



# Integrabilidad y No Integrabilidad en Sistemas de Tipo Hénon-Heiles

Tesis  
que para obtener el grado de

**Licenciado en Física**

presenta

**Sanders Gutierrez Oscar Alan**

*Departamento de Física  
Universidad de Sonora*

Noviembre 2015

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON

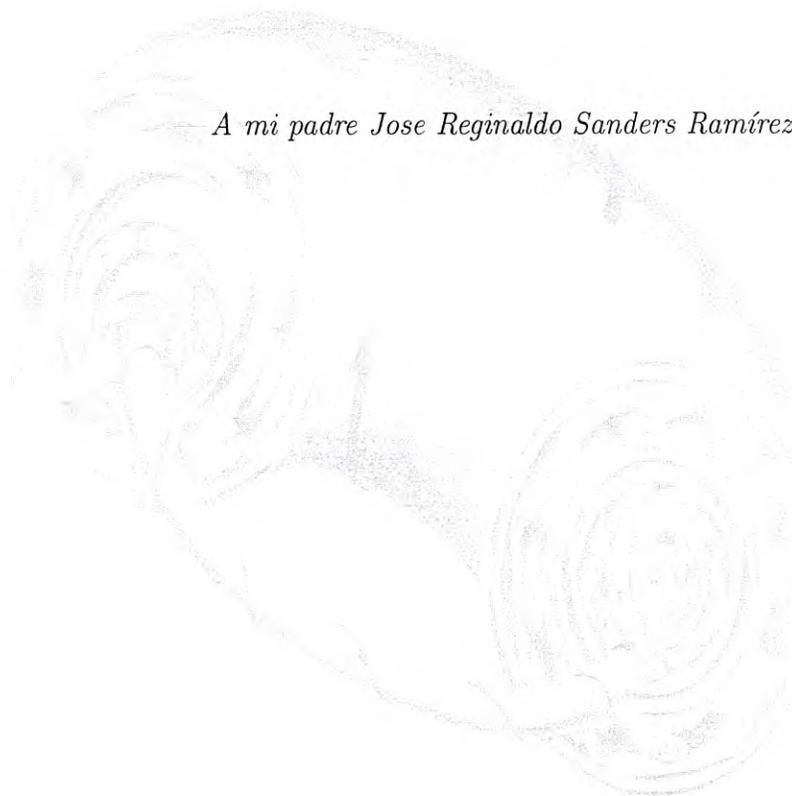


**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

*A mi padre Jose Reginaldo Sanders Ramírez*



# Agradecimientos

Este trabajo es resultado del apoyo que me han brindado muchas personas en el transcurso de mi carrera.

En primer lugar agradezco a mis padres, Reginaldo Sanders Ramirez y Guadalupe Gutierrez, por nunca dejar de apoyarme en todo momento e inspirar mi superación personal.

A mis hermanos, Zubelda Sanders y Reginaldo Sanders, por ayudarme en mi formación personal e intelectual.

Agradezco al profesor Antonio Jáuregui por su paciencia y retroalimentación en mi formación como físico durante la licenciatura y este trabajo.

A los profesores Carlos Calcáneo, Carlos Lizárraga y Sergio Gutiérrez por ayudar a mejorar este trabajo.

A Andrea Alicia por acompañarme en todo momento y darme su apoyo y cariño.

A mis amigos y compañeros que han contribuido en mi formación personal e intelectual.

Por ultimo, a todas aquellas personas que han trabajado en el sistema de composición de textos  $\text{\LaTeX}$  ya que, sin su esfuerzo, este trabajo no tendría la presentación actual.

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Sistemas hamiltonianos</b>	<b>3</b>
1.1. Mecánica hamiltoniana . . . . .	3
1.1.1. Constantes de movimiento . . . . .	5
1.1.2. Paréntesis de Poisson . . . . .	6
1.1.3. Sistemas integrables . . . . .	8
1.2. Formalismo canónico . . . . .	8
1.2.1. Transformaciones canónicas . . . . .	9
1.2.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi . . . . .	12
1.2.3. Separabilidad . . . . .	14
<b>2. Potencial de Hénon-Heiles parametrizado</b>	<b>16</b>
2.1. Puntos de equilibrio del potencial HHP . . . . .	17
2.1.1. Ejemplos . . . . .	19
2.2. Segunda constante de movimiento . . . . .	20
2.2.1. Sistema de ecuaciones . . . . .	20
2.2.2. Solución . . . . .	22
2.2.3. Construcción de la constante de movimiento . . . . .	26
2.2.4. Integrabilidad del sistema HHP . . . . .	27
<b>3. Movimientos regulares en el potencial HHP</b>	<b>28</b>
3.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	28
3.2. Trayectorias regulares: caso $\epsilon = 1/3$ . . . . .	29
3.3. Trayectorias regulares: caso $\epsilon = 2$ . . . . .	31
<b>4. Movimientos irregulares en el potencial HHP</b>	<b>35</b>
4.1. Sistemas dinámicos . . . . .	35
4.1.1. Sistemas hamiltonianos como sistemas dinámicos . . . . .	36
4.1.2. Puntos críticos . . . . .	37
4.2. Indicadores de Caos . . . . .	39
4.2.1. Sección de Poincaré . . . . .	39
4.2.2. Exponente de Lyapunov . . . . .	41
4.3. Caos en el sistema de Hénon-Heiles . . . . .	42
4.3.1. Potencial y puntos críticos . . . . .	43

4.3.2. Caos: trayectorias e indicadores . . . . .	44
<b>Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>A. Códigos de Wolfram Mathematica</b>	<b>50</b>

# Introducción

A un sistema físico lo describimos mediante un conjunto de variables que determinan su estado. Estas variables interactúan una con la otra de forma interdependiente dando lugar, en general, a una dinámica compleja. Su evolución temporal puede ser representada como una relación causal entre el estado presente y el estado futuro. La existencia de la causalidad en tal relación está sustentada en nuestra experiencia directa con la naturaleza. En la mecánica clásica un sistema se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias; éstas nos permiten conocer su evolución temporal siempre y cuando fijemos las condiciones iniciales del sistema en cuestión.

Cuando en el sistema físico el azar no está involucrado en el desenvolvimiento de los estados futuros del sistema decimos que el sistema es *determinista*. En los sistemas deterministas, una misma condición inicial siempre nos llevará a la misma solución y, en consecuencia, podemos conocer el pasado y futuro de un sistema que evoluciona en el tiempo. A diferencia de éstos, en los sistemas estocásticos o aleatorios los estados futuros no están determinados por los estados anteriores. Los sistemas descritos adecuadamente por la mecánica clásica se comportan siempre como sistemas deterministas; sin embargo, la mayoría de los sistemas de la mecánica clásica son sistemas complicados y difíciles de predecir en la práctica, son conocidos como sistemas caóticos.

Es claro que gran parte de los sistemas que se tienen en la mecánica clásica, son no-lineales. A diferencia de la linealidad, donde la respuesta de un sistema a una fuerza aplicada es directamente proporcional a dicha fuerza, las ecuaciones que modelan un sistema no-lineal pueden contener a las variables que describen el sistema con potencias mayores a uno o formar productos entre ellas mismas. La no-linealidad es una condición necesaria pero no suficiente para la existencia de caos y, en general, su descripción requiere el uso de métodos numéricos.

En este trabajo nos centramos en sistemas mecánicos conservativos. La dinámica de los sistemas conservativos es diferente a la dinámica de los sistemas disipativos. Mientras que en el primero sólo podemos observar dos tipos de estabilidad, en el segundo hay más posibilidades para que el sistema alcance una posición estable. Generalmente los sistemas conservativos se describen en el marco teórico de la mecánica hamiltoniana, donde el concepto de integrabilidad juega un rol fundamental. Esencialmente, un sistema de  $n$  grados de libertad es integrable si posee  $n$  constantes de movimiento independientes; esto significa, por ejemplo, que la integrabilidad de un sistema implica la solución completa del problema. Por el contrario, si un sistema es no integrable entonces el sistema tiene una dinámica que lo convierte en candidato a ser caótico. Como antecedente, en el capítulo 1 hacemos una breve presentación de los sistemas hamiltonianos, que va desde las ecuaciones de Hamilton hasta la ecuación de Hamilton-Jacobi, pasando por el concepto de

integrabilidad de Liouville.

En 1962, Michel Hénon y Carl Heiles estudiaban el movimiento no lineal de una estrella que gira alrededor de un centro galáctico con simetría axial, con el movimiento restringido a un plano. En 1964 publicaron un artículo con el título “The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments” [1]. Su idea era encontrar la tercera constante de movimiento en este sistema galáctico. Para ello, consideraron un modelo simplificado descrito por un potencial bidimensional no lineal axialmente simétrico

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

y encontraron que la tercera integral sólo existe para una región limitada de condiciones iniciales, mientras que para otras regiones el movimiento era irregular y caótico. La expresión anterior es el potencial de Hénon-Heiles y podemos observar que es un potencial de oscilador modificado por los dos últimos términos, de naturaleza no-lineal.

En este trabajo estudiamos una familia uni-paramétrica de potenciales del tipo de Hénon-Heiles, de la forma:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y + \epsilon y^3$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro real. A esta familia de potenciales le llamamos potencial de Hénon-Heiles parametrizado. Para cada valor del parámetro  $\epsilon$  hay un potencial. El objetivo de este trabajo es encontrar para qué valores del parámetro  $\epsilon$  el sistema correspondiente es integrable. Como el potencial de Hénon-Heiles parametrizado depende de dos variables, el sistema tiene dos grados de libertad, por lo que necesitamos dos constantes de movimiento para cumplir con el criterio de integrabilidad. Siendo un sistema autónomo, una de esas constantes de movimiento es la energía o función hamiltoniana del sistema; por lo tanto, el problema de integrabilidad se reduce a encontrar la segunda constante de movimiento. El capítulo 2 está dedicado a resolver este problema, encontramos que los valores del parámetro  $\epsilon$  para que el sistema de Hénon-Heiles parametrizado sea integrable son: 2 y 1/3. Este capítulo es la parte central de este trabajo. El método que usamos para encontrar los casos integrables es directo: proponemos que la segunda constante de movimiento sea una función cuadrática en los momentos y bajo esta hipótesis buscamos los valores de  $\epsilon$  para los cuales existe la función que permanece constante.

Una vez que obtenemos en que casos el sistema es integrable, en el capítulo 3 analizamos detalladamente el comportamiento y las propiedades para cada uno de estos casos. Probamos, calculando el tipo de trayectoria posible, que la presencia de la segunda constante de movimiento lleva a que las trayectorias sean de naturaleza regular.

Por su parte, el caso no integrable es analizado en el capítulo 4. Como el parámetro  $\epsilon$  puede tomar cualquier valor, excepto 2 y 1/3, escogemos el caso particular:  $\epsilon = -1/3$ . Es decir, ejemplificamos con el potencial original de Hénon-Heiles, lo cual nos da la oportunidad de mostrar su naturaleza caótica. Para ello, después de un breve repaso de los indicadores básicos de caos, calculamos las trayectorias y los mencionados indicadores para mostrar el régimen caótico de este potencial.

Finalmente terminamos este trabajo con una sección de conclusiones.

# Capítulo 1

## Sistemas hamiltonianos

La descripción lagrangiana de un sistema mecánico de  $n$  grados de libertad está basada en las ecuaciones de Lagrange, cuya forma es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad n = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

donde  $\mathcal{L}(\dot{q}, q, t)$  es la función lagrangiana, definida como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema

$$\mathcal{L} = T - V. \quad (1.2)$$

Las ecuaciones de Lagrange son ecuaciones diferenciales de segundo orden. Un sistema con  $n$  grados de libertad tiene  $n$  ecuaciones de Lagrange, una por cada grado de libertad.

En la siguiente sección mostramos cómo de la descripción lagrangiana se puede derivar la descripción hamiltoniana de la mecánica, la cual amplía las posibilidades con las que se puede estudiar un problema de mecánica clásica.

### 1.1. Mecánica hamiltoniana

Las ecuaciones de Lagrange pueden escribirse de la forma

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (1.3)$$

donde los momentos generalizados  $p_i$  están definidos como

$$p_i(\dot{q}, q, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.4)$$

el índice  $i$  toma los valores  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Considerando los  $p_i$  como variables, de las  $n$  ecuaciones (1.4) podemos despejar las  $n$  velocidades  $\dot{q}$ , y obtenerlas como función de las  $2n$  variables  $q$  y  $p$ :

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t). \quad (1.5)$$

Ahora definimos la función hamiltoniana,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, t)$ , como

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(\dot{q}(q, p, t), q, t), \quad (1.6)$$

es decir, la función hamiltoniana es la transformada de Legendre, en las velocidades, de la función lagrangiana.

Ahora pasaremos a calcular las derivadas de  $\mathcal{H}$  con respecto a las  $2n$  variables independientes  $\{p, q\}$ . Derivando (1.6) con respecto a  $p_i$  obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}. \quad (1.7)$$

Luego sustituimos (1.4) en (1.7) para cancelar dos de los términos dejando la expresión

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}. \quad (1.8)$$

De manera similar, si derivamos (1.6) con respecto a  $q_i$  tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}, \quad (1.9)$$

sustituyendo (1.4) se cancelan los dos últimos términos y con ayuda de la expresión (1.3) queda

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \quad (1.10)$$

Las ecuaciones (1.8) y (1.10) son las ecuaciones canónicas de Hamilton. Las ecuaciones de Hamilton constituyen un conjunto de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente a las  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden de Lagrange.

Cuando usamos la descripción lagrangiana de la mecánica estamos trabajando en el espacio de configuración, éste es el espacio de todas las posibles posiciones instantáneas de un sistema mecánico y tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión  $n$ ; mientras que si usamos la descripción hamiltoniana de la mecánica estaremos trabajando en el espacio fase, éste, a su vez, es una variedad diferenciable de dimensión  $2n$ , tal que las coordenadas de cada punto representan tanto las coordenadas generalizadas como los momentos conjugados correspondientes. Dicho en otras palabras, cada punto de la región del espacio fase accesible al sistema representa un estado del sistema mecánico. A su vez, usando las ecuaciones de transformación de las coordenadas generalizadas y momentos a las coordenadas y velocidades naturales del sistema, ese estado determinará la posición y velocidad de cada una de las partículas que forman al sistema; es decir, el sistema físico quedará determinado.

### 1.1.1. Constantes de movimiento

Supongamos que tenemos un sistema mecánico cuya energía cinética no tiene dependencia explícita en el tiempo y es una función cuadrática de las velocidades  $\dot{q}_i$ . La última condición puede expresarse de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T. \quad (1.11)$$

Como la energía potencial no depende de las velocidades, el momento  $p_i$  se reduce a  $p_i = \partial T / \partial \dot{q}_i$ . Si usamos esta expresión en (1.6), junto con (1.11), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V) \\ &= 2T - (T - V) = T + V \end{aligned} \quad (1.12)$$

y como resultado la hamiltoniana  $\mathcal{H}$  coincide con la energía total del sistema.

Ahora examinaremos la derivada temporal de  $\mathcal{H}$  suponiendo una dependencia explícita en el tiempo; es decir,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, t)$ . La función  $\mathcal{H}$  puede variar por su dependencia explícita en el tiempo y también porque las variables  $q$  y  $p$  varían con el tiempo. La derivada total de  $\mathcal{H}$  con respecto al tiempo es

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right). \quad (1.13)$$

Usando las ecuaciones de Hamilton obtenemos

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right), \quad (1.14)$$

y los términos dentro del paréntesis se cancelan quedando solamente

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Esta última ecuación demuestra que el valor de la hamiltoniana  $\mathcal{H}$  cambia en el tiempo debido únicamente a su dependencia explícita en el tiempo. En particular, para sistemas conservativos, tanto  $T$  como  $V$  no tienen dependencia explícita en el tiempo y se sigue que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$$

así, obtenemos la ley de conservación de la energía

$$\mathcal{H} = T + V = E = \text{constante}. \quad (1.16)$$

Existe un segundo tipo de ley de conservación, cuando una de las coordenadas no

aparece explícitamente en la hamiltoniana y decimos que dicha coordenada es ignorable o cíclica, en ese caso se conserva el momento correspondiente a la coordenada,  $p_i = cte.$ , como se sigue de la ecuación de Hamilton (1.10).

