

UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN FÍSICA



**El saber de mis hijos
hará mi grandeza**

**ENFOQUES GEOMÉTRICOS EN LA CONSTRUCCIÓN
DE LAS BASES DE LA FÍSICA CUÁNTICA**

TESIS

**QUE COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA

ARMANDO MEZA GAXIOLA

DIRECTOR DE TESIS

ANTÓN LIPOVKA

HERMOSILLO, SONORA, SEPTIEMBRE 2022

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Índice general

Productos Obtenidos	5
Agradecimientos	6
Resumen	8
Lista de Figuras	10
Como Leer esta Tesis	11
Introducción	12
Antecedentes	16
1. Cosmología en la Variedad de Finsler	22
1.1. Conceptos Básicos	22
1.2. Relatividad General en Variedad de Riemman	23
1.3. Métrica de Finsler	24
1.4. Ecuaciones de Einstein y Cosmología en Variedad de Finsler	25
1.4.1. Anisotropía del Espacio	26
1.4.2. Símbolos de Christoffel en Métrica de Finsler	26
1.4.3. Tensores de Curvatura de Riemman y Ricci en Métrica de Finsler	29
1.4.4. Ecuaciones de Friedmman en Variedad de Finsler para un Uni- verso Anisotrópico	30
2. Invariantes Adiabáticos	34
2.1. Mecánica Cuántica Antigua	34
2.2. Modelo Atómico de Sommerfeld	35
2.3. Invariantes Adiabáticos en Mecánica Clásica	36
2.4. Invariante Adiabático para un Oscilador Armónico	39
3. Invariancia Adiabática en Cosmología de Finsler	41
3.1. Planteamiento del Modelo Cosmológico	41
3.2. Caso de Estudio Particular en Cosmología de Riemman-Cartan	42
3.3. Caso de Estudio en Cosmología de Finsler	45
4. Electrodinámica en una Variedad de Finsler	49
4.1. Cuantización de Campo Electromagnético	49
4.2. Ecuaciones de Maxwell en Variedad de Finsler	51

4.3.	Ecuación de Movimiento para una Partícula Cargada en Variedad de Finsler	52
4.4.	Variación de la Constante de Estructura Fina en Variedad de Finsler	53
4.5.	Efecto Aharonov-Bohm en Variedad de Finsler	54
5.	Potencial Cuántico y Función de Onda	57
5.1.	Formulación de de Broglie-Bohm de la Mecánica Cuántica	60
5.2.	Acción para el Campo Electromagnético	63
5.3.	Interpretación del Potencial Cuántico Q por Medio de la Transformada de Fourier	64
5.4.	Caso Particular de Estudio del Oscilador Armónico	66
5.5.	Obtención de la Ecuación de Schrödinger por Medio de la Transformada de Fourier a partir de un Hamiltoniano Clásico	66
5.6.	Comentarios Acerca del Principio de Incertidumbre de Heisenberg	69
6.	Modelo Atómico Derivado de Primeros Principios	72
6.1.	Condición de Cuantización de Sommerfeld Derivada de la Mecánica Clásica	73
6.2.	Átomo de Hidrógeno	74
6.3.	Oscilador Armónico en el Modelo Atómico	75
6.4.	Momento Magnético del Electrón en un Sistema Atómico Relativista en Variedad de Finsler	76
7.	Momento Magnético Anómalo del Electrón	79
7.1.	Mediciones Experimentales	79
7.2.	Aspectos Teóricos de la Electrodinámica en Física Cuántica	81
7.3.	Momento Magnético del Electrón Derivado de la Ecuación de Movimiento para una Partícula Cargada en Variedad de Finsler	83
7.4.	Aproximación Clásica del Momento Magnético Anómalo del Electrón para un Sistema de Potencial Central	87
7.5.	Interacción Espín-Orbita en Variedad de Finsler	90
7.6.	Valor Obtenido del Momento Magnético y Comparación con Mediciones Experimentales	100
8.	Ecuación de Klein-Gordon	105
8.1.	La Ecuación de Klein-Gordon dada por Condiciones de Estabilidad	106
8.2.	Ecuación de Klein-Gordon sin el Postulado de la Función de Onda	110
9.	Curva de Rotación de Galaxias de Disco	113
9.1.	Método Integral para Obtener la Curva de Rotación de Galaxias	114
9.1.1.	Potencial Gravitacional	115
9.1.2.	Curva de Rotación	117
9.2.	Método Diferencial para Obtener la Curva de Rotación de Galaxias de Disco.	124
9.2.1.	Potencial Gravitacional de Galaxias de Disco	126

9.2.2. Curva de Rotación	130
9.3. Masa Bariónica en Galaxias de Disco	135
10. Cinética del Gas en Galaxias de Disco	137
10.1. Dinámica de Galaxias	138
10.2. Estimaciones Importantes	140
10.3. Termodinámica y Ecuaciones de Estado	143
10.4. Hidrodinámica y Ecuaciones Cinéticas para la Densidad del Gas en Función de la Distancia para Curvas de Rotación Constantes	147
10.5. Columnas de Densidad	156
10.6. Curvas de Rotación con Consideraciones de Cinética del Gas	158
10.7. Limitaciones Físicas en uso de Códigos Numéricos	161
11. Resultados y Conclusiones	169
Apéndice: Transformada de Fourier y Principio de Incertidumbre	178

Productos Obtenidos

· Se ha publicado un artículo de investigación en la revista *Astrophysical Bulletin*:

Meza A. and Lipovka A. A. (2022). ”*Modeling the Rotation Curve of Disk Galaxies*.” ISSN 1990-3413, *Astrophysical Bulletin*, 2022, Vol. 77, No. 2, pp. 123–131. © Pleiades Publishing, Ltd., 2022. [1]

Este fue publicado en la base de datos de arXiv como:

Meza A and Lipovka A. A. (2017). ”*Green function for the Poisson equation in a general case of astrophysical interest*”. Department of Research for Physics, Sonora University, 83000, Hermosillo, Sonora, México. ISBN 978-0-691-11384-5. arXiv: 1710.09273. [2]

· Asistencia a los siguientes congresos:

-Congreso Nacional de Física de la Sociedad Mexicana de Física (2019).

-Congreso Internacional de Física (March Meeting) de la Sociedad Americana de Física (2020).

Agradecimientos

Agradezco primeramente a mis padres Catarino Armando Meza Montoya y Dora Alicia Gaxiola Peñuelas, por todo el esfuerzo que han hecho desde que soy pequeño hasta el día de hoy para que pueda salir adelante y por todo su apoyo incondicional. A mi director de tesis, el Dr. Antón Lipovka por brindarme su amistad, asesoría y apoyo en el transcurso de toda mi estadía durante el doctorado, así como sus contribuciones y recomendaciones para la realización de esta tesis.

Doy gracias a mis abuelos Pablo Gaxiola Inzuna, Simona Peñuelas Campas, Catarino Meza Sanchez (†) y María Hermelinda Montoya Gaxiola por toda la ayuda que me han otorgado y a todos mis familiares que me han apoyado desde que empecé mis estudios universitarios hasta el día de hoy. A mis hermanos Nayeli Meza Gaxiola y Carlos Alonso Meza Gaxiola por apoyarme y acompañarme en diversos momentos.

De manera muy especial a mis amigos de la preparatoria, porque algunos en parte han contribuido a mi gusto por la ciencia Luis Antonio Gutiérrez Gómez, Francisco Duarte Ligonio, José Ovidio Martínez Jasso (y por su ayuda y comentarios para realizar este proyecto de tesis), Gabriel Iván Morales Valladares, Oscar Rolando Fraustro Escobar, Ivis Hiram García Álvarez, Erick Gustavo López Siordia, Mónica Sandoval Cupil, Omar Alejandro Fernández López, Hilda Lugo González, Juan José Santiago Navarrete, Rigel Saldívar Hernández, William Emrich Fonz, César Guerrero Hernández, Abraham Villa, Carlos Rafael Pérez Morales, Danaé Fátima Barreto, José Gerardo Reyna Ramos, Gil Villaroel, Ricardo Puck Santibáñez, Sinai Christina Gonzales Bolívar.

A mis amigos y compañeros que me han acompañado y apoyado en el transcurso de mis estudios de licenciatura y posgrado Kevin Luzanilla Ruíz (y por su ayuda para dibujar la figura 9.1 de esta tesis), Orlando Armenta Portillo, Ilse Guadalupe Monroy Alonso, Guadalupe Isabel Sánchez Rubio, Leslie Yolanda Gerardo Lira, Francisca Vianey Moreno Soto, David Rodríguez Pérez (y por su ayuda y enseñanzas sobre física tanto en la maestría y el doctorado), Ceasar Alfredo Jiménez, Luz Melissa Villa Acosta, José Luis Armenta Gastelum, Juan Carlos Guimond Ramos, Carlos Alan Vega Calvillo, Osnaider Rocha Rocha, Roldán González Martínez, Angelica Esesarte, Paulina Quintana, Irvin Soto Beltrán, Eric Manzanares Salazar, Víctor Alberto Moral Ávila, Denisse Guadalupe Ayala Romero, Carlos Alberto Valdez, Javier Montaña y María Claudia Calderón Martínez.

Particularmente a mis compadres y amigos Sergio Geovanny Noriega Navarro e Ivonne Chavez Pimentel por el apoyo y compañía en estos años y por confiar en mi

como padrino de su hijo.

A todos los demás profesores que contribuyeron a mi formación y a aquellos que me han brindado su apoyo y amistad Dr. Lorenzo Olgún Ruíz, Dr. Julio Cesar Saucedo Morales, Dr. Guillermo Arreaga García, Dr. Martín Pedroza Montero Dr. Juan Antonio Nieto García, Dr. Edgar Alejandro León Espinoza, Dr. Vahram Chavushyan, Dr Wilder Chicana. De igual manera a la Dra. Susana Álvarez García, Dr. Felipe Ramos Mendieta (†) y al Dr. Raúl Aceves Torres por todo el apoyo que me prestaron siendo coordinadores del posgrado durante mi estadía en la institución; así como a todos los profesores de esta facultad con los que conviví.

A la División de Ciencias Exactas y Naturales y al Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora por todo el tiempo que he permanecido en ella y por permitirme realizar mis estudios de posgrado y por último al CONACYT por el apoyo financiero otorgado para llevar a cabo mis estudios de posgrado.

Resumen

En el presente trabajo se desea mostrar que, por medio de un enfoque geométrico, pueden abordarse diversos fenómenos físicos; como es en el caso de la teoría de la relatividad general de Einstein. Dicha teoría, en cosmología se utiliza como marco para los modelos matemáticos que permiten describir el universo. Lo que otorga un sentido geométrico a los fenómenos gravitacionales que dominan desde escalas planetarias en adelante y que son más notables en escalas cosmológicas. Esto último será abordado en este trabajo utilizando un tipo de variedad denominado como variedad de Finsler. Esta variedad de Finsler es una generalización de la variedad de Riemann.

Entre otros problemas, se plantea obtener un formalismo geométrico de la mecánica cuántica usando una construcción que parte de la electrodinámica clásica. Esto desarrollado sobre una variedad de Finsler la cual cambia adiabáticamente debido a la expansión del universo.

Se pretende mostrar de manera clara algunos problemas existentes en el formalismo de la teoría cuántica ortodoxa, tanto en la mecánica cuántica como en la teoría cuántica de campos, así como realizar cálculos analíticos de los efectos relativistas en los sistemas cuánticos y dar algunas interpretaciones para el potencial cuántico.

Un universo modelado en la variedad de Finsler, se encuentra libre de singularidades y posee un comportamiento oscilante. En este tipo de universo, no ocurre un big bang, y en su lugar simplemente en el universo se da al comienzo un período de expansión al que le sigue un período de contracción. Esto es así porque la métrica de Finsler es función de las posiciones y las velocidades.

Como un tema aparte, se construyen curvas de rotación de galaxias de disco para distribuciones de densidad de materia; por medio de la teoría del potencial gravitacional y de la hidrodinámica.

Abstract

In this paper, we wish to show that, employing a geometrical approach, various physical phenomena can be geometrical approaches, and several physical phenomena can be approached, as in the case of Einstein's theory of general relativity. This theory, in cosmology, is used as a framework for the mathematical models that make it possible to describe the universe. This gives a geometrical sense to the gravitational phenomena that dominate on cosmological scales, which will be approached here using a type of manifold will be addressed called the Finsler manifold. This Finsler manifold is a generalization of the Riemann manifold.

Among other problems, it is proposed to obtain a geometrical formalism of quantum mechanics using construction that starts from the quantum mechanics using a construction based on classical electrodynamics. This is developed on a Finsler manifold which changes adiabatically due to the expansion of the universe.

It is intended to show clearly some problems existing in the formalism of the orthodox quantum theory, both in quantum mechanics and quantum field theory. As well as to perform analytical calculations of relativistic effects in quantum systems and give some interpretations for the quantum potential.

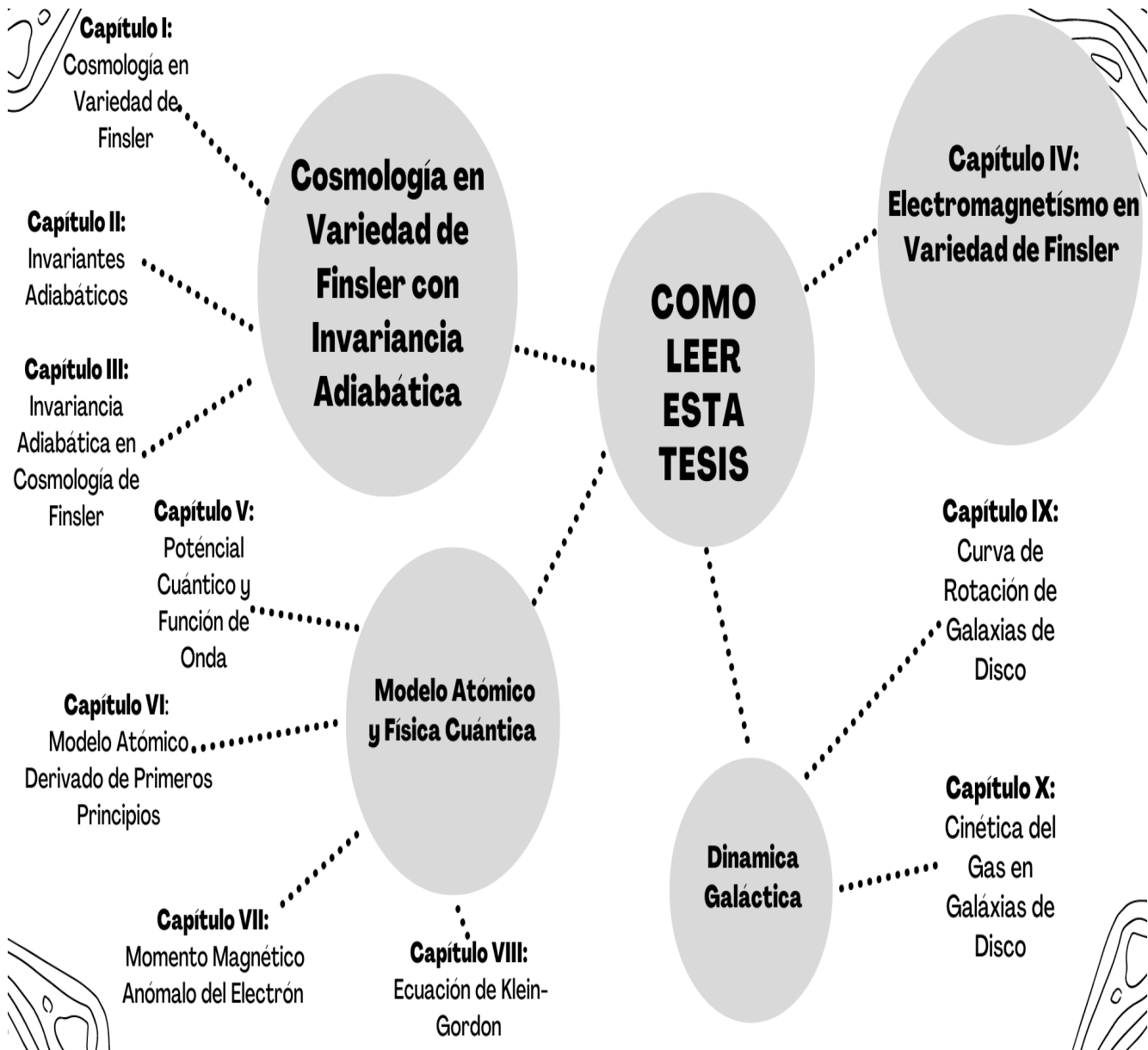
A universe modeled in the Finsler manifold is free of singularities and has oscillating behavior. In this type of universe, no big bang occurs, and instead, there is simply a period of expansion at the beginning of the universe followed by a period of contraction. This is because the Finsler metric is a function of positions and velocities.

As a separate topic, rotation curves of disk galaxies are constructed for matter density distributions; by means of gravitational potential theory and hydrodynamics.

Lista de Figuras

- Figura 7.1. Sistema de Coordenadas Cilíndricas
- Figura 9.1. Elemento diferencial para una galaxia de disco.
- Figura 9.2. Función de densidad para aproximación de Miyamoto-Nagai en función de a y en función de z .
- Figura 9.3. Comparación de curvas de rotación lineales encontradas por un método integral de un modelo de galaxia de disco que usa una aproximación de densidad de Miyamoto-Nagai para los coeficientes α_k y β_k ; contrastada con el modelo original de Miyamoto-Nagai y una curva de rotación observacional dada por Sofué.
- Figura 9.4. Comparación de curvas de rotación semilogarítmicas para encontradas por un método integral de un modelo galaxia de disco que usa una aproximación de densidad de Miyamoto-Nagai para los coeficientes α_k y β_k ; contrastada con el modelo original de Miyamoto-Nagai y una curva de rotación observacional dada por Sofué.
- Figura 9.5. Comparación de curvas de rotación lineales encontradas por un método diferencial de un modelo de galaxia de disco que usa una aproximación de densidad de Miyamoto-Nagai para los coeficientes α_k y β_k ; contrastada con el modelo original de Miyamoto-Nagai y una curva de rotación observacional dada por Sofué.
- Figura 9.6. Comparación de curvas de rotación semilogarítmicas para encontradas por un método diferencial de un modelo galaxia de disco que usa una aproximación de densidad de Miyamoto-Nagai para los coeficientes α_k y β_k ; contrastada con el modelo original de Miyamoto-Nagai y una curva de rotación observacional dada por Sofué.
- Figura 10.1: Línea solida de columna de densidad HI para NGC 7331.
- Figure 10.2: Línea solida de columna de densidad HI para NGC3198.
- Figura 10.3. Curva de rotación para NGC7331.
- Figura 10.4: Curva de rotación para NGC3198.

Como Leer esta Tesis



Introducción

El problema de la formulación de una teoría general que intentan unificar de manera natural la relatividad general y la física cuántica, es uno de los problemas más fundamentales de la física moderna.

La teoría de la relatividad general de Einstein, a través del uso de la geometría mediante una variedad pseudo-riemanniana, explica que la gravedad se manifiesta con una aceleración que ocurre a un cuerpo que se encuentra en un espacio-tiempo curvo producido por la presencia de una masa. El movimiento natural de un cuerpo en un espacio-tiempo curvado es acelerado.

Existen múltiples teorías que intentan unificar la relatividad general y la física cuántica. Estas no han sido cien por ciento satisfactorias, ni han sido corroboradas por medio de los experimentos.

Por esa razón, los objetivos generales que se presentan en este trabajo consisten en derivar algunos sistemas cuánticos prescindiendo de los postulados de la mecánica cuántica y en su lugar hacer uso de primeros principios. Para desarrollar dicho objetivo se hará uso de un modelo cosmológico que fue construido en la variedad de Finsler en el trabajo [3]. Este modelo cosmológico tiene la propiedad de que el radio del universo varía adiabáticamente con el tiempo [4]; esto fue construido siguiendo el concepto de invariancia adiabática usado en mecánica clásica y mecánica cuántica. Por este motivo, es posible encontrar consecuencias para diferentes sistemas cuánticos por el uso de esta variedad de Finsler. Debido a las propiedades cosmológicas en el modelo del universo sujeto a la variedad de Finsler, serán inferidas ciertas consecuencias astrofísicas para la dinámica de galaxias.

