede ser -- cuestionada. Pero con el advenimiento de la Teoría Cuántica de Bohr, se - descubrió que las condiciones de cuantización podían ser establecidas con mucha simplicidad en términos de las variables de acción.

El conjunto de coordenadas w,J sirve para fijar la órbita espacial, e in-- cluso encontrar el tamaño y la forma de dicha órbita en términos de las - variables mencionadas. Estas son particularmente apropiadas para el estudio astronómico de órbitas planetarias.

Cuando sólo intervienen dos cuerpos en el sistema,dichas variables son estrictamente constantes de movimiento, de acuerdo con la teoría de transformaciones canónicas. Pero si hay pequeñas perturbaciones debidas a la in-- fluencia de otros planetas o satélites, el movimiento puede ser representado,por la lenta variación de estos elementos con el tiempo.

En Mecánica Clásica, las variables de acción poseen rangos contínuos de valores, pero no así en Mecánica Cuántica; las condiciones de cuantización- de Sommerfeld y Wilson, requerían que el movimiento estuviese limitado a aquellas órbitas para las cuales:

$$J_k = \oint p_k dq_k = n_k h \qquad n_k = 1, 2, \ldots$$

Todo resultaba demasiado sencillo...sólo había que resolver el problema - en Mecánica Clásica usando variables de acción y ángulo, y el movimiento- podía ser cuantizado inmediatamente con la fórmula anterior.

Como ejemplo, los niveles de energía de un átomo de hidrógeno, (compara-- ble al problema de Képler), pueden obtenerse de I.091 si K es reemplazada por Ze^2, y a su vez J_3' por nh :

I.111 $$E = \frac{-2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}$$

que es la expresión que conocemos para la energía de cada órbita del electrón en el átomo de Bohr.* Las órbitas posibles que corresponden a un -- mismo valor de n se llaman degeneradas.

Durante la época brillante de la antigua teoría cuántica, la técnica de - las variables de acción y ángulo, recibió mucha atención por parte de los físicos teóricos, que la hicieron su herramienta de todos los días. Una - vez estudiado el átomo de hidrógeno, los problemas se hicieron más complicados como para ser resueltos clásicamente, y se hizo necesario tratar muchas de las fuerzas adicionales como pequeñas perturbaciones. De aquí la- conexión existente entre la teoría clásica de perturbaciones y las Perturbaciones de la Mecánica Cuántica.

Pronto se hizo evidente que las dificultades no eran sólo matemáticas. Simplemente, la teoría cuántica de Bohr no describía adecuadamente la Naturaleza. Como es bien sabido, el impasse fue roto por el descubrimiento- casi simultáneo de la mecánica ondulatoria y matricial. Las técnicas para resolver los problemas cuánticos eran completamente diferentes en esas teorías, y el interés por las variables de ángulo y acción decayó rápidamente. Sin embargo, algunos conceptos como Perturbaciones, Degeneración, Separación de Coordenadas, etc. permanecen aún, como parte del engranaje de la nueva Mecánica Cuántica.**

*Eisberg "FUNDAMENTOS DE FISICA MODERNA" Cap. 5

**Goldstein "CLASSICAL MECHANICS" Cap. 9

La formulación hamiltoniana es válida como punto de partida para el desarrollo posterior de la estructura teórica de la mecánica. Es en ese desarrollo que la mecánica clásica más se acerca a la mecánica cuántica.
El hamiltoniano para una partícula moviéndose en un campo de fuerzas conservativas puede expresarse como:

I.112 $$H = \frac{\bar{p}\cdot\bar{p}}{2m} + V$$

Si hacemos las sustituciones:

I.113 $$H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad p = -i\hbar\nabla$$

y aplicamos estos operadores a la función de onda Ψ , queda:

I.114 $$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi$$

que es la ecuación de Schroedinger para una partícula de masa m moviéndose en un campo de fuerzas conservativas .
Esto no debe tomarse de ningún modo como la derivación de la ecuación de onda; se ha hecho solamente para mostrar la correspondencia entre la mecánica de Hamilton Jacobi, y la Mecánica Cuántica.

CAPITULO II

TEORIA DE PERTURBACIONES DE HAMILTON JACOBI

INTRODUCCION

Los sistemas con los que estamos acostumbrados a trabajar en Mecánica - Clásica, están altamente idealizados; se ignoran con el propósito de facilitar su estudio, ciertos elementos que en la realidad alteran las soluciones, en el sobreentendido de que aquéllos no son importantes. Existe una gran diferencia entre las situaciones reales y los procesos que- estudiamos en la escuela o en los libros.

Uno de los mayores problemas a los que se enfrenta el físico, una vez - que ha acumulado suficiente información analítica respecto de un proceso real, es el de encontrar aproximaciones significativas a las soluciones de las ecuaciones que describen dichos procesos. Nada hay en la naturaleza que pueda ser aislado de la influencia perturbadora de los ele-- mentos circundantes. Estos elementos producen ciertos efectos, que siempre alterarán el resultado del menos ideal de los sistemas.

Sin embargo, es posible obtener las soluciones con suficiente aproximación a la realidad, tomando en cuenta los pequeños efectos perturbado-- res mediante métodos de aproximación. La formulación sistemática para - obtener dichas soluciones, se llama Teoría de Perturbaciones.

La Mecánica Celeste llevó a esta teoría a su más alto grado de desarrollo, en Mecánica Clásica, haciendo posible obtener matemáticamente la - existencia del planeta Neptuno, en virtud de las desviaciones orbitales de Júpiter, antes de que aquél fuese visto por los astrónomos.

Es bien conocido que en Mecánica Newtoniana, es posible resolver el problema de dos cuerpos, por ejemplo Tierra-Sol, o bien Tierra-Luna. Pero-no podemos simplemente despreciar las fuerzas interplanetarias y considerar sólo las acciones que mutuamente ejercen entre sí dos cuerpos; es necesario considerar la acción de muchos cuerpos, y este problema no -- tiene solución exacta en Mecánica Clásica.

En Mecánica Celeste se encontró que los problemas de Perturbaciones pueden manejarse por medio de aproximaciones basadas en el hecho de que las fuerzas entre los planetas son mucho menores que la fuerza de atracción del sol. Por este camino, se empieza resolviendo el Problema de orden - cero (Problema de Dos Cuerpos), y entonces se toma en cuenta la perturbación como aproximación de primer orden.

Existen dos posibles formulaciones de la Teoría de Perturbaciones:

1.-TEORIA DE PERTURBACIONES ESTACIONARIAS

Si el sistema es Multiperiódico y Separable *,podemos afrontar el problema de encontrar el cambio en los períodos de movimiento, producido por una perturbación. El análogo a esta situación en Mecánica Cuántica, corresponde a encontrar el cambio en los niveles de Energía.

2.-TEORIA DE PERTURBACIONES DPENDIENTES DEL TIEMPO.

Si el sistema no perturbado es descrito por un conjunto de condiciones iniciales de la ecuación no perturbada de H-J, podemos averiguar el promedio al que este estado constante previo, va cambiando por una perturbación. Su análogo en Mecánica Cuántica, corresponde al cálculo de la probabilidad de transición producida por una perturbación.

---

* En el caso Multidimensional, un sistema es multiperiódico, cuando sus distintas frecuencias, tienen diferentes períodos asociados.

TEORIA DE PERTURBACIONES ESTACIONARIAS

II.I Descripción General.-

Si se tiene un sistema de ecuaciones de movimiento demasiado complicadas como para encontrar la solución en forma cerrada, es posible encontrar un sistema con un hamiltoniano aproximado al hamiltoniano del sistema original. La diferencia entre dichos hamiltonianos puede ser considerada como la perturbación. El oscilador armónico pertenece a esta clase, y es el ejemplo que estudiaremos en todos los casos.

Consideraremos inicialmente tres métodos generales de solución:

A) METODO DIRECTO

B)METODO DE BORN

C) TEORIA DE PERTURBACIONES CANONICAS

Nuestro objetivo inicial es comparar, para el caso unidimensional, cada uno de los métodos anteriores, para un oscilador anarmónico, cuyo hamiltoniano sea:

II.001 $$H = H_o + \lambda H_1$$

en donde H_o corresponde al hamiltoniano del sistema sin perturbar, y H_1 es la perturbación. Las ecuaciones a resolver serán: (ver I.013)

II.002 $$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Recuérdese que estamos tratando un sistema independiente del tiempo.

Sea el Hamiltoniano del oscilador armónico perturbado unidimensional, el siguiente: (El subíndice o bien supraíndice cero, designará al sistema sin perturbar)

II.003 $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K q^2 + \lambda q^3$$

II.004 $$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{Kq^2}{2} \qquad H_1 = q^3$$

II.1. A.-METODO DIRECTO

Las variables conjugadas p, q se escribirán en términos del parámetro perturbador, del siguiente modo:

II.005 $$p = p^{(0)} + \lambda p^{(1)} + \lambda^2 p^{(2)} + \dots$$

II.006 $$q = q^{(0)} + \lambda q^{(1)} + \lambda^2 q^{(2)} + \dots$$

son las soluciones a determinar.

en donde $p^{(o)}$ y $q^{(o)}$ son las soluciones del sistema sin perturbar.

Por otro lado:

II.007 $$\dot{p}^{(0)} = -\frac{\partial H_0}{\partial q^{(0)}} \qquad \dot{q}^{(0)} = \frac{\partial H_0}{\partial p^{(0)}}$$

Aplicando II.002 en II.001 :

II.008 $$\dot{p} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} - \lambda \frac{\partial H_1}{\partial q}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \lambda \frac{\partial H_1}{\partial p}$$

Para encontrar $\dot{p}$ y $\dot{q}$ en términos de II.005 y II.006, desarrollaremos H_o y H_1 en términos de las variables q, p dadas por II.005 y II.006 en se ries de Taylor, con:

$$H_o = H_o\,(q^{(0)} + \lambda q^{(1)} + \lambda^2 q^{(2)} + \dots \;,\; p^{(0)} + \lambda p^{(1)} + \lambda^2 p^{(2)} + \dots)$$

$$H_1 = H_1\,(q^{(0)} + \lambda q^{(1)} + \lambda^2 q^{(2)} + \dots \;,\; p^{(0)} + \lambda p^{(1)} + \lambda^2 p^{(2)} + \dots)$$

y evaluamos las derivadas respectivas en $q = q^{(o)}$ y $p = p^{(o)}$, lo cual de notaremos $\Big|_o$:

II.009
$$\begin{aligned} H_o(q,p) &= H_o(q^{(0)}, p^{(0)}) + \left[\lambda q^{(1)} + \lambda^2 q^{(2)} + \dots\right] \cdot \frac{\partial H_o}{\partial q^{(0)}}\Big|_o \\ &\quad + \left[\lambda p^{(1)} + \lambda^2 p^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial H_o}{\partial p^{(0)}}\Big|_o + \dots \\ H_1(q,p) &= H_1(q^{(0)}, p^{(0)}) + \left[\lambda q^{(1)} + \lambda^2 q^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial H_1}{\partial q^{(0)}}\Big|_o \\ &\quad + \left[\lambda p^{(1)} + \lambda^2 p^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial H_1}{\partial p^{(0)}}\Big|_o + \dots \end{aligned}$$

Aplicando II.008 en II.009:

$$\begin{aligned} \dot p = &- \frac{\partial H_o(q^{(0)}, p^{(0)})}{\partial q}\Big|_o - \left[\lambda q^{(1)} + \lambda^2 q^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial^2 H_o}{\partial q \partial q^{(0)}}\Big|_o \\ &- \left[\lambda p^{(1)} + \lambda^2 p^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial^2 H_o}{\partial q \partial p^{(0)}}\Big|_o + \dots - \lambda \frac{\partial H_1(q^{(0)}, p^{(0)})}{\partial q}\Big|_o \\ &- \lambda\left[\lambda q^{(1)} + \lambda^2 q^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial^2 H_1}{\partial q \partial q^{(0)}}\Big|_o - \lambda\left[\lambda p^{(1)} + \lambda^2 p^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial^2 H_1}{\partial q \partial p^{(0)}}\Big|_o + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot q = &\frac{\partial H_o(q^{(0)}, p^{(0)})}{\partial p}\Big|_o + \left[\lambda q^{(1)} + \lambda^2 q^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial^2 H_o}{\partial p \partial q^{(0)}}\Big|_o \\ &+ \left[\lambda p^{(1)} + \lambda^2 p^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial^2 H_o}{\partial p \partial p^{(0)}}\Big|_o + \dots + \lambda \frac{\partial H_1(q^{(0)}, p^{(0)})}{\partial p}\Big|_o \\ &+ \lambda\left[\lambda q^{(1)} + \lambda^2 q^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial^2 H_1}{\partial p \partial q^{(0)}}\Big|_o + \lambda\left[\lambda p^{(1)} + \lambda^2 p^{(2)} + \dots\right] \frac{\partial^2 H_1}{\partial p \partial p^{(0)}}\Big|_o + \dots \end{aligned}$$

con lo cual, después de reagrupar términos, obtenemos:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_0(q^{(0)}, p^{(0)})}{\partial q}\Big|_0 - \lambda\Big[\frac{\partial H_1(q^{(0)}, p^{(0)})}{\partial q}\Big|_0 + q^{(1)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial q\partial q^{(0)}}\Big|_0$$

$$+ p^{(1)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial q\partial p^{(0)}}\Big|_0\Big]$$

II.010
$$-\lambda^2\Big[q^{(2)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial q\partial q^{(0)}}\Big|_0 + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q\partial p^{(0)}}\Big|_0 \cdot p^{(2)}$$

$$+ q^{(1)}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial q\partial q^{(0)}}\Big|_0 + p^{(1)}\cdot\frac{\partial^2 H_1}{\partial q\partial p^{(0)}}\Big|_0\Big] + \ldots$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H_0(q^{(0)}, p^{(0)})}{\partial p}\Big|_0 + \lambda\Big[\frac{\partial H_1(q^{(0)}, p^{(0)})}{\partial p}\Big|_0 + q^{(1)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial p\partial q^{(0)}}\Big|_0$$

$$+ p^{(1)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial p\partial p^{(0)}}\Big|_0\Big]$$

$$+ \lambda^2\Big[q^{(2)}\cdot\frac{\partial^2 H_0}{\partial p\partial q^{(0)}}\Big|_0 + p^{(2)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial p\partial p^{(0)}}\Big|_0$$

$$+ q^{(1)}\cdot\frac{\partial^2 H_1}{\partial p\partial q^{(0)}}\Big|_0 + p^{(1)}\frac{\partial^2 H_1}{\partial p\partial p^{(0)}}\Big|_0\Big] + \ldots$$

Comparando este último par de ecuaciones con II.005 y II.006, obtenemos:

$$\dot{p}^{(1)} = -\frac{\partial H_1}{\partial q}\Big|_0 - q^{(1)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial q\partial q^{(0)}}\Big|_0 - p^{(1)}\cdot\frac{\partial^2 H_0}{\partial q\partial p^{(0)}}\Big|_0$$

$$\dot{p}^{(2)} = -q^{(2)}\cdot\frac{\partial^2 H_0}{\partial q\partial q^{(0)}}\Big|_0 - p^{(2)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial q\partial p^{(0)}}\Big|_0 - q^{(1)}\cdot\frac{\partial^2 H_1}{\partial q\partial q^{(0)}}\Big|_0 - p^{(1)}\cdot\frac{\partial^2 H_1}{\partial q\partial p^{(0)}}\Big|_0$$

$$\dot{q}^{(1)} = \frac{\partial H_1}{\partial p}\Big|_0 + q^{(1)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial p\partial q^{(0)}}\Big|_0 + p^{(1)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial p\partial p^{(0)}}\Big|_0$$

$$\dot{q}^{(2)} = q^{(2)}\cdot\frac{\partial^2 H_0}{\partial p\partial q^{(0)}}\Big|_0 + p^{(2)}\frac{\partial^2 H_0}{\partial p\partial p^{(0)}}\Big|_0 + q^{(1)}\frac{\partial^2 H_1}{\partial p\partial q^{(0)}}\Big|_0 + p^{(1)}\frac{\partial^2 H_1}{\partial p\partial p^{(0)}}\Big|_0$$

Utilizando los valores dados por II.004, obtenemos las derivadas requeridas:

$$\frac{\partial H_1}{\partial q}\bigg|_0 = 3(q^{(0)})^2 \qquad \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial q^{(0)}}\bigg|_0 = k \qquad \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial p^{(0)}}\bigg|_0 = 0$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial p}\bigg|_0 = 0 \qquad \frac{\partial^2 H_0}{\partial p \partial q^{(0)}}\bigg|_0 = 0 \qquad \frac{\partial^2 H_0}{\partial p \partial p^{(0)}}\bigg|_0 = \frac{1}{m}$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial q \partial q^{(0)}}\bigg|_0 = 6\, q^{(0)} \qquad \frac{\partial^2 H_1}{\partial q \partial p^{(0)}}\bigg|_0 = 0 \qquad \frac{\partial^2 H_1}{\partial p \partial p^{(0)}}\bigg|_0 = 0$$

Usando estos resultados, (y utilizando también II.007) :

II.011 (a) $\dot{p}^{(0)} = -k\, q^{(0)}$ ecuación de orden cero.