Como consecuencia, para sistemas conservativos, la posición de los estados está acotada por una hipersuperficie de  $2n - 1$  dimensiones en el espacio fase debido a la condición (1.16). En cambio, si hay una coordenada cíclica, el espacio fase tiene  $2n - 1$  dimensiones y los estados se realizan en el hiperplano  $p_i = cte.$

El formalismo hamiltoniano funciona muy bien en la búsqueda de leyes de conservación o constantes de movimiento. En general, una constante de movimiento de un problema mecánico es una función de las coordenadas generalizadas, los momentos conjugados y el tiempo,  $F(q, p, t)$ , que permanece constante a lo largo de una trayectoria en el espacio fase, es decir, su derivada temporal es nula

$$\frac{dF(q, p, t)}{dt} = 0. \quad (1.17)$$

Las leyes de conservación de la energía y el momento son las primeras de otras leyes de conservación. En las siguientes secciones veremos la importancia y un criterio para encontrar constantes de movimiento.

### 1.1.2. Paréntesis de Poisson

Sea  $F = F(q, p, t)$  una función definida en el espacio fase que representa una variable dinámica de un sistema mecánico. La variación temporal de  $F$  es

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.18)$$

y usando las ecuaciones de Hamilton queda

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.19)$$

Definimos el *paréntesis de Poisson* como

$$[F, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \quad (1.20)$$

y entonces podemos reescribir (1.19) como

$$\frac{dF}{dt} = [F, \mathcal{H}] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.21)$$

La ecuación anterior es la ecuación de evolución más general de la mecánica y se llama ecuación de Poisson.

De la ecuación de Poisson, y de acuerdo con (1.17), una variable dinámica  $F$  es constante de movimiento si no depende explícitamente del tiempo y se cumple que su paréntesis

de Poisson con la hamiltoniana es cero, es decir, esta en involución:

$$[F, \mathcal{H}] = 0. \quad (1.22)$$

Esto nos proporciona un criterio para saber si una variable dinámica es constante de movimiento. En particular, para sistemas independientes del tiempo, llamados sistemas autónomos, la hamiltoniana siempre será una constante de movimiento.

Los paréntesis de Poisson se generalizan a cualquier par de variables dinámicas; es decir, si  $F$  y  $G$  son dos variables dinámicas definimos su paréntesis de Poisson como

$$[F, G] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (1.23)$$

Los paréntesis de Poisson cumplen con las siguientes propiedades:

1.  $[F, G] = -[G, F]$ ,
2.  $[aF_1 + bF_2, G] = a[F_1, G] + b[F_2, G]$ ,
3.  $[FG, I] = F[G, I] + G[F, I]$ ,
4.  $[F, [G, I]] + [G, [I, F]] + [I, [F, G]] = 0$ .

En particular, si se aplican los paréntesis de Poisson a las variables  $\{q, p\}$  se obtienen los llamados paréntesis fundamentales:

$$\begin{aligned} [q_i, q_j] &= 0, \\ [p_i, p_j] &= 0, \\ [q_i, p_j] &= \delta_{i,j} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Si calculamos la derivada temporal de  $[F, G]$ , en donde  $F$  y  $G$  son constantes de movimiento, y por lo tanto independientes del tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[F, G] &= [[F, G], \mathcal{H}] \\ &= -[\mathcal{H}, [F, G]] \\ &= [F, [G, \mathcal{H}]] + [G, [\mathcal{H}, F]], \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad número 4 de los paréntesis de Poisson. Como  $F$  y  $G$  son constantes de movimiento se cumple que

$$[G, \mathcal{H}] = 0,$$

$$[\mathcal{H}, F] = 0,$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dt}[F, G] = 0.$$

El desarrollo anterior constituye el teorema de Poisson y nos dice que si  $F$  y  $G$  son constantes de movimiento, entonces su paréntesis de Poisson  $[F, G]$  también es constante de movimiento.

### 1.1.3. Sistemas integrables

En general, un sistema mecánico depende crucialmente de las constantes de movimiento que tiene. Como hemos visto, por cada constante de movimiento la variedad en el espacio fase donde toman valores las coordenadas generalizadas y los momentos se reduce en una dimensión. En particular, si un sistema hamiltoniano de  $n$  grados de libertad posee  $n$  constantes de movimiento, denotadas por  $F_i(q, p, t)$ ,

$$F_i(q, p, t) = \mathcal{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.25)$$

con  $\mathcal{F}_i$  constante. De estas ecuaciones, consideradas como un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas en las  $n$  variables de momento, podemos resolver para obtener los momentos como función de las coordenadas y las constantes de movimiento

$$p_i = p_i(q, \mathcal{F}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.26)$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en el primer conjunto de ecuaciones de Hamilton, ecuaciones (1.8), obtenemos

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i(q, \mathcal{F}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.27)$$

y este sistema de  $n$  ecuaciones puede, a su vez, ser resuelto para encontrar las  $n$  coordenadas generalizadas como función del tiempo. De esta manera obtenemos la solución completa. En este caso se dice que el sistema es *integrable*.

Una definición más formal de sistema integrable es la siguiente:

*Un sistema Hamiltoniano de  $n$  grados de libertad es integrable en sentido de Liouville si posee  $n$  constantes de movimiento independientes,  $F_i(q, p, t)$ , en involución.*

Es decir, el paréntesis de Poisson de cualquier par de ellas es cero:

$$[F_i, F_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Que las variables  $F_i$  se encuentren en involución garantiza que sus paréntesis de Poisson no generan nuevas constantes de movimiento, como se sigue del teorema de Poisson.

Así, un sistema de  $n$  grados de libertad que no tiene exactamente  $n$  constantes de movimiento se dice que es *no integrable*. El concepto de integrabilidad tiene relación con la ecuación de Hamilton-Jacobi, como veremos a continuación.

## 1.2. Formalismo canónico

En el formalismo hamiltoniano existen nuevas formas de solucionar un problema mecánico. Estas nuevas formas se deben a transformaciones de las  $2n$  coordenadas del

espacio fase llamadas transformaciones canónicas. A continuación revisaremos algunas implicaciones de dichas transformaciones.

### 1.2.1. Transformaciones canónicas

Dada una hamiltoniana  $\mathcal{H}(q, p, t)$ , el movimiento del sistema se encuentra mediante la integración de las ecuaciones de Hamilton. Un problema mecánico puede simplificarse si podemos encontrar una transformación adecuada de las coordenadas originales  $(q, p)$  a un nuevo conjunto de coordenadas  $(Q, P)$ . Ahora, si las coordenadas  $(Q, P)$  satisfacen las ecuaciones de Hamilton con una nueva hamiltoniana  $\mathcal{H}'(Q, P, t)$ , entonces se restringe la clase de transformaciones en el espacio fase. Cuando las nuevas coordenadas satisfacen las ecuaciones de Hamilton decimos que la transformación es canónica. Esto es consecuencia de que, así como  $p_i$  es el momento asociado a la coordenada  $q_i$ , entonces  $P_i$  será el momento asociado a  $Q_i$ . El espacio fase, tanto en las coordenadas originales como en las nuevas coordenadas, se estructura en  $n$  pares de coordenadas llamados pares canónicos.

Cuando la transformación es canónica, cada par  $(Q_i, P_i)$  es un par canónico conjugado y las ecuaciones de evolución son las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_i}, \quad (1.28)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_i}, \quad (1.29)$$

y las variables  $\{Q, P\}$  satisfacen los paréntesis de Poisson fundamentales

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_j] &= 0, \\ [P_i, P_j] &= 0, \\ [Q_i, P_j] &= \delta_{i,j}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Falta determinar la nueva hamiltoniana,  $\mathcal{H}'$ ; pero, recordemos que en las nuevas coordenadas, como en las coordenadas originales, el principio de Hamilton se cumple, ya que se cumplen las ecuaciones de Hamilton; esto es, la variación de la integral de la lagrangiana con respecto al tiempo, entre dos puntos fijos, es cero:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0, \quad (1.31)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(Q_i, \dot{Q}_i, t) dt = 0, \quad (1.32)$$

donde  $\mathcal{L}'$  es la lagrangiana que corresponde a la hamiltoniana  $\mathcal{H}'$ ,  $\delta$  representa la variación y la integral, a su vez, representa la acción del sistema. La diferencia de las ecuaciones (1.31) y (1.32) también debe anularse:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L} - \mathcal{L}') dt = 0 \quad (1.33)$$

y de esta expresión vemos que, o las lagrangianas son iguales, lo cual no lleva a nada nuevo, o difieren por la derivada temporal de una función arbitraria, que denotamos con  $F$ ,

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}' = \frac{dF}{dt}. \quad (1.34)$$

Sustituyendo en (1.32) obtenemos

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta(F|_{t_2} - F|_{t_1}) = 0$$

y la última igualdad se debe a que la variación de una constante es cero.

La función arbitraria  $F$  se llama función generadora de la transformación canónica. En el caso general,  $F$  puede ser una función de las nuevas y de las viejas coordenadas; es decir, de  $4n$  coordenadas y el tiempo:

$$F = F(q, p, Q, P, t).$$

Simultáneamente, hay  $2n$  ecuaciones de transformación que nos relacionan las coordenadas originales y las nuevas coordenadas y son

$$Q_i = Q_i(q, p, t),$$

$$P_i = P_i(q, p, t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

entonces,  $F$  sólo depende de  $2n$  variables independientes y el tiempo. La función  $F$  debe contener al menos un tipo de coordenada original ( $q, p$ ) y uno de las nuevas coordenadas ( $Q, P$ ), para establecer una relación entre los sistemas. Por lo tanto, existen cuatro posibilidades para la función generadora:

$$F_1 = F(q, Q, t), \quad (1.35)$$

$$F_2 = F(q, P, t), \quad (1.36)$$

$$F_3 = F(p, Q, t), \quad (1.37)$$

$$F_4 = F(p, P, t). \quad (1.38)$$

Cada una de estas funciones tiene  $2n$  variables y el tiempo.

Sabemos de la ecuación (1.34) que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{dF}{dt}, \quad (1.39)$$

pero la lagrangiana es la transformada de Legendre de la función hamiltoniana, entonces

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}, \quad (1.40)$$

$$\mathcal{L}' = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H}' \quad (1.41)$$

y sustituyendo en (1.39) tenemos

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H}' + \frac{dF}{dt}. \quad (1.42)$$

Esta expresión la podemos aplicar a cualquiera de las funciones generadoras (1.35-1.38). En particular, aplicada a  $F_1$ , y después de multiplicar por el diferencial  $dt$ , obtenemos

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i + (\mathcal{H}' - \mathcal{H})dt = dF_1. \quad (1.43)$$

Calculamos ahora el diferencial de la función generadora  $F_1(q, Q, t)$

$$dF_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \quad (1.44)$$

y lo sustituimos en la ecuación (1.43). Comparando los coeficientes de ambos lados de la expresión resultante, obtenemos

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad (1.45)$$

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.46)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (1.47)$$

Los primeros dos conjuntos de ecuaciones representan la transformación canónica, la última ecuación nos proporciona la nueva hamiltoniana.

Desarrollado lo anterior, pasamos a obtener las ecuaciones de transformación de la función generadora  $F_2(q, P, t)$ . Usando la identidad

$$P_i dQ_i = d(Q_i P_i) - Q_i dP_i$$

en la ecuación (1.41) y agrupando términos nos queda la expresión

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i + \sum_{i=1}^n Q_i dP_i + (\mathcal{H}' - \mathcal{H})dt = d\left(F_1 + \sum_{i=1}^n Q_i P_i\right), \quad (1.48)$$

de aquí se sigue que la función entre paréntesis del lado derecho depende de las variables  $q, P$  y el tiempo; luego, se trata de la función generadora  $F_2(q, P, t)$  y resulta la identidad:

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_{i=1}^n Q_i P_i \quad (1.49)$$

Ahora necesitamos el diferencial de  $F_2(q, P, t)$ :

$$dF_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} P_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt. \quad (1.50)$$

Comparando los coeficientes de (1.48) y (1.50), obtenemos

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad (1.51)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.52)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (1.53)$$

Las primeras dos expresiones son las ecuaciones de la transformación canónica y nos permiten determinar  $q_i = q_i(Q, P, t)$  y  $p_i = p_i(Q, P, t)$ , las cuales se introducen en (1.53) para obtener la nueva hamiltoniana  $\mathcal{H}'(Q, P, t)$ .

Las ecuaciones de transformación para los otros dos tipos de funciones generadoras se obtienen usando un desarrollo similar al que aquí hemos realizado.

### 1.2.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi

En la sección anterior hemos estudiado las transformaciones que nos permiten pasar de un conjunto de coordenadas canónicas  $\{q, p\}$  a otro conjunto de coordenadas canónicas  $\{Q, P\}$ . Ahora usaremos esa noción para encontrar la transformación canónica que nos lleva a que las nuevas coordenadas y momentos sean todos constantes: ( $Q_i = \beta_i, P_i = \Gamma_i$ ). Invirtiendo las ecuaciones de la transformación canónica podemos encontrar las coordenadas originales en la forma:  $q_i = q_i(\beta, \Gamma, t)$  y  $p_i = p_i(\beta, \Gamma, t)$ . Como estas expresiones para coordenadas y momentos son función del tiempo y de  $2n$  constantes,  $\{\beta, \Gamma\}$ , entonces son la solución del problema físico. La teoría que sustenta esta estrategia de análisis de un sistema mecánico se conoce como teoría de Hamilton-Jacobi.

Partimos de que las coordenadas  $(Q_i, P_i)$  obedecen las ecuaciones de Hamilton, con la hamiltoniana  $\mathcal{H}'(Q, P, t)$ . Como las derivadas temporales se anulan por construcción, tenemos

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_i} = 0, \quad (1.54)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_i} = 0, \quad (1.55)$$

y por lo tanto  $Q_i = \beta_i$  y  $P_i = \Gamma_i$ , con  $\beta_i$  y  $\Gamma_i$  constantes determinadas por las condiciones iniciales.

Las ecuaciones (1.54) y (1.55) nos dicen que para esta transformación la nueva hamiltoniana es cero

$$\mathcal{H}' \equiv 0 \quad (1.56)$$

Para obtener la transformación de coordenadas, necesitamos una función generadora.

Por razones históricas adoptaremos una función generadora de segundo tipo, que denotaremos con  $S$ :  $F_2 = S(q, P, t)$ , conocida como *función principal de Hamilton*. Ya que los nuevos momentos  $P$  son constantes, la función principal de Hamilton es una función que depende de las  $n$  coordenadas  $q$ , el tiempo y las  $n$  constantes  $\Gamma$ :

$$S = S(q, \Gamma, t)$$

Requerimos que la nueva hamiltoniana se anule; entonces, de la ecuación (1.53) se sigue

$$\mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (1.57)$$

pero, de las ecuaciones (1.51) para la transformación canónica tenemos

$$p_i = \frac{\partial S(q, \Gamma, t)}{\partial q_i} \quad (1.58)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior nos queda la siguiente ecuación diferencial que satisface la función de principal de Hamilton:

$$\mathcal{H}\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.59)$$

La ecuación anterior se llama ecuación de Hamilton-Jacobi (EHJ). Por medio de esta ecuación podemos determinar la función principal de Hamilton,  $S(q, \Gamma, t)$ , que es la función generadora de la transformación canónica que anula la hamiltoniana. La EHJ es una ecuación diferencial parcial no-lineal de primer orden con  $n + 1$  variables,  $\{q, t\}$ . La no-linealidad se debe a que la hamiltoniana depende cuadráticamente de los momentos que entran como derivadas de la función  $S$  con respecto a las coordenadas de posición. Para obtener la función principal de Hamilton, debemos integrar la ecuación diferencial  $n + 1$  veces, por lo cual obtenemos  $n + 1$  constantes de integración. Como  $S$  aparece en la ecuación diferencial sólo como una derivada, una de las constantes es aditiva; esto es, si  $S$  es solución entonces  $S + a$  también es solución. La constante aditiva es irrelevante y la tomamos como cero; entonces, la solución de la EHJ depende de  $n$  constantes, que se identifican con los  $n$  momentos constantes  $\{P = \Gamma\}$ ,

$$S = S(q_1, \dots, q_n; \Gamma_1, \dots, \Gamma_n; t), \quad (1.60)$$

en donde las  $\Gamma_i$  son las constantes de integración.