En física, se dice que un cálculo proviene de los primeros principios o *ab initio*, si comienza directamente en el nivel de las leyes establecidas de la física y no hace suposiciones tales como el modelo y los parámetros de ajuste. En este caso, la mecánica cuántica ortodoxa fue construida por medio de postulados que permitieron formularla para dar explicación a los resultados experimentales. En este sentido, se plantea obtener diversos aspectos de la física cuántica desde la mecánica clásica, el electromagnetismo y la teoría de la relatividad que era la física establecida anterior al desarrollo de la mecánica cuántica ortodoxa.

Además, dentro de este modelo cosmológico la métrica de Finsler depende de la velocidad, dando como consecuencia que la constante cosmológica aparezca de la geometría del universo y que por esa razón no sea necesario introducirla a mano.

Debido a que como se mencionó, la métrica de Finsler está en función de la velocidad y también de la posición (generalizando a la métrica pseudo-Riemmaniana de la relatividad general que solo depende de la posición); la métrica de Finsler describe un universo cíclico u oscilante.

Esto es así, porque, aunque pueda considerarse cero el término de posición; la componente temporal de la métrica prevalece, provocando que, al acercarse a los valores más pequeños para su radio, el universo comienza a oscilar evitando que caiga en una singularidad. Por esta razón, el universo al expandirse puede alcanzar un radio máximo del cuál comienza a contraerse hasta llegar a un radio mínimo. Esta propiedad de la métrica describe este universo oscilante sin hacer uso del concepto del big bang.

Dentro de este modelo es posible plantear las ecuaciones de la electrodinámica que corresponderían a dicho universo. Haciendo uso de dichas ecuaciones, junto con la transformada de Fourier, las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, la teoría de estabilidad, las formulaciones de Sommerfeld y de de Broglie-Bohm para la mecánica cuántica; es posible representar algunos sistemas cuánticos por medio del campo electromagnético y sobre la variedad de Finsler que presenta invariancia adiabática.

También, gracias a la ecuación relativista de movimiento para una partícula cargada, se desea obtener un valor para el momento magnético anómalo del electrón.

De igual manera, las ecuaciones de Schrödinger y de Klein-Gordon pueden encontrarse por medio de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, la electrodinámica relativista, la transformada de Fourier y la teoría de estabilidad.

Se presenta también un análisis diferente a los temas anteriores, acerca de la dinámica e hidrodinámica de galaxias de discos y su contribución a las curvas de rotación.

Dichos objetivos pueden establecerse como sigue:

1. Dar una introducción de un modelo cosmológico por medio de las ecuaciones de Friedmman en variedad de Finsler y del concepto de invariancia adiabática.
2. Construcción de un modelo cosmológico sobre una variedad de Finsler y con invariancia adiabática para el radio del universo que varía a través del tiempo.
3. Obtener el valor de la constante de Planck como invariante adiabático para la expansión acelerada del universo a partir de las geometrías de Riemman y Finsler.
4. Encontrar que la energía para el campo electromagnético es también un invariante adiabático para la expansión acelerada del universo en una variedad de Finsler. Gracias a ello pueden plantearse las ecuaciones para la electrodinámica clásica en dicha variedad.
5. Explicar que la naturaleza del potencial cuántico viene del campo electromagnético, producido por la oscilación de un electrón que gira alrededor del núcleo; haciendo uso de la transformada de Fourier y de la formulación de de Broglie-Bohm.
6. Demostrar que con una transformada de Fourier es posible pasar de un espacio donde vive la mecánica clásica a otro donde vive la mecánica cuántica.
7. Usando una ecuación de movimiento para una partícula cargada en la variedad de Finsler, se plantea desarrollar un modelo para el átomo de hidrogeno y encontrar el momento magnético anómalo del electrón dado en la teoría de electrodinámica cuántica.

8. Se buscará por medio de la ecuación de movimiento para una partícula cargada, desarrollar las bases para la construcción de una teoría de la electrodinámica cuántica sobre una variedad de Finsler.
9. Gracias a dicha construcción teórica, se buscará encontrar un cálculo del momento magnético anómalo del electrón.
10. Desarrollar de igual manera las bases para la construcción de una teoría cuántica de campos sobre una variedad de Finsler.
11. A través de primeros principios obtener la ecuación de Klein-Gordon; haciendo uso de la teoría de estabilidad.
12. Aplicar una transformada de Fourier a la ecuación para la energía relativista para pasar a un espacio en el que se obtenga la ecuación de Klein-Gordon.
13. Obtención del potencial gravitacional y curva de rotación para galaxias de disco, por medio de un método integral y uno diferencial.
14. Se desarrollaron ecuaciones cinéticas para obtener las ecuaciones de la hidrodinámica que describen parte de la dinámica de las galaxias de disco.

Los temas que se abordarán en esta tesis vendrán estructurados de la siguiente manera: El trabajo comienza con los antecedentes, que permiten plantear la problemática del tema aquí dado. El marco teórico es dividido en los siguientes capítulos:

En el capítulo 1 se da un breve repaso a la teoría de la relatividad general de Einstein y también se aborda una extensión de la geometría de Riemann para la relatividad general mediante una variedad llamada variedad de Finsler. Gracias a esto puede plantearse un modelo cosmológico usando la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Debido a que el tensor métrico de Finsler depende de las posiciones y de las velocidades; es posible obtener la expansión acelerada del universo de las puras propiedades geométricas de la variedad.

En el capítulo 2 se aborda el tema de invariantes adiabáticos y se da un breve repaso histórico del desarrollo del concepto y su relación con la constante de Planck.

En el capítulo 3 se plantea que la constante de Planck es el invariante adiabático del campo electromagnético debido a la expansión acelerada del universo, esto tanto para la geometría de Riemann como la de Finsler.

En el capítulo 4 se construye un desarrollo del campo electromagnético como un invariante adiabático de la expansión acelerada del universo para una variedad de Finsler y como gracias a esto pueden construirse para dicha variedad las ecuaciones de Maxwell y una ecuación de movimiento para una partícula cargada.

En el capítulo 5, se le da una interpretación a la función de onda usando el formalismo de de Broglie-Bohm de la onda piloto para la mecánica cuántica. Considerando que el electrón que gira alrededor del núcleo genera un campo electromagnético ya que se encuentra oscilando; es posible construir una función núcleo en términos de este campo que sea utilizada para escribir una transformada de Fourier, esta transformada permite pasar de un espacio en el que se encuentra un hamiltoniano clásico a otro espacio en el que se encuentre un hamiltoniano cuántico.

En el capítulo 6 se plantea, por medio de la ecuación de la acción y de relaciones

de similitud para la mecánica clásica, un modelo atómico y la energía del oscilador armónico cuántico usando la ecuación de movimiento para una partícula cargada en la variedad de Finsler.

En el capítulo 7 usando la ecuación de movimiento para una partícula cargada en la variedad de Finsler se encontrará el momento magnético anómalo del electrón dado para la teoría de la electrodinámica cuántica, y esto gracias a un desarrollo clásico y relativista del sistema del átomo de hidrógeno.

En el capítulo 8 se considera una variedad que varía adiabáticamente, descrita localmente por la métrica Robertson-Walker dependiente del tiempo. En las condiciones mencionadas anteriormente, es posible escribir las ecuaciones básicas de la física cuántica. Al hacerlo, la función de onda con interpretación probabilística se introduce de forma natural, es decir, no se necesita su introducción axiomática. Como ejemplo, la ecuación de Klein-Gordon se obtiene de primeros principios, es decir, de la geometría cambiante del espacio. Esto haciendo uso de la teoría de estabilidad y de la transformada de Fourier.

En el capítulo 9 se habla sobre la dinámica de galaxias de disco por medio de simetría cilíndrica y este problema es abordado por medio de un método integral y un método diferencial (método de transformadas integrales finitas) los cuales permiten encontrar el potencial gravitacional de dicha configuración y posteriormente la curva de rotación para dicha galaxia y compararla con otras curvas de rotación construidas a través de datos experimentales.

En el capítulo 10 se muestran algunos aspectos sobre la hidrodinámica y cinética del gas en galaxias de disco y su contribución a las curvas de rotación.

Posteriormente se dan las conclusiones finales, el apéndice y se presenta la bibliografía.

Antecedentes

Con la finalidad de describir el estado del arte de los conceptos principales que se abordarán en este trabajo de tesis, se presenta a continuación una breve descripción de los aspectos más generales e históricos de todos los temas que serán tratados a lo largo de este trabajo.

Relatividad General y Cosmología

Poco después de la formulación de la teoría de la relatividad especial en 1905, Albert Einstein comenzó a describir los fenómenos gravitatorios con ayuda de su nueva teoría. En 1907 comenzó la búsqueda de una nueva teoría relativista de la gravedad, su trabajo culminó en noviembre de 1915 con la presentación a la Academia Prusiana de las Ciencias de un artículo que contenía las que hoy son conocidas como ecuaciones de campo gravitacional

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Riemann, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, R es el escalar de curvatura de Ricci y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento. Las ecuaciones del campo gravitacional de Einstein son no lineales. Por este motivo, Einstein utilizó métodos de aproximación en la elaboración de las predicciones iniciales de la teoría.

En 1917, Einstein aplicó su teoría al universo en conjunto, iniciando el campo de la cosmología relativista.

Conforme con el pensamiento contemporáneo, en el que se suponía que el universo era estático, agregó a sus ecuaciones una constante cosmológica.

Las ecuaciones de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

y

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi GP,$$

son un conjunto de ecuaciones utilizadas en cosmología física que describen la expansión métrica del espacio en modelos homogéneos e isotrópicos del universo dentro del contexto

de la teoría general de la relatividad. Fueron halladas por Alexander Friedman en 1922 a partir de las ecuaciones de campo de Einstein. Estas ecuaciones no requieren de una constante cosmológica. En las ecuaciones de Friedmman a es un factor de escala, \dot{a} y \ddot{a} son términos de velocidad y aceleración en función de dicho factor respectivamente, k el factor de curvatura, G la constante de la gravitación universal, ρ es una densidad de masa-energía y P la presión de la masa-energía del universo.

En 1927 Lemaître utilizó estas soluciones para formular la primera versión del modelo del Big Bang, en la que nuestro universo ha evolucionado desde un estado inicial extremadamente caliente y denso. Tiempo después en 1929, debido a los resultados obtenidos por Hubble de que nuestro universo está en expansión, Einstein consideró al hecho de agregar esa constante cosmológica a sus ecuaciones como el mayor error de su vida.

Variedad de Finsler

En geometría diferencial, una variedad de Finsler es una variedad diferenciable en un espacio en el que la longitud de cualquier curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es dada por la longitud funcional $L[\gamma]$ contenida en una variedad finsleriana M

$$L[\gamma] = \int_a^b F(\gamma(\tau)) d\tau = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau.$$

El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para dicha longitud está en función explícitamente de las posiciones x^μ y las velocidades \dot{x}^μ . Las variedades de Finsler generalizan a las variedades de Riemman y al tipo de geometría que no necesariamente presenta la restricción cuadrática es a la que se le conoce como geometría de Finsler.

Élie Cartan, en el año de 1933 las nombró variedades de Finsler después de que Paul Finsler estudiara esta geometría en el año de 1918.

Mecánica Cuántica Antigua

Conviene mencionar que la teoría cuántica antigua es una recopilación entre los años 1900 a 1925 de los resultados anteriores a la mecánica cuántica moderna. La teoría nunca fue completa o autoconsistente, más bien fue un conjunto de procedimientos heurísticos que ahora se entienden como las primeras correcciones cuánticas a la mecánica clásica. El modelo de Bohr fue el centro del estudio y Arnold Sommerfeld hizo una contribución crucial mediante la cuantización de la componente del momento angular. Esto permitió que los orbitales de los electrones pasaran a ser elipses en lugar de círculos.

La principal herramienta era la cuantización de Bohr-Sommerfeld, un procedimiento para seleccionar a cierto conjunto discreto de estados de un movimiento clásico integrable como estados permitidos. Estos son como los orbitales permitidos del modelo atómico de Bohr; el sistema sólo puede estar en uno de estos estados y no en algún estado intermedio.

La idea básica de la teoría cuántica antigua es que el movimiento en un sistema atómico está cuantizado o discretizado. El sistema obedece a la mecánica clásica, excepto que no está permitido cada movimiento, solo aquellos que sí obedecen a la siguiente condición cuántica antigua

$$\oint_{H(p,q)=E} p_i dq_i = n_i h$$

donde p_i son las componentes de momento del sistema, q_i son las coordenadas correspondientes, h es la constante de Planck y n_i son los números cuánticos que son números enteros. La integral es un área en el espacio fase, que es una cantidad llamada acción y se cuantiza en unidades de la constante de Planck. Por esta razón, frecuentemente la constante de Planck era llamada el cuanto de acción. A lo que se resumía como que: “La acción para un proceso elemental es cambiado por el valor de h ”.

La motivación para la física cuántica antigua fue el principio de que las cantidades cuantizadas debían ser invariantes adiabáticas.

Formulación de de Broglie-Bohm

Ahora bien, el potencial cuántico es un concepto central de la formulación de de Broglie-Bohm de la mecánica cuántica introducida por David Bohm en 1952.

Inicialmente presentado bajo el nombre de potencial cuántico-mecánico, posteriormente potencial cuántico, en este se describía la interpretación de un potencial que actúa sobre una partícula cuántica. También se conoce como la energía potencial cuántica o potencial de Bohm cuántico.

En el marco de la teoría de de Broglie-Bohm, el potencial cuántico es un término dentro de la ecuación de Schrödinger que actúa para guiar el movimiento de las partículas cuánticas. En esta, se utiliza la forma polar de la ecuación de onda

$$\Psi = R e^{\frac{iS}{\hbar}},$$

con funciones reales R y S , donde R (usando su valor absoluto) es la amplitud de la función de onda Ψ , $\frac{S}{\hbar}$ es la fase y \hbar es la constante reducida de Planck. de Broglie postuló en 1926 que la función de onda representa una onda piloto (fotón virtual) que guía una partícula cuántica, pero posteriormente abandonó su enfoque debido a las objeciones planteadas por Wolfgang Pauli. En sus artículos Bohm en 1952 introdujo el potencial cuántico.

Si se toma en consideración la parte real de la ecuación de Schrödinger y se utiliza en ella la función de onda $\Psi = R e^{\frac{iS}{\hbar}}$ es posible encontrar la ecuación cuántica de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \left[\frac{|\nabla S|^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right]$$

donde el potencial cuántico se escribe como:

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}.$$

El concepto de un potencial cuántico conduce a la noción de no localidad en la física cuántica. Esto es así, porque el potencial cuántico es un término de energía adicional aparte de la conocida energía cinética y la energía potencial, este es un término de energía no local que surge necesariamente en vista del requisito de conservación de la energía.

Electrodinámica Clásica

Ahora bien, una partícula cargada es una partícula con carga eléctrica. Puede ser una partícula subatómica o un ion.

Así mismo, la fuerza de Lorentz es la fuerza ejercida por el campo electromagnético que recibe una partícula cargada o una corriente eléctrica.

Para una partícula sometida a un campo eléctrico combinado con un campo magnético, la fuerza electromagnética total o fuerza de Lorentz sobre esa partícula viene dada por

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

donde \vec{v} es la velocidad de la carga q , \vec{E} es el vector de intensidad de campo eléctrico y \vec{B} es el vector de inducción magnética.

En la teoría de la relatividad conviene escribir las leyes físicas en forma explícitamente tensorial. Eso implica que las magnitudes que se transforman vectorialmente, como, por ejemplo, la velocidad o la densidad de corriente, deben ser representadas por cuadvectores. La fuerza de Lorentz escrita en forma explícitamente tensorial es la siguiente

$$f_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 q F_{\alpha\beta} u^\beta.$$

donde $F_{\alpha\beta}$ es el tensor de Faraday y u^β es la 4-velocidad.

Teoría de la Estabilidad

En matemáticas, la teoría de estabilidad estudia la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos, es decir, examina cómo difieren las soluciones bajo pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales.

Esto se refiere a que pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales o en alguna de las variables que intervienen en la ecuación de movimiento, produzca un comportamiento suficientemente similar al comportamiento inicial sin dichas perturbaciones.

Para sistemas deterministas descritos por ecuaciones diferenciales, la estabilidad de dicho sistema de ecuaciones implica la estabilidad del sistema dinámico.

La estabilidad es importante en física, ya que en general en los problemas prácticos las condiciones iniciales nunca se conocen con toda precisión y la predictibilidad requiere que pequeñas desviaciones iniciales, no generen comportamientos cualitativamente muy diferentes a corto plazo. Cuando la diferencia entre dos soluciones con valores iniciales cercanos puede acotarse, se dice que la evolución temporal del sistema presenta estabilidad.

De acuerdo con el teorema de Lyapunov para la suma de valores propios λ de soluciones independientes, las ecuaciones de movimiento de Hamilton se pueden condicionar bajo la siguiente condición necesaria para la estabilidad dada por Chetaev:

$$\lambda \left\{ \exp \int L dt \right\} = 0, \quad \text{donde} \quad L = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial S}{\partial q_j} \right),$$

donde para la condición de estabilidad L ; se tiene que q_i y q_j son coordenadas generalizadas, λ el eigenvalor, S es la acción y g_{ij} la métrica.

La estabilidad de un punto de equilibrio significa que las soluciones que empiezan suficientemente cerca de un punto de equilibrio (a una distancia δ de ellos) permanecen suficientemente cerca para siempre (como mucho a una distancia ε la una de la otra).

Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación que describe un campo escalar libre en teoría cuántica de campos, recibe el nombre de ecuación de Klein-Gordon; que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar} \right)^2 \Psi.$$

donde Ψ es la función de onda, c es la velocidad de la luz, t el tiempo y m_0 la masa relativista en reposo.

En el formalismo de la teoría cuántica de campos, el campo de Klein-Gordon describe un tipo de campo que tratado mediante la cuantización canónica describe un campo escalar con carga eléctrica de spin 0 (bosón).

La ecuación de Klein-Gordon fue propuesta originalmente por Erwin Schrödinger como ecuación para la función de onda de una partícula cuántica.

La ecuación de Klein-Gordon no admitía una interpretación probabilística adecuada; es decir, la densidad de probabilidad no es definida positiva por lo que el cuadrado del módulo del campo de Klein-Gordon, a diferencia de lo que sucede con una función de onda ordinaria no puede ser interpretado como una probabilidad.

Por esta razón, esta ecuación presenta el hecho de que la energía no esté acotada inferiormente, lo que da partículas inestables. Tiempo después, gracias a la ecuación de Dirac, se presentó la interpretación de esta energía negativa como antipartículas.

Además, la ecuación de Klein-Gordon no representa adecuadamente el espín para ciertas partículas; por todo esto Schrödinger consideró más adecuado pasar a una versión no relativista de la ecuación que es la que actualmente se conoce como ecuación de Schrödinger.

La ecuación de Klein-Gordon será deducida aquí a partir de primeros principios, usando la transformada de Fourier

$$Q_t(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

y la teoría de estabilidad. Donde $Q_t(t)$ es una función dependiente del tiempo t y $G_t(\omega)$ es una función dependiente de la frecuencia ω .

Dinámica de Galaxias de Disco

Un punto diferente que tratar como consecuencia astrofísica de los modelos cosmológicos es la dinámica de las galaxias.

La curva de rotación de una galaxia de disco (también llamada curva de velocidad) representa la velocidad de rotación de las estrellas observables o el gas como función de su distancia radial al centro de la galaxia, la cual normalmente se representa gráficamente. Aquí, la velocidad orbital (en km/s) de las estrellas o el gas en la galaxia se representa en el eje de ordenadas y la distancia al centro de la galaxia en el eje de abscisas.