II.011 (b) $\dot{p}^{(1)} = -3(q^{(0)})^2 - k\, q^{(1)}$ ecuación de primer orden.

II.011 (c) $\dot{p}^{(2)} = -k\, q^{(2)} - 6\, q^{(1)} . q^{(0)}$ ecuación de segundo orden.

Además:

II.012 $\dot{q}^{(0)} = \dfrac{p^{(0)}}{m}$ $\dot{q}^{(1)} = \dfrac{p^{(1)}}{m}$ $\dot{q}^{(2)} = \dfrac{p^{(2)}}{m}$

Por tanto, para la ecuación de orden cero

$$m\ddot{q}^{(0)} + k\, q^{(0)} = 0$$

su solución es:

II.013 $q^{(0)} = A \operatorname{sen} \omega t$ con $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Para la ecuación de primer orden

$$m\ddot{q}^{(1)} + k\, q^{(1)} = -3A^2 \operatorname{sen}^2 \omega t$$

con solución:

II .014 $$q^{(1)} = -\frac{A^2}{2m\omega^2}(3+\cos 2\omega t)$$

Para la ecuación de segundo orden:

$$m\ddot{q}^{(2)} + m\omega^2 q^{(2)} = -6q^{(0)}q^{(1)} = \frac{3A^3}{m\omega^2}\operatorname{sen}\omega t(3+\cos 2\omega t)$$

se tiene la solución:

II.015 $$q^{(2)} = \frac{A^3}{m^2\omega^4}\left[-\frac{3}{16}\operatorname{sen} 3\omega t - \frac{15}{4}\omega t\cos\omega t + \alpha\operatorname{sen}\omega t\right]$$

con α por el momento, un parámetro ajustable.

De acuerdo con II.012, las $p^{(i)}$ y las $q^{(i)}$ están relacionadas por la expresión:

$$p^{(i)} = m\dot{q}^{(i)}$$

Sustituyendo cada valor de $q^{(i)}$ en II.006, derivando y multiplicando por $\frac{m}{2}$ (después de haber elevado al cuadrado $\dot{q}$), obtenemos:

II.016 $$E = E^{(0)} + \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)} + \ldots$$

con:

II.017 $$E^{(0)} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad , \quad E^{(1)} = 0 \quad , \quad E^{(2)} = \frac{A^4}{m\omega^2}\left(\alpha - \frac{37}{16}\right)$$

II.1. B.- METODO DE BORN

En éste método encontraremos mayores dificultades matemáticas que en el anterior, aunque los resultados se mejoran, como discutiremos al final de esta sección. Este mecanismo de solución se aplica sólo a sistemas multiperriódicos donde podemos utilizar la separación de variables.

Seguiremos el formalismo de Acción y Angulo.

De acuerdo con I.042:

$$J_i = \oint \frac{\partial W(q_j, \alpha_j)}{\partial q_i} dq_i$$

Recuérdese también que podemos encontrar la energía E como función de las J_i's (ecuación I.050). Ya que H = E, tendremos, de II.003:

II.018 $$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + \lambda q^3 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

con:

II.019 $$p = \sqrt{2m\lambda F(q)}$$

y

II.020 $$F(q) = -q^3 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\lambda} + \frac{E}{\lambda}$$

Sean e_1, e_2, e_3 los tres ceros de F(q), que escogeremos del siguiente modo: $e_1 \longrightarrow +(2E/m\omega^2)^{1/2}$, $e_2 \rightarrow -(2E/m\,\omega^2)^{1/2}$, y $e_3 \rightarrow -\infty$, cuando $\lambda \rightarrow 0$(ver la figura 2). Podemos escribir II.020 como sigue:

II.021 $$F(q) = (e_1 - q)(q - e_2)(q - e_3) = -e_3(e_1 - q)(q - e_2)\left[1 - q/e_3\right]$$

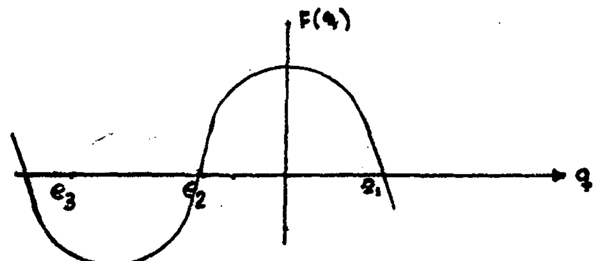

FIGURA 2

Buscaremos la solución exacta de las ecuaciones de movimiento en términos de una serie de potencias de λ en el límite cuando $\lambda \rightarrow 0$. Entonces e_3 -

tenderá a menos infinito. Tomando la raíz de II.021, podemos desarrollar la raíz del último factor en serie de potencias de e_3^{-1}:

$$\left[F(q)\right]^{1/2} = (-e_3)^{1/2}\left[(e_1-q)(q-e_2)\right]^{1/2}\left[1-\frac{q}{2e_3}-\frac{q^2}{8e_3^2}+\dots\right]$$

De acuerdo con I.041

II.022 $$J=\oint p\,dq = \sqrt{2m\lambda}\oint\sqrt{F(q)}\,dq$$

Sustituyendo aquí el desarrollo de la raíz, obtenemos:

II.023 $$J=\sqrt{-2m\lambda e_3}\left[J^{(0)}-\frac{1}{2e_3}J^{(1)}-\frac{1}{8e_3^2}J^{(2)}+\dots\right]$$

en donde:

II.024, $$J^{(k)}=\oint\left[(e_1-q)(q-e_2)\right]^{1/2}q^k\,dq$$

Es posible encontrar las $J^{(k)}$ mediante un cambio de variable:

II.025 $$q=\frac{e_1+e_2}{2}+\frac{e_1-e_2}{2}\operatorname{sen}\psi \qquad q\in[e_1,e_2] \quad ,\psi\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$$

con lo cual, II.024 se transforma en:

II.026 $$J^{(k)}=\frac{1}{4}\pi(e_1-e_2)^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}(e_1+e_2)+\frac{1}{2}(e_1-e_2)\operatorname{sen}\psi\right]^k\cos^2\psi\,d\psi$$

Entonces tendremos:

II.027
$$J^{(0)}=\frac{1}{4}\pi(e_1-e_2)^2 \qquad J^{(1)}=\frac{1}{8}\pi(e_1+e_2)(e_1-e_2)^2$$
$$J^{(2)}=\frac{1}{64}\pi(e_1-e_2)^2\left[5(e_1+e_2)^2-4e_1e_2\right]$$

Si ahora escribimos e_1, e_2, e_3, de modo que satisfagan las condiciones pedidas, del siguiente modo:

II.028
$$e_{1,2} = \pm \left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)^{1/2} + \alpha_{1,2}\lambda + \beta_{1,2}\lambda^2 + \dots$$
$$e_3 = \left(-\frac{m\omega^2}{2\lambda}\right)\left(1 + \alpha_3\lambda + \beta_3\lambda^2 + \dots\right)$$

Sustituyendo este sistema de ecuaciones en F(q) = 0 e igualando las poten_
cias de λ obtenemos las constantes:

II.029
$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{2E}{m^2\omega^4} \qquad \alpha_3 = 0$$
$$\beta_1 = -\beta_2 = \frac{5E}{m^3\omega^7}\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} \qquad \beta_3 = -\frac{8E}{m^3\omega^6}$$

Sustituyendo estos valores en II.028, y el resultado en II.027, obtenemos:

II.030
$$J^{(0)} = \frac{2\pi E}{m\omega^2} + \frac{20\pi E^2\lambda^2}{m^4\omega^8} + \frac{50\pi E^3\lambda^4}{m^7\omega^{14}} + \dots$$
$$J^{(1)} = -\frac{4\pi E^2\lambda}{m^3\omega^6} - \frac{40\pi E^3\lambda^3}{m^6\omega^{12}} + \dots$$
$$J^{(2)} = \frac{\pi E^2}{m^2\omega^4} + \frac{28\pi E^3\lambda^2}{m^5\omega^{10}} + \dots$$

Ahora, sustituyendo este resultado en II.023, obtenemos el desarrollo para J, en términos de E:

II.031
$$J = \frac{2\pi}{\omega} E \left[1 + \frac{15\lambda^2 E}{4m^3\omega^6} + \dots\right]$$

de donde, iterando, se obtiene:

II.032
$$E = \nu J - \frac{15\lambda^2 J^2}{16\pi^2 m^3\omega^4} + \dots \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

Para encontrar q en términos de la variable angular w, utilizamos I.051 :

II.033
$$w = \frac{\partial W}{\partial J} = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q\,\partial J}\,dq = \oint \frac{\partial}{\partial J}\frac{\partial W}{\partial q}\,dq$$

Pero, por otro lado: $\dfrac{\partial W}{\partial q} = p$

con lo cual tendremos:

II.034 $$w = \int \frac{\partial p}{\partial J}\, dq$$

Utilizando II.019:

II.035 $$\frac{\partial p}{\partial J} = \frac{m\lambda}{\sqrt{2m\lambda F(q)}}\ \frac{\partial F}{\partial J}$$

Ahora, usando II.020, y el hecho de que sólo E depende de J:

II.036 $$\frac{\partial p}{\partial J} = \sqrt{\frac{m}{2\lambda}}\ \frac{dE}{dJ}\ \frac{1}{\sqrt{F(q)}}$$

Con lo cual, II.034 queda finalmente:

II.037 $$w = \sqrt{\frac{m}{2\lambda}}\ \frac{dE}{dJ} \int \frac{dq}{\sqrt{F(q)}}$$

Desarrollando $\left[F(q)\right]^{-1/2}$ en forma similar al desarrollo anterior (*):

II.038 $$\begin{aligned}\left[F(q)\right]^{-1/2} &= \left[-e_3 (e_1 - q)(q - e_2)\left(1 - q/e_3\right)\right]^{-1/2} \\ &= \left[-e_3 (e_1 - q)(q - e_2)\right]^{-1/2} \left[1 - q/e_3\right]^{-1/2} \\ &= \left[-e_3 (e_1 - q)(q - e_2)\right]^{-1/2} \left[1 + \frac{q}{2e_3} + \cdots\right]\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores dados por II.025:

II.039 $$\left[F(q)\right]^{-1/2} = \frac{1 + \frac{1}{2e_3}\left[\frac{e_1+e_2}{2} + \frac{e_1-e_2}{2}\,\mathrm{sen}\,\psi\right]}{\sqrt{-e_3}\ \ \frac{e_1-e_2}{2}\cos\psi}$$

Por otra parte $dq = \frac{e_1-e_2}{2}\cos\psi\, d\psi$ con lo cual obtenemos:

II.040 $$w = \left(\frac{m}{2\lambda}\right)^{1/2} \frac{dE}{dJ} \int \frac{1 + \frac{1}{2e_3}\left[\frac{e_1+e_2}{2} + \frac{e_1-e_2}{2}\,\mathrm{sen}\,\psi\right]}{\sqrt{-e_3}\ \ \frac{e_1-e_2}{2}\cos\psi}\ \frac{e_1-e_2}{2}\cos\psi\, d\psi$$

(*) Recuérdese que $(1 + x)^p = 1 + px + \ldots$

Integrando:

II.041 $$W=\left(\frac{m}{2\lambda}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{-e_3}}\;\frac{dE}{dJ}\left[\psi+\frac{1}{2e_3}\,\frac{e_1+e_2}{2}\,\psi-\frac{1}{2e_3}\,\frac{e_1-e_2}{2}\cos\psi\right]$$

Sustituyendo las e_i's de II.028, y la derivada de E de II.032, se tiene:

II.042 $$W=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\omega}{2\pi}-\frac{15\lambda^2 J}{8\pi^2 m^3\omega^4}\right)\left\{\psi-\frac{\lambda}{2m\omega^2}\left(\frac{-4E\lambda}{m^2\omega^4}\right)\psi+\frac{\lambda}{m\omega^2}\left[\left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)^{1/2}+\frac{10E}{m^3\omega^7}\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2}\lambda^2\right]\cos\psi\right\}$$

Agrupando, y conservando sólo los términos de primer orden en λ :

II.043 $$W=\left(\frac{1}{2\pi}-\frac{15\lambda^2 J}{8\pi^2 m^3\omega^5}\right)\left[\psi+\frac{2E\lambda^2}{m^3\omega^6}\psi+\left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)^{1/2}\frac{\lambda}{m\omega^2}\cos\psi\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\psi+\left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)^{1/2}\frac{\lambda}{2\pi m\omega^2}\cos\psi$$

con lo que finalmente obtenemos:

II.044 $$2\pi W=\psi+\left(\frac{J}{\pi m^3\omega^5}\right)^{1/2}\lambda\cos\psi$$

(en donde hemos sustituído E por su valor, a primera aproximación de II.032)

Utilizando por otra parte q de II.025, sustituyendo las e_i's por sus valo̲res correspondientes, y E por II.032, obtenemos :

II.045 $$q=2\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{1/2}\operatorname{sen}\psi-\frac{J\lambda}{\pi m^2\omega^3}$$

Comparando II.044 y II.045, llegamos al resultado final:

II.046 $$q=A\operatorname{sen}2\pi W-\frac{\lambda A^2}{2m\omega^2}\left(3+\cos 4\pi W\right)+\ldots\qquad A=\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{1/2}$$

El primer término de esta suma, corresponde a la solución dada por II.013 así como a la solución del oscilador armónico tridimensional I.103.

($w=\nu t$ + const. por tanto $w=\frac{\omega}{2\pi}t$ + const. de donde se concluye lo anterior)

II.1.C .- TEORIA DE PERTURBACIONES CANONICAS

Muchos problemas importantes de Mecánica Clásica no pueden ser resueltos exactamente. Por tanto, es conveniente desarrollar métodos para obtener soluciones aproximadas. La teoría de Perturbaciones Canónicas es de particular interés, porque hace uso de transformaciones canónicas y variables angulares y de acción, y además, es análoga a la Teoría Cuántica de Perturbaciones.

El método se aplica a sistemas separables de la clase que hemos discutido hasta ahora. Para simplificar, el mecanismo será discutido con detalle en el caso unidimensional, y la extensión a sistemas con más grados de libertad se hará en la siguiente sección.

Supongamos que la transformación canónica de las variables (q , p) a las variables de ángulo y acción, es CONOCIDA PARA EL SISTEMA NO PERTURBADO :

$$q \longrightarrow w^o$$
$$p \longrightarrow J^o$$

En términos de esas nuevas variables, el nuevo hamiltoniano sin perturbar:

$$H_o'(J^o) = H_o(q\ ,\ p)$$

y las correspondientes ecuaciones para el movimiento NO PERTURBADO son:

(ver ecuación I.052)

II.047
$$\dot{w}^o = \frac{\partial H_o'}{\partial J^o} = \nu^o(J^o)$$
$$\dot{J}^{(o)} = 0$$

Hagamos entonces $H'(w^o, J^o, \lambda) = H(q\ , p, \lambda)$ el nuevo hamiltoniano asociado a las nuevas variables.

Por suposición, deberán existir variables w, J en términos de las cuales:

II.048 $$H(q\ , p\ , \lambda) = H'(w^o, J^o, \lambda) = H''(J\ , \lambda)$$

Como ambos conjuntos w^o, J^o y w, J, se obtienen de q, p por transformaciones canónicas, debe existir una transformación canónica que conecte a ambos. Procederemos a encontrar la función generadora para esta transformación. La transformación es independiente del tiempo, y sabemos que para $\lambda = 0$ la transformación debe reducirse a la Identidad; por tanto la función generadora debe ser del tipo 2. Llamémosle $W(w^o, J\ , \lambda)$: (*)

II.049 $$F_2 = W(w^o,\ J, \lambda{=}0) = w^o J$$

En particular, supondremos que W es analítica en λ de modo que podemos desarrollarla en serie de Taylor:

II.050 $$W(w^o, J, \lambda) = W_0(w^o, J) + \lambda W_1(w^o, J) + \lambda^2 W_2(w^o, J) + \ldots$$

en este desarrollo, W_0 está dada por II.049. De acuerdo con las ecuaciones de transformación I.023:

II.051 $$J^o = \frac{\partial W}{\partial w^o} \qquad\qquad w = \frac{\partial W}{\partial J}$$

Por tanto se tendrá:

II.052 $$J^o = J + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w^o} + \lambda^2 \frac{\partial W_2}{\partial w^o} + \cdots$$
$$w = w^o + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial J} + \lambda^2 \frac{\partial W_2}{\partial J} + \cdots$$

(*) La función generadora W y $W' = W \pm aw^o + bJ$ (a y b const.), da lugar a transformaciones canónicas cuyas ecuaciones para w y J difieren sólo por constantes. Por esta razón, simplificaremos las expresiones que podamos obtener para W, despreciando los términos lineales en w^o y J.