De las ecuaciones de la transformación canónica, (1.51) y (1.52), obtenemos

$$P_i = \Gamma_i, \quad (1.61)$$

$$Q_i = \frac{\partial}{\partial \Gamma_i} S(q_1, \dots, q_n; \Gamma_1, \dots, \Gamma_n; t) = \beta_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.62)$$

Las constantes  $\beta_i$  y  $\Gamma_i$  se determinan con las condiciones iniciales. Las coordenadas

originales las obtenemos invirtiendo el sistema de ecuaciones (1.62), para tener

$$q_i = q_i(\beta, \Gamma, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.63)$$

Sustituyendo las coordenadas en las expresiones (1.58) obtenemos los momentos

$$p_i = \frac{\partial S(q, \Gamma, t)}{\partial q_i} = p_i(q(\beta, \Gamma, t), \Gamma, t). \quad (1.64)$$

Las expresiones (1.63) y (1.64) representan la solución del problema en las coordenadas originales, ya que dependen del tiempo y de  $2n$  constantes de integración.

Para conocer el significado físico de la función principal de Hamilton,  $S$ , debemos obtener su derivada total con respecto al tiempo. De (1.60) tenemos

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (1.65)$$

Como la derivada de la función de Hamilton son los momentos,  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ , se sigue que

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (1.66)$$

pero, de la ecuación de Hamilton-Jacobi tenemos  $\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}$ , sustituyendo queda

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}. \quad (1.67)$$

El lado derecho de esta ecuación es la transformada de Legendre de la función hamiltoniana y, de acuerdo a (1.6), es la función lagrangiana por lo tanto

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (1.68)$$

y de aquí finalmente obtenemos

$$S = \int \mathcal{L} dt. \quad (1.69)$$

Es decir, la función principal de Hamilton es la integral en el tiempo de la función lagrangiana y ésta, a su vez, es la acción del sistema. La acción es, entonces, la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi y representa la función generadora de la transformación canónica que nos lleva a que la nueva hamiltoniana sea cero.

### 1.2.3. Separabilidad

Cuando la hamiltoniana de un sistema es independiente del tiempo,  $\mathcal{H}(q, p)$ , la parte temporal de la función de acción puede ser separada y evaluada, ya que la ecuación de

Hamilton-Jacobi involucra el tiempo sólo en el último término,

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (1.70)$$

Entonces, usando el método de separación de variables la acción o función principal de Hamilton tiene la forma

$$S(q, t) = W(q_1, q_2, \dots, q_n) - Et, \quad (1.71)$$

donde  $E$  es la energía y la función  $W(q)$  es independiente del tiempo, ésta se conoce como función característica de Hamilton y satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}) = E. \quad (1.72)$$

Si proponemos como solución a la ecuación (1.72) una función con las variables separadas,

$$W(q_1, \dots, q_n) = w_1(q_1) + w_2(q_2) + \dots + w_n(q_n),$$

entonces la ecuación (1.72) se reduce a

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial w_1}{\partial q_1}, \frac{\partial w_2}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial w_n}{\partial q_n}) = E. \quad (1.73)$$

En circunstancias especiales que dependen tanto de la forma que tiene la hamiltoniana  $\mathcal{H}$  como de la elección de las coordenadas generalizadas  $\{q\}$ , la ecuación (1.73) se puede separar en un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una dependiente de una sola variable. El sistema de ecuaciones en que se separa es:

$$\begin{aligned} h_1(q_1, \frac{dw_1}{dq_1}) &= I_1, \\ h_2(q_2, \frac{dw_2}{dq_2}; I_1) &= I_2, \\ h_3(q_3, \frac{dw_3}{dq_3}; I_1, I_2) &= I_3, \\ &\vdots \\ h_n(q_n, \frac{dw_n}{dq_n}; I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) &= I_n, \end{aligned} \quad (1.74)$$

donde las funciones  $h_i$  se llaman funciones de separación. Cada ecuación depende de una sola variable y en este caso se dice que el sistema es separable. Las constantes de separación  $\{I_1, I_2, \dots, I_n = E\}$  juegan el papel de momentos canónicos, en consecuencia satisfacen los paréntesis de Poisson

$$[I_i, I_j] = 0 \quad i, j = 1, \dots, n$$

es decir, son  $n$  constantes de movimiento en involución y por lo tanto, en este caso, el sistema es integrable.

## Capítulo 2

# Potencial de Hénon-Heiles parametrizado

El potencial de Hénon-Heiles (HH) está dado por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3, \quad (2.1)$$

donde  $\{x, y\}$  son las coordenadas generalizadas. Es un potencial de oscilador modificado por los dos últimos términos de naturaleza no-lineal. En coordenadas polares,  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ , el potencial HH tiene la forma

$$V(r, \theta) = \frac{1}{2}r^2 + r^3 \left( \sin \theta - \frac{4}{3} \sin^3 \theta \right). \quad (2.2)$$

Evidentemente las coordenadas  $\{x, y\}$  no tienen dimension, son variables adimensionales. Alternativamente, podemos pensar que el potencial HH proviene, como caso particular, de la familia de potenciales

$$V(x, y, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2) + \mu \left[ x^2y - \frac{1}{3}y^3 \right] \quad (2.3)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son parámetros que absorben las dimensiones faltantes. El potencial HH se obtiene cuando los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  toman el valor numérico uno. En cualquier caso, usaremos  $\{x, y\}$  como coordenadas adimensionales.

En este trabajo estamos interesados en estudiar la familia uni-paramétrica de potenciales de tipo Hénon-Heiles de la forma:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y + \epsilon y^3, \quad (2.4)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro real. A este potencial le llamamos potencial de Hénon-Heiles parametrizado (HHP). Para cada valor del parámetro  $\epsilon$  hay un potencial particular. Nos interesa encontrar para que valores del parámetro  $\epsilon$  el sistema correspondiente es integrable, en el sentido definido en el capítulo anterior. Como el potencial (2.4) depende

de dos variables, el sistema tiene dos grados de libertad, necesitamos dos constantes de movimiento que estén en involución para cumplir con el criterio de integrabilidad. Siendo un sistema autónomo, una de esas constantes de movimiento es la energía o función hamiltoniana del sistema; por lo tanto, el problema de integrabilidad se reduce a encontrar para que valores de  $\epsilon$  existe la segunda constante de movimiento.

## 2.1. Puntos de equilibrio del potencial HHP

La fuerza generada por el potencial HHP,  $\vec{F} = -\nabla V(x, y)$ , es

$$\vec{F} = -(x + 2xy)\hat{i} - (y + x^2 + 3\epsilon y^2)\hat{j}. \quad (2.5)$$

Los puntos de equilibrio que tiene el sistema se obtienen igualando a cero las componentes de la fuerza, esto nos lleva al siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2xy &= 0, \\ y + x^2 + 3\epsilon y^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones y obtenemos cuatro soluciones:

$$P_1 \equiv (0, 0), \quad (2.7)$$

$$P_2 \equiv \left(0, -\frac{1}{3\epsilon}\right), \quad (2.8)$$

$$P_3 \equiv \left(\frac{1}{2}\sqrt{2-3\epsilon}, -\frac{1}{2}\right), \quad (2.9)$$

$$P_4 \equiv \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2-3\epsilon}, -\frac{1}{2}\right). \quad (2.10)$$

Queda claro de estas soluciones que para  $\epsilon < 2/3$  hay cuatro puntos de equilibrio, en tanto que para  $\epsilon \geq 2/3$  sólo hay dos,  $P_1$  y  $P_2$ .

Para conocer la naturaleza de los puntos de equilibrio es necesario calcular la matriz hessiana

$$\mathbb{M}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

En cada punto de equilibrio debemos diagonalizar la matriz resultante y encontrar sus eigenvalores. Dependiendo de los eigenvalores el punto puede ser: punto de equilibrio estable, si ambos eigenvalores son positivos; punto de equilibrio inestable, si ambos eigenvalores son negativos; punto silla, si un eigenvalor es positivo y el otro negativo.

Del potencial de Hénon-Heiles parametrizado, ecuación (2.4), se sigue que la matriz hessiana en este caso está dada por

$$\mathbb{M}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 2y & 2x \\ 2x & 1 + 6\epsilon y \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Evaluando en los puntos de equilibrio se sigue que tenemos los siguientes cuatro casos:

1.  $P_1 \equiv (0, 0)$  :

$$\mathbb{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

en este caso los eigenvalores son  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , ambos son positivos y en consecuencia el origen es un punto de equilibrio estable.

2.  $P_2 \equiv (0, -\frac{1}{3\epsilon})$  :

$$\mathbb{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3\epsilon} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

los eigenvalores son:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{2}{3\epsilon}, \quad \lambda_2 = -1,$$

se sigue que para  $\epsilon < 0$  y para  $\epsilon > 3/2$  el primer eigenvalor es positivo y en consecuencia el punto  $P_2$  es un punto silla. En cambio, para  $0 < \epsilon < 3/2$  el eigenvalor  $\lambda_1$  es negativo y  $P_2$  es un punto de equilibrio inestable.

3.  $P_{3,4} \equiv (\pm\frac{1}{2}\sqrt{2-3\epsilon}, -\frac{1}{2})$  :

Para estos puntos podemos trabajar simultáneamente los dos casos, las matrices hessianas son:

$$\mathbb{M}_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & \pm\sqrt{2-3\epsilon} \\ \pm\sqrt{2-3\epsilon} & 1-3\epsilon \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

y recordamos que estos puntos existen sólo para  $\epsilon < 3/4$ .

En este caso los eigenvalores se calculan tomando en cuenta que ante una transformación de semejanza que diagonaliza a la matriz, el determinante y la traza de la matriz permanecen invariantes, esto nos lleva a la pareja de ecuaciones:

$$\lambda_1^\pm \lambda_2^\pm = -2 + 3\epsilon, \quad (2.16)$$

$$\lambda_1^\pm + \lambda_2^\pm = 1 - 3\epsilon. \quad (2.17)$$

Las ecuaciones son independientes del signo  $\pm$ , los eigenvalores son los mismos para los dos puntos y están dados por

$$\lambda_1 = 2 - 3\epsilon, \quad \lambda_2 = -1.$$

Como estos puntos de equilibrio son válidos sólo para  $\epsilon < 2/3$ , entonces el eigenvalor  $\lambda_1$  es positivo y en consecuencia los puntos  $P_3$  y  $P_4$  son puntos silla.

Así, concluimos que el origen es el único punto de equilibrio estable.

Sustituyendo cada uno de los puntos de equilibrio en la expresión para el potencial,

ecuación (2.4), obtenemos:

$$V(0,0) = 0, \quad (2.18)$$

$$V(0, -1/3\epsilon) = \frac{1}{54} \frac{1}{\epsilon^2}, \quad (2.19)$$

$$V(\pm \frac{1}{2} \sqrt{2-3\epsilon}, -1/2) = \frac{1}{8}(1-\epsilon). \quad (2.20)$$

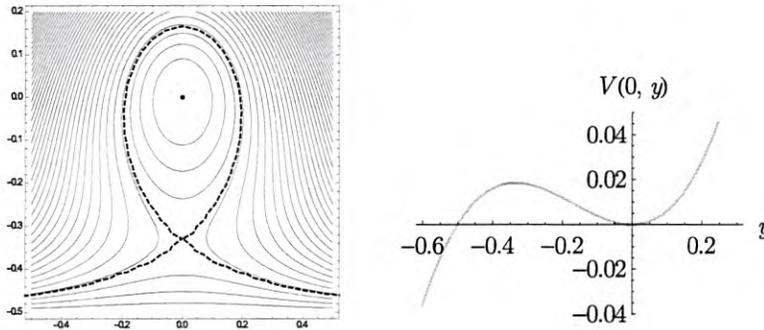
Para  $\epsilon < 2/3$  estas energías son positivas y limitan la energía que puede tener el sistema para que la partícula quede atrapada, y su trayectoria encerrada, en una región que constituye la cuenca de atracción del punto de equilibrio estable, el origen del sistema coordenado.

### 2.1.1. Ejemplos

Hemos visto que el espacio paramétrico del potencial HHP se divide en dos regiones:  $\epsilon > 2/3$ , que sólo tiene dos puntos de equilibrio y  $\epsilon \leq 2/3$  que tiene cuatro. En esta subsección veremos la forma que tiene el potencial revisando un ejemplo ilustrativo para cada caso.

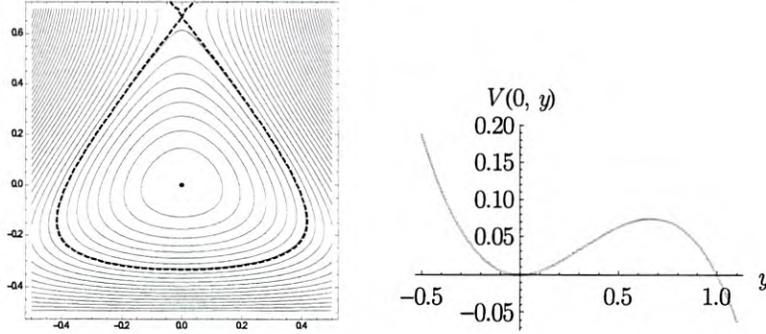
#### 1. $\epsilon = 1$ .

En este caso el potencial tiene dos puntos de equilibrio, en  $(0,0)$  y en  $(0, -1/3)$ , con energías 0 y  $1/54$ , respectivamente. En la siguiente figura, del lado izquierdo graficamos las curvas de nivel de la superficie que representa al potencial y los dos puntos críticos. La curva de nivel que pasa por el punto  $(0, -1/3)$  limita el pozo de potencial que rodea al punto de equilibrio estable  $(0,0)$ , en esta región todas las trayectorias están ligadas al sistema. En la gráfica de la derecha dibujamos el corte de la superficie de potencial a través del plano  $x = 0$ . La figura muestra el pozo de potencial mencionado antes.



#### 2. $\epsilon = -1/2$ .

En este otro caso hay cuatro puntos de equilibrio,  $(0,0)$ ,  $(0, 2/3)$  y  $(\pm \sqrt{7/2}/2, -1/2)$ , con energías: 0,  $2/27$  y  $3/16$ , respectivamente. La siguiente figura, como la anterior, presenta todas las propiedades.



## 2.2. Segunda constante de movimiento

A partir del potencial de HHP, ecuación (2.4), construimos la familia de Hamiltonianas de dos grados de libertad parametrizada por  $\epsilon$

$$\mathcal{H}(p_x, p_y, x, y, \epsilon) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y + \epsilon y^3. \quad (2.21)$$

Para cada valor de  $\epsilon$  hay una función hamiltoniana que describe un sistema autónomo a través de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_x = -x - 2xy, \quad (2.22)$$

$$\dot{p}_y = -y - x^2 - 3\epsilon y^2, \quad (2.23)$$

$$\dot{x} = p_x, \quad (2.24)$$

$$\dot{y} = p_y. \quad (2.25)$$

Claramente, estas ecuaciones son no-lineales. Como fue mencionado anteriormente, siendo un sistema autónomo se conserva la energía,  $\mathcal{H} = E = \text{constante}$ , y en consecuencia para que el sistema sea integrable se requiere solamente la existencia de otra constante de movimiento. En esta sección aplicaremos la condición para que exista la segunda constante de movimiento.

### 2.2.1. Sistema de ecuaciones

Para estudiar la posibilidad de que exista la segunda constante de movimiento, supondremos que dicha constante se describe por una función  $G(p_x, p_y, x, y, \epsilon) \equiv G(\epsilon)$  que, a lo más, es una función cuadrática de los momentos; es decir,  $G(\epsilon)$  es de la forma

$$G(\epsilon) = Ap_x^2 + Bp_y^2 + Cp_xp_y + Dp_x + Ep_y + F, \quad (2.26)$$

donde cada coeficiente,  $A, B, C, D, E$  y  $F$ , es una función que depende sólo de las coordenadas  $\{x, y\}$  y del parámetro  $\epsilon$ .