Una característica general que se observa en las curvas de rotación galáctica que han sido observadas, es que la velocidad de rotación de las estrellas y el gas es, se mantiene constante hasta los valores máximos de la distancia que es posible medir. Se ha observado que las estrellas orbitan alrededor del centro de estas galaxias a una velocidad constante en un intervalo grande de distancias al centro de cualquier galaxia.

Si los discos de las galaxias tienen una distribución de masa similar a la distribución de estrellas y gas que se observa, las velocidades de las curvas de rotación deberían disminuir en las largas distancias de la misma forma que ocurre en otros sistemas con la mayoría de su masa en el centro, como por ejemplo el Sistema Solar, los cuales cumplen con la predicción de las leyes de Kepler.

Todos estos antecedentes dados, serán de utilidad en este trabajo. Por esa razón serán abordados a lo largo de todo el escrito y a partir de ellos podrán desarrollarse todos los temas planteados anteriormente.

Capítulo 1

Cosmología en la Variedad de Finsler

En este capítulo se dará un repaso acerca los principales conceptos de la teoría de la relatividad general, así como de la métrica de Finsler ya que es uno de los ejes principales de este trabajo; también se abordará como repaso cómo es posible construir en el trabajo de [9], las ecuaciones de Friedmman para un modelo cosmológico en dicha variedad de Finsler.

1.1. Conceptos Básicos

En relatividad general, aunque las variedades de Riemann son generalmente curvas, puede encontrarse que dados dos puntos diferentes y suficientemente cercanos existe una curva de longitud mínima. Estas líneas de mínima longitud se llaman líneas geodésicas y son una generalización del concepto de una línea de mínima longitud (línea recta) en un espacio plano. Estas son las curvas que localmente conectan sus puntos a lo largo de las trayectorias más cortas.

Así, dada una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ contenida en una variedad riemanniana M , se define la longitud de dicha curva $L(\gamma)$ mediante el vector tangente a la misma y las componentes $g_{\mu\nu}$ del tensor métrico del siguiente modo [5]:

$$L[\gamma] = \int_a^b F(\gamma(\tau))d\tau = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}d\tau, \quad (1.1)$$

donde \dot{x}^ν es la cuadrivelocidad. En relatividad general, cuando el tensor métrico depende solamente de las coordenadas, pueden encontrarse las ecuaciones de Einstein [5]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Gracias a estas ecuaciones en (1.2), es posible construir un modelo cosmológico que corresponde a las ecuaciones de Friedmman [5]

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (1.3)$$

y

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi GP \quad (1.4)$$

en la ecuación (1.3) el término de densidad ρ se refiere a una densidad arbitraria de materia, en la sección 1.1.4 y en el capítulo 3 se verá un contenido de materia específico.

Este par de ecuaciones (1.3) y (1.4) son dadas por la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker [5]

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2\right), \quad (1.5)$$

donde k es el parámetro de curvatura y a un factor de escala que representa el radio del universo.

Estas ecuaciones cosmológicas (1.3), (1.4) y la métrica (1.5) de la que son derivadas, como fue mencionado arriba pertenecen a una variedad de Riemman M , por esa razón en la siguiente sección se dará un breve repaso de la relatividad general que fue construida por Einstein en esta variedad de Riemman M .

1.2. Relatividad General en Variedad de Riemman

En relatividad general las soluciones cosmológicas se deducen partiendo de una métrica con restricción cuadrática dada como $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ [5].

Posteriormente se procede a calcular los símbolos de Christoffel [5]

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\lambda\beta,\alpha} + g_{\alpha\lambda,\beta} - g_{\alpha\beta,\lambda}). \quad (1.6)$$

Estos símbolos se definen para describir los desplazamientos paralelos; un desplazamiento paralelo se entiende cuando un vector al desplazarse no cambia su magnitud ni su dirección. Cuando se desplaza paralelamente un vector en coordenadas cartesianas, las componentes de los vectores permanecen constantes sin cambio alguno. En algunos sistemas de coordenadas esto no es así y al mover un vector paralelamente, de un punto a otro, sus componentes cambian. Así, si un vector A^γ es paralelamente desplazado sobre un intervalo δx^β , el cambio en sus componentes A_α está determinado por los símbolos de Christoffel $\delta A^\alpha = -\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha A^\gamma \delta x^\beta$ [5].

Todas las líneas geodésicas son extremales de la integral (1.1). Para encontrar la ecuación de las geodésicas, se considera que dichas geodésicas están parametrizadas mediante la longitud de arco s . En ese caso, usando los símbolos de Christoffel asociados a la conexión sin torsión, la curva geodésica de mínima longitud que pasa por un punto x_0 y tiene el vector tangente \vec{v} constante satisface la siguiente ecuación [5]:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (1.7)$$

donde:

$$x(0) = x_0 \quad \left. \frac{dx}{ds} \right|_{x_0} = \vec{v}. \quad (1.8)$$

Una vez obtenidos los símbolos de Christoffel se procede a calcular el tensor de Riemman [5]:

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda. \quad (1.9)$$

Este tensor describe una medida de la desviación dada por la curvatura de la métrica para un tipo de geometría no euclídea respecto a la métrica euclídea. Una vez se ha obtenido este tensor, se contrae con el tensor métrico para obtener el tensor de Ricci $R_{\nu\beta} \equiv g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\nu\alpha\beta}^\alpha$ y posteriormente el escalar de curvatura $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R^\alpha_\alpha$; ambos términos permiten calcular el tensor de curvatura de Einstein $G^{\mu\nu}$, el cual es proporcional al tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ en el caso de presencia de materia o de campos electromagnéticos. Esto permite posteriormente obtener las ecuaciones de Einstein (1.2) y con ellas las ecuaciones de Friedmman (1.3) y (1.4) [5].

Ahora bien, al igual que en la sección 1.1, en la siguiente sección se dará un breve repaso de los conceptos básicos de la métrica de Finsler.

1.3. Métrica de Finsler

De forma análoga se realizan los cálculos mencionados anteriormente partiendo de la variedad de Finsler. En geometría diferencial, una variedad de Finsler es una variedad diferenciable en un espacio en el que la longitud de cualquier curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ contenida en una variedad finsleriana M , es dada por la longitud funcional [6]:

$$L[\gamma] = \int_a^b F(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) d\tau \quad (1.10)$$

las variedades de Finsler generalizan a las variedades de Riemman, en el sentido de que dada la métrica introducida por Riemman basada en la longitud de arco $ds^2 = F(x^1, \dots, x^n; dx^1, \dots, dx^n)$; aquí $F(x, y)$ es una función positiva $F(x, y) > 0$ (cuando $y \neq 0$), homogénea de grado uno en "y", es decir que $F(x, py) = pF(x, y)$. Un importante caso especial es cuando [7]:

$$F^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (1.11)$$

al tipo de geometría que no necesariamente presenta la restricción (1.11) es a la que se le conoce como geometría de Finsler [8]. Esto se construye de esta forma ya que la ecuación para la longitud de arco con un significado físico aceptable es de segundo orden.

Hipótesis como la anterior modifican la fuerza de gravedad y, por lo tanto, las ecuaciones de la relatividad general.

Sea (M, a) una variedad riemanniana y $\sigma(x, y)$ una 1-forma diferencial en M como [8], [9].

$$\sigma(x, y) = \sqrt{a_{\kappa\lambda}(x)y^\kappa y^\lambda}. \quad (1.12)$$

Las 1-formas, también llamadas formas pfaffianas, son la manera rigurosa de tratar los diferenciales de funciones reales sobre una variedad y son también un conjunto formado por campos vectoriales. En geometría diferencial o en el estudio de las variedades diferenciables, las 1-formas actúan como funciones lineales reales definidas sobre el espacio vectorial tangente a la variedad diferenciable que se esté considerando. Así pues el conjunto de todas las 1-formas definidas en un punto de la variedad es isomorfo al espacio dual del espacio vectorial tangente en dicho punto. En física, por ejemplo, las diferenciales de las variables de estado usadas en termodinámica son de hecho 1-formas.

El uso de esta métrica de Finsler en la siguiente sección nos permitirá encontrar una generalización de las ecuaciones de Friedmman (1.3) y (1.4).

1.4. Ecuaciones de Einstein y Cosmología en Variedad de Finsler

El objetivo principal de esta sección es abordar un repaso sobre cómo puede formarse un modelo cosmológico en la variedad de Finsler y que diferencias puede presentar respecto al modelo cosmológico estándar.

En la ecuación (1.12) $a_{\kappa\lambda}$ es el tensor métrico de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker [8], [9]:

$$a_{\kappa\lambda}(x) = \text{diag}\left(1, -\frac{a^2}{1 - kr^2}, -a^2r^2, -a^2r^2\text{sen}^2\theta\right), \quad (1.13)$$

entonces

$$F(x, y) = \sigma(x, y) + \phi(x)\hat{k}_\alpha y^\alpha \quad (1.14)$$

define una métrica de Randers en M y (M, F) es una variedad de Randers, este es un caso especial de una variedad de Finsler que presenta métrica cuadrática.

Una de las diferencias que presenta el modelo del universo en la métrica de Finsler es que el espacio presenta no es isotrópico, como se verá en la siguiente subsección, esto se debe a la presencia de un campo electromagnético primordial débil.

1.4.1. Anisotropía del Espacio

La anisotropía (término opuesto de isotropía) es la propiedad general de la materia (y en este caso del universo) según la cual sus propiedades varían según la dirección en que son examinadas.

En la ecuación (1.14) el término $\phi(x)$ es un término escalar que representa la anisotropía del espacio y \hat{k}_α denota un vector de onda que apunta en la dirección de propagación de la onda. Gracias a esto se define un campo vectorial $u_\alpha(x) = \hat{k}_\alpha\phi(x)$, que representa un campo electromagnético primordial débil $|u_\alpha| \ll 1$ incorporado a la geometría del espacio-tiempo como una característica intrínseca [8], [9].

En esta métrica las coordenadas espaciales son comóviles y las temporales representan el tiempo medido por el observador comóvil. El vector $y^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ representa la 4-velocidad tangente de un observador comóvil a lo largo de una familia preferida de líneas de mundo (líneas de flujo de fluido) en un universo localmente anisotrópico; aquí, el parámetro de longitud de arco s es el parámetro para el tiempo propio τ . Se procede considerando coordenadas naturales, es decir, $c = 1$. Si se escoge la dirección $y = \dot{x}$, entonces $\sigma(x, \dot{x}) = 1$.

Puede esperarse que este campo apunte en la misma dirección con los vectores tangentes de las líneas de flujo de fluido. Como resultado, tendrá solo una componente time-like que puede expresarse como una función del tiempo $u_a = (u_0(t), 0, 0, 0)$. La información sobre la anisotropía está codificada en la componente $u_0(t)$ [8], [9]. Se puede considerar una variación linealizada de la anisotropía, considerando que la aproximación:

$$\phi(x) \approx \phi(0) + \partial_\mu\phi(0)x^\mu \quad (1.15)$$

es válida para una x pequeña [8], [9].

Esta propiedad de anisotropía del universo modelado en la métrica de Finsler, permitirá observar en la sección 1.4 que las ecuaciones de Friedmman al incluir este término, permiten derivar de dichas ecuaciones la expansión acelerada del universo.

Como se vio en la sección 1.2, el primer paso para encontrar las ecuaciones de Friedmman consiste en encontrar los símbolos de Chistoffel, lo cual será desarrollado en la siguiente subsección en el marco de la variedad de Finsler.

1.4.2. Símbolos de Christoffel en Métrica de Finsler

El tensor métrico del espacio de Finsler, para la función $F(x, y)$ dada en (1.12) puede ser calculada directamente de la forma [8], [9]

$$f_{\mu\nu}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^\mu \partial y^\nu}. \quad (1.16)$$

Usando (1.12), (1.13) y (1.14) en (1.16) es posible obtener un tensor métrico tipo Finsler [8], [9]:

$$f_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{4\sigma}(u_\mu y_\nu + u_\nu y_\mu) - \frac{\beta}{\sigma^3} y_\mu y_\nu + u_\mu u_\nu, \quad (1.17)$$

donde se tiene que [8], [9]

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \frac{F(x, y)}{\sigma(x, y)} a_{\mu\nu}(x) \quad (1.18)$$

y

$$\beta(x, y) = \phi(x) \hat{k}_\alpha y^\alpha = u_\alpha(x) y^\alpha. \quad (1.19)$$

Bajo el supuesto de campo débil, puede aproximarse la métrica de Finsler (1.17) como una perturbación de la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker, ya que en la relatividad general un campo vectorial débil en un espacio (por ejemplo, campo magnético primordial) puede tratarse como una perturbación de primer orden del tensor métrico de Riemann. Se considera que la métrica tiene la signatura $(+, -, -, -)$ para cualquier (x, y) . El cuadrado de la longitud de un vector contravariante arbitrario X^μ es definido como $|X|^2 = f_{\mu\nu}(x, y) X^\mu X^\nu$ [8], [9].

En este caso puede observarse para la ecuación (1.17) que si en ella se sustituyen (1.18) y (1.19) y eliminando los términos de velocidades, el tensor métrico (1.17) se convierte en el tensor métrico de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (1.13) [8], [9].

Ahora bien, una vez encontrado el tensor métrico (1.17), se procede al igual que en relatividad general a calcular para este los símbolos de Christoffel, que son las componentes de conexión de la métrica están definidos aquí como [8], [9]

$$\gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} f^{\mu\lambda}(x, y) (f_{\lambda\alpha,\beta}(x, y) + f_{\lambda\beta,\alpha}(x, y) - f_{\alpha\beta,\lambda}(x, y)). \quad (1.20)$$

En muchos casos se considera una métrica de Finsler conveniente para aproximar las teorías gravitacionales [6]. Esta métrica está conectada a una métrica riemanniana, $r_{\mu\nu}(x)$ denominada métrica riemanniana osculatríz [6]:

$$r_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu}(x, y(x)) \quad (1.21)$$

con los siguientes símbolos de Christoffel [8], [9]:

$$\begin{aligned} r_{\lambda\mu}^\kappa(x) &= \gamma_{\lambda\mu}^\kappa(x, y(x)) + C_{\mu\rho}^\kappa(x, y(x)) \frac{\partial y^\rho(x)}{\partial x^\lambda} \\ &+ C_{\lambda\rho}^\kappa(x, y(x)) \frac{\partial y^\rho(x)}{\partial x^\mu} - g^{\kappa\sigma}(x, y(x)) C_{\lambda\mu\rho}(x, y(x)) \frac{\partial y^\rho(x)}{\partial x^\lambda}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

aquí se usa la notación de torsión.

Así, la ecuación de la geodésica es dada ahora por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + r_{\rho\sigma}^\mu(x) y^\rho y^\sigma = 0. \quad (1.23)$$

Un espacio de Finsler se convierte en un espacio de Riemman si el tensor de torsión (también llamado como conexión de Cartan) [8], [9].

$$C_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial f_{\mu\alpha}(x, y)}{\partial y^\beta}, \quad (1.24)$$

es muy pequeño $C_{\mu\alpha\beta} \approx 0$ en el caso en que dichos componentes $C_{\mu\alpha\beta}$ son proporcionales a los componentes de campo u_α , debido a que $|u_\alpha| \ll 1$ y además, si la componente $\dot{\gamma}(t)$ en la ecuación (1.10) es cero $\dot{\gamma}(t) = 0$; es decir, la componente $y(x)$ de (1.22) es cero $y(x) = 0$; así, se pueden despreciar todos los términos dependientes de torsión en (1.22). Con esto los símbolos de Christoffel dados en (1.20) para la variedad de Finsler se reducen a los dados en (1.6) para la métrica de Riemman $\Gamma_{\lambda\nu}^\kappa(x) \approx \gamma_{\lambda\nu}^\kappa(x, y(x))$ [8], [9].

Así, puede observarse que una métrica de Finsler es una generalización de la métrica de Riemman en el caso en que se consideran componentes de torsión y en el que la métrica depende explícitamente de las velocidades. Por esto se considera que los términos de torsión solo serían significativos en las proximidades de un agujero negro [8], [9].

Sin embargo, en la descripción que se presenta en variedad de Finsler, los símbolos de Christoffel si dependen explícitamente de las velocidades, pero no de los términos de torsión, con lo que se definen de la forma $A_{\lambda\nu}^\kappa(x) \approx \gamma_{\lambda\nu}^\kappa(x, y(x))$, donde $A_{\lambda\nu}^\kappa(x)$ representa los coeficientes de conexión afín osculatrix [8], [9].

Bajo el supuesto de que el campo vectorial y^α satisface la relación $y_{;\nu}^\mu = 0$, la δ -derivada covariante Finsleriana y la derivada covariante de Cartan de un campo vectorial arbitrario $X^\alpha(x)$ son iguales [6]

$$X_{;\beta}^a(x, y(x)) = X_{|\beta}^a(x, y(x)). \quad (1.25)$$

Para un campo vectorial de Finsler $X^a(x, y(x))$ la δ -derivada covariante tiene la forma [6]

$$X_{;\beta}^a(x, y(x)) = X_{,\beta}^a(x) + \Gamma_{\rho\beta}^{*\alpha}(x, y(x))X^\rho(x) \quad (1.26)$$

y la derivada covariante de Cartan es dada por [8], [9]:

$$X_{;\beta}^a(x, y(x)) = X_{,\beta}^a(x) - \frac{\partial X^\alpha}{\partial y^\rho}(x, y(x))G_{\beta}^\rho(x) + \Gamma_{\rho\beta}^{*\alpha}(x, y(x))X^\rho(x). \quad (1.27)$$

La componente de conexión de Cartan $\Gamma_{\rho\beta}^{*\alpha}$ es definido como [8], [9]:

$$\Gamma_{\rho\beta}^{*\alpha} = (\gamma_{\lambda\mu}^\kappa - C_{\lambda\rho}^\kappa G_{\mu}^\rho - C_{\rho\mu}^\kappa G_{\lambda}^\rho + C_{\lambda\mu\rho} G_{\mu}^\rho g^{\nu\kappa})(x, y) \quad (1.28)$$

aquí, G_{ν}^μ , G^μ son [8], [9]:

$$G_{\nu}^\mu = \frac{\partial G^\mu}{\partial y^\nu} \quad (1.29)$$

y

$$2G^\mu = \gamma_{\rho\sigma}^\mu y^\rho y^\sigma \quad (1.30)$$

en el caso en que estos dos términos son cero, los símbolos de Christoffel se reducen a los tratados en la métrica de Riemman.

Gracias a que fue posible obtener los símbolos de Christoffel, en la siguiente subsección será posible obtener los tensores de Riemman y de Ricci.

1.4.3. Tensores de Curvatura de Riemman y Ricci en Métrica de Finsler

El tensor de curvatura afín asociado con la elección adecuada de los coeficientes de conexión $A_{\lambda\nu}^{\kappa}$ proporciona directamente la curvatura que está asociada con las relaciones de conmutación de las δ -derivadas. Esta relación es análoga al tensor de curvatura de Riemman (1.7) para variedad de Finsler se tiene [8], [9]

$$L_{\lambda\nu\mu}^{\kappa} = \partial_{\mu}A_{\lambda\nu}^{\kappa} - \partial_{\nu}A_{\lambda\mu}^{\kappa} + A_{\lambda\nu}^{\rho}A_{\rho\mu}^{\kappa} - A_{\lambda\mu}^{\rho}A_{\rho\nu}^{\kappa}, \quad (1.31)$$

y el tensor de Ricci en este caso es dado por $L_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$, mientras que aquí, el escalar de curvatura se escribe como

$$L = f^{\mu\nu}L_{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

Tomando en cuenta que si $\frac{F}{\sigma} = 1 + \frac{u_{\alpha}y^{\alpha}}{\sigma} \approx 1$, pueden definirse las siguientes cantidades tensoriales z_t, z_{θ}, z_r de la forma [8], [9]:

$$z_{\mu}(x) = \left(\frac{F}{2\sigma}\right)_{,\mu}(x, y(x)) \quad (1.33)$$

relacionada a la variación de la anisotropía. Ya que el vector y^{α} se fija para satisfacer la condición $y^{\alpha}; \mu = 0$ lo que conduce a coordenadas comóviles $y^{\alpha} = (1, 0, 0, 0)$ [8], [9]:

$$z_{\mu}(x) = \frac{u_{0,\mu}(x)}{2} = \frac{1}{2}\hat{k}_0\phi(x)_{,0}. \quad (1.34)$$

Así, los símbolos de Christoffel $A_{\lambda\nu}^{\kappa}(x)$ que satisfacen (1.13) y (1.20) se expresan como [8], [9]:

$$\begin{aligned} A_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} + \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}z_t, \\ A_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 + a^2r^2z_t \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} A_{33}^0 &= a\dot{a}r^2\text{sen}^2\theta + a^2r^2\text{sen}^2\theta z_t \\ A_{01}^1 &= A_{02}^2 = A_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} + z_t \\ A_{22}^1 &= -r(1-kr^2)(1-rz_t) \\ A_{22}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2} + z_t \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$A_{33}^1 = -r(1-kr^2)(1-rz_r)$$

y

$$\begin{aligned}
A_{12}^2 &= A_{13}^3 = \frac{1}{r} + z_r \\
A_{33}^2 &= -\text{sen}\theta \cos\theta + \text{sen}^2\theta z_\theta \\
A_{23}^3 &= \cot\theta + z_\theta.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Una vez obtenidos los símbolos de Christoffel, puede calcularse el tensor de Riemman y el tensor de Ricci.