Por otro lado, el hamiltoniano $H'(w^o, J^o, \lambda)$, también puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor de $\lambda = 0$:

II.053 $$H'(w^o, J^o, \lambda) = H_0'(J^o) + \lambda H_1'(w^o, J^o) + \lambda^2 H_2'(w^o, J^o) + \cdots$$

en donde los coeficientes H_0', H_1', etc. son conocidos, ya que H' se conoce

Cuando w^o, J^o son expresados en términos de w, J el hamiltoniano es:

$$H'(w^o(w, J), J^o(w, J), \lambda) = H''(J, \lambda)$$

este nuevo hamiltoniano es independiente de w. Desarrollemos H'' en potencias de λ:

II.054 $$H''(J, \lambda) = H_0''(J) + \lambda H_1''(J) + \lambda^2 H_2''(J) + \cdots$$

Para encontrar este nuevo hamiltoniano, debemos encontrar las H''_k. Esto no puede hacerse simplemente igualando los coeficientes de II.054 con los de II.053. Primero debemos expresar H' en términos de J, en lugar de J^o. Esto se puede hacer desarrollando H' en $J^o = J$. Tomando J^o de II.052:

II.055 $$\begin{aligned} H'(w^o, J^o, \lambda) &= H'\left(w^o, J + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w^o} + \lambda^2 \frac{\partial W_2}{\partial w^o} + \cdots, \lambda\right) \\ &= H'(w^o, J, \lambda) + \left.\frac{\partial H'}{\partial J}\right|_{J^o=J} \cdot \left[\lambda \frac{\partial W_1}{\partial w^o} + \cdots\right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 H'}{\partial J^2}\right|_{J^o=J} \cdot \left[\lambda \frac{\partial W_1}{\partial w^o} + \lambda^2 \frac{\partial W_2}{\partial w^o} + \cdots\right]^2 + \cdots \end{aligned}$$

Agrupando las potencias de λ :

II.056 $$\begin{aligned} H'(w^o, J^o, \lambda) &= H'(w^o, J, \lambda) + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w^o} \cdot \left.\frac{\partial H'}{\partial J}\right|_{J_o=J} \\ &\quad + \lambda^2 \left[\frac{\partial W_2}{\partial w^o} \cdot \left.\frac{\partial H'}{\partial J}\right|_{J^o=J} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial w^o}\right)^2 \cdot \left.\frac{\partial^2 H'}{\partial J^2}\right|_{J^o=J}\right] + \cdots \end{aligned}$$

Ahora, escribiendo II.053 con $J^o = J$:

$$H'(w^o, J, \lambda) = H_0'(J) + \lambda H_1'(w^o, J) + \lambda^2 H_2'(w^o, J) + \cdots$$

Insertando ésto en II.056, tanto en el primer sumando, como en las derivadas de H' respecto de J:

$$H'(w^\circ,J^\circ,\lambda) = H'_0(J) + \lambda H'_1(w^\circ,J) + \dots + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\cdot\frac{\partial}{\partial J}\left(H'_0(J)+\lambda H'_1(w^\circ,J)+\dots\right)\Big|_{J^\circ=J}$$

$$+\lambda^2\left[\frac{\partial W_2}{\partial w^\circ}\cdot\frac{\partial}{\partial J}\left(H'_0(J)+\lambda H'_1(w^\circ,J)+\dots\right)\Big|_{J^\circ=J}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\right)^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial J^2}\left(H'_0(J)+\lambda H'_1(w^\circ,J)+\dots\right)\Big|_{J^\circ=J}\right]+\dots$$

desarrollando las derivadas con respecto de J:

$$H'(w^\circ,J^\circ,\lambda) = H'_0(J) + \lambda H'_1(w^\circ,J) + \dots + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\left[\frac{\partial H'_0}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J} + \lambda\frac{\partial H'_1}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J}+\dots\right]$$

$$+\lambda^2\left\{\frac{\partial W_2}{\partial w^\circ}\left[\frac{\partial H'_0}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J} + \lambda\frac{\partial H'_1}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J}+\dots\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\right)^2\left[\frac{\partial^2 H'_0}{\partial J^2}\Big|_{J^\circ=J} + \lambda\frac{\partial^2 H'_1}{\partial J^2}\Big|_{J^\circ=J}+\dots\right]\right\}+\dots$$

Haciendo operaciones:

$$H'(w^\circ,J^\circ,\lambda) = H'_0(J) + \lambda H'_1(w^\circ,J) + \dots + \lambda\frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\cdot\nu^\circ + \lambda^2\frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\,\frac{\partial H'_1}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J}$$

$$+\lambda^2\frac{\partial W_2}{\partial w^\circ}\nu^\circ + \lambda^3\frac{\partial W_2}{\partial w^\circ}\,\frac{\partial H'_1}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J}$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^2\left(\frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\right)^2\frac{\partial \nu^\circ}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J}+\dots$$

en donde se ha utilizado:

$$\nu^\circ = \frac{\partial H'_0}{\partial J^\circ}$$

Agrupando las potencias de λ.:

II.057 $$H'(w^\circ, J^\circ, \lambda) = H'_0(J) + \lambda\left[H'_1(w^\circ, J) + \frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\cdot \nu^\circ\right] + \lambda^2\left[H'_2(w^\circ, J) + \frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\frac{\partial H'_1}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J} + \frac{\partial W_2}{\partial w^\circ}\nu^\circ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\right)^2\frac{\partial \nu^\circ}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J}\right] + \ldots$$

Igualando ahora las potencias de II.057 con las de II.054, obtenemos:

II.058 (a) $$H''_0(J) = H'_0(J)$$

II.058 (b) $$H''_1(J) = H'_1(w^\circ, J) + \frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\nu^\circ$$

II.058 (c) $$H''_2(J) = H'_2(w^\circ, J) + \frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\frac{\partial H'_1}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J} + \frac{\partial W_2}{\partial w^\circ}\nu^\circ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial w^\circ}\right)^2\cdot\frac{\partial \nu^\circ}{\partial J}\Big|_{J^\circ=J}$$

Recordemos que H'_o , H'_1, .. son funciones conocidas, obtenidas del desarrollo del hamiltoniano como función de w^o, J^o. De cualquier forma, ya que hemos desarrollado H' alrededor de J, todas las funciones H'_o, H'_1,..y sus derivadas están evaluadas más bien en J que en J^o. En particular, ν^o debe evaluarse en J, no en J^o.

Antes de seguir, veamos a dónde queremos llegar:

Queremos determinar las W_k , de modo que la transformación II.052 se conozca. Ya conocemos la transformación de las q , p a las w^o, J^o :

$$q = q(w^o, J^o) \qquad\qquad p = p(w^o, J^o)$$

Esta es una transformación canónica, y es independiente de cualquier hamiltoniano. Su significado especial, es que para el hamiltoniano sin perturbar, H_o , el movimiento no perturbado está dado por J^o = constante, y $w^o = \nu^o t$ + constante (ecuaciones I.053).

Una vez que encontremos las W_k, podemos expresar las q, p en términos de las w, J, por las ecuaciones:

$$q = q(w^o(w, J), J^o(w, J)) \qquad p = p(w^o(w, J), J^o(w, J))$$

El significado de esta transformación, es que para el Hamiltoniano perturbado H, el movimiento perturbado está dado aproximadamente por J = const. y $w = \nu t +$ const. La nueva frecuencia se obtiene de las H''_k como se mostrará más adelante.

Ya hemos demostrado que la variable angular w^o cambia en 1 cuando la coordenada q pasa a través de un ciclo completo, y entonces w cambia en algún entero. Pero cuando decidimos aplicar nuestra teoría de perturbaciones canónicas, suponemos que w y w^o no difieren mucho. Por tanto, el entero en que cambia w es 1 también. Y por tanto, $w - w^o$, tanto como J y J^o, son -- funciones periódicas de w^o con período 1. Esto debe ser cierto para todos los valores de λ por lo que se sigue, de la ecuación II.052 que cada parcial de W_k con respecto de J es periódica en w^o. Entonces, cada W_k es la suma de una función periódica y una función arbitraria $f_k(w^o)$. De acuerdo con la primera de las ecuaciones II.052 las derivadas $f'_k(w^o)$ deben también ser periódicas de modo que cada W_k es la suma de una función periódica con período 1 y una función lineal $c_k w^o$. Esas funciones lineales introducen una función linealmente dependiente de λ en W y justamente en la nota de la página 48 hemos acordado despreciar tales términos de W.

Por tanto, hacemos $c_k = 0$, y cada W_k puede ser expresada como una serie de Fourier de la forma:

II.059
$$W_k(w^\circ, J) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_k(J, m) \exp 2\pi i m w^\circ \qquad k \neq 0$$

Las $\frac{\partial W_k}{\partial w^o}$ pueden ser desarrolladas similarmente, excepto que para tales desarrollos no aparece el término constante ($m = 0$). Como resultado, obtenemos:

$$\frac{\partial W_k}{\partial w^\circ} = 2\pi i \sum_m m W_k(J, m) \exp 2\pi i m w^\circ$$

Multiplicando por dw^o e integrando entre 0 y 1

II.060
$$\int_0^1 \frac{\partial W_k}{\partial w^\circ} dw^\circ = 2\pi i \sum_m m W_k \int_0^1 \exp 2\pi i m w^\circ dw^\circ$$
$$= 2\pi i \sum_m W_k \frac{1}{2\pi i} \left(e^{2\pi i m} - 1\right) = 0$$

La importancia de este resultado, es que nos permitirá calcular las W_k's, realizando ciertas integraciones sencillas, como veremos adelante.

Multiplicando II.058 (b) por dw^o e integrando sobre un período:

$$\int_0^1 H_1''(J)\, dw^\circ = \int_0^1 H_1'(w^\circ, J)\, dw^\circ + \nu^\circ(J) \int_0^1 \frac{\partial W_1}{\partial w^\circ} dw^\circ$$

o sea:

II.061
$$H_1''(J) = \int_0^1 H_1'(w^\circ, J)\, dw^\circ \equiv \langle H_1'(w^\circ, J) \rangle$$

Sustituyendo de nuevo este último resultado en II.058 (b):

$$\langle H_1'(w^\circ, J) \rangle - H_1'(w^\circ, J) = \frac{\partial W_1}{\partial w^\circ} \nu^\circ(J)$$

o sea:

II.062 $$\frac{\partial W_1}{\partial w^0} = \frac{\langle H_1'(w^0,J)\rangle - H_1'(w^0,J)}{\nu^0(J)}$$

Para encontrar W_1 sólo tenemos que integrar, ya que la constante de integración no afecta para nada nuestras ecuaciones de transformación II.052.

Efectuando el mismo procedimiento con II.058 (c):

$$\int_0^1 H_2''(J)\,dw^0 = \int_0^1 H_2'\,dw^0 + \int_0^1 \frac{\partial W_1}{\partial w^0}\,\frac{\partial H_1'}{\partial J}\bigg|_{J^0=J} dw^0 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial \nu^0}{\partial J}\bigg|_{J^0=J}\left(\frac{\partial W_1}{\partial w^0}\right)^2 dw^0$$

utilizando II.061

$$H_2''(J) = \langle H_2'\rangle + \int_0^1 \frac{\langle H_1'\rangle - H_1'}{\nu^0}\,\frac{\partial H_1'}{\partial J}\bigg|_{J^0=J} dw^0 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial \nu^0}{\partial J}\bigg|_{J^0=J}\cdot\frac{\langle H_1'\rangle^2 - 2\langle H_1'\rangle H_1' + H_1'^2}{(\nu^0)^2}\,dw^0$$

Separando las integrales:

$$H_2''(J) = \langle H_2'\rangle + \frac{1}{\nu^0}\int_0^1 \frac{\partial H_1'}{\partial J}\bigg|_{J^0=J}\langle H_1'\rangle\,dw^0 - \frac{1}{\nu^0}\int_0^1 H_1'\,\frac{\partial H_1'}{\partial J}\bigg|_{J^0=J} dw^0$$
$$+ \frac{1}{2\nu^{0\,2}}\int_0^1 \langle H_1'\rangle^2\,\frac{\partial \nu^0}{\partial J}\bigg|_{J^0=J} dw^0 - \frac{1}{\nu^{0\,2}}\int_0^1 \langle H_1'\rangle H_1'\,\frac{\partial \nu^0}{\partial J}\bigg|_{J^0=J} dw^0$$
$$+ \frac{1}{2\nu^{0\,2}}\int_0^1 (H_1')^2\,\frac{\partial \nu^0}{\partial J}\bigg|_{J^0=J} dw^0$$

con lo cual tenemos:

II.063 $$H_2''(J) = \langle H_2'\rangle + \frac{1}{\nu^0}\langle H_1'\rangle\left\langle\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle - \frac{1}{\nu^0}\left\langle H_1'\,\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle - \frac{1}{2\nu^{0\,2}}\,\frac{\partial \nu^0}{\partial J}\langle H_1'\rangle^2 + \frac{1}{2\nu^{0\,2}}\,\frac{\partial \nu^0}{\partial J}\langle H_1'^2\rangle$$

Sustituyendo en II.058 (c):

$$H_2' + \frac{\partial W_1}{\partial w^0}\,\frac{\partial H_1'}{\partial J} + \nu^0\,\frac{\partial W_2}{\partial w^0} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \nu^0}{\partial J}\left(\frac{\partial W_1}{\partial w^0}\right)^2 =$$
$$= \langle H_2'\rangle + \frac{1}{\nu^0}\langle H_1'\rangle\left\langle\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle - \frac{1}{\nu^0}\left\langle H_1'\,\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle - \frac{1}{2\nu^{0\,2}}\,\frac{\partial \nu^0}{\partial J}\langle H_1'\rangle^2 + \frac{1}{2\nu^{0\,2}}\,\frac{\partial \nu^0}{\partial J}\langle H_1'^2\rangle$$

Por tanto, se tendrá:

$$\frac{\partial W_2}{\partial w^o} = \frac{1}{\nu^o}\left[\langle H_2'\rangle - H_2'\right] + \frac{1}{\nu^{o2}}\langle H_1'\rangle\left\langle\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle - \frac{1}{\nu^o}\frac{\partial W_1}{\partial w^o}\frac{\partial H_1'}{\partial J}$$
$$-\frac{1}{2\nu^o}\frac{\partial \nu^o}{\partial J}\left(\frac{\partial W_1}{\partial w^o}\right)^2 - \frac{1}{\nu^{o2}}\left\langle H_1'\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle - \frac{1}{2\nu^{o3}}\frac{\partial \nu^o}{\partial J}\langle H_1'\rangle^2 + \frac{1}{2\nu^{o3}}\frac{\partial \nu^o}{\partial J}\langle H_1'^2\rangle$$

Sustituyendo de nuevo II.062:

$$\frac{\partial W_2}{\partial w^o} = \frac{1}{\nu^o}\left[\langle H_2'\rangle - H_2'\right] + \frac{1}{\nu^{o2}}\langle H_1'\rangle\left\langle\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle - \frac{1}{\nu^{o2}}\left[\langle H_1'\rangle - H_1'\right]\frac{\partial H_1'}{\partial J}$$
$$-\frac{1}{2\nu^{o3}}\left[\langle H_1'\rangle - H_1'\right]^2\frac{\partial \nu^o}{\partial J} - \frac{1}{\nu^{o2}}\left\langle\frac{\partial H_1'}{\partial J}H_1'\right\rangle + \frac{1}{2\nu^{o3}}\left[\langle H_1'^2\rangle - \langle H_1'\rangle^2\right]\frac{\partial \nu^o}{\partial J}$$

Haciendo operaciones y agrupando, obtenemos finalmente:

II.064 $$\frac{\partial W_2}{\partial w^o} = \frac{1}{\nu^o}\left[\langle H_2'\rangle - H_2'\right] + \frac{1}{\nu^{o2}}\left[\langle H_1'\rangle\left\langle\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle - \langle H_1'\rangle\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right.$$
$$\left. + H_1'\frac{\partial H_1'}{\partial J} - \left\langle H_1'\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle\right] + \frac{1}{2\nu^{o3}}\cdot\frac{\partial \nu^o}{\partial J}\left[2H_1'\langle H_1'\rangle\right.$$
$$\left. - 2\langle H_1'\rangle^2 - H_1'^2 + \langle H_1'^2\rangle\right]$$

De nueva cuenta, esta expresión puede ser integrada para obtener W_2. Entonces, las nuevas variables w , J , se encuentran en términos de las antiguas w^o, J^o a través de las ecuaciones II.058, II.062 y II.064.

El hamiltoniano perturbado (La Energía del sistema perturbado) H'', puede obtenerse sin necesidad de calcular la función generadora W primero.

Usando II.054, con II.061 y II.063:

II.065 $$E = H''(J,\lambda) = H_0'(J) + \lambda\langle H_1'\rangle + \lambda^2\left[\langle H_2'\rangle\right.$$
$$+ \frac{1}{\nu^o}\langle H_1'\rangle\left\langle\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle - \frac{1}{\nu^o}\left\langle H_1'\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle$$
$$\left. + \frac{1}{2\nu^{o2}}\frac{\partial \nu^o}{\partial J}\left(\langle H_1'^2\rangle - \langle H_1'\rangle^2\right)\right] + \dots$$

De esta ecuación puede calcularse fácilmente la nueva frecuencia perturbada $\nu = \frac{\partial H''}{\partial J}$.