Ahora calculamos el paréntesis de Poisson de la función (2.26) con la hamiltoniana

(2.21)

$$\begin{aligned}
[G, \mathcal{H}] &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} - \frac{\partial G}{\partial p_x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\
&+ \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} - \frac{\partial G}{\partial p_y} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Sustituyendo las derivadas de  $G(\epsilon)$  y  $\mathcal{H}$  tenemos

$$\begin{aligned}
[G, \mathcal{H}] &= \left[ \frac{\partial A}{\partial x} p_x^2 + \frac{\partial B}{\partial x} p_y^2 + \frac{\partial C}{\partial x} p_x p_y \frac{\partial D}{\partial x} p_x + \frac{\partial E}{\partial x} p_y + \frac{\partial F}{\partial x} \right] p_x \\
&- [2A p_x + C p_y + D] (x + 2xy) \\
&+ \left[ \frac{\partial A}{\partial y} p_x^2 + \frac{\partial B}{\partial y} p_y^2 + \frac{\partial C}{\partial y} p_x p_y + \frac{\partial D}{\partial y} p_x + \frac{\partial E}{\partial y} p_y + \frac{\partial F}{\partial y} \right] p_y \\
&- [2B p_y + C p_x + E] (y + x^2 + 3\epsilon y^2).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Después de desarrollar y agrupar las diferentes potencias de los momentos queda:

$$\begin{aligned}
[G, \mathcal{H}] &= \frac{\partial A}{\partial x} p_x^3 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x} \right) p_x^2 p_y + \left( \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \right) p_x p_y^2 + \\
&\frac{\partial B}{\partial y} p_y^3 + \frac{\partial D}{\partial x} p_x^2 + \frac{\partial E}{\partial y} p_y^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial x} \right) p_x p_y + \\
&\left[ 2A(-x - 2xy) + C(-y - x^2 - 3\epsilon y^2) + \frac{\partial F}{\partial x} \right] p_x + \\
&\left[ C(-x - 2xy) + 2B(-y - x^2 - 3\epsilon y^2) + \frac{\partial F}{\partial y} \right] p_y + \\
&D(-x - 2xy) + E(-y - x^2 - 3\epsilon y^2).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

De acuerdo con lo que vimos en el capítulo anterior, sección 1.2, la condición para que  $G(\epsilon)$  sea constante de movimiento es que su paréntesis de Poisson con la hamiltoniana sea cero. Considerando ésto, de la ecuación (2.29) obtenemos un polinomio con potencias de  $p_x$  y  $p_y$  igualado a cero, la independencia lineal de las distintas potencias de los momentos nos dice que sus coeficientes deben ser cero, esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones

diferenciales parciales de primer orden en los coeficientes  $A, B, C, D, E$  y  $F$ :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad (2.36)$$

$$D(x + 2xy) + E(y + x^2 + 3\epsilon y^2) = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - (2Ax + 4Axy + Cy + Cx^2 + 3C\epsilon y^2) = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - (Cx + 2Cxy + 2By + 2Bx^2 + 6B\epsilon y^2) = 0. \quad (2.39)$$

El sistema de ecuaciones se divide en tres grupos: las ecuaciones (2.30-2.33) determinan la forma de  $A, B$  y  $C$ , las ecuaciones (2.34-2.37) nos determinan la forma de  $E$  y  $D$ , en tanto que las ecuaciones (2.38) y (2.39) determinan la forma de  $F$ .

Con la solución de este sistema de diez ecuaciones podremos construir la segunda constante de movimiento de un sistema con potencial de Hénon-Heiles parametrizado.

### 2.2.2. Solución

De la ecuación (2.30) se sigue que la función  $A$  depende sólo de la variable  $y$ , en tanto que de la ecuación (2.32) tenemos que  $B$  es función solamente de la variable  $x$ , es decir

$$A = g(y), \quad (2.40)$$

$$B = f(x). \quad (2.41)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (2.31) y (2.33) obtenemos

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -g'(y), \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -f'(x), \quad (2.43)$$

donde la prima sobre la función indica derivada con respecto a la variable correspondiente.

Integrando estas últimas ecuaciones obtenemos la función  $C$  en las formas

$$C = -g'(y)x + \alpha(y), \quad (2.44)$$

$$C = -f'(x)y + \beta(x), \quad (2.45)$$

donde  $\alpha(y)$  y  $\beta(x)$  son funciones arbitrarias, resultado del proceso de integración parcial.

Derivando con respecto a la variable  $y$  cada una de las ecuaciones (2.44) y (2.45) e igualando los resultados, nos queda

$$-g''(y)x + \alpha'(y) = -f'(x), \quad (2.46)$$

de aquí, como el lado derecho es una función que sólo depende de  $x$ , tenemos que:

$$g''(y) = c_1, \quad (2.47)$$

$$\alpha'(y) = c_0, \quad (2.48)$$

$$f'(x) = c_1x - c_0, \quad (2.49)$$

con  $c_0$  y  $c_1$  constantes arbitrarias. Integrando estas ecuaciones obtenemos:

$$g(y) = \frac{1}{2}c_1y^2 + c_2y + c_3, \quad (2.50)$$

$$\alpha(y) = c_0y + c_4, \quad (2.51)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}c_1x^2 - c_0x + c_5, \quad (2.52)$$

donde  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  y  $c_5$  son, de nuevo, constantes arbitrarias. Sustituyendo estos resultados en (2.40), (2.41) y (2.44) encontramos:

$$A = \frac{1}{2}c_1y^2 + c_2y + c_3, \quad (2.53)$$

$$B = \frac{1}{2}c_1x^2 - c_0x + c_5, \quad (2.54)$$

$$C = -c_1xy - c_2x + c_0y + c_4. \quad (2.55)$$

Hemos encontrado la solución al primer grupo de ecuaciones, pasemos a integrar el segundo grupo. De las ecuaciones (2.34) y (2.36) tenemos que  $D$  es una función sólo de la variable  $y$ , en tanto que la función  $E$  depende sólo de la variable  $x$ , esto es

$$D(y) = \gamma(y), \quad (2.56)$$

$$E(x) = \delta(x), \quad (2.57)$$

donde  $\gamma(y)$  y  $\delta(x)$  son funciones arbitrarias.

Sustituyendo en (2.35) tenemos

$$\gamma'(y) = -\delta'(x), \quad (2.58)$$

como cada lado de la ecuación depende en una variable diferente, la igualdad se cumple

sólo si cada función es constante, esto es

$$\gamma'(y) = c_6, \quad \delta'(x) = -c_6,$$

con  $c_6$  constante arbitraria. Integrando estas ecuaciones y sustituyendo en (2.56) y (2.57) resulta

$$D(y) = c_6 y + c_7, \quad (2.59)$$

$$E(x) = -c_6 x + c_8, \quad (2.60)$$

con  $c_7$  y  $c_8$  constantes arbitrarias.

Ahora sustituimos los resultados anteriores en la ecuación (2.37) y agrupamos para tener la identidad

$$c_6 [-x^3 + (2 - 3\epsilon)xy^2] + c_7(x + 2xy) + c_8(y + x^2 + 3\epsilon y^2) = 0. \quad (2.61)$$

Ésta es una combinación lineal igualada a cero de polinomios independientes, ya que contienen potencias diferentes, por lo que cada coeficiente debe ser cero

$$c_6 = 0, \quad c_7 = 0, \quad c_8 = 0,$$

y, con las ecuaciones (2.59) y (2.60), este resultado nos lleva a:

$$D(y) = 0, \quad (2.62)$$

$$E(x) = 0. \quad (2.63)$$

Ahora que sabemos que los términos que acompañan a las funciones  $D$  y  $E$  no entran en la constante de movimiento, resolvamos el tercer grupo de ecuaciones usando las soluciones encontradas, ecuaciones (2.53-2.55). Sustituyendo éstas en las ecuaciones (2.38) y (2.39), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} = & 2x \left( \frac{1}{2}c_1 y^2 + c_2 y + c_3 \right) + 4xy \left( \frac{1}{2}c_1 y^2 + c_2 y + c_3 \right) + \\ & y(-c_1 xy - c_2 x + c_0 y + c_4) + x^2(-c_1 xy - c_2 x + c_0 y + c_4) + \\ & 3\epsilon y^2(-c_1 xy - c_2 x + c_0 y + c_4), \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} = & x(-c_1 xy - c_2 x + c_0 y + c_4) + 2xy(-c_1 xy - c_2 x + c_0 y + c_4) + \\ & 2y \left( \frac{1}{2}c_1 x^2 - c_0 x + c_5 \right) + 2x^2 \left( \frac{1}{2}c_1 x^2 - c_0 x + c_5 \right) + \\ & 6\epsilon y^2 \left( \frac{1}{2}c_1 x^2 - c_0 x + c_5 \right). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Reduciendo las expresiones queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} = & (c_2 + 4c_3)xy + 2c_3x + (2c_1 - 3\epsilon c_1)xy^3 + \\ & (4c_2 - 3\epsilon c_2)xy^2 + (c_0 + 3\epsilon c_4)y^2 + c_4y - c_1x^3y - c_2x^3 + \\ & c_0x^2y + c_4x^2 + 3\epsilon c_0y^3 \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} = & (2c_5 - c_2)x^2 + (2c_4 - c_0)xy + c_4x + \\ & (3\epsilon c_1 - 2c_1)x^2y^2 - 2c_2x^2y + (2c_0 - 6\epsilon c_0)xy^2 + \\ & c_1x^4 - 2c_0x^3 + 6c_5\epsilon y^2 + 2c_5y. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Integrando (2.66) tenemos

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2}(c_2 + 4c_3)x^2y + c_3x^2 + \frac{1}{2}(2c_1 - 3\epsilon c_1)x^2y^3 + \\ & \frac{1}{2}(4c_2 - 3\epsilon c_2)x^2y^2 + (c_0 + 3\epsilon c_4)xy^2 + c_4xy - \frac{1}{4}c_1x^4y - \frac{1}{4}c_2x^4 + \\ & \frac{1}{3}c_0x^3y + \frac{1}{3}c_4x^3 + 3\epsilon c_0xy^3 + \mu(y), \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde  $\mu(y)$  es una función arbitraria, resultado de la integración parcial. Derivando esta expresión con respecto a  $y$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} = & \frac{1}{2}(c_2 + 4c_3)x^2 + \frac{3}{2}(2c_1 - 3\epsilon c_1)x^2y^2 + \\ & (4c_2 - 3\epsilon c_2)x^2y + 2(c_0 + 3\epsilon c_4)xy + c_4x - \frac{1}{4}c_1x^4 + \\ & \frac{1}{3}c_0x^3 + 9\epsilon c_0xy^2 + \mu'(y), \end{aligned} \quad (2.69)$$

y comparando este resultado con (2.67) llegamos a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c_2 + 2c_3 &= 2c_5 - c_2, \\ 3c_1 - \frac{9}{2}\epsilon c_1 &= 3\epsilon c_1 - 2c_1, \\ 4c_2 - 3\epsilon c_2 &= -2c_2, \\ 2c_0 + 6\epsilon c_4 &= 2c_4 - c_0, \\ -\frac{1}{4}c_1 &= c_1, \\ \frac{1}{3}c_0 &= -2c_0, \\ 9\epsilon c_0 &= 2c_0 - 6\epsilon c_0, \\ \mu'(y) &= 6c_5\epsilon y^2 + 2c_5y, \end{aligned}$$

de aquí concluimos lo siguiente:

$$c_0 = 0, \quad (2.70)$$

$$c_1 = 0, \quad (2.71)$$

$$(2 - \epsilon)c_2 = 0, \quad (2.72)$$

$$(1/3 - \epsilon)c_4 = 0, \quad (2.73)$$

$$c_5 = \frac{3}{4}c_2 + c_3. \quad (2.74)$$

Por su parte, integrando la igualdad para la derivada de la función  $\mu(y)$  y sustituyendo la constante  $c_5$  nos lleva a

$$\mu(y) = \left( \frac{3}{2}\epsilon y^3 + \frac{3}{4}y^2 \right) c_2 + (2\epsilon y^3 + y^2)c_3. \quad (2.75)$$

Ahora podemos escribir la función  $F$ . Sustituyendo estos resultados en la expresión (2.68), resulta

$$F = c_2 \left[ \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}(4 - 3\epsilon)x^2y^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}\epsilon y^3 + \frac{3}{4}y^2 \right] + c_3 [2x^2y + x^2 + 2\epsilon y^3 + y^2] + c_4 \left[ 3\epsilon xy^2 + xy + \frac{1}{3}x^3 \right]. \quad (2.76)$$

Finalmente, sustituyendo los resultados en las expresiones (2.53-2.55) obtenemos las funciones  $A, B$  y  $C$ ,

$$A = c_2y + c_3, \quad (2.77)$$

$$B = \frac{3}{4}c_2 + c_3, \quad (2.78)$$

$$C = -c_2x + c_4. \quad (2.79)$$

De esta forma hemos obtenido los coeficientes  $A, B, C, D, E$  y  $F$ , necesarios para construir la segunda constante de movimiento. Dichos coeficientes quedan en términos de tres constantes arbitrarias:  $c_2, c_3$  y  $c_4$ .

### 2.2.3. Construcción de la constante de movimiento

Obtenidas las funciones  $A, B, C, D, E$  y  $F$  las sustituimos en la expresión (2.26) y agrupamos los términos que multiplican a cada una de las tres constantes  $c_2, c_3$  y  $c_4$  para tener la segunda constante de movimiento en la forma

$$G(\epsilon) = c_2 \left[ yp_x^2 + \frac{3}{4}p_y^2 - xp_xp_y + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}(4 - 3\epsilon)x^2y^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}\epsilon y^3 + \frac{3}{4}y^2 \right] + c_3 [p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2 + 2x^2y + 2\epsilon y^3] + c_4 \left[ p_xp_y + xy + \frac{1}{3}x^3 + 3\epsilon xy^2 \right]. \quad (2.80)$$

Hay que notar que la cantidad entre paréntesis que multiplica a la constante  $c_3$  es el doble de la energía o función hamiltoniana. Cancelando este término queda la constante de movimiento independiente:

$$G(\epsilon) = c_2 \left[ yp_x^2 + \frac{3}{4}p_y^2 - xp_xp_y + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}(4 - 3\epsilon)x^2y^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}\epsilon y^3 + \frac{3}{4}y^2 \right] \\ + c_4 \left[ p_xp_y + xy + \frac{1}{3}x^3 + 3\epsilon xy^2 \right]. \quad (2.81)$$

Esta constante de movimiento queda en función del parámetro  $\epsilon$  y de las constantes arbitrarias  $c_2$  y  $c_4$ ; sin embargo, estas últimas constantes están obligadas a cumplir las ecuaciones (2.72) y (2.73).

#### 2.2.4. Integrabilidad del sistema HHP

Las constantes  $c_2$  y  $c_4$  están sujetas a las constricciones dadas por las ecuaciones:

$$(2 - \epsilon)c_2 = 0, \quad (2.82)$$

$$(1/3 - \epsilon)c_4 = 0. \quad (2.83)$$

De aquí se sigue que existen tres casos distintos:

1.  $\epsilon = 2$ .

De la condición (2.82) se sigue que  $c_2 \neq 0$  y de la condición (2.83) tenemos  $c_4 = 0$ . Por lo tanto en este caso existe una segunda constante de movimiento dada por:

$$G = yp_x^2 + \frac{3}{4}p_y^2 - xp_xp_y + \frac{1}{2}x^2y - x^2y^2 - \frac{1}{4}x^4 + 3y^3 + \frac{3}{4}y^2 \quad (2.84)$$

y en consecuencia, para  $\epsilon = 2$ , el sistema es integrable.

2.  $\epsilon = 1/3$ .

Ahora de la condición (2.82) tenemos  $c_2 = 0$  y de (2.83) se sigue que  $c_4 \neq 0$ . Entonces en este caso existe una segunda constante de movimiento dada por:

$$G = p_xp_y + xy + \frac{1}{3}x^3 + xy^2 \quad (2.85)$$

y de nuevo, para  $\epsilon = 1/3$ , el sistema es integrable.

3.  $\epsilon \neq 2$  y  $\epsilon \neq 1/3$ .

De las condiciones (2.82) y (2.83) se sigue que, para cualquier  $\epsilon$  diferente de 2 y 1/3, las constantes  $c_2$  y  $c_4$  son cero y por lo tanto no existe segunda constante de movimiento. En este caso el sistema es candidato a presentar una dinámica irregular.

En los siguientes capítulos estudiaremos la dinámica de estos tres casos.

## Capítulo 3

# Movimientos regulares en el potencial HHP

En este capítulo analizaremos los casos integrables del potencial HHP obtenidos en el capítulo anterior. Primero revisaremos el caso  $\epsilon = 1/3$  y después el caso  $\epsilon = 2$ . Obtendremos las ecuaciones de movimiento para cada caso y las integraremos numéricamente con ayuda del software *Wolfram Mathematica* y el resultado será la trayectoria en el espacio fase; pero, con el fin de visualizar el movimiento, graficaremos la trayectoria física en el plano  $XY$ . La integrabilidad del sistema se reflejará en las trayectorias a través de la regularidad de las mismas; por ello, en la última parte de cada sección incluimos las series de tiempo de las coordenadas  $x(t)$  y  $y(t)$ .