El cálculo del tensor de Ricci se puede simplificar en virtud de que $z_{\mu,\nu} = 0$ y de que $z_\mu^2 \approx 0$ es decir $\ddot{u}_0 \approx 0$ y $\dot{u}^2 \approx 0$ [8], [9].

Esta aproximación es válida ya que $\phi(x)$ se expresa linealmente mientras que z_μ se puede considerar muy pequeña en las primeras etapas de un universo en expansión altamente acelerado [8], [9]. Con esto se obtienen las componentes distintas de cero del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
L_{00} &= -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}z_t\right) \\
L_{11} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k + 4a\dot{a}z_t)/(1 - kr^2) \\
L_{22} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k + 4a\dot{a}z_t)r^2 - kr^3z_r - \cot\theta z_\theta \\
L_{33} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k + 4a\dot{a}z_t)r^2\text{sen}^2\theta + 2\text{sen}\theta \cos\theta z_\theta.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Gracias a estas componentes del tensor de Ricci en la siguiente subsección será posible encontrar las ecuaciones de Friedmman para un modelo cosmológico en la variedad de Finsler.

1.4.4. Ecuaciones de Friedmman en Variedad de Finsler para un Universo Anisotrópico

Ahora es posible describir el tensor de energía-momento para un fluido perfecto en una variedad de Finsler para un observador comóvil como [8], [9]

$$T_{\mu\nu}(x, y(x)) = (\rho + P)y_\mu(x) - Pg_{\mu\nu}(x, y(x)), \tag{1.39}$$

donde $P \equiv P(x)$, $\rho \equiv \rho(x)$ son la presión y la densidad de energía del fluido respectivamente. El vector $y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ es la 4-velocidad del fluido dado que $y^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ con respecto a las coordenadas comóviles. Así puede expresarse $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -Pf_{ij})$, lo que se ve de la forma siguiente [8], [9]

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \rho \\
T_{ij} &= -Pf_{ij} \\
T &= T^\mu_\mu = f^{00}\rho - 3P.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

En esta sección ρ se refiere a la densidad de materia-energía del universo y P es la presión que la materia ejerce en la expansión del universo.

Dadas (1.38) y (1.39), y ya que en las ecuaciones de Einstein pueden construirse usando el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, con proporcionalidad análoga a las ecuaciones de Einstein en (1.2) de la forma [8], [9]:

$$L_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}). \quad (1.41)$$

Al desarrollar las componentes que no son cero para el tensor de Ricci dados en (1.38) y del tensor de energía-momento dados en (1.40) utilizando la ecuación (1.41), se obtienen las ecuaciones de Friedman en el límite de campo débil [8], [9]:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3\dot{a}}{4a}\dot{u}_0 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (1.42)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} + \frac{11\dot{a}}{4a}\dot{u}_0 = 4\pi G(\rho - P) \quad (1.43)$$

después de restar a la ecuación (1.43) de la (1.42) se obtiene [8], [9]:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\dot{a}}{a}z_t = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.44)$$

donde se ha definido $z_t = \dot{u}_0$. La cantidad z_t es una constante ya que se consideró un enfoque lineal para $\varphi(x)$ dado por (1.15) [8], [9].

Las ecuaciones anteriores son similares a las derivadas en la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker en el marco de Riemann, solo que las ecuaciones (1.42), (1.43) y (1.44) contienen un término extra que se asocia a la anisotropía del Universo presente $\frac{\dot{a}}{a}z_t$. Comparando así con el resultado obtenido por Friedman en (1.3) y (1.4) [8], [9]:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (1.45)$$

y

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi GP \quad (1.46)$$

puede observarse que éstas no contienen el término de anisotropía extra. De igual manera, las ecuaciones (1.45) y (1.46) son un caso límite de las ecuaciones (1.44) y (1.43) cuando la métrica no depende del término de velocidad.

La ecuación (1.44) describe un universo auto-acelerado; esto quiere decir que la expansión acelerada observada en el universo es causada debido a la variación del término de velocidades de la métrica de Finsler; es decir, que el término de la constante cosmológica que describe la expansión acelerada del universo puede explicarse como una propiedad intrínseca (en ese sentido es auto-acelerado) de la métrica del universo en lugar de ser introducido a mano en las ecuaciones del campo gravitacional.

En este proceso de expansión, el universo presenta y controla una transición del universo para un estado de anisotropía a una fase isotrópica más suave. Ya que z_t está relacionada a la variación de anisotropía se espera que tenga un signo negativo para describir dicha auto-aceleración [8], [9].

La cantidad física z_t describe la variación de la anisotropía que evoluciona linealmente debido a (1.15); depende del escalar $\varphi(x)$, que es la única cantidad lagrangiana que nos da una idea de la evolución de la anisotropía. El parámetro z_t depende de las unidades del parámetro de Hubble como implica la ecuación (1.44). Es significativo que z_t dependa en las propiedades geométricas de la variedad espacio-tiempo de Finsler. De hecho, la componente C_{000} puede calcularse directamente a partir de (1.24) como [8], [9]:

$$C_{000} = \frac{u_0}{2} \quad (1.47)$$

y después de diferenciar con respecto al tiempo propio, considerando a la dependencia directa de z_t de la componente de torsión de Cartan C_{000} [8], [9]

$$z_t = 2C_{000,0} \quad (1.48)$$

por lo tanto, la variación de la anisotropía está estrechamente relacionada con la variación del tensor de torsión de Cartan como un objeto intrínseco del espacio-tiempo de Finsler [8], [9].

El estudio de un modelo de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker con un campo vectorial débil incorporado en la estructura temática del espacio-tiempo, proporciona la ecuación extendida tipo Friedman (1.44). La contribución de la variación de la anisotropía se expresa mediante el parámetro adicional z_t producido por el carácter Finsleriano de la geometría del espacio-tiempo [8], [9].

En la ecuación (1.48), z_t depende directamente de la componente de torsión de Cartan C_{000} [8], [9].

Puede considerarse también las perturbaciones cosmológicas, ya que el enfoque en Finsler genera desviaciones de la homogeneidad y la isotropía. Puede esperarse que $\varphi(x)$ disminuya monótonamente a medida que el universo se expande, para obtenerse el modelo de Friedmman-Lemaître-Robertson-Walker estándar. Esto garantiza valores negativos para el parámetro z_t y proporciona un modelo cosmológico autoacelerado [8], [9].

La imagen completa de la anisotropía dirigida por un campo vectorial electromagnético primordial puede incorporarse localmente a la estructura métrica anisotrópica de un espacio-tiempo de Finsler [8], [9].

En este sentido, como la métrica de Finsler está en función de la velocidad de la forma $F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$. Las ecuaciones de movimiento en métrica de Finsler tienen la misma forma que en una métrica de Riemman, pero estas ecuaciones de movimiento en métrica de Finsler tienen la propiedad de que localmente son curvas. Ya que aunque se pueda acercar a un punto local, esa dependencia de la velocidad $\dot{\gamma}(t)$, mantiene variedad curva.

El universo mantiene esa curvatura, ya que al tener dependencia la métrica de Finsler del término extra $\phi(x)\hat{k}_\alpha$ que aparece en la ecuación (1.14) el espacio se vuelve

anisotrópico, porque representa un campo electromagnético primordial débil que quita la isotropía del espacio.

Por esta razón las propiedades del universo descrito en la métrica de Finsler varían dependiendo de la dirección en la que se observe el universo. Esto, además, hace que la presencia del mismo campo electromagnético le confiera cierta curvatura al espacio-tiempo. De igual manera como ya fue mencionado la dependencia de la velocidad $\dot{\gamma}(t)$ también evita que localmente el espacio se vuelva plano.

Si se comparan las propiedades del universo en el modelo cosmológico en variedad de Finsler con el modelo cosmológico en Riemann para la cosmología estándar. Se puede ver que, en la cosmología estándar, dada por las ecuaciones de Friedman el universo presenta isotropía del espacio; ya que su métrica no depende del término de velocidad y no existe presente un campo primordial electromagnético débil de manera intrínseca. Esto conlleva a que el universo sea localmente plano y que la expansión del universo no aparezca de las propiedades de la geometría del universo y deba ser metida a mano en las ecuaciones de Einstein.

Ahora bien, en el capítulo 2 se describirá la teoría mecánica de invariantes adiabáticos. Ya que en el capítulo 3 será descrito un modelo cosmológico en la variedad de Finsler, pero en este caso el radio del universo variará con invariancia adiabática.

Capítulo 2

Invariantes Adiabáticos

En este capítulo se hablará a manera de repaso de un concepto denominado invariancia adiabática, este concepto es de interés porque en conjunto con la métrica de Finsler vista en el capítulo 1 hace posible la construcción de un modelo cosmológico en donde el radio del universo varia en el tiempo con dicha invariancia adiabática. Este modelo se repasará en el capítulo 3.

2.1. Mecánica Cuántica Antigua

La constante de Planck fue propuesta en el año 1900. Planck utilizó dicha constante en sus estudios sobre la radiación del cuerpo negro. Este proponía que la energía de cualquier sistema que absorbe o emite radiación electromagnética de frecuencia ν , era un número entero de veces la energía de un cuanto $E = h\nu$ donde h es la constante de Planck cuyo valor es $h = 6,626 \times 10^{-27} \text{ erg}\cdot\text{s} = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. Denotada como h , es la constante que frecuentemente se define como el cuanto elemental de acción. Planck originalmente le denominó “cuanto de acción” debido a que la cantidad denominada acción de un proceso físico (el producto de la energía implicada y el tiempo empleado) solo podía tomar valores discretos, es decir, múltiplos enteros de h [10].

Tiempo después, Niels Bohr propuso el primer modelo atómico en el que se introduce una cuantización; para explicar cómo los electrones pueden tener orbitas estables alrededor del núcleo. Esta cuantización se basó en tres postulados fundamentales [10].

1) Los electrones describen orbitas circulares en torno al núcleo del átomo sin irradiar energía. Para mantener la órbita circular, la fuerza de Coulomb experimentada por el electrón debe ser igual a la fuerza centrípeta $k\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$.

2) Las únicas órbitas permitidas para un electrón son aquellas para las cuales el momento angular L , del electrón sean un múltiplo entero de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Esta condición matemática se escribe como $L = m_e v r = n\hbar$ con $n = 1, 2, 3, \dots$

3) El electrón solo emite o absorbe energía en los saltos de una órbita permitida a otra. En dicho cambio se emite o absorbe un fotón cuya energía es la diferencia

de energía entre ambos niveles. Este fotón, según la ley de Planck tiene una energía $E_\gamma = h\nu = E_{nf} - E_{ni}$ [10].

El modelo atómico de Bohr puede generalizarse en un modelo realizado por Sommerfeld, el cual será analizado en la siguiente sección.

2.2. Modelo Atómico de Sommerfeld

Años después, Arnold Sommerfeld sugirió algunas mejoras al modelo de Bohr, este sugirió que los electrones viajan en órbitas elípticas alrededor del núcleo en lugar de órbitas circulares (excepto para $n = 1$ la primer órbita en el modelo de Sommerfeld se reduce a la primer orbita circular de Bohr).

Antes que todo, debe aclararse que el modelo de Bohr-Sommerfeld solo corresponde a la teoría de Bohr para el primer orbital. Una teoría debería tener poder predictivo, mientras que el modelo del átomo de Bohr y la mecánica cuántica ortodoxa no tienen ese poder predictivo.

Además, el modelo de Bohr-Sommerfeld y la mecánica cuántica están basados en un cierto número de axiomas. En este trabajo de tesis se busca desarrollar una teoría que unifique la relatividad general y la mecánica cuántica; para realizar dicha unificación no se necesitan ni se involucran estos axiomas.

Por este motivo debe ser mencionado que la mecánica cuántica y el modelo de Bohr-Sommerfeld son incompletos ya que no toman en cuenta la variedad en la que vive nuestro universo, y por lo tanto no considera la expansión del universo como tal; esto conlleva a que no puedan ser usadas para construir una teoría completa y correcta que unifique la física cuántica y la relatividad general.

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de movimiento en variedad de Finsler conservan curvatura local, debido a que el campo electromagnético es intrínseco a la métrica de Finsler en estas ecuaciones.

Por esa razón localmente el fotón interactúa con la expansión del universo. Y por esa razón las ecuaciones de la física cuántica que involucran el campo electromagnético si logran interactuar con la expansión del universo.

Esto se ve ya que al depender las ecuaciones de movimiento para los sistemas cuánticos de la constante de Planck (que ahora fue reinterpretada cosmológicamente en términos de la expansión y curvatura del universo), hace que los sistemas cuánticos interactúen con el campo electromagnético que se expande con la expansión del universo.

El modelo de *Sommerfeld* contiene una condición adicional de cuantización. Esta condición contiene tanto la cuantización de Planck como la de Bohr como casos especiales [10]. Se sabe que la teoría de Bohr-Sommerfeld (la llamada teoría cuántica antigua), basada en la hipótesis adiabática, se basa en dos axiomas cuánticos, que cuando se agrega a los axiomas de la mecánica clásica nos permite construir una teoría cuántica. Estos dos axiomas o reglas son enunciadas como sigue:

Para un sistema físico en el cual las coordenadas son funciones periódicas del tiempo, existe una condición de cuantización para cada coordenada [10]. Esta es:

$$\oint p_k dq_k = n_k h \quad (2.1)$$

donde q es una de las coordenadas, p es el momento asociado con la coordenada, n es un número cuántico el cual toma valores enteros y T se toma sobre un periodo orbital de la coordenada q [10].

La hipótesis expresada por Sommerfeld en otras palabras dice lo siguiente: “La acción para un proceso elemental es cambiado por el valor de h ” [10].

La segunda regla en la que se fundamenta la teoría de Sommerfeld es la ya mencionada ley de Planck:

$$E_\gamma = h\nu = E_{nf} - E_{ni}. \quad (2.2)$$

Que como se mencionó anteriormente, en el modelo atómico de Bohr y Sommerfeld el electrón emite o absorbe un fotón, cuya energía es la diferencia de energía emitida o absorbida cuando salta de una órbita permitida a otra.

Debido que será usado el concepto de invariancia adiabática a lo largo de esta tesis, en la siguiente sección se hablará de la teoría de invariantes adiabáticos en el marco de la mecánica clásica.

2.3. Invariantes Adiabáticos en Mecánica Clásica

En mecánica clásica un invariante adiabático es una función de los parámetros y de las constantes de movimiento de un sistema, que permanece casi constante en el límite en que los parámetros cambian infinitamente despacio en el tiempo, aunque ellos puedan en última instancia cambiar por grandes cantidades [11].

Considérese un sistema mecánico que realiza un movimiento finito unidimensional, y caracterizado por un parámetro λ que especifica las propiedades del sistema o del campo exterior en el que está colocado. Suponiéndose que, bajo la influencia de ciertas causas exteriores, el parámetro λ varía lentamente (*adiabáticamente*) con el tiempo; se entiende por lenta una transformación en la cual λ varía sólo ligeramente durante el periodo T del movimiento del sistema [12]:

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \quad (2.3)$$

Si λ no es constante, el sistema estaría cerrado y ejecutaría un movimiento estrictamente periódico con una energía constante E y un período fijo $T(E)$. Cuando el parámetro λ no es variable, el sistema no es cerrado y esta energía E no es conservada.

Sin embargo, como λ varía lentamente, el ritmo de variación de la energía \dot{E} es proporcional al ritmo de variación de $\dot{\lambda}$. Esto significa que cuando λ varía, la energía del sistema se comporta como si fuese una cierta función de λ ; en otras palabras, existirá una relación entre E y λ que permanece constante durante el movimiento del sistema; esta magnitud se denomina invariante adiabático [12].

Sea $H(p, q; \lambda)$ el hamiltoniano del sistema el cual depende del parámetro λ . De acuerdo con [12]

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2.4)$$

la derivada total de la energía con respecto al tiempo es [12]:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}. \quad (2.5)$$

el término de la derecha de la expresión (2.5) no solo depende de la cantidad λ que varía lentamente, sino también de las cantidades q y p que varían rápidamente. Para determinar la variación constante de la energía, se debe hacer un promedio de (2.5) durante el período del movimiento.

Se tiene el valor medio de esta ecuación durante un período del movimiento; teniendo en cuenta que λ (y por consiguiente $\dot{\lambda}$) varía lentamente, no es necesario tomar el valor medio de $\dot{\lambda}$ [12]:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda}, \quad (2.6)$$

y, en la función $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$ que se promedia, se puede considerar únicamente como variables de p y q , y no a λ . Es decir, en un movimiento de este tipo, se toman los valores medios **"como si el movimiento tuviese lugar con λ constante"** [12]. Es decir, aquí el parámetro λ es un invariante adiabático, por lo que su variación parece casi constante pero no es constante.

El valor medio de la energía puede escribirse explícitamente como [12]:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt. \quad (2.7)$$

De acuerdo con la ecuación de Hamilton $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, se tiene [12]:

$$dt = \frac{dq}{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)}. \quad (2.8)$$

La integración respecto al tiempo puede por tanto remplazarse por una integración respecto a la coordenada, expresando el período T en la forma [12]:

$$T = \int_0^T dt = \oint \left[\frac{dq}{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)} \right]; \quad (2.9)$$

la cual es una integración sobre un intervalo completo de la coordenada durante un periodo. Es decir, si el movimiento del sistema es una rotación y la coordenada q es

un ángulo de rotación ϕ , la integración con respecto a ϕ debe extenderse a una vuelta completa, es decir, de 0 a 2π . Entonces [12]:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint (\partial H/\partial \lambda) dq / (\partial H/\partial p)}{\oint dq / (\partial H/\partial p)}. \quad (2.10)$$

Como ya se ha indicado, las integrales de esta fórmula deben tomarse sobre la trayectoria para un valor dado constante de λ . A lo largo de tal trayectoria, el hamiltoniano tiene un valor constante E , y el momento es una función definida de la coordenada variable q y de los parámetros constantes independientes E y λ . Poniendo, por lo tanto, $p = p(q; E, \lambda)$ y derivando $H(p, q; \lambda) = E$ con respecto al parámetro λ , se obtiene [12]:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \left(\frac{dH}{dp} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) = 0, \quad (2.11)$$

o

$$\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}. \quad (2.12)$$

Sustituyendo esta expresión en el numerador de (2.10) y escribiendo el integrando del denominador en la forma $\frac{\partial p}{\partial E}$, se obtiene [12]:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint (\partial p/\partial \lambda) dq}{\oint (\partial p/\partial E) dq} \quad (2.13)$$

o

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0. \quad (2.14)$$

Finalmente, esta igualdad puede escribirse como [12]:

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = 0, \quad (2.15)$$

siendo

$$I \equiv \oint \frac{pdq}{2\pi}, \quad (2.16)$$

la integral se realiza para la trayectoria para E y λ dadas, siendo estas constantes. Este resultado muestra que, en la aproximación aquí considerada, la magnitud I permanece constante cuando varía el parámetro λ , es decir, I es un invariante adiabático. De igual manera, toda acción integral de la forma (2.16) de un sistema quasi-periódico es también un invariante adiabático [12].