Apliquemos ahora toda esta teoría al caso del oscilador anarmónico cuyo hamiltoniano está dado por II.003.

De acuerdo con I.103, II.013 y II.046, la coordenada q sin perturbación, está dada por: $$q = \left(\frac{J^\circ}{\pi m \omega}\right)^{1/2} \operatorname{sen} 2\pi w^\circ$$

Por tanto, y de acuerdo a las soluciones no perturbadas para la Energía (correspondientes a H' en este caso) dadas en I.098, II.017 y II.032 se tendrá:

II.066 $$H_0' = \nu^\circ J^\circ \qquad H_1' = q^3 = \left(\frac{J^\circ}{\pi m \omega}\right)^{3/2} \operatorname{sen}^3 2\pi w^\circ$$

Por tanto, utilizando el conjunto de ecuaciones II.058, se tiene:

II.067 (a) $$H_0' = \nu^\circ J^\circ$$

II.067 (b) $$H_1' = \left(\frac{J^\circ}{\pi m \omega}\right)^{3/2} \operatorname{sen}^3 2\pi w^\circ$$

II.067 (c) $$H_K' = 0 \qquad K = 2, 3, 4, \ldots$$

La primera corrección a la Energía $\langle H_1' \rangle$ de II.065 nos da:

II.068 $$H_1'' = \langle H_1' \rangle = 0$$

La corrección de segundo orden para la energía, tomada también de II.065 resulta sólo en un término que no se anula:

II.069 $$H_2'' = -\frac{1}{\nu^\circ} \int_0^1 \frac{\partial H_1'}{\partial J^\circ} H_1' \, dw^\circ = -\frac{15}{16} \frac{J^2}{\pi^2 m^3 \omega^4}$$

Por tanto, la Energía del oscilador anarmónico será:

II.070 $$E = H''(J, \lambda) = \frac{\omega J}{2\pi} - \frac{15 J^2 \lambda^2}{16 \pi^2 m^3 \omega^4} + \ldots$$

en concordancia con la ecuación II.032.

Para obtener la coordenada q en términos de w, J, hay que encontrar primero la Función Generadora W dada por II.050.

De II.062, podemos obtener W_1 :

II.071 $$\frac{\partial W_1}{\partial w^o} = \frac{1}{\nu^o}\left(\langle H_1' \rangle - H'\right) = -\frac{1}{\nu^o}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2} sen^3 2\pi w^o$$

por tanto:

II.072 $$W_1 = -\frac{1}{2\pi\nu^o}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\left(-\cos 2\pi w^o + \frac{1}{3}\cos^3 2\pi w^o\right)$$

Utilizando identidades trigonométricas (*)

II.073 $$W_1 = \frac{1}{2\pi\nu^o}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4}\cos 2\pi w^o - \frac{1}{12}\cos 6\pi w^o\right)$$

Y tenemos entonces:

II.074 $$\frac{\partial W_1}{\partial J} = \frac{3}{8\pi m\omega^2}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{1/2}\left(3\cos 2\pi w^o - \frac{1}{3}\cos 6\pi w^o\right)$$

Escribiendo ahora de nuevo II.052 a primer orden de λ sustituyendo II.071 y la derivada II.074 ;

II.075 $$J^o = J - \lambda \frac{2\pi}{\omega}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2} sen^3 2\pi w^o$$
$$w = w^o + \frac{3\lambda}{8\pi m\omega^2}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{1/2}\left(3\cos 2\pi w^o - \frac{1}{3}\cos 6\pi w^o\right)$$

Este es el par de ecuaciones de transformación que relacionan w^o, J^o con w, J. Podemos ahora encontrar a q como función de w, J, mediante el uso de I.103, II.013 o bien II.046 : (utilizando además II.075)

II.076 $$q = \left(\frac{J^o}{\pi m\omega}\right)^{1/2} sen 2\pi w^o$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi m\omega}}\left(J - \lambda\frac{2\pi}{\omega}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2} sen^3 2\pi w^o\right)^{1/2} sen 2\pi w^o$$

(*) $\cos^3 2\pi w^o = \cos^2 2\pi w^o \;\; \cos 2\pi w^o = (1 + \cos 4\pi w^o)\,\frac{\cos 2\pi w^o}{2}$

además: $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

Efectuando los desarrollos correspondientes (hasta primer orden de λ)

II.077 $$\left[J^{\circ}\right]^{1/2} = \left[J^{1/2}\right]\left(1 - \frac{\lambda}{m\omega^2}\left[\frac{J}{\pi m\omega}\right]^{1/2} \operatorname{sen}^3 2\pi w + \dots\right)$$

II.078 $$\operatorname{sen} 2\pi w^{\circ} = \operatorname{sen} 2\pi w - \frac{3\lambda}{4m\omega^2}\left[\frac{J}{\pi m\omega}\right]^{1/2} \times \operatorname{sen} 2\pi w\left(3\cos 2\pi w - \tfrac{1}{3}\cos 6\pi w\right) + \dots$$

Insertando II.077 y II.078 en II.076 obtenemos q:

II.079 $$q = \left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{1/2} \operatorname{sen} 2\pi w - \frac{\lambda}{2m\omega^2}\,\frac{J}{\pi m\omega}\left(3 + \cos 4\pi w\right)$$

que es exactamente el resultado dado en II.046 por el método de Born.

Para obtener la corrección a segundo orden de q, seguimos el mismo camino-- a saber, integramos II.064 para obtener W_2 .

Nótese que en esta ecuación, y en virtud de II.067 (c),y II.068 , varios términos se anulan. (Recuérdese que se sustituye J^0 por J en esas ecuaciones)

Además:
$$\frac{\partial \nu^{\circ}}{\partial J} = \frac{\partial^2 H_{\circ}}{\partial J^2} = \frac{\partial^2(\nu^{\circ}J)}{\partial J^2} = 0$$

Esto simplifica W_2 , la cual queda:

II.080 $$W_2 = \frac{1}{\nu^{\circ 2}}\left[\int H_1' \frac{\partial H_1'}{\partial J}\, dw^{\circ} - \int \left\langle H_1' \frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle dw^{\circ}\right]$$

Estas integrales ya las calculamos para II.069.

Por tanto, la expresión para W_2 se desarrolla así:
$$W_2 = \frac{1}{\nu^{\circ 2}} \cdot \frac{3J^2}{2\pi^3 m^3\omega^3}\int \operatorname{sen}^6 2\pi w^{\circ}\, dw^{\circ} - \frac{15\, J^2 w^{\circ}}{32\,\nu^{\circ 2}\pi^3 m^3\omega^3}$$

$$W_2 = \frac{1}{\nu^{o2}} \cdot \frac{3J^2}{2\pi^3 m^3 \omega^3}\left[\frac{5w^o}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4\pi w^o}{8\pi} + \frac{3\operatorname{sen} 8\pi w^o}{128\pi} + \frac{\operatorname{sen}^3 4\pi w^o}{96\pi}\right] - \frac{15 J^2 w^o}{32\nu^{o2}\pi^3 m^3\omega^3}$$

II.081 $$W_2 = \frac{1}{\nu^{o2}} \cdot \frac{3J^2}{2\pi^3 m^3 \omega^3}\left[- \frac{\operatorname{sen} 4\pi w^o}{8\pi} + \frac{3\operatorname{sen} 8\pi w^o}{128\pi} + \frac{\operatorname{sen}^3 4\pi w^o}{96\pi}\right]$$

Utilizando de nuevo II.052, y sustituyendo las derivadas II.071 y II.074---

$$J^o = J - \frac{\lambda}{\nu^o}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\operatorname{sen}^3 2\pi w^o + \frac{\lambda^2}{\nu^{o2}}\left[H_1'\frac{\partial H_1'}{\partial J} - \left\langle H_1'\frac{\partial H_1'}{\partial J}\right\rangle\right] + \cdots$$

$$= J - \frac{\lambda}{\nu^o}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\operatorname{sen}^3 2\pi w^o + \frac{\lambda}{\nu^{o2}}\left[\frac{3J^2}{2\pi^3 m^3\omega^3}\operatorname{sen}^6 2\pi w^o - \frac{15J^2}{32\pi^3 m^3\omega^3}\right] + \cdots$$

II.082 $$J^o = J - \frac{\lambda}{\nu^o}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\operatorname{sen}^3 2\pi w^o + \frac{3J^2\lambda^2}{2\nu^{o2}\pi^3 m^3\omega^3}\left[\operatorname{sen}^6 2\pi w^o - \frac{5}{16}\right] + \cdots$$

Ahora : $$w = w^o - \frac{3\lambda}{4\nu^o\pi^2 m\omega}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{1/2}\left(-\cos 2\pi w^o + \frac{1}{3}\cos^3 2\pi w^o\right) + \frac{6\lambda^2 J}{2\nu^{o2}\pi^3 m^3\omega^3}\left[-\frac{\operatorname{sen} 4\pi w^o}{8\pi} + \frac{3\operatorname{sen} 8\pi w^o}{128\pi} + \frac{\operatorname{sen}^3 4\pi w^o}{96\pi}\right]$$

con lo cual:

II.083 $$w = w^o - \frac{3\lambda}{4\nu^o\pi J}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\left(-\cos 2\pi w^o + \frac{1}{3}\cos^3 2\pi w^o\right) + \frac{3\lambda^2 J}{\nu^{o2}\pi^3 m^3\omega^3}\left[-\frac{\operatorname{sen} 4\pi w^o}{8\pi} + \frac{3\operatorname{sen} 8\pi w^o}{128\pi} + \frac{\operatorname{sen}^3 4\pi w^o}{96\pi}\right]$$

Las ecuaciones II.082 y II.083 son las ecuaciones de transformación para segundo orden.

Utilizando por último q de II.076, y sustituyendo estas ecuaciones de transformación, obtenemos después de un tedioso cálculo:

II.084
$$q = \left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{1/2} \operatorname{sen} 2\pi w - \frac{\lambda}{2\pi\omega}\,\frac{J}{\pi m\omega}\left(3 + \cos 4\pi w\right)$$
$$+ \frac{\lambda^2}{m^2\omega^4}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\left(-\frac{3}{16}\operatorname{sen} 6\pi w + \frac{11}{8}\operatorname{sen} 2\pi w\right)$$

que coincide con la expresión de segundo orden de q en II.015 (obtenida por el método directo), excepto por el término no acotado en ωt, haciendo $\alpha = \frac{11}{8}$

II.2 Discusión de los tres métodos.-

Observamos que el primer método es muy rápido, y obtenemos fácilmente las correcciones a la energía (Ecuación II.017). Sin embargo encontramos dos dificultades insuperables: A las soluciones para q^1 y q^2 (ecuaciones II.014 y II.015) se suma un término que es proporcional a la solución de la ecuación no perturbada (II.013). No hemos considerado este término en la solución para q^1, pero lo hemos agregado a la solución de q^2. Esto lo hemos hecho con el fin de obtener la respuesta correcta -ésto es, la respuesta obtenida con el método de Born o por perturbaciones canónicas- para E^1 y E^2.

(ecuaciones II.032 y II.070) Si hacemos $\alpha = \frac{11}{8}$ obtenemos dicho resultado.

La segunda dificultad es la existencia de un término proporcional a $t\cos\omega t$ en q^2. Si las series en λ tienen algún significado, entonces debe ser posible escoger λ tan pequeño, que los términos en λ^n son más pequeños que los términos no perturbados. Pero esto es imposible si aparece un término no acotado como $t\cos\omega t$.

Estas dificultades no aparecen en el método de Born; sólo que ahora como -- contrapartida, los recursos matemáticos son muy complicados, lo que hace más pesada la obtención de las soluciones del movimiento perturbado. Además, resulta poco natural escoger las tres raíces e_1, e_2 , e_3 en la forma pedida - (ecuación II.028). En la figura 2 vemos cual es la situación que gráficamente guardan entre sí estas raíces: la partícula tiene dos puntos de regreso, e_2 y e_3. La gráfica tiene un punto máximo en $q = 0$ y un mínimo en $q = -\frac{m\omega^2}{3\lambda}$

Nótese entonces que si $\lambda \to 0$, entonces el mínimo de la curva $\to -\infty$ de modo que la partícula no puede escapar. Mediante este mecanismo, podemos averi-- guar la naturaleza del movimiento, haciendo $F(q) = 0$, pero las dificultades matemáticas observadas, hacen este método impráctico.

Finalmente, la Teoría de Perturbaciones Canónicas es el método más simple para obtener las soluciones perturbadas (ecuaciones II.070 y II.084).En este caso, la complejidad se reduce únicamente a lo largo y tedioso de los de -- los cálculos, sobre todo si se desea un grado mayor de aproximación, pero está garantizada la mejor exactitud de las soluciones.

II.3 Perturbaciones canónicas en el caso Multidimensional.-

Analizaremos ahora el caso multidimensional. Presentaremos dos situaciones distintas, ya sea que se trate de Sistemas No Degenerados, o bien Sistemas Degenerados. La segunda de estas opciones ofrece mayores dificultades matemáticas que la primera, ya que conduce a series divergentes, por lo que se necesita aplicar técnicas especiales para resolver los problemas planteados.

II.3.1.-SISTEMAS NO DEGENERADOS.-

Con pequeñas modificaciones, el procedimiento seguido en el caso unidimensional, puede ser aplicado a un sistema Condicionalmente Periódico (ver art. I.7) con f grados de libertad.

El sistema sin perturbar está descrito por las variables :

$$J_k^o \qquad w_k^o \qquad k = 1, 2, \ldots f.$$

de modo que se tendrá:

II.085 $$H'(w_k^o, J_k^o, \lambda) = H_0'(J_k^o) + \lambda H_1'(w_k^o, J_k^o) + \lambda^2 H_2'(w_k^o, J_k^o) + \ldots$$

y

II.086 $$H''(J_k, \lambda) = H_0''(J_k) + \lambda H_1''(J_k) + \lambda^2 H_2''(J_k) + \ldots$$

Cuando $\lambda = 0$, la transformación es una identidad, por lo que para el caso perturbado, se sugiere considerar la Función W del tipo F_2. La función generadora W se puede desarrollar en serie de Taylor, del siguiente modo:

II.087 $$W_k(w_k^o, J_k, \lambda) = W_0(w_k^o, J_k) + \lambda W_1(w_k^o, J_k) + \lambda^2 W_2(w_k^o, J_k) + \ldots$$

en donde cada W_k está dado como un desarrollo de fourier de la forma:

II.088 $$W_k = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\cdots\sum_{m_f} W^{(k)}_{m_1 m_2 \cdots m_f}\, e^{2\pi i(m_1 w_1^0 + \ldots + m_f w_f^0)}$$

y $W_0^{(k)}$ se obtiene para $\lambda = 0$. Esta función, se puede escribir del siguiente modo: (ver ecuación I.026)

II.089 $$W_0^{(k)} = \sum_k w_k^0 J_k$$

Las ecuaciones de Transformación serán:(ver ecuación II.051)

II.090 $$J_k^0 = \frac{\partial W}{\partial w_k^0} \qquad w_k = \frac{\partial W}{\partial J_k}$$

y por tanto:

II.091 $$\begin{aligned} J_k^0 &= J_k + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_k^0} + \lambda^2 \frac{\partial W_2}{\partial w_k^0} + \ldots \\ w_k &= w_k^0 + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial J_k} + \lambda^2 \frac{\partial W_2}{\partial J_k} + \ldots \end{aligned}$$

Insertando la primera parte de II.091 en II.085:

II.092 $$H'\left(w_k^0,\, J_k + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_k^0} + \ldots,\, \lambda\right)$$

Desarrollando alrededor de $J_k^0 = J_k$ y agrupando:

II.093 $$\begin{aligned} H' &= H'(w_k^0, J_k, \lambda) + \sum_k \frac{\partial H'}{\partial J_k}\cdot\left(\lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_k^0} + \ldots\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{ki}\left(\frac{\partial}{\partial J_k}\frac{\partial H'}{\partial J_i}\right)\left(\lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_k^0} + \ldots\right)\cdot\left(\lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^0} + \ldots\right) \end{aligned}$$

$$H' = H'(w_K^\circ, J_K, \lambda) + \lambda \cdot \sum_K \frac{\partial H'}{\partial J_K} \left(\frac{\partial W_1}{\partial w_K^\circ} \right)$$

$$+ \lambda^2 \left[\sum_K \frac{\partial H'}{\partial J_K} \left(\frac{\partial W_2}{\partial w_K^\circ} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{Ki} \frac{\partial}{\partial J_K} \left(\frac{\partial H'}{\partial J_i} \right) \cdot \frac{\partial W_1}{\partial w_K^\circ} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial w_i^\circ} \right]$$

$$+ \ldots$$

Sustituyendo ahora, el lado derecho de II.085, en este arreglo, obtenemos:

$$H'(w_K^\circ, J_K^\circ, \lambda) = H_0'(J_K) + \lambda H_1'(w_K^\circ, J_K) + \ldots$$

$$+ \lambda \sum_K \frac{\partial (H_0' + \lambda H_1' + \ldots)}{\partial J_K} \cdot \left(\lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_K^\circ} \right)$$

$$+ \lambda^2 \left[\sum_K \frac{\partial (H_0' + \lambda H_1' + \ldots)}{\partial J_K} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial w_K^\circ} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{Ki} \frac{\partial}{\partial J_K} \frac{\partial (H_0' + \lambda H_1' + \ldots)}{\partial J_i} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial w_K^\circ} \frac{\partial W_1}{\partial w_i^\circ} \right]$$

$$+ \ldots$$

Agrupando de nuevo:

II.094 $$H'(w_K^\circ, J_K^\circ, \lambda) = H_0'(J_K) + \lambda \left[H_1'(w_K^\circ, J_K) + \sum_K \frac{\partial H_0'}{\partial J_K} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial w_K^\circ} \right]$$

$$+ \lambda^2 \left[H_2'(w_K^\circ, J_K) + \sum_K \frac{\partial H_1'}{\partial J_K} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial w_K^\circ} \right.$$

$$+ \sum_K \frac{\partial H_0'}{\partial J_K} \frac{\partial W_2}{\partial w_K^\circ} + \frac{1}{2} \sum_{Ki} \frac{\partial}{\partial J_K} \frac{\partial H_0'}{\partial J_i}$$

$$\left. \cdot \frac{\partial W_1}{\partial w_K^\circ} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial w_i^\circ} \right]$$

$$+ \ldots$$

El lado derecho de II.094 es H' valuada en $J_k^o = J_k$.