### 3.1. Ecuaciones de movimiento

En esta sección repasaremos algunos resultados obtenidos en el capítulo anterior. La hamiltoniana del sistema HHP está dada por la ecuación (2.21) y las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Hamilton, dadas por (2.22-2.25). Integrando dichas ecuaciones, con condiciones iniciales específicas y para un valor de  $\epsilon$  en particular, podemos encontrar la trayectoria del sistema. Para resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento usamos un valor fijo de la energía, la cual coincide con la hamiltoniana, que queda determinada por las condiciones iniciales, esto es

$$\frac{1}{2}(p_{x0}^2 + p_{y0}^2) + \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2) + x_0^2 y_0 + \epsilon y_0^3 \equiv E. \quad (3.1)$$

De la expresión para la energía, podemos obtener el momento  $p_y$ , queda:

$$p_y = \pm \sqrt{2E - p_x^2 - x^2 - y^2 - x^2 y - \epsilon y^3}. \quad (3.2)$$

Para llevar a cabo el cálculo numérico, escogeremos como condiciones iniciales  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $p_{x0}$  y un valor para la energía  $E$ ; entonces, el valor inicial de  $p_y$  queda determinado por la expresión anterior.

En general, para sistemas conservativos con  $n$  grados de libertad, la hipersuperficie de la energía tiene dimension  $2n - 1$ ; entonces, para el sistema HHP la trayectoria fase

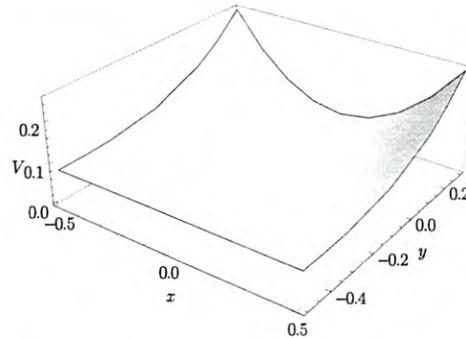
se encuentra en una variedad de tres dimensiones embebida en un espacio fase de cuatro dimensiones.

### 3.2. Trayectorias regulares: caso $\epsilon = 1/3$

Para el caso  $\epsilon = 1/3$ , sabemos que el sistema posee cuatro puntos de equilibrio. El origen de coordenadas es el único punto de equilibrio estable y el resto son inestables, tal y como se vió en la sección 2.1 del capítulo anterior. En este caso, el potencial está dado por la expresión

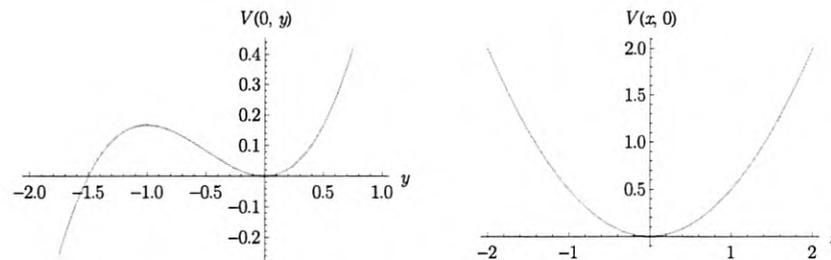
$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y + \frac{1}{3}y^3. \quad (3.3)$$

En la Figura 3.1 puede apreciarse la superficie del potencial.



**Figura 3.1:** Superficie de potencial de Hénon-Heiles parametrizado con parámetro  $\epsilon = 1/3$ .

Con el propósito de visualizar aún más el potencial, en la Figura 3.2 hemos graficado los cortes del potencial por los planos que pasan por  $x = 0$  y  $y = 0$ . Estos cortes muestran claramente el mínimo del potencial.



**Figura 3.2:** Perfil del potencial de Hénon-Heiles parametrizado con  $\epsilon = 1/3$ . El corte de la superficie de potencial se realiza con el plano  $x = 0$ , figura izquierda, y con el plano  $y = 0$ , figura derecha. Las figuras muestran el mínimo del potencial en  $(0, 0)$ .

Los puntos de equilibrio se obtienen de las ecuaciones (2.8)-(2.10) y son:  $(0, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1/2, -1/2)$  y  $(-1/2, -1/2)$ . Por su parte, los valores que toma el potencial en los puntos

de equilibrio están dados por (2.18)-(2.20):

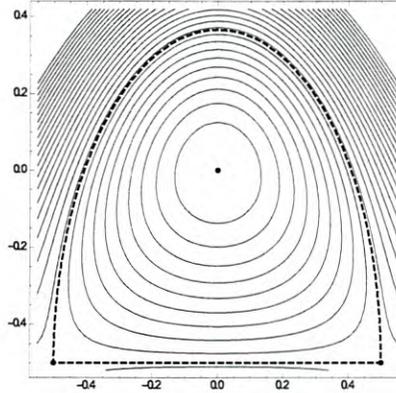
$$V(0,0) = 0, \quad (3.4)$$

$$V(0,-1) = 1/6, \quad (3.5)$$

$$V(\pm 1/2, -1/2) = 1/12. \quad (3.6)$$

Note que la energía en los puntos  $(\pm 1/2, -1/2)$  es menor que en el punto  $(0, -1)$ ; por lo tanto, para energías menores que  $E = 1/12$  la partícula queda ligada al punto de equilibrio estable.

La región de atrapamiento de la partícula es una región limitada por la curva de nivel que corresponde a los puntos donde la superficie de energía toma el valor  $E = 1/12$ . En la Figura 3.4 graficamos las curvas de nivel del potencial. La figura muestra la región de atrapamiento delimitada por la línea punteada.



**Figura 3.3:** Curvas de nivel del potencial de Hénon-Heiles parametrizado con parámetro  $\epsilon = 1/3$ . La línea punteada delimita la región de atrapamiento de la partícula. El cuarto punto de equilibrio se encuentra en  $(0, -1)$ , fuera del intervalo de graficación.

Ahora que tenemos una idea acerca del potencial del sistema cerca del punto de equilibrio estable, hay que obtener las trayectorias integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento.

Para  $\epsilon = 1/3$ , las ecuaciones de Hamilton son:

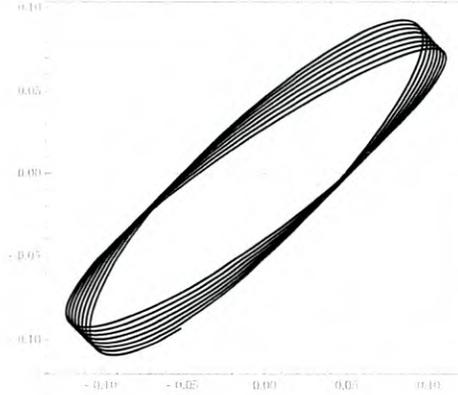
$$\dot{p}_x = -x - 2xy, \quad (3.7)$$

$$\dot{p}_y = -y - x^2 - y^2, \quad (3.8)$$

$$\dot{x} = p_x, \quad (3.9)$$

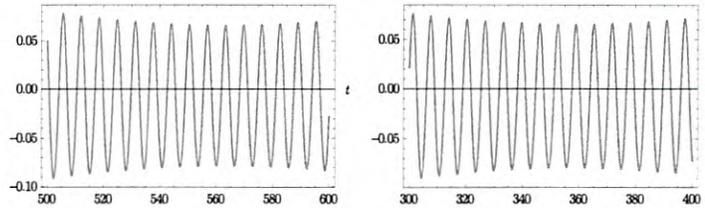
$$\dot{y} = p_y. \quad (3.10)$$

Debido a los términos cuadráticos, éste es un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineal y acoplado. La integración de las cuatro ecuaciones nos da la trayectoria en el espacio fase. Su proyección en el espacio de configuración nos proporciona la trayectoria física del sistema. La exploración numérica realizada para diferentes energías en el intervalo  $0 < E < 1/12$  muestra que todas las trayectorias son regulares y muy similares una a otra, en la Figura 3.4 graficamos un ejemplo del tipo de trayectoria.



**Figura 3.4:** Trayectoria del sistema HHP con  $\epsilon = 1/3$ , energía  $E = 0.01$  y condiciones iniciales  $x_0 = 0.05$ ,  $y_0 = 0.001$  y  $p_{x0} = 0.085$ .

Por otro lado, el comportamiento regular de  $x(t)$  y  $y(t)$  se puede observar al graficar cada coordenada contra el tiempo. En la Figura 3.5 hemos obtenido estas series de tiempo. Hay que observar en ellas una envolvente, resultado de la periodicidad de cada coordenada. Si la razón de los periodos de una coordenada a la otra es un número racional entonces la trayectoria es cerrada. En nuestro caso, como se observa de la figura anterior, la trayectoria no es cerrada.



**Figura 3.5:** Series de tiempo para  $x(t)$  (izquierda) y  $y(t)$  (derecha), con  $300 \leq t \leq 400$ . Estas figuras corresponden a las coordenadas de la trayectoria de la Figura 3.4.

### 3.3. Trayectorias regulares: caso $\epsilon = 2$

Para  $\epsilon = 2$  el potencial tiene sólo dos puntos de equilibrio:  $(0, 0)$  y  $(0, -1/6)$ , los cuales son estable e inestable, respectivamente. El potencial tiene la expresión

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y + 2y^3, \quad (3.11)$$

y se puede apreciar en la Figura 3.6.

De la misma forma que en el caso anterior, en la Figura 3.7 mostramos los cortes de la superficie de potencial con los planos que pasan por  $x = 0$  y  $y = 0$ . Ambos cortes presentan un mínimo que corresponde al punto de equilibrio estable, punto  $(0, 0)$ .

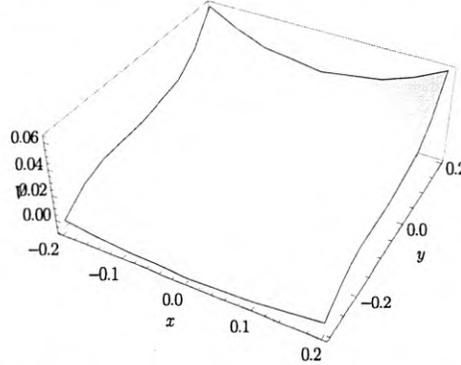


Figura 3.6: Superficie de potencial HHP con parámetro  $\epsilon = 2$ .

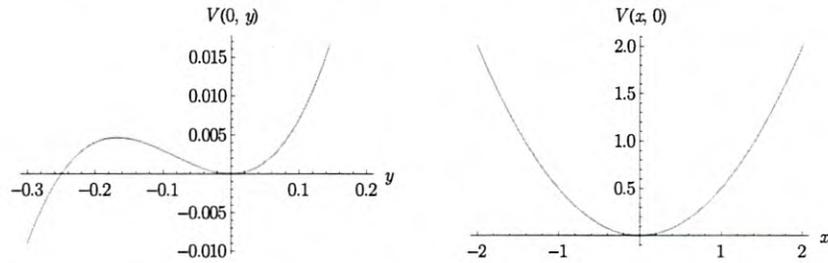


Figura 3.7: Perfil del potencial HHP con  $\epsilon = 2$ . La superficie de potencial es cortada por el plano que pasa por  $x = 0$ , gráfica izquierda, y por el plano  $y = 0$ , gráfica derecha. Las figuras muestran el mínimo del potencial en  $(0, 0)$ .

Ahora sustituimos los puntos de equilibrio en el potencial y obtenemos los valores

$$\begin{aligned} V(0, 0) &= 0, \\ V(0, -1/6) &= 1/216, \end{aligned} \tag{3.12}$$

el valor  $1/6$  corresponde al valor máximo que puede tomar la energía para que la trayectoria quede atrapada en el pozo del potencial. El pozo de potencial se encuentra entre los valores de la energía:  $0$  y  $1/6$ .

Las curvas de nivel del potencial (3.11) se muestra en la Figura 3.8. En este caso, si la partícula tiene una energía menor a  $E = 1/6$ , quedará atrapada en la región vecina al punto de equilibrio estable, es decir, dentro de la region que encierra la línea punteada de la Figura 3.8.

Para el potencial (3.11) las ecuaciones de movimiento son:

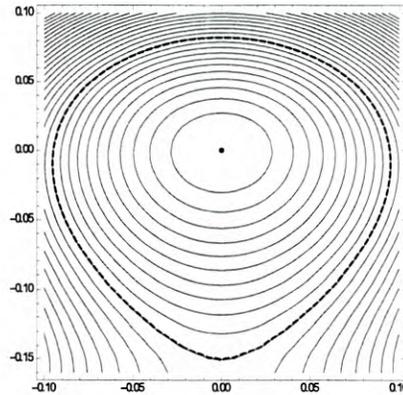
$$\dot{p}_x = -x - 2xy, \tag{3.13}$$

$$\dot{p}_y = -y - x^2 - 6y^2, \tag{3.14}$$

$$\dot{x} = p_x, \tag{3.15}$$

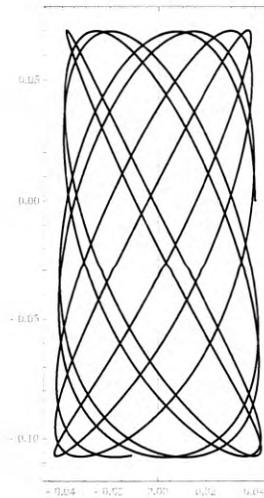
$$\dot{y} = p_y. \tag{3.16}$$

Como en el caso anterior, las trayectorias las obtenemos integrando numéricamente



**Figura 3.8:** Curvas de nivel del potencial HHP con  $\epsilon = 2$ . La línea punteada delimita la región donde la partícula queda atrapada y toca la energía máxima permitida.

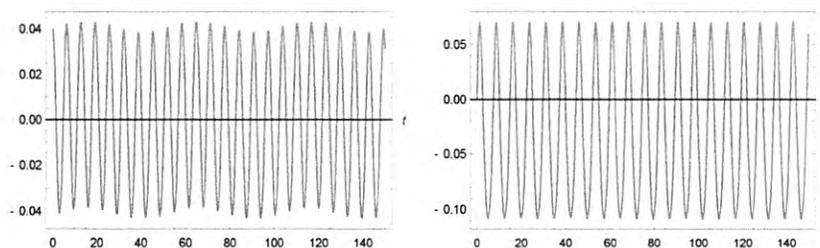
estas ecuaciones para un valor fijo de la energía y condiciones iniciales especificadas por los valores:  $x_0$ ,  $y_0$  y  $p_{x0}$ . La trayectoria física de la partícula se encuentra en el espacio de configuración, plano  $XY$ . De nuevo, la exploración numérica realizada mostró que las trayectorias son regulares y similares una a otra. En la Figura 3.9 graficamos, como ejemplo, la trayectoria física que tiene el sistema para:  $E = 0.004$ ,  $x_0 = 0.04$ ,  $y_0 = 0.0001$  y  $p_{x0} = 0$ .



**Figura 3.9:** Trayectoria física de una partícula en el potencial HHP con  $\epsilon = 2$  y con condiciones iniciales  $x_0 = 0.04$ ,  $y_0 = 0.0001$  y  $p_{x0} = 0.0$ . En este caso la energía tiene el valor  $E = 0.004$ .

Como puede observarse, al igual que en el caso  $\epsilon = 1/3$ , estas trayectorias, además de regulares, no son cerradas.

Por último, en la Figura 3.10 graficamos las series de tiempo de las coordenadas  $x(t)$  y  $y(t)$ . Estas gráficas muestran la regularidad en el tiempo de cada coordenada.



**Figura 3.10:** Series de tiempo para  $x(t)$  (izquierda) y  $y(t)$  (derecha). Estas figuras corresponden a la trayectoria mostrada en la Figura 3.9.

En el siguiente capítulo revisaremos el tipo de trayectorias que se obtienen en el potencial HHP cuando  $\epsilon$  difiere de los valores  $1/3$  y  $2$ .

# Capítulo 4

## Movimientos irregulares en el potencial HHP

En este capítulo revisaremos un ejemplo del tipo de movimiento que se espera en los casos en que no existe la segunda constante de movimiento en el potencial de Hénon-Heiles parametrizado. Consideraremos el caso particular  $\epsilon = -1/3$  porque éste corresponde al potencial original de Hénon-Heiles. Los movimientos a los que lleva este potencial son caóticos por lo que, brevemente, en la primera sección, revisaremos los conceptos básicos de la teoría de Caos en el contexto de los sistemas dinámicos. Después, se analizará el caso no integrable  $\epsilon = -1/3$  con ayuda de las herramientas descritas dejando una idea del movimiento caótico que ocurre cuando el sistema no es integrable.