La magnitud I es una función de la energía del sistema (y del parámetro λ) [12].

La derivada parcial con respecto a la energía determina el periodo del movimiento, para [12]

$$2\pi \frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = T \quad (2.17)$$

o

$$\frac{\partial E}{\partial I} = \omega \quad (2.18)$$

donde $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia de vibración del sistema.

La integral (2.16) tiene un significado geométrico en relación con la trayectoria del sistema en el espacio fásico. En el caso considerado (un solo grado de libertad) el espacio fásico se reduce a un espacio bidimensional de coordenadas p y q , y la trayectoria fásica de un sistema que realiza un movimiento periódico es una curva cerrada en el plano. La integral (2.16), tomada a lo largo de esta curva es el área encerrada. Puede escribirse también, ya como integral curvilínea [12]:

$$I = - \oint \frac{qdp}{2\pi}, \quad (2.19)$$

o ya como integral de superficie [12]:

$$I = \int \int \frac{dpdq}{2\pi}. \quad (2.20)$$

El concepto de oscilador armónico será de utilidad en los capítulos 5 y 6 (secciones 5.4 y 6.3) para describir la energía de un campo electromagnético en oscilación, por esa razón se tratará la teoría de invariantes adiabáticos para el caso del oscilador armónico en la siguiente sección.

2.4. Invariante Adiabático para un Oscilador Armónico

Ahora bien, como ejemplo, consideremos el invariante adiabático para un oscilador armónico. Su hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2, \quad (2.21)$$

siendo ω la frecuencia propia del oscilador. La ecuación de la trayectoria en el espacio fase está dada por la ley de la conservación de la energía $H(p, q) = E$. La trayectoria es una elipse con semiejes $\sqrt{2mE}$ y $\sqrt{2E/m\omega^2}$, y el área encerrada por dicho elipse dividida por 2π , es

$$I = \frac{E}{\omega}. \quad (2.22)$$

La invariancia adiabática de I significa que, cuando los parámetros de oscilación varían lentamente, la energía es proporcional a la frecuencia.

Tomando en consideración todos estos fundamentos sobre la invariancia adiabática, en el capítulo 3 será posible la construcción de un modelo cosmológico sobre la variedad de Finsler; que permita describir el comportamiento de la expansión del radio del

universo, cuando este se expande a un ritmo suficientemente lento como para poder encontrar el invariante adiabático de dicha expansión. Como se verá en ese capítulo, este invariante adiabático de la expansión del universo se corresponde con el campo electromagnético.

Capítulo 3

Invariancia Adiabática en Cosmología de Finsler

Debido a todo lo abordado en los capítulos anteriores, ahora se pretende abordar a manera de repaso una interpretación cosmológica al origen de la constante de Planck, este trabajo fue realizado en los trabajos [3] y [4]. Esto con la intención de hacer un acercamiento entre la teoría de la relatividad general y la física cuántica.

Aquí se verá ahora un modelo cosmológico en el que la expansión del radio del universo evolucionará en el tiempo con invariancia adiabática.

En la subsección 1.4.1 del capítulo 1 se habló de la presencia de un campo electromagnético primordial incorporado a la geometría del espacio-tiempo como una característica intrínseca y que le otorga anisotropía al espacio. Por esta razón en la sección 3.3 se verá como el campo electromagnético puede ser expresado como el invariante adiabático de la expansión acelerada del universo.

3.1. Planteamiento del Modelo Cosmológico

Considérese que el movimiento de la expansión del universo se caracteriza por el parámetro para su radio r .

Dicho parámetro puede tomarse como el radio del universo que cambia adiabáticamente con el tiempo $T \ll r/\dot{r}$. Aquí T es el tiempo característico o el periodo de movimiento del sistema. Para esta relación la frecuencia propia del sistema que satisfice la condición adiabática es $\nu \gg 10^{-18} [s^{-1}]$ la cual corresponde a la relación $\lambda_{ph} \ll r_u$, la longitud de onda de un fotón es mucho menor que el tamaño del Universo. Este fotón en este caso no está aislado y para la energía total del sistema tenemos la relación lineal $\dot{E} \sim \dot{r}$. El hamiltoniano del sistema, a su vez, depende del parámetro r de manera similar a la ecuación (2.5), por lo tanto [3]

$$\dot{E} = \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{dt}. \quad (3.1)$$

Promediando esta expresión como en (2.14) se obtiene:

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} \right) dq = 0 \quad (3.2)$$

y designando el invariante adiabático por h , se tiene para esta expresión $\partial \bar{h} / \partial t = 0$, donde $h = \oint p dq / 2\pi$ es la constante de Planck.

Considerando lo anterior y la ecuación (2.17) se tiene que

$$2\pi \frac{\partial h}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = T. \quad (3.3)$$

Gracias a esto puede calcularse la integral y escribirse la energía del fotón como $E = h\nu + E_0$. Donde ν es la frecuencia angular $\nu = \frac{2\pi}{T}$.

Este pequeño planteamiento será de utilidad para expresar en términos cosmológicos que la constante de Planck es el invariante adiabático de la expansión acelerada del universo. En la siguiente sección esto será encontrado para la variedad de Riemman y en la sección 3.3 para el caso de la variedad de Finsler.

3.2. Caso de Estudio Particular en Cosmología de Riemman-Cartan

En el capítulo I se ha utilizado la teoría de Einstein-Cartan en una geometría de Riemman-Cartan ya que satisface el principio de equivalencia y se encuentra libre del problema de singularidades.

En geometría de Riemman el tensor de campo electromagnético es:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad (3.4)$$

donde

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} A_{\sigma}. \quad (3.5)$$

Puede definirse un lagrangiano, en donde la curvatura escalar es obtenida por reducción del tensor de curvatura de Riemann-Cartan. Considerándose desde el principio que la curvatura del espacio es pequeña y, por lo tanto, pueden despreciarse términos cuadráticos en el lagrangiano, con lo que puede escribirse la acción para el campo gravitacional en la geometría de Riemann-Cartan [3]:

$$S = S_g + S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \tilde{R} \sqrt{-g} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{L}}_m \sqrt{-g} d\Omega \quad (3.6)$$

aquí g es el determinante del tensor métrico, que se describe aquí por una expansión de cofactores $g = g_{\mu\nu} G(\mu, \nu)$ (Sin embargo, a la hora de llevar a cabo los cálculos, en ningún momento se toma la raíz cuadrada de algún número negativo venido de un determinante, y para evitar esta posibilidad en algunos textos se acostumbra encerrar

a g entre las barras verticales que indican que se debe tomar el valor absoluto (siempre positivo) del mismo, apareciendo en dichas fórmulas como $|g|$).

Variando dicha acción puede obtenerse [3]:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \left(\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R} \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d\Omega \quad (3.7)$$

y

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \tilde{T}_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (3.8)$$

donde $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ es el tensor de densidad de energía momento de la materia en geometría de Riemman-Cartan. Si se introduce la constante cosmológica definida como $\Lambda = (R - \tilde{R})/4$ y se suma a la ecuación (3.8), donde la traza del tensor de energía-momento es la del tensor electromagnético con lo que queda [4]

$$\tilde{R} = -\frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T} \quad (3.9)$$

o en la forma

$$(R - 4\Lambda) = -\frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}. \quad (3.10)$$

En el lado derecho de la ecuación (3.10) se tiene el valor asociado a la diferencia de la geometría de Riemann (la traza de un tensor \tilde{T} para el campo electromagnético es igual a cero en la geometría de Riemann debido de la simetría de las conexiones) que queremos evaluar.

El problema de la estimación directa del valor de \tilde{T} es que no conocemos la verdadera métrica del universo en el que vivimos. Tampoco conocemos los coeficientes de conexión reales de nuestro espacio. Por esta razón, no podemos calcular directamente el valor que nos interesa. En consecuencia, no podemos simplemente escribir una modificación correspondiente a la energía del campo electromagnético. Sin embargo, podemos estimar este valor indirectamente, considerando que la parte izquierda de la expresión (3.10) contiene valores observables.

Para la acción del campo electromagnético que es considerada como un invariante adiabático, $S = S_0 - h$; la acción S_0 es una constante de integración y la constante de Planck h es causada por el cambio lento de la curvatura del universo para un espacio de Riemman-Cartan. Considerando que la traza del tensor de campo electromagnético T es cero en la geometría de Riemman, puede escribirse para (3.10) [4]:

$$(R - 4\Lambda) \frac{c^4}{8\pi G} \approx 2 \frac{h}{\Delta t_0} = 2h\nu_0. \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) describe la cantidad de energía (no importa el tipo de energía) que está saliendo de un volumen por unidad de tiempo, gracias a la expansión de la variedad del universo. Aquí, se está considerando un fotón que se propaga por la

curvatura de la variedad, esta curvatura cambia lentamente de forma adiabática. En este caso la energía del fotón no se conserva, pero se conserva el invariante adiabático $S = S_0 - h$. En la expresión (3.11) se está calculando el cambio de la energía del fotón dentro de un periodo para su longitud de onda. Es decir, el lado derecho de la ecuación (3.11) sale de la definición de invariante adiabático (2.1).

Como puede observarse, del lado izquierdo de la ecuación (3.11) se encuentran las cantidades observadas que caracterizan la geometría del Universo, mientras que en el lado derecho fue introducida la constante de Planck, que a su vez caracteriza el mundo cuántico.

El valor Δt_0 es el mínimo intervalo posible de tiempo correspondiente a la acción h . Para encontrarlo nótese que esa energía del campo electromagnético correspondiente puede cambiar solo por el valor $h\nu$. Debe destacarse que el tiempo y el espacio son continuos, es decir, no están cuantizados.

Consideremos como ejemplo el átomo de hidrógeno (este tipo de modelos atómicos se abordarán con más precisión y detalle en el capítulo 6.) La primera órbita de Bohr se caracteriza por el valor $M_1 = m_e a_0 V_0 = \hbar$, donde la masa del electrón es $m_e = 9,1093829110^{31} \text{ kg}$, el radio de Bohr es $a_0 = 5,2917210903 \times 10^{-9} \text{ cm}$ y la velocidad del electrón en la primera órbita de Bohr es $V_0 = 217910482,8 \text{ cm/s}$. El estado con $M_0 = 0$ no es alcanzable para nuestro sistema. Cuando el radio se reduce de a_0 a la longitud de onda de Compton $\lambda_c = 2,463102389 \times 10^{-19} \text{ s}$, aquí se considera $\frac{\lambda_c}{2\pi}$, el valor $M_1 = \hbar$ para que el fotón no pueda ser emitido. Así que podemos escribir $\frac{\lambda_c c}{2} = a_0 V_0$ o $\nu_0 = \frac{1}{\Delta t_0} = \frac{c}{a_0} = \frac{2\pi V_0}{\lambda_c} = 5,6652 \times 10^{18} \text{ s}^{-1}$. El intervalo $\Delta t_0 = \frac{\lambda_c}{2\pi V_0} = 1,772100465 \times 10^{-19} \text{ s}$ es el intervalo mínimo de tiempo, correspondiente al valor h , para un electrón que se mueve en una órbita de Bohr. Entonces la expresión (3.11), donde $R = 4\pi^2 \frac{H_0^2}{c^2}$, puede escribirse usando que $a_0 = \frac{c}{\nu_0}$ de la forma [4]:

$$(R - 4\Lambda) \frac{c^3 a_0}{16\pi G} \approx h. \quad (3.12)$$

Aquí se ha podido estimar la constante de Planck. Algunos de los valores medidos de la constante de Hubble se reportan en trabajos como [13] $H_0 = 74,2 \pm 3,6 \text{ [kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}]$ y [14] $H_0 = 73,8 \pm 2,4 \text{ [kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}]$. Tómese para esta evaluación el valor promedio $H_0 = 74 \text{ [kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}]$ [4]. La constante cosmológica Λ que se adopta según medidas $\Omega_\Lambda = 0,7$ y la densidad crítica $\rho_c = 1,88 \times 10^{-29} \text{ [g} \cdot \text{cm}^{-3}]$. Con esto se obtuvo el valor para la constante de Planck $h = 6,6 \times 10^{-27} \text{ [erg} \cdot \text{s]}$, que coincide dentro del segundo dígito con el valor experimental.

Recientemente, el tema de un posible cambio de la constante de estructura fina a través del tiempo es ampliamente debatido, por lo que, por conveniencia, presentamos aquí otra relación interesante, que se desprende de (3,12).

$$(R - 4\Lambda) \frac{c^4}{16\pi G} = 2\pi m_e c^2 \alpha. \quad (3.13)$$

La cual describe una dependencia de la constante de estructura Fina en función de la curvatura y expansión del universo en cosmología de Riemman.

En la siguiente sección se abordará un modelo cosmológico con invariancia adiabática pero dentro del marco de la variedad de Finsler.

3.3. Caso de Estudio en Cosmología de Finsler

Ahora se utilizará la geometría de la variedad de Finsler [6], para poder describir un modelo análogo al descrito por las ecuaciones de la (3.1) a la (3.12). Con todo esto se espera calcular el valor de la constante de Planck a partir de los parámetros que caracterizan la variedad de Finsler. Este modelo aquí también es caracterizado por el hecho de que la geometría cambia adiabáticamente [3].

Se considera que la acción para la materia S_m corresponde a una hipersuperficie M que vive en una variedad de Finsler, de forma que se tenga $S_m(x^k, \dot{x}^k) = S_M(x^k, \dot{x}^k)$, y así escribir [3]:

$$\delta S_m = \int \delta \mathcal{L}_m(x^k, \dot{x}^k) dt = \int \delta(p_k dx^k - H dt) = \delta S_M = \int \delta \mathcal{L}_M(x^k, \dot{x}^k) dt. \quad (3.14)$$

Dado que en la variedad de Finsler el espacio no es homogéneo ni isotrópico el sistema no es aislado. Al ser un sistema no aislado, en esta ecuación de lado derecho (puede observarse que se ha considerado la variación de $S_m(x^k, \dot{x}^k) = S_M(x^k, \dot{x}^k)$) aparece un fotón distribuido que interactúa con el universo mientras está en expansión.

La acción para la variedad M es una generalización de la condición de cuantización de Sommerfeld y por eso está en función de la constante de Planck.

Gracias a esto es posible obtener las ecuaciones de Hamilton [3]

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial x^k} \quad (3.15)$$

y

$$\frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial p_k}. \quad (3.16)$$

Debido a que aparecen los términos extras en el lado derecho de las ecuaciones (3.15) y (3.16), en este modelo el universo en el que su geometría cambia adiabáticamente debido a la expansión del universo, no es un sistema absolutamente cerrado. Estos términos extras se interpretan como un término de una fuerza adicional en la ecuación (3.15) y una velocidad adicional en la ecuación (3.16).

Esta fuerza adicional se atribuye a la constante cosmológica (una aceleración) y la velocidad adicional a la constante de Hubble ($v = Hx$). Esto corresponde al hecho de que no existe un sistema absolutamente cerrado y los términos adicionales aparecen debido al cambio adiabático de la geometría (del tensor métrico) de la expansión del universo [3].

Bajo esta consideración, es posible escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \dot{x}^k}. \quad (3.17)$$

Uno puede ver que en el lado derecho de esta ecuación aparecen los dos términos adicionales debidos a la expansión del universo (debido al cambio de la geometría de la variedad, ya que el sistema bajo consideración se está moviendo).

Con esto se desea encontrar la constante de Planck para los parámetros que caracterizan la variedad de Finsler, considerando un sistema generalizado distribuido sobre un volumen.

Nos interesa aquí la variación del momento del fotón debido al cambio adiabático de la geometría de la variedad M . Esta variación se puede obtener directamente de la geometría, pero también de las ecuaciones de Einstein. La variación del momento de nuestro sistema debido a los cambios de la variedad M , en el volumen unitario sumado en todas las direcciones viene dado por la expresión [3]

$$\delta p = \frac{c^3}{8\pi G} \mathcal{R} = \frac{c^3}{4\pi G} \delta \frac{1}{R^2}, \quad (3.18)$$

donde el escalar de curvatura se expresa por $\mathcal{R} = 2/R^2$ y R es el radio de curvatura. En una variedad de Finsler el tensor métrico depende de x y \dot{x} . Por esta razón el tensor de momento se escribe como $p^2 = g^{\mu\nu}(x, \dot{x})p_\mu p_\nu$. Aquí, la parte espacial del sistema de coordenadas se encuentra fija, por lo que se tiene que para el tensor métrico $g^{\mu\nu}(x, \dot{x})$ el valor de x se fija como x_0 . En este caso se tiene $p(t, \dot{x})$ y por lo tanto $R(t, \dot{x})$. La variación del momento puede entonces escribirse de la siguiente manera [3]:

$$\delta p = \frac{c^3}{2\pi G} \frac{1}{R^3} \delta R(t, \dot{x}) = \frac{c^3}{2\pi G} \frac{1}{R^3} \left(\delta R(t) + \frac{\partial R(H)}{\partial H} \delta H \right), \quad (3.19)$$

aquí se puede notar que $R(t, \dot{x}) = R(t, Hx_0)$ donde H es el parámetro de Hubble.

Tomando en cuenta $R = \frac{c}{2H}$ y que [3]:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{c}{2H} = -\frac{c}{2H^2} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.20)$$

puede escribirse [3]:

$$\frac{\partial R}{\partial H} = \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial H} = -\frac{c}{2H^2}. \quad (3.21)$$

Puede considerarse una variación de la constante de Hubble. Para la relación $\dot{x} = Hx$ se puede encontrar $\delta\dot{x} = x\delta H + H\delta x$ o $x\delta H = \ddot{x}\delta t - H\delta x$ [3].

Pero solo la aceleración del universo puede ser medida experimentalmente y es asociada a la constante cosmológica Λ , entonces para la variación $x\delta H = \ddot{x}\delta t - H\delta x$ se puede escribir, [3]:

$$\delta H = (c^2\Lambda - H^2)\delta t. \quad (3.22)$$

Esta variación de la constante de Hubble aparece en la variación del momento en (3.19), por lo que usándola en esta; se puede observar que por (3.22) la ecuación (3.19) toma la forma [3]

$$\delta p = \frac{2c^3 H}{\pi G} \left(\frac{2H^2}{c^2} - \Lambda \right) \delta t, \quad (3.23)$$

por el hecho de que $\mathcal{R} = 2/R^2$ y de que $\frac{H^2}{c^2} = \frac{1}{R^2} = \mathcal{R}$ la ecuación (3.23) se escribe de la forma [3]

$$\delta p = \frac{3c^3 H}{8\pi^2 G} (\mathcal{R} - 4\Lambda) \delta t. \quad (3.24)$$

Esta es la variación de momento para el universo descrito en una variedad de Finsler, debido al cambio adiabático de la geometría.