Considerando ahora el desarrollo II.086, podemos igualar coeficientes:

II.095 (a) $$H_0''(J_k) = H_0'(J_k)$$

II.095 (b) $$H_1''(J_k) = H_1'(w_k^o, J_k) + \sum_k' \frac{\partial H_0'}{\partial J_k} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial w_k^o}$$

II.095 (c) $$H_2''(J_k) = H_2'(w_k^o, J_k) + \sum_k' \left[\frac{\partial H_1'}{\partial J_k} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial w_k^o} + \frac{\partial H_0'}{\partial J_k} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial w_k^o}\right] + \frac{1}{2} \sum_{ki}' \frac{\partial}{\partial J_k} \frac{\partial H_0'}{\partial J_i} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial w_k^o} \frac{\partial W_1}{\partial w_i^o}$$

Ahora definimos para una función F, el promedio:

II.096 $$\langle F \rangle = \int_0^1 \cdots \int_0^1 F \, dw_1^o \cdots dw_f^o$$

Aplicando lo anterior a II.095 (b), obtenemos:

$$\langle H_1'' \rangle = \langle H_1' \rangle + \sum_k' \nu_k^o \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\partial W_1}{\partial w_k^o} dw_1^o \cdots dw_f^o$$

Como H_1'' no depende de w_k^o obtenemos:

II.097 $$H_1'' = \langle H_1' \rangle$$

y por tanto:

II.098 $$H_1'' = \langle H_1' \rangle = H_1'(w_k^o, J_k) + \sum_k' \frac{\partial H_0'}{\partial J_k} \frac{\partial W_1}{\partial w_k^o}$$

con lo cual obtenemos:

II.099 $$\sum_k' \nu_k^o \frac{\partial W_1}{\partial w_k^o} = \langle H_1'(w_k^o, J_k) \rangle - H_1'(w_k^o, J_k)$$

Derivando II.088, obtenemos:

II.100 $$\frac{\partial W}{\partial w_K^{\circ}} = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\cdots\sum_{m_f} 2\pi i\, m_K W^{(K)}_{m_1 m_2 \cdots m_f}\, e^{2\pi i \sum m_K w_K^{\circ}}$$

Por otro lado, la expresión II.099, tiene el siguiente desarrollo:

II.101 $$\langle H_1' \rangle - H_1' = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\cdots\sum_{m_f} C_{m_1 m_2 \cdots m_f}(J)\, e^{2\pi i \sum m_K w_K^{\circ}}$$

Utilizando II.100 y II.101, obtenemos finalmente:

II.102 $$W^{(1)}_{m_1 m_2 \cdots m_f} = \left[2\pi i \sum_K \nu_K^{\circ} m_K\right]^{-1} C_{m_1 m_2 \cdots m_f}$$

Siempre y cuando, $\sum \nu_K^{\circ} m_K \neq 0$. Para un movimiento condicionalmente periódico, las ν_K° no son conmensurables, de modo que esta última condición es siempre válida, y II.102 determina todos los coeficientes de la expansión, excepto el término constante $W^1_{oo\cdots o}$. Pero como en el caso unidimensional, este término no es esencial, y puede despreciarse..

II.3.2.- EJEMPLO: EL OSCILADOR ANARMONICO BIDIMENSIONAL.

Aplicaremos la discusión de esta sección al caso de oscilador anarmónico--- en dos dimensiones. De nuevo, tomamos el hamiltoniano, como en I.092:

II.103 $$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2} + \lambda q_1^2 q_2^2 k_1 k_2$$

en donde

II.104 $$H_0 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2}$$ (para el sistema sin perturbación)

II.105 $$H_1 = k_1 k_2 q_1^2 q_2^2$$ (para el sistema perturbado)

Tomamos las soluciones del problema sin perturbar (ver ecs.I.103)

II.106 $$q_1 = \sqrt{\frac{J_1^0}{\pi\sqrt{mk_1}}}\, sen\, 2\pi W_1^0 \qquad q_2 = \sqrt{\frac{J_2^0}{\pi\sqrt{mk_2}}}\, sen\, 2\pi W_2^0$$
$$p_1 = \sqrt{\frac{J_1^0\sqrt{mk_1}}{\pi}}\, \cos 2\pi W_2^0 \qquad p_2 = \sqrt{\frac{J_2^0\sqrt{mk_2}}{\pi}}\, \cos 2\pi W_2^0$$

De acuerdo con II.085, para el hamiltoniano sin perturbar se tiene:

II.107 $$H(q, p, \lambda) = H'(W_K^0, J_K^0, \lambda) = H_0' + \lambda H_1' + \ldots$$

en donde:

II.108 $$H_0' = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2}$$

$$H_0' = \frac{1}{2m}\left[\frac{J_1^o\sqrt{mk_1}}{\pi}\cos^2 2\pi w_1^o + \frac{J_2^o\sqrt{mk_2}}{\pi}\cos^2 2\pi w_2^o\right]$$

$$+ \frac{k_1 J_1^o}{2\pi\sqrt{mk_1}}\operatorname{sen}^2 2\pi w_1^o + \frac{k_2 J_2^o}{2\pi\sqrt{mk_2}}\operatorname{sen}^2 2\pi w_2^o$$

con lo que se tiene:

II.109 $$H_0' = J_1^o \nu_1^o + J_2^o \nu_2^o \qquad \text{con } \nu^o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Por otro lado: $H_1' = k_1 k_2 q_1^2 q_2^2 = k_1 k_2 \dfrac{J_1^o J_2^o}{\pi\sqrt{mk_1}\,\pi\sqrt{mk_2}} \operatorname{sen}^2 2\pi w_1^o \operatorname{sen}^2 2\pi w_2^o$

de donde se tiene:

II.110 $$H_1' = \frac{J_1^o}{\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}\;\frac{J_2^o}{\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}}\operatorname{sen}^2 2\pi w_1^o \operatorname{sen}^2 2\pi w_2^o$$

y finalmente:

II.111 $$H_i' = 0 \qquad i \geq 2$$

Como $H''(J) = H'(J)$, calculamos directamente H_1''.

Tomamos ahora la doble integral de H_1' con respecto a $dw_1^o\, dw_2^o$, y reemplaza-

mos J_k^o por J_k, con lo cual obtenemos, de II.097:

$$H_1'' = \langle H_1' \rangle$$

$$= \frac{J_1}{\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}\,\frac{J_2}{\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}}\int_0^1\int_0^1 \operatorname{sen}^2 2\pi w_1^o \operatorname{sen}^2 2\pi w_2^o\, dw_1^o\, dw_2^o$$

y: $$= \frac{1}{4}\,\frac{J_1}{\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}\,\frac{J_2}{\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

II.112 $$H_1'' = J_1 \nu_1^o J_2 \nu_2^o$$

Podemos obtener H" a primer orden de perturbación, usando II.109 y II.112

II.113 $$H'' = H_0'' + \lambda H_1'' = J_1\nu_1^o + J_2\nu_2^o + \lambda J_1 \nu_1^o J_2 \nu_2^o$$

en donde, cuando $\lambda \to 0$ $J_k \to J_k^o$.

Las frecuencias perturbadas de primer orden son:

$$\nu_1 = \frac{\partial H''}{\partial J_1} = \nu_1^o + \lambda \nu_1^o \nu_2^o J_2$$

II.114
$$\nu_2 = \frac{\partial H''}{\partial J_2} = \nu_2^o + \lambda \nu_1^o \nu_2^o J_1$$

Para calcular w^o, J^o en términos de w, J a primer orden de λ, usamos II.099:

$$\sum_k \nu_k^o \frac{\partial W_1}{\partial w_k^o} = \langle H_1'(w_k^o, J_k)\rangle - H_1'(w_k^o, J_k)$$
$$= J_1 \nu_1^o J_2 \nu_2^o - 4 J_1 J_2 \nu_1^o \nu_2^o \,\mathrm{sen}^2 2\pi w_1^o \,\mathrm{sen}^2 2\pi w_2^o$$

de donde:

II.115
$$\langle H_1'\rangle - H_1' = J_1 \nu_1^o J_2 \nu_2^o \left[1 - 4\,\mathrm{sen}^2 2\pi w_1^o \,\mathrm{sen}^2 2\pi w_2^o\right]$$

Pero, de acuerdo con II.101:

II.116
$$J_1 \nu_1^o J_2 \nu_2^o \left[1 - 4\,\mathrm{sen}^2 2\pi w_1^o \,\mathrm{sen}^2 2\pi w_2^o\right] = \sum_{m_1} \sum_{m_2} C_{m_1 m_2} e^{2\pi i (m_1 w_1^o + m_2 w_2^o)}$$

Para calcular los coeficientes $C_{m_1 m_2}$, que nos determinarán el desarrollo de W, llevaremos a cabo el siguiente proceso:

Multiplicamos II.116 por $e^{-2\pi i (m_1 w_1^o + m_2 w_2^o)}$ e integramos sobre un período; obteniendo:

II.117
$$C_{m_1 m_2} = \int_0^1 \int_0^1 J_1 J_2 \nu_1^o \nu_2^o \left[1 - 4\,\mathrm{sen}^2 2\pi w_1^o \,\mathrm{sen}^2 2\pi w_2^o\right] e^{-2\pi i (m_1 w_1^o + m_2 w_2^o)} \, dw_1^o dw_2^o$$

Calcularemos la primera parte de esta integral:

II.118 $$\int_0^1\int_0^1 J_1 J_2 \nu_1^\circ \nu_2^\circ e^{-2\pi i(m_1 w_1^\circ + m_2 w_2^\circ)} dw_1^\circ dw_2^\circ = - J_1 J_2 \nu_1^\circ \nu_2^\circ \frac{(e^{-2\pi i m_1}-1)(e^{-2\pi i m_2}-1)}{4\pi^2 m_1 m_2}$$

El cálculo de la segunda parte de II.117 es más tedioso, pero no complicado

La expresión es la siguiente:

$$-4 J_1 J_2 \nu_1^\circ \nu_2^\circ \int_0^1\int_0^1 \operatorname{sen}^2 2\pi w_1^\circ \operatorname{sen}^2 2\pi w_2^\circ \, e^{-2\pi(m_1 w_1^\circ + m_2 w_2^\circ)} dw_1^\circ\, dw_2^\circ$$

y la integración referida es:

II.119 $$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 2\pi w_1^\circ\, e^{-2\pi i m_1 w_1^\circ} dw_1^\circ = \frac{-e^{-2\pi i m_1}}{4\pi i m_1} + \frac{1}{4\pi i m_1} + \frac{m_1 e^{-2\pi i m_1}}{4\pi i (m_1^2-4)} - \frac{m_1}{4\pi i (m_1^2-4)}$$

con lo cual, sustituyendo II.118 y II.119 en II.117, obtenemos:

II.120 $$C_{m_1, m_2} = - J_1 J_2 \nu_1^\circ \nu_2^\circ \frac{(e^{-2\pi i m_1}-1)(e^{-2\pi i m_2}-1)}{4\pi^2 m_1 m_2} - 4 J_1 J_2 \nu_1^\circ \nu_2^\circ \left\{ \left[\frac{-e^{-2\pi i m_1}}{4\pi i m_1} + \frac{1}{4\pi i m_1} + \frac{m_1 e^{-2\pi i m_1}}{4\pi i (m_1^2-4)} - \frac{m_1}{4\pi i (m_1^2-4)} \right] \cdot \left[\frac{-e^{-2\pi i m_2}}{4\pi i m_2} + \frac{1}{4\pi i m_2} + \frac{m_2 e^{2\pi i m_2}}{4\pi i (m_2^2-4)} - \frac{m_2}{4\pi i (m_2^2-4)} \right] \right\}$$

Esta expresión es cero para todos los valores de m_1 y m_2 desde $-\infty$ hasta $+\infty$, excepto para $m_1 = 0, 2, -2$, y $m_2 = 0, 2, -2$, en los cuales el denominador se anula. Calculamos el resultado, con un proceso de límite :

Para calcular los coeficientes $C_{m_1 m_2}$ correspondientes, observamos que son posibles las siguientes combinaciones:

$m_1 = 2 \qquad m_2 = 2$

$m_1 = 2 \qquad m_2 = -2$

$m_1 = 2 \qquad m_2 = 0$

$m_1 = -2 \qquad m_2 = 2$

$m_1 = -2 \qquad m_2 = -2$

$m_1 = -2 \qquad m_2 = 0$

$m_1 = 0 \qquad m_2 = 2$

$m_1 = 0 \qquad m_2 = -2$

$m_1 = 0 \qquad m_2 = 0$

Consideremos uno sólo de esos casos, digamos, $m_1 = 0$ y $m_2 = 2$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$c_{02} = -\nu_1^{\circ}\nu_2^{\circ} J_1 J_2 \, (0) - 4 J_1 J_2 \nu_1^{\circ} \nu_2^{\circ} \left[\frac{2\pi i e^{0}}{4\pi i} + \frac{1}{4\pi i} \frac{(-2\pi i e^{0}}{1} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[0 - \frac{1}{4\pi i} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{(2\pi i) e^{-4\pi i}}{1} \right]$$

con lo cual se tiene:

II.121 $$C_{02} = \frac{\nu_1^{\circ} \nu_2^{\circ} J_1 J_2}{2}$$

Asimismo, encontramos por el mismo método:

$$C_{2-2} = C_{-2\,2} = C_{-2-2} = C_{2\,2} = -\frac{\nu_1^{\circ}\nu_2^{\circ}J_1J_2}{4}$$

II.122

$$C_{0,-2} = C_{2\,0} = C_{-2\,0} = C_{0\,2} = \frac{\nu_1^{\circ}\,\nu_2^{\circ}\,J_1J_2}{2}$$

Ahora, utilizando II.102, obtenemos los términos W^1:

$$W^1_{22} = \frac{-1}{2\pi i(2\nu_1^{\circ}+2\nu_2^{\circ})}\;\frac{\nu_1^{\circ}\nu_2^{\circ}J_1J_2}{4} = -W^1_{-2-2}$$

$$W^1_{-22} = \frac{-1}{2\pi i(-2\nu_1^{\circ}+2\nu_2^{\circ})}\;\frac{\nu_1^{\circ}\nu_2^{\circ}J_1J_2}{4} = -W^1_{2-2}$$

$$W^1_{-2-2} = \frac{1}{2\pi i(2\nu_1^{\circ}+2\nu_2^{\circ})}\;\frac{\nu_1^{\circ}\nu_2^{\circ}J_1J_2}{4} = -W^1_{22}$$

$$W^1_{2-2} = \frac{-1}{2\pi i(2\nu_1^{\circ}-2\nu_2^{\circ})}\;\frac{\nu_1^{\circ}\nu_2^{\circ}J_1J_2}{4} = -W^1_{20}$$

II.123

$$W^1_{0-2} = \frac{-1}{4\pi i\nu_2^{\circ}}\;\frac{\nu_1^{\circ}\nu_2^{\circ}J_1J_2}{2} = -W^1_{02}$$

$$W^1_{20} = \frac{1}{4\pi i\;\nu_1^{\circ}}\;\frac{\nu_1^{\circ}\nu_2^{\circ}J_1J_2}{2} = -W^1_{0-2}$$

$$W^1_{-20} = \frac{-1}{4\pi i\nu_1^{\circ}}\;\frac{\nu_1^{\circ}\nu_2^{\circ}J_1J_2}{2} = -W^1_{20}$$

$$W^1_{02} = \frac{1}{4\pi i\;\nu_2^{\circ}}\;\frac{\nu_1^{\circ}\nu_2^{\circ}J_1J_2}{2} = -W^1_{0-2}$$