### 4.1. Sistemas dinámicos

En general, un sistema dinámico se describe mediante  $n$  variables reales independientes  $x_i(t)$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , las cuales constituyen el estado del sistema  $\vec{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ , para cada  $t$ , en un espacio abstracto de  $n$  dimensiones llamado *espacio fase* y que están en función de la única variable independiente: el tiempo  $t$ . La dinámica del sistema está gobernada por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t; \epsilon) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1)$$

Generalmente, el lado derecho de (4.1) es una función no-lineal llamada *campo de velocidades*; por su parte,  $\epsilon$  indica la posibilidad de que el sistema tenga uno o más *parámetros de control*. El parámetro de control es una constante del cual depende el sistema dinámico y cuyo valor puede ser fijado a voluntad, para cada valor del parámetro de control tenemos un sistema diferente. A menudo, el parámetro de control puede cambiar drásticamente la dinámica del sistema. Cuando la función  $f_i(\vec{x}, t; \epsilon)$  no depende explícitamente del tiempo se dice que el sistema es *autónomo*, en caso contrario se dice que el sistema es *no autónomo*.

La función  $f_i$  está definida en todo el espacio fase y por simplicidad suponemos que es analítica en todas sus variables, lo que significa que puede ser expresada como una serie convergente en cada componente de  $\vec{x}$ . Como  $f_i$  es analítica, la existencia y unicidad de

las soluciones de (4.1), para una condición inicial dada  $\{x_1(0), \dots, x_k(0)\}$  está garantizada por los teoremas clásicos de existencia y unicidad de la teoría de ecuaciones diferenciales.

#### 4.1.1. Sistemas hamiltonianos como sistemas dinámicos

En la mecánica clásica existen dos tipos de sistemas: disipativos y conservativos. El primero se refiere a un sistema mecánico que no conserva la energía, tal como el péndulo amortiguado, mientras que el segundo se refiere a los sistemas que sí conservan la energía. Dichos sistemas se describen mediante ecuaciones diferenciales, ecuaciones de Lagrange o ecuaciones de Hamilton. Los sistemas disipativos, al contrario de los conservativos, no conservan el volumen del espacio fase; por ejemplo, si consideramos una colección de sistemas idénticos con condiciones iniciales que ocupan una región del espacio fase, conforme pasa el tiempo, esa región se contrae. En este capítulo sólo trataremos sistemas conservativos, tal como el sistema de Hénon-Heiles. Para un sistema conservativo de  $n$  grados de libertad descrito por las coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$  y sus momentos canónicos asociados  $p_1, \dots, p_n$ , las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Hamilton, dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, & i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.\end{aligned}$$

Si las coordenadas y los momentos se combinan en un vector de  $2n$  dimensiones  $\vec{x} = (q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)^T$ , donde el superíndice  $T$  significa transpuesto, entonces las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir en forma matricial, que tiene la forma (4.1), como

$$\dot{\vec{x}} = \mathbb{J} \nabla \mathcal{H}. \quad (4.2)$$

con el gradiente de la función hamiltoniana definido como

$$\nabla \mathcal{H} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n}; \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} \right)^T \quad (4.3)$$

y la matriz jacobiana de  $2n \times 2n$  es

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & +\mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

donde  $\mathbb{I}$  denota la matriz identidad. La matriz (4.4) tiene las propiedades

$$\mathbb{J}^{-1} = \mathbb{J}^T = -\mathbb{J}, \quad \mathbb{J}^2 = -\mathbb{I}, \quad \det \mathbb{J} = 1.$$

Para una condición inicial  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ , la trayectoria u órbita  $\vec{x}(t)$  es única, gracias a los teoremas de existencia y unicidad de la solución establecidos por la teoría de ecuaciones diferenciales.

La conexión entre la solución  $\vec{x}(t)$  y el punto inicial  $\vec{x}_0$  se puede considerar un mapeo

$\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  denotado como

$$\Phi_t(\vec{x}_0) = \vec{x}(t). \quad (4.5)$$

donde  $\Phi_t$  es un vector de  $2n$  componentes. Este mapeo que depende del tiempo, se le conoce como *flujo* del campo vectorial  $\vec{f}$ . Para  $t = 0$ , el flujo se reduce al mapeo unidad

$$\Phi_{t=0} = \mathbb{I}. \quad (4.6)$$

Además, para sistemas autónomos, tenemos que para dos tiempos consecutivos se cumple que

$$\Phi_{t_1}(\Phi_{t_2}) = \Phi_{t_1+t_2} \quad (4.7)$$

Para entender bien un sistema dinámico es necesario, más no suficiente, analizar las trayectorias individuales. En la siguiente subsección regresaremos a la teoría de los sistemas dinámicos para analizar los puntos críticos que representan características de las trayectorias del sistema.

### 4.1.2. Puntos críticos

En teoría de sistemas dinámicos, un sistema puede ser estable, inestable o caótico. Para saberlo debemos analizar los llamados puntos críticos, que son aquellos puntos donde el campo de velocidades es cero; entonces, el sistema, originalmente colocado en un punto crítico, no cambia su estado y permanece en ese punto hasta que es perturbado por un agente externo. Los puntos críticos se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

La estabilidad del sistema en el punto crítico se puede clasificar según el valor que tengan los eigenvalores de la matriz jacobiana para el sistema, como veremos a continuación.

Para conocer la naturaleza del punto crítico estudiamos las trayectorias  $\vec{x}(t)$  en la vecindad de dicho punto, que denotaremos con  $\vec{x}_c$ . Consideremos una trayectoria  $\vec{x}(t)$  y denotemos su diferencia al punto crítico con  $\vec{\zeta}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_c$ . Se sigue de la ecuación (4.1) que

$$\dot{\vec{\zeta}}(t) = \vec{f}(\vec{x}). \quad (4.9)$$

Como la trayectoria está en la vecindad de  $\vec{x}_c$ , la magnitud de  $\vec{\zeta}$  es pequeña. Al considerar el desarrollo de Taylor de  $f_k(\vec{x})$  alrededor del punto crítico es suficiente con tomar los términos de más bajo orden. Queda una ecuación de movimiento linealizada, que se escribe como

$$\dot{\vec{\zeta}}(t) = \mathbb{M}\vec{\zeta}(t), \quad (4.10)$$

donde  $\mathbb{M}$  es la matriz jacobiana con elementos dados por:

$$\mathbb{M}_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}_0}. \quad (4.11)$$

Contrario a la ecuación no lineal (4.1), la solución del problema linealizado y autónomo

es en principio simple y analítica. Para ilustrar la idea, consideremos el caso unidimensional. La matriz jacobiana sólo consta de un elemento, digamos  $\mu$ , y la ecuación (4.10) tiene como solución

$$\zeta(t) = e^{\mu t} \zeta(0). \quad (4.12)$$

El carácter de esta solución está determinado por el signo de  $\mu$ : Para  $\mu < 0$ ,  $x_0$  es un punto de equilibrio estable, debido a que las pequeñas perturbaciones decaen exponencialmente. Para  $\mu > 0$ ,  $x_0$  es un punto de equilibrio inestable, debido a que los pequeños desplazamientos de la posición de equilibrio crecen exponencialmente. Por último, para  $\mu = 0$ ,  $x_0$  es un punto de equilibrio neutro.

Para el caso de varias dimensiones, construimos los vectores  $\vec{u}(t)$ , normalizados a uno, que tienen la propiedad de que todas las componentes muestran la misma dependencia exponencial en el tiempo

$$\vec{u}(t) = e^{\mu t} \vec{u}_0, \quad (4.13)$$

con  $\vec{u}_0$  independiente del tiempo. Usando la ecuación (4.10), llegamos a que  $\vec{u}$  es solución del problema de eigenvalores

$$\mathbb{M}\vec{u} = \mu\vec{u}. \quad (4.14)$$

Este sistema de ecuaciones lineales de  $n$  dimensiones tiene soluciones no triviales siempre y cuando se cumpla

$$\det(\mathbb{M} - \mu\mathbb{I}) = 0. \quad (4.15)$$

donde  $\mathbb{I}$  es la matriz unidad. Esta ecuación, llamada ecuación característica, es un polinomio de orden  $n$  igualado a cero, con  $n$  raíces que son los eigenvalores  $\mu$ . Los respectivos eigenvectores  $\vec{u}$  se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones que satisfacen las componentes de  $\vec{u}$  para cada eigenvalor. Así, obtenemos los  $n$  eigenvalores y eigenvectores solución de la ecuación (4.14).

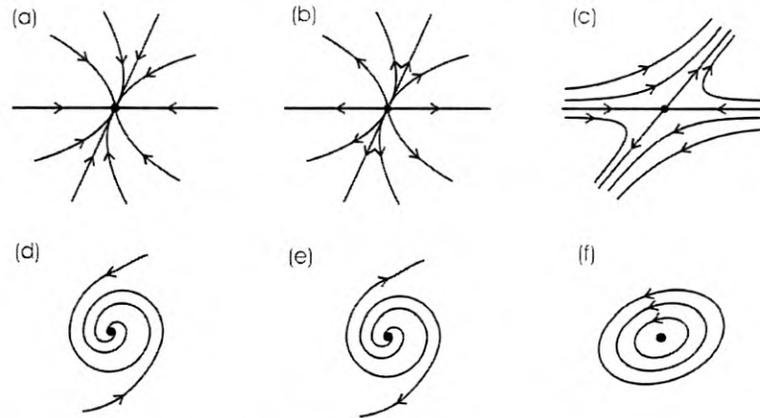
Ahora, la solución general de (4.10) la escribimos como una superposición de la forma

$$\vec{\zeta}(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\mu_k t} \vec{u}_k, \quad (4.16)$$

donde los coeficiente  $c_k$  se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Los eigenvalores pueden ser reales o complejos. Los eigenvalores complejos siempre vienen en pares conjugados, como consecuencia de que la matriz  $\mathbb{M}$  es real. La parte real de los eigenvalores de la ecuación característica es decisiva para caracterizar al punto crítico  $\vec{x}_c$ ; si son diferentes de cero se llama punto hiperbólico, si son cero el punto es elíptico. Se puede demostrar que para sistemas conservativos la matriz jacobiana sólo pueden tener dos tipos de puntos críticos: *elíptico*, con los eigenvalores puramente imaginarios, lo que significa que las trayectorias cerca del punto crítico son de naturaleza oscilatoria y son puntos estables; e *hiperbólicos de tipo silla*, que provienen de eigenvalores con partes reales diferentes de cero, positivas y negativas, y son puntos inestables.

Existen otros tipos de puntos críticos que no se ven en sistemas conservativos; en la Figura 4.1 se presentan en forma simplificada los distintos tipos de puntos críticos que pueden aparecer en un sistema dinámico, las figuras (a)-(e) corresponden a puntos hiperbólicos y (f) es punto elíptico.



**Figura 4.1:** Expresión gráfica de los diferentes tipos de puntos críticos: a) atractor puntual o sumidero, b) fuente, c) punto silla, d) espiral estable, e) espiral inestable, f) elíptico. Excepto el último, los demás son puntos hiperbólicos.

Los puntos hiperbólicos son importantes ya que, cuando el sistema es caótico, el caos se desarrolla en la vecindad de ese tipo de punto crítico.

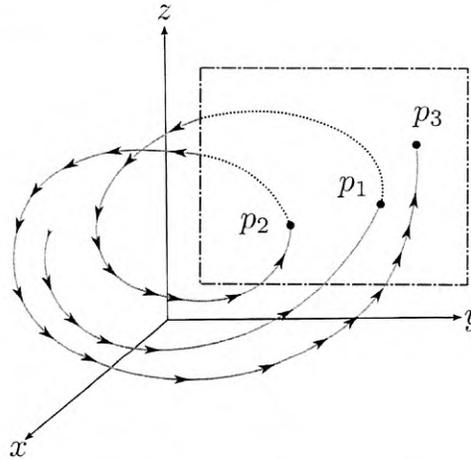
## 4.2. Indicadores de Caos

Un sistema caótico es un sistema muy sensible a las condiciones iniciales. Esto significa que uno puede calcular la trayectoria del sistema con ciertas condiciones iniciales, pero al variar un poco estas condiciones obtenemos una trayectoria totalmente distinta a la trayectoria anterior. La presencia de caos implica una aperiodicidad e irregularidad en las trayectorias. Una condición necesaria para que un sistema sea caótico es que el sistema dinámico sea no lineal. Por lo general, los sistemas dinámicos no lineales se resisten a un tratamiento analítico y la ayuda de los métodos numéricos y la computadora se vuelve imprescindible para su análisis. En las siguientes secciones se presentan algunas herramientas comunes para la detección del caos. Estas técnicas se usan tanto en sistemas conservativos como disipativos, aunque nosotros nos limitaremos al caso conservativo, llamado también caos hamiltoniano.

### 4.2.1. Sección de Poincaré

La visualización de trayectorias en el espacio fase más allá del espacio tridimensional,  $n > 3$ , requiere técnicas que nos ayuden a obtener información de las trayectorias. La sección de Poincaré es una técnica muy recurrida en estos casos, a continuación la presentamos.

Por simplicidad, consideremos un sistema autónomo tridimensional de la forma  $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x})$  y enfoquémonos en una de sus trayectorias. Ahora, definimos un plano, en el caso general una superficie de  $n - 1$  dimensiones, y consideremos todos los puntos  $\mathbf{P}_k$  por los cuales la trayectoria pasa a través del mismo lado del plano considerado, vea la Figura 4.2. Definimos el mapeo de Poincaré  $\mathbf{G}$  asociado a dos puntos sucesivos que cruzan el

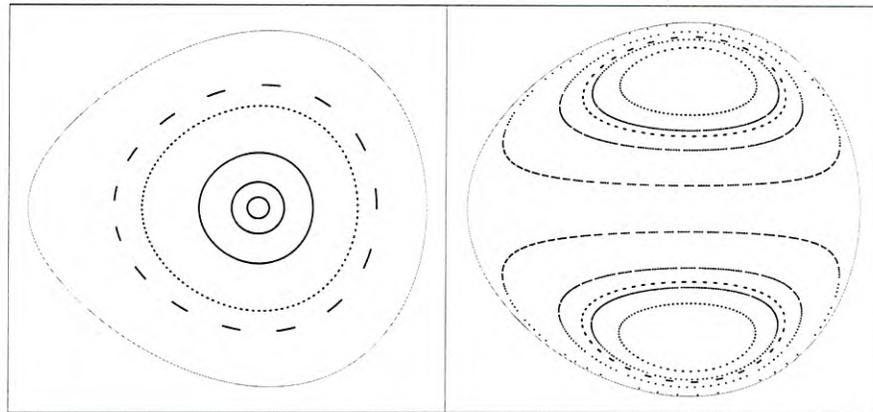


**Figura 4.2:** Sección de Poincaré para una trayectoria tridimensional con sus primeros tres puntos de cruce a través del plano.

plano, esto es

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{P}_k). \tag{4.17}$$

El mapeo de Poincaré reduce el espacio fase de  $n$  dimensiones a una representación de  $n - 1$  dimensiones la cual puede indicarnos regularidad o irregularidad en las trayectorias del sistema. Considérese como ejemplo un sistema periódico en tres dimensiones. La sección de Poincaré correspondiente para dicho sistema sería un plano con un conjunto finito de puntos ya que la trayectoria, al pasar la sección de Poincaré por un punto, regresaría al mismo pasado un tiempo  $T$ , que corresponde al periodo del sistema. Un sistema periódico puede tener una gran cantidad de puntos en su sección de Poincaré pero tarde o temprano regresará al primer punto. Como ejemplo, en la Figura 4.3 hemos graficado la sección de Poincaré para los casos integrables del potencial HHP, con  $\epsilon = 2$  y  $\epsilon = 1/3$ .



**Figura 4.3:** Sección de Poincaré para los casos integrables del potencial HHP, en el eje horizontal se grafica la variable  $y$ , en el vertical  $p_y$ . Se grafican cinco condiciones iniciales diferentes en cada caso. La curva cerrada en la frontera solo ilustra el limite en donde pueden estar las trayectorias.

La gráfica de la izquierda corresponde al caso  $\epsilon = 2$  con energía  $E = 0.0035$ , se grafican

los cortes de cinco trayectorias con condiciones iniciales diferentes. La superficie donde se desarrolla cada trayectoria es un toroide y la gráfica muestra una familia de toros anidados. La curva continua exterior corresponde a los puntos límite que pueden tomar las variables para la energía  $E = 0.0035$ . Por su parte, la gráfica de la derecha corresponde al caso  $\epsilon = 1/3$ , se grafican cinco trayectorias con condiciones iniciales diferentes y energía  $E = 0.07$ . A cada curva superior le corresponde una inferior que cierra el toroide donde se desarrolla la trayectoria.