Ahora se procede a escribir un invariante adiabático para un campo electromagnético que se propaga de manera libre. Las componentes del 4-momento del campo electromagnético que se propaga en la variedad de Finsler que está cambiando de forma adiabática en el tiempo. Esta variación del tiempo se comporta de forma lineal respecto a la energía ε del campo; esto es: $\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{\delta t}{t}$. Así despejando esta ecuación para expresar la razón de cambio de la energía respecto al tiempo y multiplicándose por t , para que esta razón de cambio pueda expresarse directamente proporcional al producto de la energía por el tiempo para tener: $\varepsilon t = -\frac{\delta\varepsilon}{\delta t} t^2$. La variación de la energía dada en relatividad especial en este sentido puede escribirse de la forma en que $\delta\varepsilon = c\delta p_k$; esto permite expresar la energía en función del momento que ha sido obtenido en la ecuación (3.24) de la misma forma en que se escribió el producto εt lo cual representa el concepto de acción y dado que la constante de Planck tiene unidades de acción se escribe la ecuación (3.24) como sigue [3]

$$\varepsilon t = -ct^2 \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{c^4 H}{8\pi^2 G} (\mathcal{R} - 4\Lambda) t^2 = \eta_0 \quad (3.25)$$

entonces, para un segundo y con valores medidos de $H = 73 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, o como se ve en el artículo [15] se encuentra que el valor reportado es de $H = 72 \pm 8 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ y $\Lambda = 1,7 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$ [3], se tiene para este invariante adiabático $\eta_0 = h = 6 \cdot 10^{-27} \text{ ergs} \cdot \text{s}$ [3]. De la misma manera se pueden obtener relaciones similares para otras componentes del 4-momento:

$$p_\gamma x^\gamma = \eta_\gamma \quad (3.26)$$

esto no es una sumatoria respecto a γ . En esta relación (3.26) el fotón se propaga en la dirección x^3 y las componentes p_1 y p_2 del momento lineal son cero $p_1 = p_2 = 0$.

Introducimos aquí un 4-vector η_γ que tiene componentes en un volumen unitario. Gracias a esto, el invariante adiabático para el campo electromagnético el cual varía en el tiempo t , por el cambio de la geometría como consecuencia de la expansión del universo, el cual depende también de los parámetros de la variedad \mathcal{R} y Λ es la constante de Planck [3]:

$$h = -\frac{c^4 H}{8\pi^2 G} (\mathcal{R} - 4\Lambda) t^2. \quad (3.27)$$

Entonces, en otras palabras, la relación (3.27) expresa que la constante de Planck es el invariante adiabático del cambio de la geometría dada por la expansión del universo en una variedad de Finsler [3].

Ahora bien, este modelo cosmológico también presenta consecuencias a escalas cuánticas, por lo que a continuación en el capítulo 4 se presenta un formalismo de la electrodinámica en variedad de Finsler. A través de esto podrán describirse algunos fenómenos que ocurren en la física cuántica.

Dado a lo visto en el capítulo 1 de que la geometría del universo descrito en variedad de Finsler, presenta un campo electromagnético primordial débil que se encuentra expandiéndose con el universo; que se ve en la ecuación (1.14). Ahora cabe aclarar que de las ecuaciones (3.25) y (3.27) se puede observar que el campo electromagnético también es un invariante adiabático de la expansión del universo; ya que la acción (3.14) de donde parte este estudio fue planteada en una variedad de Finsler.

De igual manera como fue visto en la ecuación (3.13) en la sección 4.4, para la variedad de Finsler se hará un análisis sobre la variación de la constante de estructura fina debida a la expansión del universo.

En el capítulo 5 utilizaremos la formulación de Hamilton-Jacobi usado por de-Broglie y Bohm para describir un modelo en el que una onda electromagnética llamada "*onda piloto*", se acopla a las partículas como el electrón y guía su movimiento explicando así el comportamiento ondulatorio de las partículas cuánticas.

Esta descripción de la onda piloto en mecánica cuántica, permite interpretar que esta interacción entre la partícula y el campo electromagnético puede explicarse en términos de una energía potencial adicional, llamada "potencial cuántico".

Capítulo 4

Electrodinámica en una Variedad de Finsler

Como se vio en el capítulo anterior la constante de Planck constituye un invariante adiabático de la expansión acelerada del universo, donde este invariante adiabático es el campo electromagnético propagándose en dicha expansión y caracterizado por la curvatura escalar en la variedad de Finsler.

También en el capítulo 1, fue mencionada la presencia de un campo electromagnético primordial débil que es intrínseco a la curvatura del espacio en el universo modelado en una variedad de Finsler.

Por esta razón en el presente capítulo se presentará un repaso acerca de cómo pueden escribirse en la variedad de Finsler las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de movimiento para una partícula cargada eléctricamente, todo esto fue realizado en el trabajo [3]. En estas ecuaciones el invariante adiabático del campo electromagnético es la constante de Planck, gracias a esto es posible en la siguiente sección cuantizar dicho campo electromagnético.

4.1. Cuantización de Campo Electromagnético

Considérese ahora la siguiente integral para el caso particular del campo electromagnético libre que se propaga a lo largo de la geodésica en la variedad de Finsler M que se encuentra cambiando adiabáticamente en el tiempo [3]:

$$\int p_\alpha dq^\alpha = \Delta S_M, \quad (4.1)$$

donde p_α es el 4-momento del campo, q^α es la coordenada generalizada y ΔS_M **corresponde al cambio del 1-parametro de la familia de hipersuperficies debido a la variación adiabática de la geometría ya que el sistema bajo consideración se está moviendo en la variedad de Finsler M .**

Aquí es importante no confundir campo electromagnético libre (este es ortogonal y por tal motivo se puede cuantizar) y campo electromagnético paralelo (este no se

cuantiza). El campo electromagnético libre está distribuido sobre un volumen. Ya que afuera de este volumen no hay campo electromagnético, este campo electromagnético libre se llama fotón. El campo electromagnético paralelo está presente en todo el espacio, pero aquí se está hablando solamente del campo electromagnético libre. No es de interés el campo electromagnético paralelo porque no se cuantiza.

El lagrangiano relativista (expresado en forma covariante) para el campo electromagnético se describe como [3]:

$$\mathcal{L}_m = \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{16\pi} \quad (4.2)$$

tomando en cuenta la ecuación (4.2) el 4-momento del campo se escribe como $p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial A_{\mu,\nu}}$,

y la coordenada generalizada q^α son las componentes del 4-potencial del campo A_μ . Usando esta densidad lagrangiana para el campo electromagnético $\mathcal{L}_m(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)$, se tiene para la ecuación (4.1)

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial A_{\mu,\nu}} A_{\mu,\sigma} dx^\sigma = \Delta S_M, \quad (4.3)$$

en esta ecuación el índice ν no está libre, esto es así porque la parte derecha ΔS_M lleva un índice y esto puede verse de la ecuación (3.26) mencionada en la sección 3.3. En dicha ecuación (4.3) se está usando una dirección específica, justamente en esta dirección nos interesa el valor de la componente que le corresponde.

Tomando en cuenta el tensor de energía-momento para la energía del campo electromagnético [3]

$$T^\nu_\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial A_{\mu,\nu}} A_{\mu,\sigma} - \delta^\nu_\sigma \mathcal{L}_m, \quad (4.4)$$

es posible escribir con este tensor de energía-momento la propagación del campo electromagnético

$$\frac{1}{c} \int (T^\nu_\sigma + \delta^\nu_\sigma \mathcal{L}_m) dx^\sigma = \Delta S_M \quad (4.5)$$

usando que $\mathcal{L}_m = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2)$ y $T^{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$ y tomando en cuenta la ecuación (3.25) puede encontrarse entonces la densidad de energía para el campo electromagnético [3]

$$\frac{E_0^2 + H_0^2}{8\pi} = \frac{h}{T} = h\nu. \quad (4.6)$$

Entonces, como se observa en la ecuación (4.6), el campo electromagnético clásico puede ser cuantizado debido a la variación adiabática de la variedad de Finsler.

Como en esta sección se habló del campo electromagnético y de su densidad de energía para la geometría de Finsler, en la siguiente sección se abordarán las ecuaciones de Maxwell en el marco de la geometría de Finsler.

4.2. Ecuaciones de Maxwell en Variedad de Finsler

En la geometría de Riemann, el primer par de ecuaciones de la electrodinámica se sigue directamente de las propiedades del tensor de campo como en (3.4) y (3.5).

El primer par de ecuaciones de Maxwell en una variedad de Riemann es [3]:

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0 \quad (4.7)$$

en la variedad de Finsler puede obtenerse el primer par de ecuaciones de Maxwell. En este caso el tensor (3.4) se expresa como $\tilde{F}_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$; donde la derivada covariante DA_μ dada en (3.5), en variedad de Finsler incluye los términos de la conexión de Cartan $C_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$ de la forma $C_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu$ y también $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu$ para la derivada covariante.

En el capítulo 1 se mencionó que los términos de torsión sólo tienen importancia en las proximidades de un agujero negro. Entonces uno puede ver que el primer par de ecuaciones de la electrodinámica sigue siendo el primer par de las ecuaciones de Maxwell, por lo que la ecuación (4.7) puede escribirse como [3]

$$\tilde{F}_{\mu\nu;\sigma} + \tilde{F}_{\nu\sigma;\mu} + \tilde{F}_{\sigma\mu;\nu} = 0. \quad (4.8)$$

El segundo par de ecuaciones de la electrodinámica se sigue directamente de la variación del funcional $S_m = S_M$ si se considera una carga caracterizada por la 4-corriente j^α , y el campo electromagnético en la variedad de Finsler M [3].

Aquí S_M como antes corresponde a la familia de las hipersuperficies en la variedad. Al variar S_m se puede tener [3]:

$$\delta S_m = -\frac{1}{c} \int_\Omega \left[\frac{1}{c} j^\alpha \delta A_\alpha + \frac{1}{16\pi} \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right] d\Omega. \quad (4.9)$$

Integrando el segundo término por partes se obtiene [3]

$$\delta S_m = -\frac{1}{c} \int_\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right] A_{\mu,\sigma} \delta x^\sigma d\Omega. \quad (4.10)$$

Realizando la variación de la acción S_M correspondiente al cambio de la hipersuperficie perteneciente a la variedad de Finsler M , se tiene [3]

$$\delta S_M = \int_\Omega \frac{\eta^\sigma}{(x^\sigma)^2} \delta x^\sigma d\Omega \quad (4.11)$$

para un volumen unitario $\eta^\sigma = (h, h, h, h)$ que generaliza la condición de cuantización de Sommerfeld dentro de la variedad de Finsler M , donde h es la constante de Planck. La ecuación bajo discusión se puede escribir como [3]:

$$\frac{1}{c} \int_\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right] A_{\mu,\sigma} \delta x^\sigma d\Omega = - \int_\Omega \frac{\eta^\sigma}{(x^\sigma)^2} \delta x^\sigma d\Omega + O((\eta^\sigma)^2) \quad (4.12)$$

e integrando la ecuación (4.12) de la forma [3]

$$\frac{1}{c} \left[\frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right] A_{\mu,\sigma} = -\frac{\eta^\sigma}{(x^\sigma)^2} + O((\eta^\sigma)^2) \quad (4.13)$$

aquí no se tiene una sumatoria sobre σ [3].

En la ecuación (4.13) la constante del Planck η^σ es una componente que corresponde a la dirección en la cual el fotón se propaga. Este es un parámetro que designa el invariante adiabático del campo electromagnético libre.

Este es el segundo par de ecuaciones de Maxwell para una variedad de Finsler que varía adiabáticamente en el tiempo. El segundo término del lado izquierdo de la ecuación (4.13) representa al campo electromagnético.

A medida que el fotón se propaga a través del universo en expansión, su frecuencia (o longitud de onda) cambia. Esta pérdida de energía por campo electromagnético libre, denominada como corrimiento al rojo cosmológico, aparece como pérdidas de la energía por el fotón debido al cambio adiabático de la geometría de la variedad [3]:

$$\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} A_{\mu,\sigma} = \frac{1}{8\pi c} \frac{\partial (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial x^\sigma} = -\frac{\eta^\sigma}{(x^\sigma)^2} + O((\eta^\sigma)^2). \quad (4.14)$$

Ahora que se han obtenido las ecuaciones de Maxwell en la variedad de Finsler, en la siguiente sección se desea abordar para dicha variedad el cálculo de la ecuación de movimiento de una partícula cargada.

4.3. Ecuación de Movimiento para una Partícula Cargada en Variedad de Finsler

Ahora que se han obtenido las ecuaciones de la electrodinámica para una variedad de Finsler. Se desea comprender el caso de una carga en movimiento. Considerándose ahora una carga en movimiento con la que se ha definido la 4-corriente j^α , y el campo electromagnético en la variedad de Finsler $S_m = S_M$ [3].

Cuando $\delta j^\mu \neq 0$ se tiene la acción [3]:

$$-\sum \int mcds - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{c} j^\alpha A_\alpha + \frac{1}{16\pi} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right] d\Omega = S_M \quad (4.15)$$

que describe las propiedades cuánticas gracias a que describe el movimiento para una partícula cargada en nuestro sistema.

Considérese el átomo de hidrógeno. Para coincidir con los cálculos de la mecánica cuántica, se debe despreciar el tercer término en (4.15) que como se verá más adelante corresponde al potencial cuántico.

En este caso variando (4.15) se tiene [3]

$$-\delta \int (mcds + \frac{e}{c} A_\alpha dx^\alpha) = \delta S_M \quad (4.16)$$

y que gracias a la definición del tensor de Faraday puede escribirse como [3]:

$$\int \left[mc \frac{du_\mu}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu \right] \delta x^\mu ds = - \int \frac{\eta^\mu}{(x^\mu)^2} \delta x^\mu ds \quad (4.17)$$

y con ello obtener [3]:

$$mc \frac{du_\mu}{ds} - \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu = - \frac{\eta^\mu}{(x^\mu)^2}. \quad (4.18)$$

Esta es la ecuación de movimiento para una partícula cargada en una variedad de Finsler que cambia adiabáticamente en el tiempo. El elemento de longitud aquí se puede escribir en términos del factor de Lorentz y el tiempo propio $ds = c\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}d\tau$ que se usa en la ecuación (4.18).

Como se explicó en la sección 2.2 del capítulo 2, las ecuaciones de movimiento en la variedad de Finsler conservan su curvatura al ser representadas localmente, ya que la presencia de la constante de Planck como invariante adiabático del campo electromagnético que se propaga libremente con la expansión del universo codifica la anisotropía del espacio. Por esta razón esa curvatura se encuentra implícita en la ecuación de movimiento (4.18).

En la sección 3.2 se habló de la dependencia de la constante de estructura fina en función de la expansión del universo en variedad de Riemann. En la siguiente sección desea tratarse esta misma cuestión, pero en el marco de la variedad de Finsler.

4.4. Variación de la Constante de Estructura Fina en Variedad de Finsler

En la ecuación (3.24) de la sección 3.3 se muestra la variación del momento lineal para el universo en la variedad de Finsler .

El momento relativista puede escribirse como una función de la constante de estructura fina $\alpha = \frac{V}{c}$, donde V es la velocidad del electrón en la primera órbita de Bohr [3]:

$$P = \frac{m\alpha c}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, \quad (4.19)$$

en este caso puede apreciarse que el momento lineal ya no depende explícitamente de la velocidad.

Variando la ecuación (4.19) se llega a [3]

$$\delta P = \frac{mc}{(1 - \alpha^2)^{3/2}} \delta \alpha \quad (4.20)$$

y sustituyendo en (3.23) se obtiene que la constante de estructura fina puede variar en el tiempo debido al cambio adiabático de la geometría de la variedad de Finsler que se conoce como [3]:

$$\delta p = \frac{c^3 H}{8\pi^2 G} (\mathcal{R} - 4\Lambda) \delta t \quad (4.21)$$

por lo tanto tomando en consideración las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.21) es posible encontrar ese cambio de la constante de estructura fina como [3]:

$$\delta\alpha = \frac{(1 - \alpha^2)^{3/2} Hc^3}{mc8\pi^2G} (\mathcal{R} - 4\Lambda) \delta t. \quad (4.22)$$

y este valor es $\dot{\alpha}/\alpha = -1,03 \cdot 10^{-18}$ (por un segundo), $\mathcal{R} = 2/R^2$, $R = c/2H$, donde hemos usado los valores $H = 73 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ y $\Lambda = 1,7 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$ [3].

Aquí se ha encontrado que la constante de Planck es el invariante adiabático del campo electromagnético que se propaga en la variedad de Finsler que cambia adiabáticamente con el tiempo con la expansión del universo. El cálculo del valor de la constante de Planck a partir de los parámetros cosmológicos aquí usados es $h = 6 \cdot 10^{-27} \text{ ergs}\cdot\text{s}$ [3].

Al igual que la constante de Planck, se piensa que otras constantes fundamentales que dependen de ella, como la constante de estructura fina, variarían en el tiempo debido al cambio de la geometría de la variedad.

Pudo mostrarse que en la variedad de Finsler caracterizada por la geometría que cambia adiabáticamente, el campo electromagnético libre clásico se cuantiza geométricamente, a partir de las propiedades de la variedad. Se sugieren ecuaciones para la electrodinámica en la variedad de Finsler y se tiene que la cuantización de estas es provocada por la modificación de la geometría de forma adiabática.

Una consecuencia de la presencia del potencial electromagnético en los sistemas cuánticos (que serán tratados del capítulo 5 al 9) es el efecto Aharonov-Bohm. Por esta razón en la siguiente sección se hablará de dicho efecto en el marco de la variedad de Finsler.

4.5. Efecto Aharonov-Bohm en Variedad de Finsler

El efecto Aharonov-Bohm es un fenómeno cuántico en el que la presencia de un campo magnético altera la propagación de una carga eléctrica, incluso cuando esta se propaga en zonas donde dicho campo no está presente.

En física clásica, el movimiento de una carga q en presencia de un campo magnético viene dada por la llamada fuerza de Lorentz $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$.

Por tanto, mientras el campo magnético \vec{B} sea nulo, el movimiento de una carga no se ve afectado por dicha fuerza.

La evolución de una partícula bajo la influencia de un campo magnético está dada por la presencia de un potencial vectorial \vec{A} asociado a dicho campo. Aunque este sea cero en la zona por la que la partícula puede moverse, esto no implica que \vec{A} sea cero también, lo que puede afectar al movimiento de la misma.

Un ejemplo habitual es la propagación de una carga en presencia de un solenoide. Un solenoide ideal encierra un campo magnético constante en su interior, mientras que en el exterior este es cero.

La presencia de un campo magnético \vec{B} confinado en un solenoide altera la propagación de una carga. Este efecto se manifiesta en una fase relativa entre las posibles trayectorias entre la posición inicial y final de la carga. La acción de cada trayectoria se ve modificada por la presencia del potencial vector \vec{A} .

Este caso importante se deriva directamente del segundo par de ecuaciones de Maxwell. Como se sabe, una condición necesaria para la existencia del efecto de Aharonov-Bohm es la presencia, en la estructura general de las ecuaciones, de los potenciales de campo cero que no pueden eliminarse mediante transformaciones de gauge y no crean campos electromagnéticos [3], [16].

Estos "potenciales cero" son el resultado de la topología del área sobre la cual se mueve la partícula [3], [16]. Tal situación surge en la electrodinámica de los medios anisotrópicos donde la estructura de las ecuaciones de Maxwell elimina la posibilidad de satisfacer las condiciones de frontera.

Para satisfacer regularmente las condiciones de frontera en los medios anisotrópicos, generalmente se introduce el potencial cero, que no crea campos electromagnéticos [16]. En el caso de la variedad Finsleriana en expansión adiabática, la anisotropía del espacio se produce para cualquier cuerpo en movimiento automáticamente de acuerdo a la parte derecha de la ecuación (4.13). Por lo tanto, es seguro decir que en el caso del efecto Aharonov-Bohm se está tratando directamente con la anisotropía del espacio, debido a la variedad Finsleriana adiabáticamente cambiada a medida que la partícula se mueve a lo largo de su trayectoria.