Con la expresión II.088, y II.123, encontramos el desarrollo de W_1:

$$W_1 = \sum_{m_1}\sum_{m_2} W^{(1)}_{m_1 m_2}(J)\exp 2\pi i\,(m_1 w_1^{\circ} + m_2 w_2^{\circ})$$

por tanto

II.124 $$\bar{W}_1 = W^1_{22}\, e^{4\pi i(w_1^\circ + w_2^\circ)} + W^1_{-22}\, e^{-4\pi i(w_1^\circ - w_2^\circ)} + W^1_{2-2}\, e^{-4\pi i(w_1^\circ + w_2^\circ)} + W^1_{2-2}\, e^{4\pi i(w_1^\circ - w_2^\circ)} + W^1_{0-2}\, e^{-4\pi i w_2^\circ} + W^1_{20}\, e^{4\pi i w_1^\circ} + W^1_{-20}\, e^{-4\pi i w_1^\circ} + W_{02}\, e^{4\pi i w_2^\circ}$$

Sustituyendo los valores dados por II.123 y factorizando:

II.125 $$\bar{W}_1 = -\frac{\nu_1^\circ \nu_2^\circ J_1 J_2}{16\pi i}\left[\frac{e^{4\pi i(w_1^\circ + w_2^\circ)}}{\nu_1^\circ + \nu_2^\circ} - \frac{e^{-4\pi i(w_1^\circ - w_2^\circ)}}{\nu_1^\circ - \nu_2^\circ} - \frac{e^{-4\pi i(w_1^\circ + w_2^\circ)}}{\nu_1^\circ + \nu_2^\circ} + \frac{e^{4\pi i(w_1^\circ - w_2^\circ)}}{\nu_1^\circ - \nu_2^\circ} + \frac{2\, e^{-4\pi i w_2^\circ}}{\nu_2^\circ} - \frac{2\, e^{4\pi i w_1^\circ}}{\nu_1^\circ} + \frac{2\, e^{-4\pi i w_1^\circ}}{\nu_1^\circ} - \frac{2\, e^{4\pi i w_2^\circ}}{\nu_2^\circ}\right]$$

Sustituyendo las exponenciales y eliminando:

II.126 $$\bar{W}_1 = \frac{J_1 J_2}{4\pi}\left[\nu_1^\circ \operatorname{sen} 4\pi w_2^\circ + \nu_2^\circ \operatorname{sen} 4\pi w_1^\circ - \frac{\nu_1^\circ \nu_2^\circ \operatorname{sen} 4\pi(w_1^\circ + w_2^\circ)}{2\,(\nu_1^\circ + \nu_2^\circ)} - \frac{\nu_1^\circ \nu_2^\circ \operatorname{sen} 4\pi(w_1^\circ - w_2^\circ)}{2\,(\nu_1^\circ - \nu_2^\circ)}\right]$$

Utilizando II.087 y II.089:

II.127 $$\bar{W}(w_k^\circ, J_k, \lambda) = \sum_k w_k^\circ J_k + \lambda\, \frac{J_1 J_2}{4\pi}\left[\nu_1^\circ \operatorname{sen} 4\pi w_2^\circ + \nu_2^\circ \operatorname{sen} 4\pi w_1^\circ - \frac{\nu_1^\circ \nu_2^\circ \operatorname{sen} 4\pi(w_1^\circ + w_2^\circ)}{2(\nu_1^\circ + \nu_2^\circ)} - \frac{\nu_1^\circ \nu_2^\circ \operatorname{sen} 4\pi(w_1^\circ - w_2^\circ)}{2(\nu_1^\circ - \nu_2^\circ)}\right]$$

Por otro lado (ecs. II.091)

$$J_k^\circ = J_k + \lambda\, \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial w_k^\circ} + \cdots$$

$$w_k = w_k^\circ + \lambda\, \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial J_k} + \cdots$$

Para obtener las ecuaciones de transformación anteriores, hay que derivar sucesivamente II.126 con respecto a w_k^o y J_k. Abreviaremos la notación del siguiente modo, sea:

II.128 $$\frac{\partial W_1}{\partial w_k^o} \equiv f_k(w^o, J) \qquad \frac{\partial W_1}{\partial J_k} \equiv g_k(w^o, J)$$

Las ecuaciones de transformación serán entonces:

II.129 $$\begin{aligned} J_k^o &= J_k + \lambda f_k(w^o, J) \\ w_k &= w_k^o + \lambda g_k(w^o, J) \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema:(*)

II.130 $$\begin{aligned} J_k^o &= J_k + \lambda f_k(w, J) \\ w_k^o &= w_k - \lambda g_k(w, J) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$w_k = \nu_k t + \beta_k$$

en donde las ν_k están dadas por II.114 (a primer orden de λ). Si insertamos este resultado en II.130 y esta expresión en II.106 obtenemos $q_k(t)$ y $p_k(t)$ a primer orden de λ:

$$\begin{aligned} q_k &= \sqrt{\frac{J_k^o}{\xi}} \operatorname{sen} 2\pi w_k^o \qquad \xi = \pi\sqrt{m k_k} \\ &= \sqrt{\frac{J_k + \lambda f_k}{\xi}} \operatorname{sen} 2\pi \left(w_k - \lambda g_k(w, J) \right) \end{aligned}$$

(*) Ya que al reemplazar w^o por w , en los términos de orden λ cometemos un error del orden de λ^2 que puede ser despreciado.

$$= \sqrt{\frac{J_K + \lambda f_K}{\xi}} \; sen \, 2\pi (\nu_K t + \beta_K - \lambda g_K)$$

por tanto, podemos escribir:

II.131 $$q_K = \sqrt{\frac{J_K}{\xi}} \left(1 + \lambda \frac{f_K}{J_K}\right)^{1/2} sen \, 2\pi (\nu_K t + \beta_K - \lambda g_K)$$

Desarrollando la raíz hasta primer orden de λ:

$$q_K = \sqrt{\frac{J_K}{\xi}} \left(1 + \lambda \frac{f_K}{J_K}\right) sen \, 2\pi (\nu_K t + \beta_K - \lambda g_K)$$

ahora sen (A - B) = sen A cos B - cos A sen B

con A = $2\pi(\nu_K t + \beta_K)$ B = $2\pi\lambda g_K$

se tiene:

II.132 $$q_K = \sqrt{\frac{J_K}{\xi}} \left(1 + \lambda \frac{f_K}{J_K}\right) \Big[sen \, 2\pi(\nu_K t + \beta_K) \cos 2\pi\lambda g_K - \cos 2\pi(\nu_K t + \beta_K) \, sen \, 2\pi \lambda g_K \Big]$$

Desarrollando las funciones trigonométricas:

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4}\theta^4 + \ldots \qquad sen\,\theta \simeq \theta - \frac{\theta^3}{3!}$$

obtenemos

$$q_K = \sqrt{\frac{J_K}{\xi}} \left(1 + \lambda \frac{f_K}{J_K}\right) \Big[sen \, 2\pi(\nu_K t + \beta_K) \left(1 - 2\pi^2 \lambda^2 g_K^2 + \ldots\right) - \cos 2\pi(\nu_K t + \beta_K) \left(2\pi\lambda g_K + \ldots\right) \Big]$$

$$= \sqrt{\frac{J_K}{\xi}} \Big[sen \, 2\pi(\nu_K t + \beta_K) - 2\pi^2\lambda^2 g_K^2 \, sen \, 2\pi(\nu_K t + \beta_K) - 2\pi\lambda g_K \cos 2\pi(\nu_K t + \beta_K) + \lambda \frac{f_K}{J_K} sen \, 2\pi(\nu_K t + \beta_K) - \frac{2\pi^2\lambda^3}{J_K} f_K g_K^2 \, sen \, 2\pi(\nu_K t + \beta_K) - \frac{2\pi\lambda^2 f_K g_K}{J_K} \cos 2\pi(\nu_K t + \beta_K) + \ldots \Big]$$

Agrupando potencias de λ:

II.133 $$q_K(t) = \sqrt{\frac{J_K}{\pi\sqrt{mK_K}}}\Big[\operatorname{sen} 2\pi(\nu_K t+\beta_K) + \lambda\Big(\frac{f_K}{J_K}\operatorname{sen} 2\pi(\nu_K t+\beta_K) - 2\pi g_K\cos 2\pi(\nu_K t+\beta_K)\Big) + \lambda^2\Big(-2\pi^2 g_K^2\operatorname{sen} 2\pi(\nu_K t+\beta_K) - \frac{2\pi f_K g_K}{J_K}\cos 2\pi(\nu_K t+\beta_K)\Big) + O(\lambda^3) + \dots\Big]$$

Obsérvese que este resultado concuerda fielmente con la solución del proble ma sin perturbar (ecs. II.106) cuando $\lambda \to 0$.

Del mismo modo obtenemos $p_K(t)$

$$p_K(t) = \sqrt{\frac{J_K^0\sqrt{mK_K}}{\pi}}\cos 2\pi W_K^0$$

$$= \sqrt{\mu(J_K+\lambda f_K)}\cos 2\pi(W_K-\lambda g_K) \qquad \mu = \frac{\sqrt{mK_K}}{\pi}$$

Desarrollando la raíz:

$$p_K = \sqrt{\mu J_K}\left(1+\frac{\lambda f_K}{J_K}\right)\cos 2\pi(W_K-\lambda g_K)$$

Utilizando $\cos(A - B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

$$\cos 2\pi(W_K-\lambda g_K) = \cos 2\pi W_K\cdot\cos 2\pi\lambda g_K - \operatorname{sen} 2\pi W_K\cdot\operatorname{sen} 2\pi\lambda g_K .$$

ahora: $\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots \qquad \operatorname{sen}\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$

Haciendo operaciones y agrupando

$$p_K = \sqrt{\mu J_K}\Big[\cos 2\pi W_K + \lambda\Big(\frac{f_K}{J_K}\cos 2\pi W_K - 2\pi g_K\operatorname{sen} 2\pi W_K\Big) + \lambda^2\Big(-2\pi^2 g_K^2\cos 2\pi W_K - \frac{2\pi g_K f_K}{J_K}\operatorname{sen} 2\pi W_K\Big) + O(\lambda^3) + \dots\Big]$$

Sustituyendo finalmente J y W_K se tiene:

II.134
$$p_K(t) = \sqrt{\frac{J_K \sqrt{m K_K}}{\pi}} \Big\{ \cos 2\pi(\nu_K t + \beta_K) + \lambda \Big[\frac{f_K}{J_K} \cos 2\pi(\nu_K t + \beta_K) - 2\pi g_K \operatorname{sen} 2\pi(\nu_K t + \beta_K) \Big] + \lambda^2 \Big[-2\pi^2 g_K^2 \cos 2\pi(\nu_K t + \beta_K) - {}^{2\pi g_K f} - \frac{2\pi g_K f_K}{J_K} \operatorname{sen} 2\pi(\nu_K t + \beta_K) \Big] + O(\lambda^3) + \cdots \Big\}$$

Obsérvese de nuevo, que esta solución concuerda con la que se da para el problema sin perturbar II.106, cuando $\lambda \to 0$.

II.3.3 SISTEMAS DEGENERADOS.-

Con ciertas modificaciones, el desarrollo seguido para el caso no degenerado, así como la discusión de la página 19, se aplicarán al tratamiento de los Sistemas Degenerados.

Sea un sistema con f grados de libertad, con m frecuencias linealmente dependientes, o sea, m-degenerado.

Consideremos (ecuación I.063) una función generadora F_2 del tipo:

II.135 $$F_2 = W = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{f} J_k' \, j_{ki} \, w_i^\circ + \sum_{k=m+1}^{f} J_k' \, w_k^\circ$$

con ecuaciones de transformación:

II.136 $$\frac{\partial W}{\partial J_i'} = w_i' \qquad\qquad \frac{\partial W}{\partial w_i^\circ} = J_i^\circ$$

Escribamos W como un desarrollo de Taylor en $\lambda=0$

$$W(w_k^\circ, J_k', \lambda) = W_0(w_k^\circ, J_k') + \lambda W_1(w_k^\circ, J_k') + \dots$$

de modo que:

II.137 $$J_i^\circ = \sum_{k=1}^{m} J_k' \, j_{ki} + \sum_{k=m+1}^{f} J_k' \, \delta_{ki} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^\circ} + \lambda^2 \frac{\partial W_2}{\partial w_i^\circ} + \dots$$

Buscaremos una transformación que conecte las variables:

No perturbado, Degenerado		Perturbado, Degenerado
$(w_k^\circ \, , J_k^\circ)$	$\longrightarrow$	$(w_k' \, , J_k')$
asociadas con H'		Asociadas con H"

de modo que tengamos, mediante la transformación:

$$H''(w_k', J_k', \lambda) = H''\left(w_k'(w_k^\circ, J_k^\circ), J_k'(w_k^\circ, J_k^\circ), \lambda\right)$$

De II.136, encontramos:

II.138 $$\begin{aligned} w_k' &= \sum_{i=1}^{f} w_i^\circ \, j_{ki} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial J_k'} + \lambda^2 \frac{\partial W_2}{\partial J_k'} + \dots \qquad k = 1, 2, \dots m. \\ w_k' &= \sum_{k=m+1}^{f} w_k^\circ + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial J_k'} + \lambda^2 \frac{\partial W_2}{\partial J_k'} + \dots \qquad k = m+1, \dots f. \end{aligned}$$

Por otro lado, (véanse las ecuaciones II.085 y II.086)

II.139 $$H'(\vec{w}^{\circ}, \vec{J}^{\circ}, \lambda) = H_0'(\vec{J}^{\circ}) + \lambda\, H_1'(\vec{w}^{\circ}, \vec{J}^{\circ}) + \ldots$$

(Hemos utilizado notación vectorial para denotar multidimensionalidad)

II.140 $$H''(\vec{J}', \lambda) = H_0''(\vec{J}') + \lambda\, H_1''(\vec{J}') + \lambda^2 \ldots$$

Desarrollando en serie de Taylor II.139 alrededor de $J_k^o = J_k'$:

II.141 $$\begin{aligned} H'(\vec{w}^{\circ}, \vec{J}^{\circ}, \lambda) &= H'(\vec{w}^{\circ}, \vec{J}', \lambda) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H'}{\partial J_i^{\circ}} \cdot (J_i^{\circ} - J_i') \\ &+ \sum_{i=m+1}^{f} \frac{\partial H'}{\partial J_i^{\circ}} (J_i^{\circ} - J_i') \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial J_i^{\circ}} \frac{\partial H'}{\partial J_j^{\circ}} \cdot (J_i^{\circ} - J_i^{\circ})(J_j^{\circ} - J_j') + \ldots \end{aligned}$$

Por otro lado, usando II.137, con $m + 1 \leq i \leq f$, tendremos:

$$J_i^{\circ} = \sum_{k=1}^{m} J_k' j_{ki} + J_i' + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^{\circ}} + \ldots$$

con lo cual

II.142 $$J_i^{\circ} - J_i' = \sum_{k=1}^{m} J_k' j_{ki} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^{\circ}} + \ldots \qquad m+1 \leq i \leq f$$

En el caso en que $1 \leq i \leq m$, se tendrá:

$$J_i^{\circ} = \sum_{k=1}^{m} J_k' j_{ki} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^{\circ}} + \ldots$$

o sea

$$J_i^{\circ} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} J_k' j_{ki} + J_i' j_{ii} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^{\circ}} + \ldots$$

con lo cual:

II.143 $$J_i^\circ - J_i' j_{ii} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} J_k' j_{ki} + \lambda \frac{\partial W_i}{\partial w_i^\circ} + \dots$$

Por tanto obtenemos

II.144 $$J_i^\circ - J_i' = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} J_k' j_{ki} + J_i' j_{ii} - J_i' + \lambda \frac{\partial W_i}{\partial w_i^\circ} + \dots$$

y finalmente:

II.145 $$J_i^\circ - J_i' = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} J_k' j_{ki} + (j_{ii} - 1) J_i' + \lambda \frac{\partial W_i}{\partial w_i^\circ} + \dots \qquad 1 \le i \le m$$

Por comodidad llamemos:

$$A_i^{(1)} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} J_k' j_{ki} + (j_{ii} - 1) J_i' \qquad 1 \le i \le m$$

$$A_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} J_k' j_{ki} \qquad m+1 \le i \le f$$

Volviendo de nuevo a II.141

$$H'(\vec{w}^\circ, \vec{J}^\circ, \lambda) = H'(\vec{w}^\circ, \vec{J}', \lambda) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H'}{\partial J_i^\circ}(J_i^\circ - J_i')$$
$$+ \sum_{i=m+1}^{f} \frac{\partial H'}{\partial J_i^\circ}(J_i^\circ - J_i')$$
$$+ \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 H'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ} + \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^{f} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 H'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{f} \frac{\partial^2 H'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ} + \sum_{i=m+1}^{f} \sum_{j=m+1}^{f} \frac{\partial^2 H'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ} \right] \cdot$$
$$\cdot (J_i^\circ - J_i')(J_j^\circ - J_j')$$