No obstante, existen sistemas más complicados y la sección de Poincaré puede tornarse menos trivial. Un caso de este tipo sería un sistema caótico, por ejemplo. Más adelante revisaremos distintas secciones de Poincaré para el sistema de HH y veremos que en la vecindad de los puntos elíptico e hiperbólico se presentan comportamientos distintos según varíe la energía del sistema.

### 4.2.2. Exponente de Lyapunov

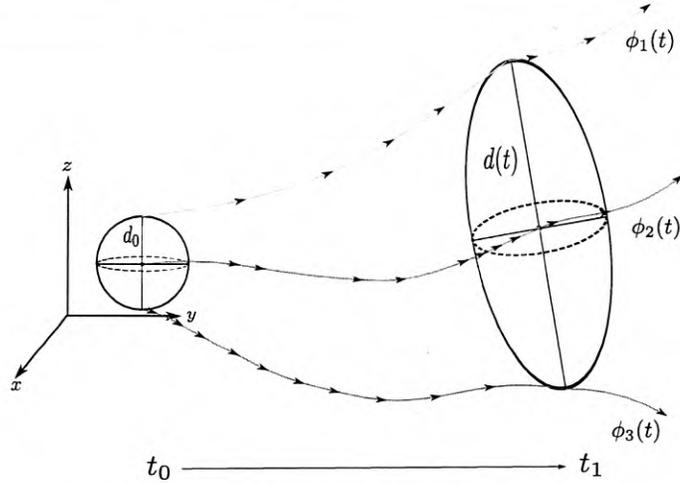
Esta sección tiene como objetivo presentar un esquema matemático para caracterizar la sensibilidad a las condiciones iniciales. Como se vió anteriormente, la sensibilidad a las condiciones iniciales es la característica fundamental que presentan los sistemas caóticos. Esto nos lleva a introducir un conjunto de cantidades asociadas con cada trayectoria  $\vec{x}(t)$ , llamadas *exponentes característicos de Lyapunov*. Estas cantidades nos proporcionan una medida del grado de inestabilidad que presenta el sistema.

Los exponentes de Lyapunov cuantifican la razón promedio de la divergencia entre dos trayectorias que inicialmente se encuentran infinitesimalmente cercanas una de la otra. El número de exponentes de Lyapunov depende de las dimensiones que tiene el sistema; por ejemplo, un sistema de dos grados de libertad, como el potencial de HH, tendrá cuatro exponentes de Lyapunov, uno por cada coordenada del espacio fase. Si al menos uno de éstos es positivo, entonces el sistema es caótico. Esto se debe a que la variable asociada a la dirección correspondiente a este exponente, en el espacio donde se encuentra el sistema, crecerá exponencialmente y ocasionará que las trayectorias en dicho espacio crezcan considerablemente dando como resultado una separación muy rápida entre dos trayectorias inicialmente cercanas, en la Figura 4.3 presentamos gráficamente esta situación.

Consideremos un sistema de  $n$  dimensiones. La estabilidad de una trayectoria  $\vec{x}(t)$  puede estudiarse analizando las trayectorias cercanas, digamos  $\vec{x}'(t)$ , con condiciones iniciales  $\vec{x}'(0)$  desplazada por un vector infinitesimal:  $\vec{x}'(0) = \vec{x}(0) + \delta\vec{x}(0)$  con la distancia de separación entre las dos condiciones iniciales satisfaciendo  $\Delta(0) = |\delta\vec{x}(0)| \ll 1$ . En los sistemas que no presentan sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir, sistemas no caóticos, la distancia  $\Delta(t)$  entre la trayectoria de referencia y la trayectoria perturbada al tiempo  $t$  se mantiene relativamente cerca de  $\Delta(0)$ , su separación incrementa como una potencia de  $t$ . Por el contrario, en los sistemas caóticos la separación entre las dos trayectorias crece exponencialmente con el tiempo:

$$\Delta(t) = \Delta(0)e^{\lambda t}, \quad (4.18)$$

donde  $\lambda$  es la razón de separación exponencial local. Si solucionamos para  $\lambda$  de la ecuación



**Figura 4.4:** Representación del crecimiento exponencial en una dirección de un elemento de volumen del espacio fase en tres dimensiones. Conforme pasa el tiempo, la esfera original de condiciones iniciales se deforma en un elipsoide con el eje mayor en la dirección del mayor exponente de Lyapunov

anterior y tomamos el límite de tiempos grandes, obtenemos

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \right), \quad (4.19)$$

que se puede entender como un promedio de la razón exponencial de divergencia entre las dos trayectorias. En este caso,  $\lambda$  se le conoce como exponente máximo de Lyapunov.

En realidad un solo exponente de Lyapunov no nos proporciona toda la información que contiene el sistema en su divergencia caótica, por lo que se define el *espectro de Lyapunov*, que consiste en todos los exponentes de Lyapunov, uno por cada coordenada del espacio fase. El exponente más grande tiende a un valor que corresponde al máximo exponente de Lyapunov, denotado con  $\lambda_{max}$ .

Una propiedad importante para sistemas conservativos es que la suma de todos los exponentes de Lyapunov es cero, es decir  $\sum_i \lambda_i = 0$ . Esto es consecuencia del teorema de Liouville sobre la conservación del volumen en el espacio fase ante la evolución hamiltoniana del sistema. Si todos los exponentes de Lyapunov son cero, entonces la separación entre trayectorias no es exponencial y la trayectoria de referencia es regular. En el caso de un sistema disipativo la suma de los exponentes de Lyapunov es un número negativo como resultado de la contracción del volumen en el espacio fase.

### 4.3. Caos en el sistema de Hénon-Heiles

En esta sección analizaremos el caso no integrable del potencial HHP. Tomaremos como ejemplo el caso particular  $\epsilon = -1/3$ , porque corresponde al potencial original de Hénon-Heiles. Obtendremos sus puntos críticos y, con las herramientas descritas en las secciones anteriores, construiremos los indicadores de Caos para demostrar que en este caso el sistema es caótico.

### 4.3.1. Potencial y puntos críticos

El potencial para  $\epsilon = -1/3$  es el potencial original de Hénon-Heiles, dado por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (4.20)$$

En las Figuras 4.5 y 4.6 se pueden apreciar la superficie del potencial y sus perfiles, respectivamente. Claramente el origen es el punto de equilibrio estable.

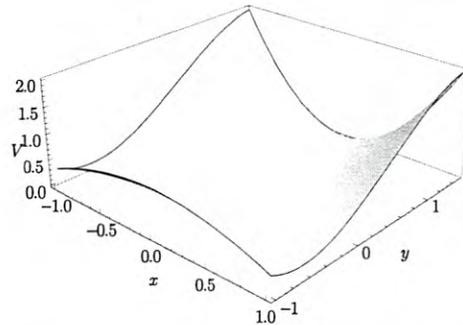


Figura 4.5: Superficie del potencial de Hénon-Heiles.

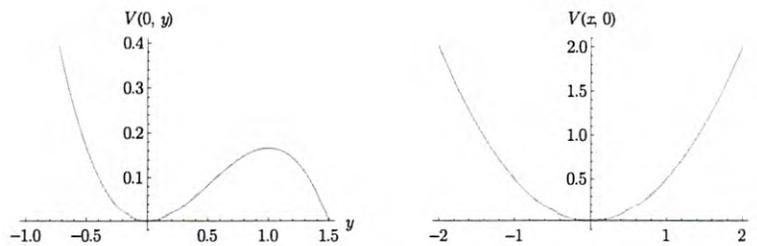


Figura 4.6: Perfiles del potencial de Hénon-Heiles. Claramente el origen es un punto estable.

Las ecuaciones de movimiento para el sistema son las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_x = -x - 2xy, \quad (4.21)$$

$$\dot{p}_y = -y - x^2 + y^2, \quad (4.22)$$

$$\dot{x} = p_x, \quad (4.23)$$

$$\dot{y} = p_y. \quad (4.24)$$

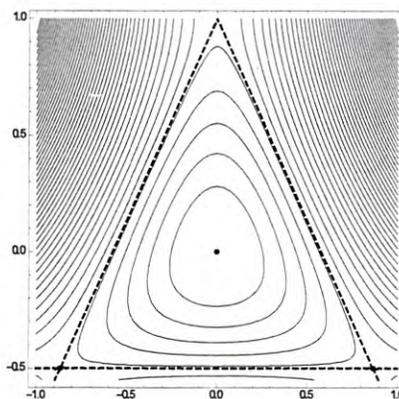
Los puntos críticos se obtienen haciendo cero el lado derecho de las ecuaciones anteriores. En este caso, además de  $p_x = 0$  y  $p_y = 0$ , obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(1 + 2y) &= 0, \\ x^2 - y^2 + y &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones vemos que hay cuatro puntos críticos ubicados en:  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2)$ . El potencial en estos puntos tiene los valores

$$\begin{aligned} V(0, 0) &= 0, \\ V(0, 1) &= 1/6, \\ V(\pm\sqrt{3}/2, -1/2) &= 1/6. \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, si la partícula tiene una energía menor a  $1/6$ , su trayectoria quedará encerrada en la región delimitada por la curva de nivel que se obtiene fijando el valor  $E = 1/6$ . En la Figura 4.7 se puede apreciar la superficie del potencial (4.20), a través de las curvas de nivel, junto con la curva que delimita la región de atrapamiento.



**Figura 4.7:** Curvas de nivel del potencial de Hénon-Heiles. Para energías en el rango  $0 \leq E < 1/6$  la partícula queda atrapada en la región triangular delimitada por las líneas punteadas.

### 4.3.2. Caos: trayectorias e indicadores

Si integramos numéricamente las ecuaciones (4.21-4.3.2) y nos concentramos en el espacio de configuración, es decir, en las coordenadas de posición de la partícula, obtenemos las trayectorias físicas del sistema de Hénon-Heiles.

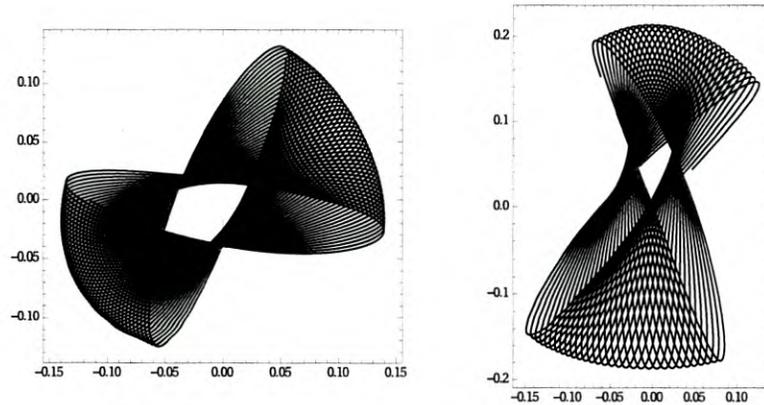
En la Figura 4.8 presentamos una muestra de dos trayectorias obtenidas para distintas energías,  $E = 0.01$  y  $E = 0.02$ , y las mismas condiciones iniciales, claramente las dos trayectorias son regulares.

Al variar las condiciones iniciales y manteniéndonos en estos niveles energéticos, bajas energías, encontramos que no hay mucha diferencia en el tipo de trayectoria obtenida. Es decir, a bajas energías las trayectorias son regulares.

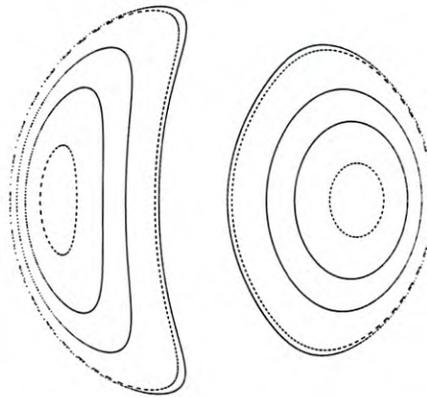
Esta regularidad de las trayectorias para bajas energías se confirma si se obtienen las correspondientes secciones de Poincaré.

Como ejemplo, en la Figura 4.9 mostramos la sección de Poincaré para la energía  $E = 0.01$ . La regularidad de las trayectorias para todas las condiciones iniciales se traduce en la regularidad de las curvas de intersección que presenta la sección de Poincaré.

En la Figura 4.10 se muestra la sección de Poincaré para  $E = 0.04$  y una amplia selección de condiciones iniciales. En esta gráfica aún se percibe con claridad la regularidad



**Figura 4.8:** Trayectorias de la partícula para energías  $E = 0.01$  (izquierda) y  $E = 0.02$  (derecha) con las mismas condiciones iniciales  $x_0 = 0.029$ ,  $y_0 = 0.01$  y  $p_{x0} = 0.0$ . Estas trayectorias son regulares.



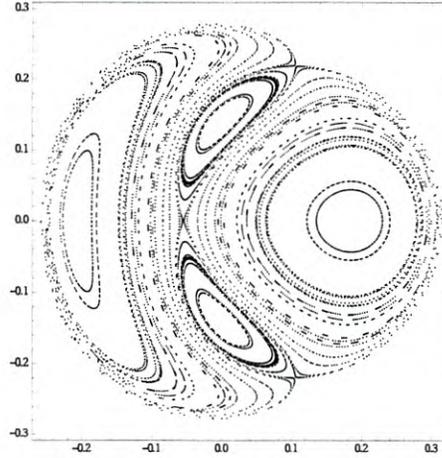
**Figura 4.9:** Sección de Poincaré para  $E = 0.01$ . La simetría y regularidad de la gráfica es resultado de la regularidad de las trayectorias.

para cualesquiera de las condiciones iniciales elegidas. Note que la gráfica muestra puntos de tipo elíptico, alrededor de los cuales se presentan curvas cerradas, combinados con otros puntos de tipo hiperbólico, donde las curvas se cruzan. Es frecuente hacer la analogía a un conjunto de islas inmersas en un mar, las curvas cerradas alrededor de los puntos elípticos representan las islas, mientras que cerca de los puntos hiperbólicos se desarrolla el mar.

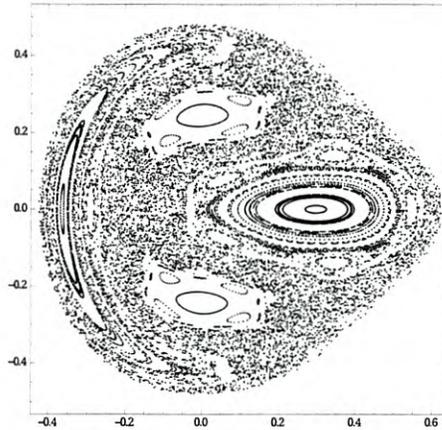
En general, para energías  $E \leq 0.09$  las trayectorias del sistema cambian ligeramente su forma, pero siguen presentando un comportamiento regular.

Al aumentar aún más la energía el mar comienza a asomar alrededor de los puntos de tipo hiperbólico. En la Figura 4.11 graficamos la sección de Poincaré para la energía  $E = 0.12$ . La figura muestra cómo el mar se desarrolla hacia la parte central de la figura mientras las islas se han reducido, ilustrando así este fenómeno de naturaleza estrictamente caótica.

Conforme aumenta la energía, la pérdida de islas y el aumento del área ocupada por el mar continúa, aún usando las mismas condiciones iniciales, implicando que con el aumento de la energía el movimiento de la partícula pasa de regular a caótico. Como es de esperarse,



**Figura 4.10:** Sección de Poincaré para la energía  $E = 0.04$  y 60 condiciones iniciales seleccionadas aleatoriamente del conjunto de condiciones posibles para esa energía. La sección muestra aún la regularidad de las trayectorias.



**Figura 4.11:** Para  $E = 0.12$ , el número de islas disminuye mientras que el mar hace su aparición alrededor de los puntos de tipo hiperbólico.

el área ocupada por el mar aumenta y la posibilidad de trayectorias regulares disminuye.