En ausencia de campos eléctricos y magnéticos en el camino de propagación de la partícula en consideración, el segundo término en la ecuación (4.13) desaparece (pero en el caso del solenoide aún tiene lugar en su interior y afecta a la partícula: a pesar de que el campo magnético desaparece del solenoide, el cambio de fase en las funciones de onda es proporcional al flujo magnético correspondiente dentro del solenoide [16]) y se obtiene (despreciando aquí el término pequeño $O(\eta_\sigma^2)$) [3].

$$\frac{1}{c^2} j^\mu A_{\mu,\sigma} = -\frac{\eta_\sigma}{(x^\sigma)^2} \quad (4.23)$$

pero $j^\mu = (\rho c, \rho v^k)$ (aquí ρ es la densidad de carga y v^k es la 3-velocidad) ya que se tiene que $\rho = e$ y si se sabe que $\delta j^\mu = 0$ (por esta razón $A_\mu \partial_\sigma j^\mu = 0$ y $A_{\mu,\sigma} j^\mu = \partial_\sigma (A_\mu j^\mu)$) se obtiene usando el teorema de Gauss [3]

$$\frac{e}{c} A_0 = -\frac{\eta_0}{(x^0)} \quad \frac{e}{c} A_k v^k = -\frac{\eta_k}{(x^k)}. \quad (4.24)$$

Estas ecuaciones describen los efectos eléctricos y magnéticos de Aharonov-Bohm (aquí x^0 y x^k están fijos). Ahora bien, la teoría electromagnética implica que una partícula con carga eléctrica q viajando por algún camino P en una región con campo magnético \vec{B} cero, pero no un potencial \vec{A} cero ($\nabla \times \vec{A} = \vec{B} = 0$), adquiere un cambio de fase ϕ . Las partículas, con los mismos puntos de inicio y final, pero viajando a lo largo de dos rutas diferentes adquirirán una diferencia de fase $\Delta\phi$ determinado por el flujo magnético Φ_B a través del área entre los caminos (a través del teorema de Stokes) y que $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$,

y dado por la variación de la fase $\Delta\Phi$, fijando $\mu = 0$ en la ecuación (4.23) ($\Delta\Phi = \frac{q\phi_B}{h}$), que se tiene [3]:

$$e \int \varphi dt = -h \frac{\Delta t}{1 \text{ sec}} = -h\Delta\Phi \quad (4.25)$$

este es el efecto eléctrico de Aharonov-Bohm, y cuando $\mu = k$ (aquí $k = 1, 2, 3$) se tiene la relación [3]:

$$\frac{e}{c} \int A_k dx^k = -h \frac{\Delta x}{1 \text{ cm}} = -h\Delta\Phi \quad (4.26)$$

que describe el efecto magnético de Aharonov-Bohm.

En la ecuación (4.23) no hay una sumatoria para el índice μ ; al referirse esta ecuación al efecto Aharonov-Bohm, la integración se realiza a lo largo de la trayectoria del electrón. Donde dx^0 y dx^k son las componentes temporal y espacial del diferencial de esa trayectoria.

Para concluir este apartado, se hace énfasis, en que el campo electromagnético no aparece en estas ecuaciones (segundo término en las ecuaciones de Maxwell dadas en (4.13) y que es acotado respecto a coordenadas espaciales ya que la función de onda como se verá en el capítulo 5 puede expandirse en un conjunto completo de funciones que estarán en términos de dichas coordenadas espaciales).

En realidad el campo se acopla a la partícula cargada en movimiento a través de los potenciales A_μ como en la ecuación (4.23) (casos como este se han tratado en diversos trabajos como en [16]) y este campo se corresponderá al potencial cuántico en el formalismo bohmiano presentado en el siguiente capítulo ([18] y [19]).

Capítulo 5

Potencial Cuántico y Función de Onda

En este capítulo se dará un repaso a la formulación de de Broglie-Bohm de la mecánica cuántica y su concepto central, el llamado potencial cuántico. También se verá cómo fue posible una reinterpretación de dicho potencial cuántico y de la ecuación de Schrödinger en términos del campo electromagnético por medio de la transformada de Fourier en los trabajos [4] y [18].

La interpretación de Bohm (también llamada teoría de la **onda piloto**) es una interpretación de la mecánica cuántica postulada por David Bohm como una extensión de la onda guía de Louis de Broglie. Por esta razón también es llamada a veces como teoría de de Broglie-Bohm [21] y [22].

Esta teoría de Bohm interpreta la mecánica cuántica como una teoría determinista que pueda resolver o eliminar muchas de las paradojas o nociones problemáticas de la mecánica cuántica, como la dualidad onda-partícula, la paradoja del gato de Schrödinger, el problema de la medida, el colapso instantáneo de la función de onda, etc. Para resolver estos problemas, la teoría es **inherentemente no local**. Las variables que portan el espín y los espacios curvos son posibles también en esta teoría y pueden trasladarse a la teoría cuántica de campos [21] y [22].

En mecánica cuántica las mediciones son un caso particular de los procesos cuánticos descritos por la teoría y producen las predicciones cuánticas estándar generalmente asociadas con la interpretación de Copenhague. La teoría no tiene un "problema de medición", debido a que las partículas tienen una configuración definida en todo momento.

de Broglie describió su teoría de la onda guía o de la onda piloto como una teoría ondulatoria electromagnética. Describió que una partícula se acopla a una onda electromagnética, de manera que parece montar a la onda. Esta onda electromagnética guía el movimiento de la partícula lo que provoca el aparente comportamiento ondulatorio (y los patrones de interferencia observados en el experimento de la doble rendija de la partícula).

En mecánica cuántica se define que una teoría presenta variables ocultas, en el sen-

tido de que deben existir formulaciones alternativas que suponen la existencia de ciertos parámetros desconocidos que serían los responsables de las características estadísticas y probabilísticas de la mecánica cuántica. Dichas formulaciones pretenden restablecer el determinismo eliminado por la interpretación de Copenhague, que es la interpretación ortodoxa en mecánica cuántica [21] y [22].

Esto a manera de crítica a la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica, la cual dichas teorías conciben como una descripción incompleta de la realidad física. Dado a lo anterior, en dicha teoría de variables ocultas se cree que los comportamientos probabilísticos de la teoría cuántica se corresponderían con un comportamiento estadístico asociado a partes del sistema y parámetros que no nos son accesibles (variables ocultas). Es decir, conciben las probabilidades cuánticas como fruto del desconocimiento de estos parámetros [21] y [22].

En el formalismo de la teoría de de Broglie–Bohm, como en el de la mecánica cuántica convencional, existe una función de onda (una función en el espacio de todas las configuraciones posibles), pero adicionalmente contiene también una configuración real, incluso para situaciones donde no hay observador. La evolución temporal de las posiciones de todas las partículas y la configuración de todos los campos queda definida por la función de onda, que satisface la ecuación guía. La evolución temporal de la propia función de onda viene dada por la ecuación de Schrödinger como en la mecánica cuántica no relativista [21] y [22].

En los escritos originales de Bohm [21] y [22], el autor discute cómo la teoría de Broglie–Bohm llega a los mismos resultados en la medición que la mecánica cuántica. La idea clave es que ello sería cierto si las posiciones de las partículas satisfacen la distribución estadística dada por la probabilidad $|\psi|^2$. Dicha distribución queda garantizada en cualquier momento por la ecuación guía si la distribución inicial de las partículas satisface $|\psi|^2$.

El teorema de Bell es un teorema que muestra que las predicciones de la mecánica cuántica no son intuitivas, y afecta a temas filosóficos fundamentales de la física moderna. El teorema de Bell es un teorema de imposibilidad, que afirma que ninguna teoría física de variables ocultas locales puede reproducir todas las predicciones de la mecánica cuántica [23].

La desigualdad de Bell supone un resultado negativo para cierto tipo de teorías como la de Bohm. De hecho, el descubrimiento del Teorema de Bell fue inspirado por el trabajo de David Bohm.

Dicho teorema es un teorema de imposibilidad que demuestra que no existen teorías de variables ocultas locales que sean compatibles con la mecánica cuántica. Así la interpretación de Bohm está condenada a eliminar la localidad o la noción de objetividad física. La interpretación de Bohm opta por conservar la objetividad física y aceptar la no-localidad. Naturalmente la no-localidad supone cierta incoherencia con la teoría de la relatividad convencional.

La teoría de Broglie–Bohm expresa de una manera explícita la no localidad que aparece en la física cuántica. La velocidad de cualquier partícula depende del valor de la función de onda, la cual depende a su vez de la configuración global de la totalidad

del universo.

El potencial cuántico o potencialidad cuántica es un concepto central de la formulación de la mecánica cuántica de de Broglie-Bohm, introducida por David Bohm [31].

Inicialmente presentado bajo el nombre de potencial cuántico-mecánico, posteriormente potencial cuántico, Bohm y Basil Hiley lo desarrollaron más tarde en su interpretación como un potencial de información que actúa sobre una partícula cuántica. También se le conoce como energía potencial cuántica, potencial de Bohm, potencial cuántico de Bohm o potencial cuántico de Bohm [24].

En el marco de la teoría de de Broglie-Bohm, el potencial cuántico es un término dentro de la ecuación de Schrödinger que actúa para guiar el movimiento de las partículas cuánticas (como la onda piloto de de Broglie).

Bohm y Basil Hiley también llamaron al potencial cuántico potencial de información, dado que influye en la forma de los procesos y está moldeado por el entorno [25].

Respecto a este potencial cuántico Bohm indicó lo siguiente: *El barco o avión (con su piloto automático) es un sistema autoactivo, es decir, tiene su propia energía. Pero la forma de su actividad está determinada por el contenido de información sobre su entorno que es transportado por las ondas de radar. Esto es independiente de la intensidad de las ondas. De manera similar, podemos considerar que el potencial cuántico contiene información activa. Es potencialmente activo en todas partes, pero realmente activo solo donde y cuando hay una partícula* [26].

Hiley se refiere al potencial cuántico como energía interna (esto se ve en [27]) y como una nueva calidad de energía que solo juega un papel en los procesos cuánticos [28]. Explica que el potencial cuántico es un término de energía adicional aparte de la conocida energía cinética y la energía potencial (clásica) y que es un término de energía no local que surge necesariamente en vista del requisito de conservación de la energía; agregó que gran parte de la resistencia de la comunidad física contra la noción del potencial cuántico puede deberse a las expectativas de los científicos de que la energía debería ser local [27] y [28].

Hiley enfatizó varios aspectos relacionados con el potencial cuántico de una partícula [29]. En primer lugar, el potencial cuántico se deriva matemáticamente de la parte real de la ecuación de Schrödinger bajo la descomposición polar de la función de onda [30], no se deriva de un hamiltoniano u otra fuente externa, y podría decirse que está involucrada en un proceso de autoorganización involucrando un campo subyacente básico [25]. Por esa razón el potencial cuántico lleva información sobre todo el arreglo experimental en el que se encuentra la partícula. También el potencial cuántico cumple una condición previa para la no localidad: no es necesario que disminuya a medida que aumenta la distancia (no cambia si se multiplica por una constante, ya que este término también está presente en el denominador, por lo que Q es independiente de la magnitud de Ψ y por lo tanto de la intensidad de campo) [25].

En este apartado se muestra una interpretación del potencial cuántico de de Broglie-Bohm, como la energía debida al campo electromagnético oscilante acotado que se corresponde con un fotón virtual en la interpretación dada por Ginzburg (esta inter-

pretación esta presentada en su libro [17]). Este fotón virtual se acopla a una partícula cargada en movimiento.

Se obtiene con esto una generalización de la ecuación de Schrödinger y se demuestra que la función de onda es una función propia del problema de Sturm-Liouville que forman una base completa; donde los coeficientes de estas funciones representan variables ocultas no locales que describen el fotón virtual.

La no localidad de la mecánica cuántica es abordada y se encontrará que está relacionada sólo con el fotón virtual. Para posteriormente obtener la energía cuántica del punto cero para el oscilador armónico de ecuaciones clásicas.

La formulación de Bohm basada en la teoría de la onda piloto de Louis de Broglie sugiere una posible interpretación de la mecánica cuántica que es en principio causal y no local. Esta representación permite encontrar partiendo de la ecuación de Schrödinger y por medio de consideraciones clásicas, las ecuaciones de movimiento para una partícula. En estas ecuaciones, la naturaleza de la función de onda puede ser abordada; encontrándose así que por medio de un campo electromagnético puede darse una explicación para el comportamiento de los sistemas cuánticos. Esta conduce a la función completa de Hamilton que contiene el potencial cuántico [18] y [19].

El potencial cuántico desempeña un papel central en el formalismo de Bohm. Es de gran importancia, porque la formulación de Bohm y el potencial cuántico permiten comprender mejor los fundamentos de la teoría cuántica.

Hasta ahora no se entiende claramente la naturaleza del potencial cuántico y las funciones de onda, ya que estas funciones se encuentran en el espacio de configuraciones y no existen realmente en el espacio tridimensional. La función de onda debe considerarse como una herramienta matemática para calcular los resultados de observaciones, no como una entidad físicamente presente que existe en el espacio.

Teniendo esto en mente, se desea aquí desprenderse de la necesidad de usar cualquier axioma para las funciones de onda y de **variables ocultas**.

En la siguiente sección se dará un repaso sobre la formulación de de Broglie-Bohm de la mecánica cuántica y como de esta se obtiene el potencial cuántico Q .

5.1. Formulación de de Broglie-Bohm de la Mecánica Cuántica

El potencial cuántico está formado por un campo electromagnético limitado (una onda piloto), es decir, un fotón virtual [17], este puede encontrarse en un sistema cuántico limitado.

Por lo general, el potencial cuántico en la formulación bohmiana de la teoría cuántica se define de esta manera, considérese aquí el caso de una partícula para la ecuación de Schrödinger [18] y [19]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, t) + U(x) \Psi(x, t). \quad (5.1)$$

Considérese la función de onda en su forma polar (considerada como una onda piloto) $\Psi(x, t) = R(x, t) \exp(iS(x, t)/\hbar)$, donde la función exponencial imaginaria $\exp(iS(x, t)/\hbar)$ permite describir la evolución del sistema a través del tiempo (con una ecuación de continuidad), donde la función real $S(x, t)$ representa la fase de una onda y la parte real $R(x, t)$ permite obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi (que es una ecuación en derivadas parciales no lineal para la función principal de Hamilton $S(q_1, \dots, q_n; t)$), [31]:

$$H\left(t, q_1, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (5.2)$$

La versión de Bohm de la teoría de de Broglie se basa en una dinámica de segundo orden.

La ecuación (5.2) para una partícula en un campo de fuerzas conservativo puede escribirse como [31]:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial S}{\partial t} + U(\mathbf{x}) \right) = 0. \quad (5.3)$$

Puede sustituirse la función de onda $\Psi(x, t) = R(x, t) \exp(iS(x, t)/\hbar)$ en la ecuación de Schrödinger (5.1). Puede primero trabajarse con el lado izquierdo de la ecuación tomándose el diferencial parcial de tiempo y usando la regla del producto [31]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} R(x, t) \exp(iS(x, t)/\hbar) = i\hbar \left(\frac{\partial R(x, t)}{\partial t} + R \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \exp(iS(x, t)/\hbar) \right). \quad (5.4)$$

Ahora se puede trabajar con el lado derecho de la ecuación de Schrödinger, donde se tiene $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, es decir [31]:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \right) R \exp(iS(x, t)/\hbar) \\ & = \left[\left(\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla^2 R + \frac{i}{\hbar} 2\nabla R \cdot \nabla S + \frac{i}{\hbar} R(\nabla^2 S + \frac{i}{\hbar} \nabla S)] + UR \right) \exp(iS(x, t)/\hbar) \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Igualando las ecuaciones (5.4) y (5.5), y cancelando términos exponenciales se pueden encontrar ecuaciones separadas para $\frac{\partial R}{\partial t}$ y $\frac{\partial S}{\partial t}$ en sus partes real e imaginaria respectivamente, se tiene [31]:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m} [R\nabla^2 S + 2\nabla R \cdot \nabla S] \quad (5.6)$$

y

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right]. \quad (5.7)$$

Invirtiendo la regla del producto en (5.6) se tiene la siguiente ecuación de continuidad [31]:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0. \quad (5.8)$$

La ecuación (5.7) es similar a la ecuación de Hamilton-Jacobi donde S es la función principal de Hamilton y $\frac{\nabla S}{m}$ es la velocidad de la partícula. Esta ecuación (5.7) es llamada ecuación de Hamilton-Jacobi modificada y el término [31]:

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + U \quad (5.9)$$

es el llamado **potencial cuántico** [31].

Considerando este potencial cuántico Q dado en la ecuación (5.9) y la ecuación de Hamilton-Jacobi modificada (5.7), puede escribirse el siguiente hamiltoniano modificado [18] y [19]:

$$H_{tot}(t, x, p, R) = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + U(x) - Q(x, t), \quad (5.10)$$

donde $Q(x, t) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$ es el potencial cuántico y la ecuación de continuidad es escrita como en (5.8).

Este hamiltoniano modificado es dependiente de la función de onda Ψ y el término adicional, el potencial cuántico Q ; usualmente interpretado como una energía interna asociada con una cierta región del espacio fase, ausente en mecánica clásica, pero que surge en la mecánica cuántica desde el principio de incertidumbre.

Usualmente se tiene en cuenta que un sistema descrito por la ecuación de Schrödinger (5.1) se supone que es aislado, pero este no contiene ningún campo electromagnético variable.

Pero en este trabajo, en la sección 5.4 se hará la consideración que en este sistema descrito por la ecuación de Schrödinger debería de contener implícitamente un campo electromagnético oscilante producido por el electrón. Por esa razón en la siguiente sección se estudiará la acción para un campo electromagnético.

De la misma manera, la formulación de Bohm tiene la característica de que es causal (por lo tanto, debe ser una teoría de campo clásica) y es no local; esto último puede identificarse por la presencia de un campo electromagnético distribuido [18] y [19].

En el caso en que nuestro sistema consta de dos partes, una de las cuales se caracteriza por coordenadas observables $q_i(t)$ y otro tiene coordenadas ocultas $Q_i(t)$, puede demostrarse que el hamiltoniano de dicho sistema contiene un potencial cuántico, que puede considerarse como la energía cinética dada por las variables ocultas adicionales [19].

5.2. Acción para el Campo Electromagnético

Como fue mencionado en la última sección del capítulo 4, el campo electromagnético debe estar acotado respecto a coordenadas espaciales ya que en la sección 5.3 será posible expandir la función de onda en un conjunto completo de funciones que estarán en términos de dichas coordenadas espaciales. Se mencionó que el campo se acopla a la partícula cargada en movimiento a través de los potenciales A_μ como en la ecuación (4.23), gracias a esto será posible ahora hacer la correspondencia del potencial cuántico Q en el formalismo bohmiano tratado en la sección anterior con estos potenciales A_μ ([18] y [19]).

De igual manera, en la sección anterior se mencionó la necesidad de considerar el campo electromagnético. Por esta razón ahora se quiere tratar la acción de dicho campo, de esta acción es posible derivar las ecuaciones de movimiento de la electrodinámica relativista (en el capítulo 4 fueron obtenidas en el marco de la métrica de Finsler). Aquí solo busca hacerse énfasis en que el campo electromagnético debe estar acotado para una región del espacio (ya que los sistemas atómicos son sistemas acotados formados por una partícula cargada en un campo electromagnético).

Partiendo de la acción para el sistema aquí descrito [4]:

$$S_{tot} = S_0 + S_{int} + S_{em}, \quad (5.11)$$

aquí S_0 es la acción para una partícula libre (sin campo electromagnético),

$$S_0 = -ac \int \sqrt{1 - \frac{v^2(\tau)}{c^2}} d\tau, \quad (5.12)$$

donde a es una constante, c es la velocidad de la luz y la constante ac no afecta la ecuación de movimiento. Mientras que la acción para la interacción entre el campo electromagnético y su carga se escribe como:

$$S_{int} = -\frac{1}{c^2} \int j^\alpha(x) A_\alpha(x) d^4x. \quad (5.13)$$

Por otro lado, la acción para el campo electromagnético se escribe como:

$$S_{em} = -\frac{1}{16\pi c} \int F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} d^4x. \quad (5.14)$$

Se puede ver que tanto S_{int} como S_{em} contienen las coordenadas de campo, por lo que en este caso se está hablando de un fotón acotado y acoplado junto con el electrón, dicho fotón acoplado se nombra como fotón virtual [4] y [19].

En la sección 5.4 será interpretada para el caso este fotón virtual vinculado al potencial cuántico Q , como su energía en el estado cero para un oscilador armónico y esto permitirá eliminar la necesidad de variables ocultas en el formalismo de de Broglie-Bohm.