Usando los resultados II.142 y II.145

$$H'(\vec{w}^o, \vec{J}^o, \lambda) = H'(\vec{w}^o, \vec{J}', \lambda) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H'}{\partial J_i^o} \cdot \left(A_i^{(1)} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^o} + \cdots\right)$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{f} \frac{\partial H'}{\partial J_i^o} \left(A_i^{(2)} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^o} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 H'}{\partial J_i^o \partial J_j^o} \cdot \left(A_i^{(1)} + \frac{\partial W_1}{\partial w_i^o} + \cdots\right) \cdot \left(A_j^{(1)} + \frac{\partial W_1}{\partial w_j^o} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^{f} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 H'}{\partial J_i^o \partial J_j^o} \cdot \left(A_i^{(2)} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^o} + \cdots\right) \left(A_j^{(1)} + \frac{\partial W_1}{\partial w_j^o} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{f} \frac{\partial^2 H'}{\partial J_i^o \partial J_j^o} \cdot \left(A_i^{(1)} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^o} + \cdots\right) \left(A_j^{(2)} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_j^o} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^{f} \sum_{j=m+1}^{f} \frac{\partial^2 H'}{\partial J_i^o \partial J_j^o} \left(A_i^{(2)} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^o} + \cdots\right) \left(A_j^{(2)} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_j^o} + \cdots\right)$$

$$+ \cdots$$

Sustituyendo H' por su desarrollo de Taylor II.139, con $\vec{J}^o = \vec{J}'$:

$$H'(\vec{w}^o, \vec{J}^o, \lambda) = H_0'(\vec{J}') + \lambda H_1'(\vec{w}^o, \vec{J}') + \cdots$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (H_0' + \cdots)}{\partial J_i^o} \cdot \left(A_i^{(1)} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^o} + \cdots\right)$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{f} \frac{\partial (H_0' + \cdots)}{\partial J_i^o} \left(A_i^{(2)} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_i^o} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 (H_0' + \cdots)}{\partial J_i^o \partial J_j^o} \cdot \left(A_i^{(1)} + \cdots\right) \left(A_j^{(1)} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^{f} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 (H_0' + \cdots)}{\partial J_i^o \partial J_j^o} \cdot \left(A_i^{(2)} + \cdots\right) \left(A_j^{(1)} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{f} \frac{\partial^2 (H_0' + \cdots)}{\partial J_i^o \partial J_j^o} \cdot \left(A_i^{(1)} + \cdots\right) \left(A_j^{(2)} + \cdots\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{f}\sum_{j=m+1}^{f}\frac{\partial^2 H'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}\left(A_i^{(2)}+\cdots\right)\left(A_j^{(2)}+\cdots\right.$$

$$+\ \cdots$$

Agrupando potencias de λ e igualando coeficientes con II.140 :

$$H_0''(\vec{J}') = H_0'(\vec{J}') + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial H_0'}{\partial J_i^\circ}\cdot A_i^{(1)} + \sum_{i=m+1}^{f}\frac{\partial H_0'}{\partial J_i^\circ}\cdot A_i^{(2)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 H_0'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}\cdot A_i^{(1)}A_j^{(1)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{f}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 H_0'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}\cdot A_i^{(2)}A_j^{(1)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{f}\frac{\partial^2 H_0'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}\cdot A_i^{(1)}A_j^{(2)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{f}\sum_{j=m+1}^{f}\frac{\partial^2 H_0'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}\cdot A_i^{(2)}A_j^{(2)}$$

$$H_1''(\vec{J}') = H_1'(\vec{w}^\circ,\vec{J}') + \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial H_0'}{\partial J_i^\circ}\cdot\frac{\partial W_1}{\partial w_i^\circ} + \frac{\partial H_1'}{\partial J_i^\circ}\cdot A_i^{(1)}\right]$$

$$+\sum_{i=m+1}^{f}\left[\frac{\partial H_0'}{\partial J_i^\circ}\frac{\partial W_1}{\partial w_i^\circ} + \frac{\partial H_1'}{\partial J_i^\circ}\cdot A_i^{(2)}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{\partial^2 H_0'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}\left[\frac{\partial W_1}{\partial w_i^\circ}A_j^{(1)} + \frac{\partial W_1}{\partial w_j^\circ}A_i^{(1)}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 H_1'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}A_i^{(1)}A_j^{(1)}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{f}\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{\partial^2 H_0'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \omega_i^\circ}A_j^{(1)}+\frac{\partial W_1}{\partial \omega_j^\circ}A_i^{(2)}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 H_1'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}A_i^{(2)}A_j^{(1)}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{f}\left\{\frac{\partial^2 H_0'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \omega_i^\circ}A_j^{(2)}+\frac{\partial W_1}{\partial \omega_j^\circ}A_i^{(1)}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 H_1'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}A_i^{(1)}A_j^{(2)}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{f}\sum_{j=m+1}^{f}\left\{\frac{\partial^2 H_0'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \omega_i^\circ}A_j^{(2)}+\frac{\partial W_1}{\partial \omega_j^\circ}A_i^{(2)}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 H_1'}{\partial J_i^\circ \partial J_j^\circ}A_i^{(2)}A_j^{(2)}\right\}$$

Del mismo modo se obtiene el coeficiente correspondiente a H_2'' .

Las complicaciones son evidentes, no tanto por lo difícil, sino por lo-aparatoso del desarrollo. A partir de los coeficientes encontrados,(compárese con las ecuaciones II.095), se continúa con el procedimiento --desglosado en la página 65 y 66. No entramos en mayores detalles aquí,--porque consideramos que con lo mostrado, se tiene un panorama global del tipo de complicaciones a las que se llega con la teoría Canónica para el caso degenerado Multidimensional.

2.- TEORIA DE PERTURBACIONES DEPENDIENTES DEL TIEMPO

II.4.- Descripción General.-

En este artículo discutiremos brevemente las perturbaciones, en el caso en que el parámetro perturbador depende del tiempo. Consideraremos para simplificar, dos ejemplos unidimensionales. Supongamos que H_o es el hamiltoniano para un sistema dado de partículas, $H_o(q_i, p_i, t)$, en el caso no -- perturbado. Una influencia externa sobre este sistema dará lugar a un nuevo hamiltoniano H,dependiente de las variables dinámicas y de λ. Existen dos maneras de tratar este pequeño número. Puede ser que la influencia -- perturbadora actúe sólo por un tiempo muy pequeño, y cause solo una ligera desviación en la trayectoria del sistema; o bien puede ser que esta nueva influencia sólo altere el movimiento cambiando lentamente las frecuencias naturales del sistema. Del primer caso utilizaremos como ejemplo el- movimiento de una partícula libre, en tanto que del segundo, el oscilador anarmónico. Sea:

II.146 $$H = H_o + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \ldots$$

Para el tratamiento que seguiremos, despreciaremos los términos de orden- λ^2 en delante.

Supongamos que efectuamos una transformación de modo que reemplacemos las variables p_k, q_k por los nuevos momentos α_k y las nuevas coordenadas β_k. En el caso no perturbado, tenemos que el sistema es descrito por el hamiltoniano K (α_k, β_k, t), que se anula (ecuaciones I.029, I.030 y I.031 Si tomamos la función generadora del tipo 2

$$F_2 = S(q_k, \alpha_k, t)$$

entonces se tiene:

$$K(\alpha_k, \beta_k, t) = 0 = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t}$$

En otras palabras, si no existiera perturbación, las nuevas variables α_k, β_k serían constantes. Con la perturbación presente, la transformación es tal que el sistema es descrito por un hamiltoniano $H(\alpha_k, \beta_k, t)$, con:

II.147 $$H(\alpha_k, \beta_k, t) = \lambda H_1(\alpha_k, \beta_k, t)$$

y de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton:

II.148 $$\dot{\alpha}_k = -\lambda \frac{\partial H_1(\alpha_k, \beta_k, t)}{\partial \beta_k} \qquad \dot{\beta}_k = \lambda \frac{\partial H_1(\alpha_k, \beta_k, t)}{\partial \alpha_k}$$

II.4.1.- Ejemplo:Movimiento Lineal.

Sea una partícula libre, perturbada durante un tiempo τ por una fuerza constante $F = \lambda$. Físicamente se supone que la energía transmitida a la partícula durante ese tiempo es pequeña, comparada con su energía cinética. Matemáticamente esto significará que los términos de orden λ^2 y mayores serán despreciados en los cálculos.

El hamiltoniano para este caso es:

II.149 $$H = \frac{p^2}{2m} - \lambda q$$

Entonces:

II.150 $$H_0 = \frac{p^2}{2m} \;, \quad \lambda H_1 = -\lambda q$$

Resolvamos primero el caso no perturbado:

II.151 $$H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Por separación de variables:

$$S = W(\alpha, q) - \alpha t$$

y

II.152 $$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} \qquad\qquad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$$

Por tanto

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 - \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha}$$

y finalmente:

II.153 $$W = \sqrt{2m\alpha}\, q$$ excepto por una constante.

Entonces tendremos

II.154 $$S = \sqrt{2m\alpha}\, q - \alpha t$$

Como $$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{q\, m}{\sqrt{2m\alpha}} - t$$

se tiene:

II.155 $$q = \left(\frac{2\alpha}{m}\right)^{1/2}(\beta + t)$$

Sustituyendo II.15 en II.15 . obtenemos:

$$H_o = \alpha$$

o sea, α es la energía cinética de la partícula, para el caso no perturbado. Tomemos ahora en cuenta la perturbación:

$$\lambda H_1 = -\lambda\left(\frac{2\alpha}{m}\right)^{1/2}(t+\beta)$$

Aplicando las ecuaciones de Hamilton:

II.156 $$\dot{\alpha} = \lambda\left(\frac{2\alpha}{m}\right)^{1/2}$$

y

II.157 $$\dot{\beta} = -\lambda(2\alpha m)^{-1/2}(\beta + t)$$

La interpretación física de II.156 y II.157 puede hacerse con alguna explicación: Como $F = \lambda$ y $\alpha = \frac{p^2}{2m}$, II.156 puede escribirse así:

II.158 $$\dot{\alpha} = F \cdot \frac{p}{m} = F \cdot \dot{q}$$

Esta expresión describe el intercambio de energía entre el potencial perturbador y la energía cinética de la partícula. Como $\lambda > 0$, la Energía cinética se incrementa durante el intervalo $(0, \tau)$, de acuerdo con II.158.

Integrando $\dot{\alpha}$ desde t = 0 hasta cualquier tiempo t en el intervalo $(0, \tau)$ se obtiene:

II.159 $$(2m\alpha)^{1/2} - (2m\alpha_o)^{1/2} = \lambda t \qquad 0 \leq t \leq \tau$$

con $$\alpha_o = \frac{p_o^2}{2m}$$

Integrando II.157 desde t = 0 hasta t en el intervalo $(0, \tau)$:

II.160 $$\frac{d\beta}{dt} + \frac{\lambda\beta}{\lambda t + (2m\alpha_0)^{1/2}} = \frac{-\lambda t}{\lambda t + (2m\alpha_0)^{1/2}}$$

con solución: $$\beta(t) = e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(x)}\, b(x)\, dx$$

en donde: $$A(t) = \int_0^t \frac{\lambda\, dx}{\lambda x + (2m\alpha_0)^{1/2}} = \ln \left| \frac{\lambda t + (2m\alpha_0)^{1/2}}{(2m\alpha_0)^{1/2}} \right|$$

y $$b(t) = \frac{-\lambda t}{\lambda t + (2m\alpha_0)^{1/2}}$$

Haciendo operaciones: $$\beta(t) = \frac{-\lambda}{\lambda t + (2m\alpha_0)^{1/2}} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Desarrollando el factor $(\lambda t + (2m\alpha_0)^{1/2})^{-1}$ y despreciando los términos de λ^2 en delante:

II.161 $$\beta = -(2m\alpha_0)^{-1/2}\, \frac{\lambda t^2}{2}$$

Combinando II.155, II.159 y II.161:

II.162 $$q = \left(\frac{2\alpha_0}{m}\right)^{1/2} t + \frac{\lambda t^2}{2m} \qquad t \in (0, \tau)$$

Este resultado es coincidente; determina la posición de una partícula en vuelo, bajo la acción de una fuerza (compárese con el movimiento parabólico bajo la acción de la gravedad). Veamos el significado físico de β. De -- II.155 se infiere que β es el negativo del tiempo al cual $q = 0$. Mientras- la perturbación actúa, la trayectoria de la partícula sufre una desviación parabólica desde una línea recta en una gráfica espacio tiempo. Si se construye la tangente a la gráfica para cualquier tiempo t', esta línea no pasará a través del origen, sino a través del punto ($q = 0$, $t = -\beta$)

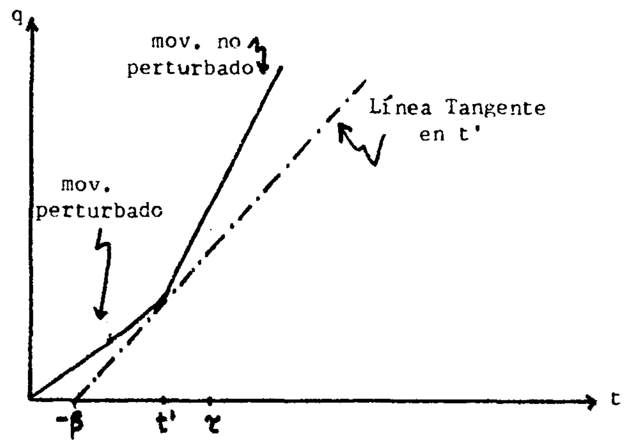

FIG. 3 . Interpretación geométrica de β .

Obsérvese en la figura que $-\beta$ está a la izquierda de t'. Para valores mayores a t' en el mismo intervalo $(0, \tau)$, $-\beta$ será mayor. Por tanto, $-\beta$ tiene su valor máximo al tiempo $t = \tau$. De II.160, se tiene:

$$-\beta_{MAX} = \frac{\lambda \tau^2}{2} (2 m \alpha_0)^{-1/2}$$

Después del tiempo $t = \tau$, el movimiento es lineal.

Podemos por tanto concluír que II.157 puede interpretarse como el valor del promedio de cambio del punto de intersección de la tangente a la trayectoria, con el tiempo, y que esta cantidad es cero en el caso no perturbado.

II.4.2.-Ejemplo: Oscilador Anarmónico.

Como un segundo y más informativo ejemplo, consideremos un oscilador anarmonico lineal perturbado por un pequeño potencial λq^4.

El hamiltoniano del sistema es:

II.163 $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K q^2 + \lambda q^4 \qquad K = \text{const.}$$

con:

II.164 $$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K q^2 \qquad H_1 = q^4$$

Resolveremos primero el caso no perturbado. De acuerdo con el ejemplo I.9.

Sea S una función generadora: $S = W(\alpha, \quad - \alpha t$

Entonces: $$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + mKq^2 = 2m\alpha$$

y $$W = \sqrt{mK} \int \sqrt{\frac{2\alpha}{K} - q^2}\, dq$$

por tanto: $$S = \sqrt{mK} \int \sqrt{\frac{2\alpha}{K} - q^2}\, dq - \alpha t$$

ahora: $$q = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$$

por lo cual: $$q = \left(\frac{2\alpha}{m}\right)^{1/2} \operatorname{sen} \omega(\beta + t)$$

de acuerdo con las ecuaciones I.103.

Apliquemos ahora la perturbación.

II.165 $$H_1 = q^4 = \frac{4\alpha^2}{m^2} \operatorname{sen}^4 \omega(\beta +$$

De acuerdo con las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta} \qquad \dot{\beta} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha}$$

se obtiene:

II.166 $$\dot{\alpha} = -\frac{16\alpha^2}{m^2} \operatorname{sen}^3 \omega(\beta + t) \cos \omega(\beta + t) \cdot \omega$$

y

II.167 $$\dot{\beta} = \frac{8\alpha}{m^2} \operatorname{sen}^4 \omega(\beta + t)$$

Por otro lado, como la fuerza es derivable del potencial perturbador:

II.168 $$F = -\frac{\partial H_1}{\partial q} = -4q^3 = -4\left(\frac{2\alpha}{m}\right)^{3/2} \operatorname{sen}^3 \omega(\beta+t)$$

Por otro lado, derivando q respecto del tiempo:

$$\dot{q} = \left(\frac{2\alpha}{m}\right)^{1/2} \omega \cos \omega(\beta+t)$$

Entonces

$$F \cdot \dot{q} = -\frac{16\alpha^2\omega}{m^2} \operatorname{sen}^3 \omega(\beta+t) \cos \omega(\beta+t)$$

con lo cual:

II.169 $$\dot{\alpha} = F \cdot \dot{q}$$

El movimiento del sistema perturbado puede observarse que es periódico, pero dicho período debe diferir de $\frac{2\pi}{\omega}$, el período del sistema sin perturbar, por al menos un factor del orden de λ. Además, el tiempo promedio de $\dot{\alpha}$ sobre un período, es :

II.170 $$\{\dot{\alpha}\} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{\alpha}\, dt = 0$$

Este resultado muestra, que a primer orden, no hay intercambio promedio de energía entre H_o y el potencial perturbador λq^4.

El tiempo promedio de $\dot{\beta}$ sobre un período se calcula en forma similar:

II.171 $$\{\dot{\beta}\} = \frac{3\lambda\alpha}{k^2}$$

Aquí, α ha sido mantenida constante durante la integración, ya que difiere de una constante por al menos un factor del orden de λ. Como $\dot{\beta}$ contiene un factor de ese orden, el error es del orden λ^2, que puede despre ciarse.