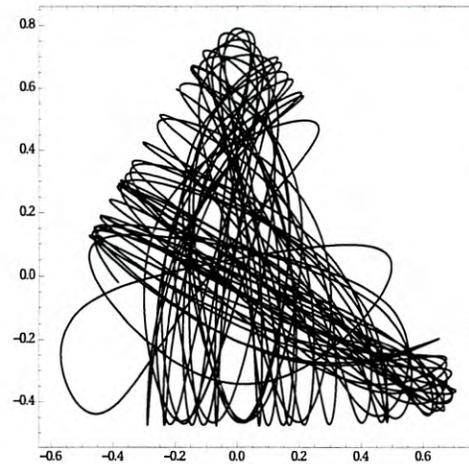
Como ejemplo de lo que ocurre a estas energías, en la Figura 4.12 mostramos una trayectoria con energía  $E = 0.15$ , graficada con las condiciones iniciales:  $x_0 = 0.029$ ,  $y_0 = 0.01$  y  $p_{x0} = 0$ , el valor de  $p_y$  queda determinado por la energía a través de la expresión

$$p_y = \pm \sqrt{2E - p_x^2 - x^2 - y^2 - 2x^2y + \frac{2}{3}y^3}. \quad (4.25)$$

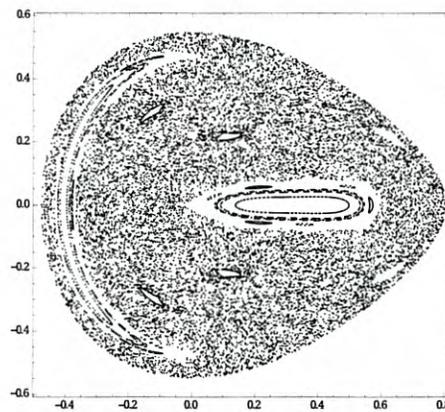
La trayectoria muestra obviamente la irregularidad típica del caos.

En la Figura 4.13 mostramos la sección de Poincaré para la energía de la trayectoria,  $E = 0.15$ . La gráfica confirma que el régimen caótico se ha alcanzado plenamente.

No obstante, existe la posibilidad de que para ciertas condiciones iniciales el sistema no presente caos para la misma energía. Una guía para encontrar dichas condiciones iniciales es el uso de la sección de Poincaré. Las condiciones iniciales alrededor de los puntos



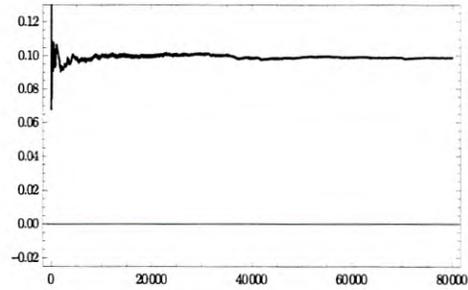
**Figura 4.12:** La partícula tiene un movimiento claramente caótico para  $E = 0.15$  y condiciones iniciales  $x_0 = 0.029$ ,  $y_0 = 0.01$  y  $p_{x0} = 0$ .



**Figura 4.13:** Para  $E = 0.15$ , la mayor parte del área de la sección de Poincaré está cubierta por el mar y sólo quedan un número reducido de islas.

hiperbólicos generalmente son las que presentan caos, a diferencia de las que están cerca de los puntos elípticos que continúan siendo regulares.

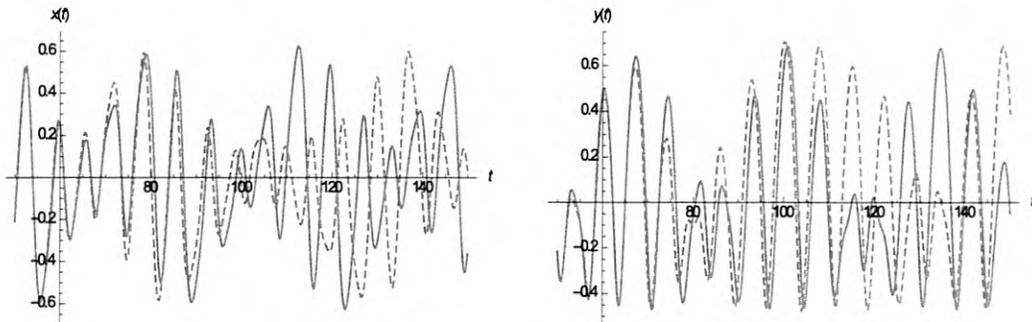
En la Figura 4.14 mostramos el máximo exponente de Lyapunov para la misma energía  $E = 0.15$ . El exponente converge a un valor cercano a 0.1.



**Figura 4.14:** Máximo exponente de Lyapunov para  $E = 0.15$ , el exponente converge a un valor diferente de cero, cercano a 0.1.

A pesar de su aparente valor pequeño, es suficiente para que dos trayectorias con condiciones iniciales ligeramente diferentes se separen rápidamente como resultado de la naturaleza caótica de la dinámica.

Finalmente, la Figura 4.15 ilustra, mediante las correspondientes series de tiempo, el fenómeno de sensibilidad a las condiciones iniciales, base de la caoticidad del sistema.



**Figura 4.15:** La línea continua corresponde a la trayectoria de la Figura 4.12 y la línea discontinua se genera con las mismas condiciones iniciales, excepto que  $p_{x_0}$  difiere en 0.001.

Esta última figura refleja lo sensible que puede ser un sistema caótico. Si modificamos ligeramente las condiciones iniciales la trayectoria cambia drásticamente. En este caso, el momento inicial  $p_{x_0}$  se modificó en tan sólo una milésima, lo que ocasionó que las trayectorias se separaran muy rápidamente.

# Conclusiones

En este trabajo estudiamos la integrabilidad de una familia de potenciales de tipo Hénon-Heiles dependiente de un parámetro  $\epsilon$ . Con ayuda de la definición fundamental de constante de movimiento pudimos demostrar que para los casos  $\epsilon = 2$  y  $\epsilon = 1/3$  existe una segunda constante de movimiento. En consecuencia, para estos casos el sistema es integrable. Además, el método utilizado nos permitió construir explícitamente las constantes de movimiento.

Los casos encontrados coinciden con los reportados en la literatura, que generalmente se obtienen usando otros métodos de análisis diferentes al nuestro; como, por ejemplo, separar la ecuación de Hamilton-Jacobi en sistemas de coordenadas apropiados al problema particular. Existe al menos otro caso integrable<sup>1</sup>; pero, en él la segunda constante de movimiento no tiene la dependencia cuadrática en los momentos que aquí postulamos y por tal motivo ese caso queda excluido de nuestro estudio.

La integrabilidad implica regularidad en el movimiento de la partícula, pero la falta de integrabilidad no implica necesariamente irregularidad. Esta afirmación fue confirmada en este trabajo y presentada en los capítulos 3 y 4. En el primero de esos capítulos, presentamos el movimiento ordenado y regular de los casos integrables que encontramos. En el segundo, revisamos los movimientos en el potencial de Hénon-Heiles,  $\epsilon = -1/3$ , como ejemplo de caso no integrable. Vimos que para bajas energías las trayectorias son regulares, en tanto que, conforme la energía se acerca al límite superior, la caoticidad del sistema se incrementa. Al aumentar la energía, hay cada vez más condiciones que llevan a movimientos caóticos y menos regiones de condiciones que implican regularidad. Para llegar a esa conclusión nos apoyamos en el estudio numérico y la representación gráfica de los principales indicadores del caos.

---

<sup>1</sup>Ver referencia [2]. En este artículo, sin embargo, existe un error en la segunda constante de movimiento para el caso  $\epsilon = 2$ , lo cual puede demostrarse fácilmente obteniendo la derivada temporal de la expresión que ahí se reporta.

R-T18-01-42

# Apéndice A

## Códigos de Wolfram Mathematica

Las imágenes usadas en este trabajo tales como trayectorias, secciones de Poincaré, series de tiempo y exponente de Lyapunov se obtuvieron con el software Wolfram Mathematica. Los siguientes códigos pueden ser adaptados fácilmente a distintos casos de la energía  $E$  ( $e$ ), el parámetro  $\epsilon$  y las condiciones iniciales  $x_0$ ,  $y_0$  y  $p_{x0}$ .

### Trayectorias en el espacio de configuración y series de tiempo

(\* TRAYECTORIA EN ESPACIO DE CONFIGURACIÓN \*)

```
Clear[e, x0, y0, xp0, \[Epsilon]];
e = 0.01;
\[Epsilon] = -1/3;
x0 = 0.029; y0 = 0.01; xp0 = 0.0;
yp0 = Sqrt[
  2 e - xp0^2 - x0^2 - y0^2 - 2 x0^2 y0 + 2 \[Epsilon]*y0^3];
sol = NDSolve[{x''[t] + x[t] + 2 x[t] y[t] == 0,
  y''[t] + y[t] + x[t]^2 + 3 \[Epsilon]*y[t]^2 == 0, x[0] == x0,
  y[0] == y0, x'[0] == xp0, y'[0] == yp0}, {x[t], y[t]}, {t, 0,
  700}, MaxSteps -> 5000];
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol], {t, 300, 600},
  PlotPoints -> 500, Axes -> False,
  PlotStyle -> RGBColor[0.', 0.', 0.'], PlotTheme -> "Scientific"]
```

(\* SERIES DE TIEMPO DE LA TRAYECTORIA DE ESPACIO DE CONFIGURACIÓN \*)

```
\
Plot[Evaluate[x[t] /. sol], {t, 0, 100}, PlotStyle -> {Blue},
  AxesLabel -> {t, x[t]}, PlotStyle -> RGBColor[1.', 0.', 0.'],
  PlotTheme -> "Scientific", Axes -> True, AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[x]}, PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {FontFamily -> "Latin Modern Roman", GrayLevel[0]}
```

```
Plot[Evaluate[y[t] /. sol], {t, 0, 100}, PlotStyle -> {Blue},
  AxesLabel -> {t, y[t]}, PlotStyle -> RGBColor[1., 0., 0.],
  PlotTheme -> "Scientific", Axes -> True, AxesStyle -> Black,
  AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[y]}, PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {FontFamily -> "Latin Modern Roman", GrayLevel[0]}}Pkd!
```

## Secciones de Poincaré

```
SurfaceOfSection[{x0_, {y0_, dy0_}, e_}, tmax_] :=
Module[{dx0 = Sqrt[2/3 y0^3 + 2 e - x0^2 - y0^2 - 2 x0^2 y0 - dy0^2],
  x, y, t},
  If[# == {}, {}, First[#]] &@Last[Reap[NDSolve[{
    x'[t] == -x[t] - 2 y[t] x[t],
    y'[t] == -y[t] - x[t]^2 + y[t]^2,
    y[0] == y0,
    y'[0] == dy0,
    x[0] == x0,
    x'[0] == dx0
  }],
  {x, y}, {t, 0, tmax},
  Method -> {EventLocator, "Event" -> x[t],
    "EventAction" -> Sow[{y[t], y'[t]}]}
  ]]]
]
With[{x = .3},
  Internal`DeactivateMessages[
  ListPlot[Join @@ Table[
    SurfaceOfSection[{Random[Real, {-x, x}], {Random[Real, {-x, x}],
      Random[Real, {-x, x}]}, 0.13}, 10000],
    {80}],
  PlotStyle -> {PointSize[.000000008], Black},
  AspectRatio -> Automatic, Axes -> {False, False},
  ImageSize -> 500, PlotTheme -> "Scientific"]
]
] // Timing
```

## Exponente de Lyapunov

```
Clear["Global`*"];
e = 0.13;
x10 = 0.029; y10 = 0.01; px10 = 0.0;
py10 = Sqrt[2 e - px10^2 - x10^2 - y10^2 - 2 x10^2 y10 + 2/3 y10^3];
x20 = 0; y20 = y10 + 0.00001; px20 = px10;
py20 = Sqrt[2 e - px20^2 - x20^2 - y20^2 - 2 x20^2 y20 + 2/3 y20^3];
```

```

d0 = Sqrt[(x10 - x20)^2 + (y10 - y20)^2 + (px10 - px20)^2 + (py10 -
        py20)^2];

tin = 0;
tfin = 10000;
tstep = 1;
lcedata = {};
sum = 0;

For[i = 1, i < tfin/tstep, i++,
  sol1 = NDSolve[{{x1'[t] == px1[t], y1'[t] == py1[t],
    px1'[t] == -x1[t] - 2 y1[t] x1[t],
    py1'[t] == -y1[t] - x1[t]^2 + y1[t]^2, x1[0] == x10,
    y1[0] == y10, px1[0] == px10}, py1[0] == py10}, {x1[t], y1[t],
    px1[t], py1[t]}, {t, 0, tstep}, Method -> "ExplicitRungeKutta",
    PrecisionGoal -> 12, AccuracyGoal -> 12];
  sol2 = NDSolve[{x2'[t] == px2[t], y2'[t] == py2[t],
    px2'[t] == -x2[t] - 2 y2[t] x2[t],
    py2'[t] == -y2[t] - x2[t]^2 + y2[t]^2, x2[0] == x20, y2[0] == y20,
    px2[0] == px20, py2[0] == py20}, {x2[t], y2[t], px2[t],
    py2[t]}, {t, 0, tstep}, Method -> "ExplicitRungeKutta",
    PrecisionGoal -> 12, AccuracyGoal -> 12];

  xx1[t_] = x1[t] /. sol1[[1]];
  yy1[t_] = y1[t] /. sol1[[1]];
  pxx1[t_] = px1[t] /. sol1[[1]];
  pyy1[t_] = py1[t] /. sol1[[1]];
  xx2[t_] = x2[t] /. sol2[[1]];
  yy2[t_] = y2[t] /. sol2[[1]];
  pxx2[t_] = px2[t] /. sol2[[1]];
  pyy2[t_] = py2[t] /. sol2[[1]];

  d1 = Sqrt[(xx1[tstep] - xx2[tstep])^2 + (yy1[tstep] -
    yy2[tstep])^2 + (pxx1[tstep] - pxx2[tstep])^2 + (pyy1[tstep] -
    pyy2[tstep])^2];

  sum += Log[d1/d0];
  dlce = sum/(i*tstep);
  AppendTo[lcedata, {i*tstep, dlce}];

  w1 = (xx1[tstep] - xx2[tstep])*(d0/d1);
  w2 = (yy1[tstep] - yy2[tstep])*(d0/d1);
  w3 = (pxx1[tstep] - pxx2[tstep])*(d0/d1);
  w4 = (pyy1[tstep] - pyy2[tstep])*(d0/d1);
  x10 = xx1[tstep];

```

```
y10 = yy1[tstep];
px10 = pxx1[tstep];
py10 = ppy1[tstep];
x20 = x10 + w1;
y20 = y10 + w2;
px20 = px10 + w3;
py20 = py10 + w4;
i = i++;
(*If[Mod[tstep*i,100]\[Equal]0,Print[" For t = ",tstep*i," , "," LCE \
= ",dlce]]*)
]
ListPlot[{lcedata}, Frame -> True, PlotRange -> {-0.0025, 0.011},
Joined -> True, Axes -> True, AxesStyle -> Black,
PlotStyle -> RGBColor[0.', 0.', 0.'],
AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[MEL]}, PlotLabel -> None,
LabelStyle -> {FontFamily -> "Latin Modern Roman", GrayLevel[0]}]
```

# Bibliografía

- [1] M. Hénon y C. Heiles, *The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments*. The Astrophysical Journal **69**, 73 (1964).
- [2] V. Ravoson, L. Gavrilov y R. Caboz, *Separability and Lax pairs for Hénon-Heiles system*, Journal of Mathematical Physics **34**, 2385 (1993).
- [3] T. Kibble y F. Berkshire, *Classical Mechanics*. 5<sup>ta</sup> ed. Imperial College Press, (2004).
- [4] W. Greiner, *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*. 2<sup>da</sup> ed. Springer,(2010).
- [5] J. José y E. Saletan, *Classical Dynamics: A contemporary approach*. Cambridge, (1998).
- [6] A. Goriely, *Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems*. World Scientific,(2001).
- [7] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*. Wiley, (1988).
- [8] J. Lowenstein, *Essentials of Hamiltonian Dynamics*. Cambridge, (2012).
- [9] A. Scott, *Encyclopedia of Nonlinear Science*. Routledge, (2005).
- [10] R. Hilborn, *Chaos and nonlinear dynamics*. Oxford,(2000).
- [11] M. Lakshmanan y S. Rajasekar, *Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos and Patterns*. Springer, (2003).
- [12] M. Cencini y F. Cecconi, *Chaos. From simple models to complex systems*. World Scientific, (2010).
- [13] Weisstein, Eric W.:*Surface of Section..* From MathWorld—A Wolfram Web Resource.<http://mathworld.wolfram.com/SurfaceofSection.html>