Ahora, de q, puede verse que β es el negativo del tiempo al cual dicha va riable es 0. Esta es una interpretación similar a la que hicimos en el ejem plo anterior. Nótese que, cuando aumenta el tiempo, β se hace diferente de cero y el período ya no será $\frac{2\pi}{\omega}$. En su lugar, el sistema perturbado, com- pletará un período cuando $t+\beta=\frac{2\pi}{\omega}$. Por tanto, el nuevo período es $-\beta+\frac{2\pi}{\omega}$ La integral de $\dot{\beta}$ desde t = 0 hasta t = $\frac{2\pi}{\omega}$ da el valor aproximado de β en $t=\frac{2\pi}{\omega}$. Esta es entonces la diferencia entre el nuevo período, y el del sistema no perturbado. La división por $\frac{2\pi}{\omega}$ para obtener el tiempo promedio además, proporciona el cambio fraccional en el período relativo al caso no perturbado. Como $\{\dot{\beta}\}$ es positivo, el período es más pqueño para el siste- ma perturbado. También, mientras el movimiento es aún periódico, la ecua-- ción II.1.71 nos dice que el período es ahora una función de la amplitud A en donde $\lambda\alpha=\frac{\lambda k A^2}{2}$.Un análisis más profundo del sistema perturbado, podría - mostrar que la amplitud es ligeramente mayor que A. Hablando crudamente, - el movimiento no perturbado es encajado en intervalos cada vez más delga-- dos por la perturbación, con un correspondiente incremento en la amplitud. La importancia real de este procedimiento de perturbación,no son las consi deraciones acerca de la trayectoria aproximada, sino en el cálculo de los promedios $\{\dot{\alpha}\}$ y $\{\dot{\beta}\}$. La consideración de esos tiempos promedios, a- rroja suficiente información para cualquiera interesado sólo en los efec-- tos seculares.

CONSIDERACIONES FINALES.

Hemos presentado una descripción muy ligera de la Teoría de Perturbaciones El desarrollo más detallado está dirigido al caso no degenerado e independiente del tiempo, pues creemos que es la pauta a seguir para verificar -- los otros casos.

No hemos discutido con detalle el tratamiento de la Degeneración; en este- caso, las soluciones conducen a series divergentes, y sólo son válidas en- pequeños intervalos de tiempo, en contraposición a la Mecánica Cuántica,-- donde uno puede evitar fácilmente estas dificultades. Una discusión más amplia de este caso específico, puede ser motivo de otro trabajo de tesis.

En conclusión, debemos mencionar que hemos discutido sólo unos cuantos aspectos de la Teoría de Perturbaciones. Las Perturbaciones Periódicas, por- ejemplo, que son de gran importancia en Mecánica Celeste, no han sido consideradas.

A P E N D I C E

A.1.-PRINCIPIO DE HAMILTON.

Consideremos la posición generalizada de un sistema mecánico como un punto en un espacio f-dimensional, con un sistema coordenado en el cual, cada eje da el valor de una q_i particular. A éste, lo llamaremos espacio de Configuración. Representemos el espacio de Configuración como un plano dibujado en ángulo recto con respecto al eje del tiempo (ver la figura) y supongamos que el sistema tiene coordenadas conocidas $q(t_1)$ en algún punto inicial t_1 y $q(t_2)$ en algún punto final t_2 .

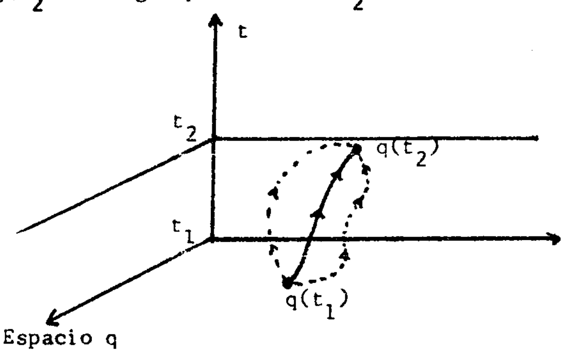

FIG. 4

El problema es encontrar la trayectoria sobre la que se mueve el sistema desde $q(t_1)$ a $q(t_2)$. Dicho camino está representado en la figura por la línea oscura.

Otra manera de llamarle a ésto, es como sigue: de todos los posibles caminos $q(t)$ desde $q(t_1)$ hasta $q(t_2)$, dos de los cuales se representan en la f figura por líneas punteadas, el sistema escoge sólo uno. ¿ Sobre qué base lo escoge ? La respuesta es que el sistema sigue la trayectoria que es una solución de las ecuaciones de Lagrange. El asunto a tratar, es demostrar -

que desde este punto de vista, se pueden obtener las ecuaciones de Lagrange. Escojamos un camino arbitrario q(t) que vaya de $q(t_1)$ a $q(t_2)$. Como a lo largo del mismo, las q_i y las $\dot{q}_i$ son funciones conocidas del tiempo,el lagrangiano puede expresarse como una función del tiempo, sobre la trayectoria. Sobre un camino diferente, como la dependencia temporal de las q_i difiere,el lagrangiano será una función diferente del tiempo.

Para cada camino posible, la integral

A.01 $$\int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\dot{q}(t),t)\,dt$$

tendrá diferentes valores. "El camino a lo largo del cual el sistema mecánico se mueve, es un extremo de esta integral". Este es el Principio de Hamilton del cual derivaremos las ecuaciones de Lagrange.

Consideremos una familia de Trayectorias q(t) identificadas cada una por el valor de un cierto parámetro ε . Esta familia deberá contener la trayectoria real, y escogeremos la parametrización de modo que $\varepsilon=0$ para ese camino. Por tanto, cada trayectoria de la familia es función de t, y estará rotulada por ε , de modo que podemos escoger la forma $q(t\ ,\varepsilon\ )$. Como todos los caminos empiezan en $q(t_1)$ y terminan en $q(t_2)$, tendremos:

A.02 $$\begin{aligned} q(t_1,\varepsilon) &= q(t_1,0) = q(t_1) \equiv q_1 \\ q(t_2,\varepsilon) &= q(t_2,0) = q(t_2) \equiv q_2 \end{aligned}$$

En otras palabras:

A.03 $$\frac{\partial q(t_1,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial q(t_2,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0$$

Para diferentes caminos, la integral A.01 tendrá diferentes valores

A.04 $$S(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t,\varepsilon), \dot{q}(t,\varepsilon), t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t,\varepsilon)\, dt$$

Podemos establecer, que para cada familia de trayectorias que satisfacen - las condiciones enunciadas arriba, S(0) es un "valor extremo", o sea

A.05 $$\left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} L\, dt\right] = 0$$

Este es el principio de Hamilton: la integral temporal del Lagrangiano es- un extremo del movimiento real. Como los tiempos t_1 y t_2 son arbitrarios, A.05 es una reformulación general de la Segunda Ley de Newton.

Como los límites del integrando A.05 están fijos,

A.06 $$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \varepsilon}\, dt$$

y

A.07 $$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \varepsilon}$$

El segundo término de A.07 se puede escribir :

A.08 $$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial \varepsilon} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right] - \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}$$

Insertando A.08 en A.07,

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \varepsilon} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right] - \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}$$

con lo cual

A.09 $$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\frac{\partial q}{\partial \varepsilon} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right]$$

Sustituyendo **A.09** en **A.06** (para $\varepsilon = 0$)

$$0 = \frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \varepsilon} \right] dt$$

La segunda integral es trivial:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \varepsilon} \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad \text{por A.03.}$$

por tanto:

A.10
$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\, dt = 0$$

Sabemos que $\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}$ **sólo** es cero en los puntos inicial y final; **por tanto,** para valores distintos de t, $\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}$ será una función arbitraria del tiempo. Luego, concluímos que:

A.11
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

que son las ecuaciones de Lagrange.

A.2.-TRANSFORMACION DE LEGENDRE

Consideremos una función de dos variables f(x,y), de modo que la diferencial, tiene la forma:

A.12 $$df = u\,dx + v\,dy$$

en donde

A.13 $$u = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Supongamos que queremos cambiar de la base (x,y) a la nueva base (u,y). Proponemos una función G definida del siguiente modo:

A.14 $$G = f - ux$$

La diferencial de G está dada por:

A.15 $$dG = v\,dy - x\,du$$

Ahora tendremos:

A.16 $$v = \frac{\partial G}{\partial y} \qquad x = -\frac{\partial G}{\partial u}$$

que son en efecto las inversas de las ecuaciones A.13.

La transformación de la base $(q,\dot{q},t)$ a (q,p,t) difiere del procedimiento mencionado sólo en que ahora hay tres variables. Por analogía con A.14, definimos (excepto por el signo)

A.17 $$H(q,p,t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)$$

que es precísamente I.011

A.3.- EL HAMILTONIANO COMO CONSTANTE DE MOVIMIENTO

Si un sistema es conservativo, las fuerzas son derivables de un potencial:

A.18 $$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Por otro lado, en Fisica Galileana, $L = T - V$

por tanto:

A.19 $$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

por otra parte:

A.20 $$T = \sum_i' \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

Si $x_i = x_i(q_i, t)$, entonces:

A.21 $$T = \sum_i' \sum_j' \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i' m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \dot{q}_i + \sum_i' m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2$$

Ahora, si en las ecuaciones de transformación no aparece explícitamente el tiempo, entonces A.21 puede escribirse así:

A.22 $$T = \sum_i' \sum_j' \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

En esta ecuación T es una función homogénea cuadrática de las velocidades.

Por otro lado, $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$

Sustituyendo A.19 en la ecuación de Hamilton:

A.23 $$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L$$

El teorema de Euler establece que si F es una función homogénea de grado n en la variable ξ entonces:

$$\sum_i \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} = nF$$

Aplicando este resultado en A.23, recordando que el grado de la variable - es 2, obtenemos:

A.24 $$H = 2T - T + V = T + V = E$$

la energía total del Sistema.

El Hamiltoniano es una constante de movimiento igual a la Energía, sólo si L no depende explícitamente del tiempo y L = T - V con T homogénea cuadrá ti a de la velocidad, Otras posibilidades son que H pueda ser una constante de movimiento, pero no la Energía (si T no es homogénea cuadrática), - que H pueda ser la Energía, pero no constante (si $\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$) o bien ninguno- de los casos mencionados.

A.4.- RESOLUCION DE LA INTEGRAL PARA J_r EN EL PROBLEMA DE KEPLER.

La integral mencionada es:

$$J_r = \oint \left[2mEr^2 + 2mkr - \frac{1}{4\pi^2}(J_\theta + J_\varphi)^2\right]^{1/2} \frac{dr}{r} \tag{A.25}$$

Las raíces del integrando, corresponden a valores de r para los cuales p_r es cero. Para una órbita cerrada, hay dos raíces, r_1 y r_2, correspondientes al apogeo y al perigeo de la órbita. Además, el ciclo radial está caracterizado por r moviéndose desde r_1 a r_2 y regresando a r_1. Por tanto, podemos escribir:

$$J_r = 2(2mE)^{1/2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\left[(r_2 - r)(r - r_1)\right]^{1/2} dr \tag{A.26}$$

Una elegante técnica para evaluar esta integral, fue introducida por Born, y consiste en extender r al plano complejo. El integrando tiene entonces una interesante característica : Es una función multivaluada con brazos r_1 y r_2 y un polo en el origen. Representaremos la integral A.26 por una integración a lo largo del contorno C, como se indica en la figura:

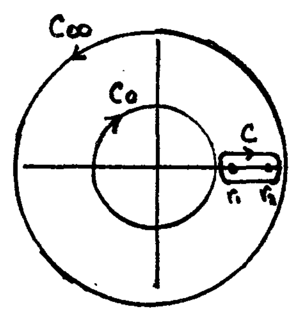

FIG. 5 Contorno deformado para la integral A.26

Los brazos del integrando, están escogidos de modo que la porción del contorno sobre el eje real, corresponde a la raíz cuadrada positiva, y la porción por debajo del eje real corresponde a la raíz cuadrada negativa. Introduciendo el pequeño contorno C_o que encierra el origen, y el contorno C_∞, cuyo radio se aproxima a infinito, estableceremos el dominio multiconectado acotado por los contornos C, C_o y C_∞. El integrando A.26 es analítico en este dominio y sus fronteras, y podemos por tanto aplicar el teorema de Cauchy:

A.27 $$\oint_{C+C_o+C_\infty} \frac{1}{r}\left[(r_2-r)(r-r_1)\right]^{1/2} dr = 0$$

o bien:

A.28 $$\int_C \frac{1}{r}\left[(r_2-r)(r-r_1)\right]^{1/2} dr = -\int_{C_o} \frac{1}{r}\left[(r_2-r)(r-r_1)\right]^{1/2} dr - \int_{C_\infty} \frac{1}{r}\left[(r_2-r)(r-r_1)\right]^{1/2} dr$$

Consideremos primero la integral sobre C_o. Incluye un polo simple de orden 1, y por el teorema del resíduo:

A.29 $$\begin{aligned}\int_{C_o} \frac{1}{r}\left[(r_2-r)(r-r_1)\right]^{1/2} dr &= -2\pi i \left(\underset{r=0}{\mathrm{Res}}\right) \\ &= -2\pi i\left[i(r_2 r_1)^{1/2}\right] \\ &= 2\pi i\,(r_1 r_2)^{1/2}\end{aligned}$$

El signo menos se debe a la dirección del Contorno. La integración sobre C_∞ se obtiene introduciendo la transformación: $r = \frac{1}{t}$ $\quad dr = -\frac{1}{t^2}dt$

Debemos entonces evaluar:

$$-\int_{C_\infty} \frac{1}{t^2}\left[(r_2 t - 1)(1 - r_1 t)\right]^{1/2} dt$$

Esta integral tiene un polo de orden 2 en $t = 0$ $(r = \infty)$. Usando la fórmula para un resíduo de orden 2 :

$$\mathrm{Res} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{d}{dt}\left[(r_2 t-1)(1-r_1 t)\right]^{1/2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2}\left[(r_2 t-1)(1-r_1 t)\right]^{-1/2}\cdot\left[(r_2 t-1)(-r_1)+(r_2)(1-r_1 t)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[-1\right]^{-1/2}(r_1+r_2)$$

Por tanto obtenemos:

A.30 $$\int_{C_\infty}\frac{1}{r}\left(\left[r_2-r\right]\left[r-r_1\right]\right)^{1/2}dr = -\pi(r_1+r_2)$$

Sustituyendo A.30, A.29, y A.28 en A.26, se tiene finalmente:

A.31 $$J_r = \pi(r_1+r_2)-2\pi(r_1 r_2)^{1/2} = -(J_\theta+J_\varphi)-\pi K\left(\frac{2m}{-E}\right)^{1/2}$$

de donde:

A.32 $$E = H = -\frac{2mK^2\pi^2}{(J_r+J_\theta+J_\varphi)^2}$$

Que es el resultado I.083.

BIBLIOGRAFIA

MAX BORN. "THE MECHANICS OF THE ATOM".
Ungar, Nueva York, 1960.

H. GOLDSTEIN. "CLASSICAL MECHANICS".
Addison-Wesley, Read. Mass., 1960.

RONALD A. MANN. "THE CLASSICAL DINAMICS OF PARTICLES".
Academic Press, Nueva York, 1964.

E. SALETAN, A. CROMER. "THEORETICAL MECHANICS".
John Wiley and Sons. Nueva York,1971.

L. LANDAU, E. LIFSCHITZ. "CURSO ABREVIADO DE FISICA TEORICA".
Vol. I, Ed. MIR, Moscú, 1971.

J. W. LEECH. "MECANICA CLASICA".
Uteha, México, 1968.

PARDO SANCHEZ, GONZALEZ CABALLERO, BRUQUE. "MECANICA".
Paraninfo, Madrid, 1975.

T. C. BRADBURY. "THEORETICAL MECHANICS".
John Wiley and Sons. Nueva York 1968.

D. TEER HAAR. "ELEMENTS OF HAMILTONIAN DINAMICS".
North Holland, Amsterdam, 1964.

H. CORBEN , P. STEHLE. "CLASSICAL MECHANICS".
John Wiley and Sons, Nueva York, 1960.

E. SCHROEDINGER. "QUE ES UNA LEY DE LA NATURALEZA ? ".
Breviarios del Fondo de Cultura, México, 1975.

A. SOMMERFELD. "LECTURES ON THEORETICAL PHYSICS".
Vol. I, Academic Press, Nueva York, 1964.

M. EISBERG. "FUNDAMENTOS DE FISICA MODERNA".
Limusa, México, 1974.

JOHN RAY. "EL PRINCIPIO DE HAMILTON".
American Journal of Physics. vol. 41, 1973.

THOMAS L. FERRELL. "PERTURBACIONES DE HAMILTON JACOBI ".
American Journal of Physics. Vol 39 1970.

M. E. OMELIANOVSKI. "PROBLEMAS FILOSOFICOS DE LA MECANICA CUANTICA".
UNAM, México, 1960.