En la siguiente sección se encontrará como el potencial cuántico Q puede expresarse como un potencial que corresponde a la oscilación del campo electromagnético. Esto

será así, ya que la función de onda Ψ podrá expandirse en términos de variables ocultas no locales.

5.3. Interpretación del Potencial Cuántico Q por Medio de la Transformada de Fourier

Las ecuaciones de movimiento de un sistema físico pueden ser obtenidas por medio de la función llamada hamiltoniano, esta función puede identificarse con la energía total del sistema:

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) = E. \quad (5.15)$$

Para modelar un sistema atómico clásicamente, esta ecuación no posee campos electromagnéticos armónicos **implícitos**, y se considera que estos campos deberían tener lugar en los sistemas atómicos debido a las oscilaciones de los electrones, los cuales producen un campo electromagnético armónico $\varphi(k, x)$. Esta función armónica **implícita** se puede usar para escribir la transformada de Fourier de la ecuación de energía en las 4-coordenadas x .

Esta sería la forma en que el campo electromagnético aparece **implícitamente** en la ecuación de Schrödinger (5.1) (no de forma **explícita** al considerarse por acoplamiento mínimo el potencial electromagnético en el potencial arbitrario $U(x)$ de un hamiltoniano como en la ecuación (5.15)) y la función de Hamilton se transforma al operador [4], [18]:

$$\int \hat{H} \varphi d^4x = i\hbar \int \frac{\partial}{\partial t} \varphi d^4x. \quad (5.16)$$

Aquí la integración se lleva a cabo en un 4-volumen, y el hamiltoniano no relativista $\hat{H} = -\hbar^2 \nabla^2 / 2m + U(x)$, que corresponde al problema de Sturm-Liouville con funciones propias $\Psi_n(x, t) = \exp(iS_n/\hbar)$.

Estas funciones propias, a su vez, forman una base completa y gracias a ellos puede expandir nuestro fotón virtual, y así incluirlo en consideración a través de los coeficientes de expansión $R_n(p_\alpha)$ [4],

[18]:

$$\varphi(p_\alpha, x^\alpha) = \sum R_n(p_\alpha) \Psi_n(x^\alpha). \quad (5.17)$$

Aquí se hace la sumatoria solo sobre n , y el índice α es solo para mencionar el hecho de que se está trabajando con 4-vectores p_α y x_α en el espacio de Minkowsky.

Sustituyendo (5.17) en el operador (5.16) se tiene la siguiente transformada de Fourier [4], [18]:

$$\int \hat{H} \sum R_n(p_\alpha) \Psi_n(x^\alpha) d^4x = i\hbar \int \frac{\partial}{\partial t} \sum R_n(p_\alpha) \Psi_n(x^\alpha) d^4x. \quad (5.18)$$

Estas expresiones en realidad son ecuaciones **locales** cuánticas para describir nuestro sistema en el espacio de Minkowsky, con **variables ocultas no locales** escritas para

el fotón virtual (**que son los coeficientes** $R_n(p_\alpha)$) y para velocidades no relativistas $v_e \ll c$ [18] y [19].

Para el hamiltoniano completo de este sistema (5.10), el potencial cuántico Q ahora debe atribuirse a la presencia del fotón virtual dado por una onda piloto electromagnética.

En cuanto a la ecuación de continuidad (5.8) escrita para la densidad $\rho = R^2$, debe ser interpretada como una ecuación de continuidad para los coeficientes cuadrados de la expansión (en el conjunto completo de las funciones propias del problema correspondiente de Sturm-Liouville) del fotón virtual acoplado con un electrón y moviéndose con la velocidad del electrón v_e .

Debe ser expresado aquí en esta ecuación de continuidad, que la constante de Planck, de hecho, no aparece, porque es una ecuación clásica para coeficientes de expansión del campo electromagnético clásico junto con el electrón, [18]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{J}) = 0 \quad (5.19)$$

donde $\vec{J} = R^2 \frac{\nabla S}{m} = R^2 \vec{v}_e$.

Ahora bien, para la ecuación Hamilton-Jacobi (5.7) se tiene la siguiente ecuación encontrada en los trabajos [18] y [19]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H_{tot} = -\frac{(\nabla S)^2}{2m} - U(x) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (5.20)$$

Con esto se entiende que el sentido físico del potencial cuántico Q como un potencial clásico que corresponde a la oscilación de un campo electromagnético con energía $\hbar\omega$ y para esto puede interpretarse cómo el límite $\hbar\omega \rightarrow 0$ que se da en el caso de la ausencia del fotón virtual.

Precisamente así es como definió Bohm el potencial cuántico Q . Dado que, al existir un campo electromagnético, que es el fotón virtual en los sistemas cuánticos. Este fotón virtual se acopla a las partículas para guiar su movimiento dando una explicación al movimiento ondulatorio de las partículas expresando dos componentes acoplados (la onda piloto y el electrón) en lugar de ser la dualidad onda-partícula una propiedad intrínseca de las partículas mismas.

En este caso, se obtiene un sistema clásico con la función clásica de Hamilton

$$H = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + U(x) \quad (5.21)$$

para nuestro sistema **incompleto** [18].

En la siguiente sección se escribirá un hamiltoniano para el caso particular del oscilador armónico y se describirá su relación con el potencial cuántico Q .

5.4. Caso Particular de Estudio del Oscilador Armónico

Como fue mencionado en la sección anterior; se puede considerar que el potencial cuántico Q tiene un tratamiento análogo a la oscilación de un campo electromagnético con energía $\hbar\omega$. A diferencia de que el potencial $U(x)$ es un potencial arbitrario que pertenece al hamiltoniano usual en mecánica clásica.

Por esta razón se considera el hamiltoniano para el caso del oscilador armónico [18]:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \quad (5.22)$$

Sustituyendo el estado coherente de la función de onda $\Psi = \exp(-m\omega r^2/2\hbar)$ del problema correspondiente de Sturm-Liouville, el potencial cuántico Q para el oscilador armónico que es $Q = \hbar\omega/2$, en este contexto se interpreta como la energía del fotón virtual en el estado cero del oscilador armónico.

Ya que aquí la frecuencia de las oscilaciones de los electrones es la misma que la que tiene el fotón virtual. Entonces, el hamiltoniano para el oscilador armónico cuántico, dado por consideraciones clásicas en el estado fundamental es [18]

$$H_{tot}(t, x, p, R) = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + U(x) - \hbar\omega/2 \quad (5.23)$$

con la frecuencia de oscilación del electrón y del fotón virtual ω .

Gracias a lo anterior, se puede entender entonces que el hamiltoniano corresponde al sistema mecánico completo clásico y que no contiene variables ocultas. Es por esa razón que el llamado potencial cuántico Q aparece debido a la presencia de un fotón virtual con frecuencia ω , que forma una energía cuántica de estado cero $\hbar\omega/2$.

Entonces, para el potencial cuántico Q se entiende que las variables ocultas son en realidad variables que describen el campo electromagnético clásico oscilante o fotón virtual acoplado con el electrón en movimiento [18].

En la sección 5.3 se mostró como es posible interpretar el potencial cuántico Q por medio de la transformada de Fourier, ahora en la siguiente sección se encontrará que de la misma manera es posible encontrar la ecuación de Schrödinger.

5.5. Obtención de la Ecuación de Schrödinger por Medio de la Transformada de Fourier a partir de un Hamiltoniano Clásico

Considérese un movimiento unidimensional, suponiendo que se tiene la ecuación clásica para la energía del sistema $H = E$, donde H es el hamiltoniano y E es la energía total del sistema. Aquí, puede considerarse una partícula en el campo $U(x)$, para una energía total del sistema, se tienen dos posibilidades: el primer caso se da con

$E < 0$ el sistema está delimitado (ya que se ha considerado un campo electromagnético acotado), y existe un movimiento periódico; mientras que el segundo caso se da con $E > 0$ el sistema no tiene límites y por ello existe un movimiento libre.

Cualquier función y en particular el hamiltoniano, se puede expandir en una serie de Fourier (para el caso en que se tiene $E < 0$) o con una transformada de Fourier (para el caso en que se tiene $E > 0$) en el conjunto completo de funciones.

Los fotones a su vez pueden describirse mediante ondas armónicas que forman tal conjunto completo de funciones para la expansión de interés $\varphi = \exp(-ik_\alpha x^\alpha)$, donde k_α y x_α son 4-vectores.

Considérese $E < 0$, que corresponde a un espectro discreto en mecánica cuántica. El caso del espectro continuo se da cuando $E > 0$, y que difiere solo por el reemplazo de sumas por integrales, pero la derivación completa de las ecuaciones es hecha de manera similar.

Puede aplicarse ahora la transformada de Fourier

$$Q_t(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (5.24)$$

al hamiltoniano $H = E$ en la coordenada x como:

$$\int H(k, x) \varphi(k, x) dx = \int E \varphi(k, x) dx. \quad (5.25)$$

De igual manera, es posible expresar explícitamente el hamiltoniano clásico y la función armónica $\varphi = \exp(-ik_\alpha x^\alpha)$ de la forma siguiente: [18]

$$\int \frac{p^2}{2m} e^{-\frac{i}{\hbar}(px-Et)} dx + \int U(x) e^{-\frac{i}{\hbar}(px-Et)} dx = \int E e^{-\frac{i}{\hbar}(px-Et)} dx. \quad (5.26)$$

Gracias a que es posible hacer las integrales dadas en (5.26) y que puede factorizarse la función armónica, puede obtenerse justamente por medio de la transformada de Fourier la ecuación de Schrödinger (5.1) [18]:

$$\int dx \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] e^{-\frac{i}{\hbar}(px-Et)}. \quad (5.27)$$

Se conoce que el hamiltoniano físicamente representa la energía total de un sistema mecánico $H = E$. Además en el término entre corchetes de la ecuación (5.27), se tiene del lado izquierdo el operador cuántico para el hamiltoniano y del lado derecho dicha energía total del sistema. Por esta razón la transformada de Fourier escrita en la ecuación (5.27) se puede simplificar de la siguiente manera [18]

$$\int dx \left[(\hat{H} - E) \varphi = 0 \right] \quad (5.28)$$

para el sistema bajo consideración.

Sea ahora $\Psi_k(x)$ un conjunto completo de funciones propias del operador H :

$$\varphi(p, x) = \sum_m a_m(p) \Psi_m(x). \quad (5.29)$$

Es posible usar en la función φ de la ecuación (5.28) esta expresión explícita para este conjunto completo de funciones dada en la ecuación (5.29). Así, la ecuación (5.28) se convierte en la siguiente expresión [18]:

$$\int dx \sum_m a_m(p) \left[(\hat{H} - E) \Psi_m = 0 \right]. \quad (5.30)$$

En su límite no relativista puede escribirse la ecuación (5.30) como

$$\hat{H} \Psi_m(x) = E_m \Psi_m(x), \quad (5.31)$$

esta es la ecuación de Schrödinger que se expresa aquí representada en coordenadas ya que el fotón virtual se encuentra acotado.

Ahora bien, si en la transformada de Fourier similar a la ecuación (5.30) se integra en la coordenada p ; de la misma manera puede ser obtenida la ecuación de Schrödinger. En este caso ahora la ecuación se encuentra representada para las coordenadas p o en una p -representación:

$$\hat{H} \Psi_m(p) = E_m \Psi_m(p). \quad (5.32)$$

Para esta ecuación, es posible realizar la transformada inversa de Fourier de la ecuación (5.21) de la forma [18]

$$\int \int dx \sum_m \varphi^*(k, x) a_m \left[\hat{H} \Psi_m - E \Psi_m \right] dp = 0, \quad (5.33)$$

Con este conjugado completo de eigenfunciones para el campo electromagnético armónico:

$$\varphi^*(k, x) = \sum_n a_n^*(p) \Psi_n^*(x), \quad (5.34)$$

puede escribirse la transformada inversa de Fourier de la siguiente manera [18]

$$\int \int dx dp \sum_m \sum_n a_m a_n^* \Psi_n^*(x) \left[\hat{H} - E \right] \Psi_m(x) = 0. \quad (5.35)$$

La ecuación (5.35) puede reexpresarse de la forma siguiente [18]:

$$\int dp \sum_m \sum_n a_m a_n^* \langle \Psi_n | \left[\hat{H} - E \right] | \Psi_m \rangle = 0. \quad (5.36)$$

Gracias a esto, se hace la interpretación de que **”la mecánica cuántica es la transformada de Fourier de la mecánica clásica”**. Esta transformación va en

función del **campo electromagnético implícito** que no aparece en la ecuación usual de Schrödinger.

Aquí también es posible interpretar que las funciones de onda no necesariamente representan densidades de probabilidad, sino que son solo funciones propias del operador de Liouville que forma el problema de Sturm-Liouville. Estas son las funciones propias que nos permiten descomponer el campo electromagnético delimitado junto con una carga a incluirse en consideración; además de que aquí dado que la función de onda esta empleada bajo la formulación de de Broglie-Bohm no surge el colapso de la función de onda.

La paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen habla sobre que **la información se transmite de forma instantánea debido al entrelazamiento cuántico y que esto viola el principio de localidad.**

En consecuencia, con la expresión (5.35), la función de onda se define completamente por el fotón virtual, y su colapso (no instantáneo) aparece dentro del 3-volumen, donde está la longitud de onda del fotón (ver integración en dx en (5.33)). Entonces, dentro de esta teoría completa no aparecen movimientos caracterizados por velocidades más rápidos que la velocidad de la luz que tiene lugar en la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen para la ecuación de Schrödinger (5.1).

Otro aspecto importante de la mecánica cuántica ortodoxa es el principio de incertidumbre de Heisenberg, por esta razón en la sección siguiente se hablará de este principio y como puede interpretarse en términos del campo electromagnético.

5.6. Comentarios Acerca del Principio de Incertidumbre de Heisenberg

Para concluir este capítulo, se hará una breve mención al principio de incertidumbre de Heisenberg [4]:

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar. \quad (5.37)$$

En un experimento, cualquier medición hecha con un aparato de medida, ocurre con la asistencia de un fotón [4].

De esta forma, pueden medirse las coordenadas del objeto con la precisión [4]

$$\Delta x = \lambda / \cos\varphi, \quad (5.38)$$

donde λ es la longitud de onda del fotón.

Sin embargo, en el curso de la medición de coordenadas, el fotón transfiere un parte de su momento lineal al objeto medido p , esto tiene como consecuencia que sea posible escribir la precisión de la medición del momento lineal p como [4]:

$$\Delta p = \hbar k \cos\varphi. \quad (5.39)$$

Combinando la expresión (5.38) y (5.39) de la forma expresada por el principio de incertidumbre de Heisenberg en la ecuación (5.37), se tiene [4]:

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar. \quad (5.40)$$

Por otro lado, la fase es un invariante, por lo que se puede concluir que la expresión simétrica para la ecuación (5.40) también toma lugar [4]

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar. \quad (5.41)$$

En mecánica cuántica ortodoxa lo que el principio de indeterminación sugiere es que las propiedades de la partícula se encuentran en estado de superposición y por tanto tienen atribuidos a la vez diferentes valores de posición x y de momento lineal p . Así, en la intervención, a la hora de medir; obligamos a una de las magnitudes a tomar un valor, colapsando su función de onda, y dándonos así un resultado preciso para esta, por lo que aumenta irremediamente la indeterminación en la otra medida.

Pero como ha sido posible observarse en esta sección, el principio de incertidumbre de Heisenberg también toma lugar tomando en cuenta las consideraciones de la formulación de de Broglie-Bohm y de igual manera en la formulación desarrollada con ayuda de la transformada de Fourier. Ya que ambas cuentan con la presencia de un fotón virtual acotado. Eliminando con ello el colapso de la función de onda encontrado en la mecánica cuántica ortodoxa.

Podrá encontrarse en el apéndice *A*, una relación matemática para una generalización del principio de incertidumbre dado para funciones matemáticas arbitrarias y su relación con la transformada de Fourier, esto con la intención de mostrar que el principio de incertidumbre también puede ser utilizado en otros contextos que no pertenecen a la mecánica cuántica ortodoxa.

Siguiendo la idea que será abordada en el capítulo 6 de que es posible derivar de primeros principios la condición de cuantización de Sommerfeld y una ecuación de movimiento clásica para el átomo de hidrógeno. En el capítulo 7 (secciones 7.3 y 7.4) se verá el caso de un modelo atómico formulado en el marco de una métrica de Finsler, (esta métrica fue descrita en los capítulos 1 y 3) que presenta invariancia adiabática (descrita en el capítulo 2).

En dicho modelo atómico el electrón se acopla a un campo electromagnético oscilante acotado y producido por el núcleo del átomo; este campo electromagnético se interpreta aquí como un fotón virtual (en el sentido de ser un campo electromagnético virtual acotado y que fue estudiado a lo largo de este capítulo 5) y esto tiene como consecuencia que el sistema no presenta pérdidas de energía por irradiación electromagnética, un fenómeno que se observaba en los primeros intentos para crear un modelo atómico.

La métrica de Finsler que fue estudiada en los capítulos 1, 3 y que fue usada para obtener las ecuaciones del campo electromagnético en el capítulo 4, será usada en este modelo atómico. Esto será así porque el campo electromagnético interactúa con la expansión acelerada del universo debido a que el sistema no está aislado. Esto conlleva a que los sistemas electromagnéticos y los sistemas cuánticos (por consecuencia de acuerdo con lo tratado en el presente capítulo 5) interactúen también con dicha expansión del universo.

También en el capítulo 8 (sección 8.2) de este trabajo de tesis, se abordará de nuevo la naturaleza de la función de onda expresada como un fotón virtual y su relación a la transformada de Fourier; esto para un caso relativista. Encontrando ahora de primeros principios la ecuación de Klein-Gordon.

Capítulo 6

Modelo Atómico Derivado de Primeros Principios

Como se vio en el capítulo anterior, en la sección 5.5 un hamiltoniano perteneciente a la mecánica clásica puede ser transformado a un hamiltoniano que pertenece a la mecánica cuántica, esto se hizo usando la transformada de Fourier. Para esto se utiliza el campo electromagnético. Este se presenta como el mediador entre la interacción de un sistema cuántico y el observador, y así los resultados cuánticos obtenidos de invariancia adiabática pueden abordarse en la mecánica cuántica ortodoxa desarrollada por la ecuación de Schrödinger.

Ya que la constante de Planck en la métrica de Finsler es el invariante adiabático del campo electromagnético; así un campo electromagnético producido por un electrón oscilante puede representarse por una función armónica que es usada para escribir la transformada de Fourier mencionada anteriormente.

También en la formulación de de Broglie-Bohm de la mecánica cuántica, aparece un potencial cuántico el cual se representó por medio de una función de onda, que se denomina onda piloto. Esta onda piloto se interpreta como un fotón virtual que guía el movimiento de las partículas, arrojando así una explicación para los efectos cuánticos observados, siendo como la dualidad-onda partícula y el principio de incertidumbre.

Y como se vio en (4.3), (4.5) y (4.6) el campo electromagnético se puede cuantizar sin la necesidad de considerar las propiedades de osciladores armónicos para materia bariónica. Con esto se puede mencionar que la ecuación de Planck $E = h\nu$, $P = \hbar k$ se cumple, independientemente de las propiedades de los osciladores [4].

En otras palabras, la emisión o absorción de un fotón puede ocurrir solo durante todo el período de movimiento de una carga, es decir; solo para una carga que posee el período 2π [4].

Fue mencionado también en la sección 2.2 que el modelo de Sommerfeld es una generalización del modelo de Bohr.

Por esta razón el presente capítulo, lo visto en las secciones 6.1, 6.2 y 6.3 será un repaso del trabajo [4]. En este se vio un modelo atómico y el caso del oscilador armónico que fueron derivados de la condición de cuantización de Sommerfeld encontrada desde

el principio de mínima acción de la mecánica clásica.

También en la sección 6.4 se mencionarán algunos aspectos generales sobre la ecuación de movimiento para una partícula cargada en variedad de Finsler (4.18) y del momento magnético del electrón, todo esto será abordado más a profundidad en el capítulo 7.

6.1. Condición de Cuantización de Sommerfeld Derivada de la Mecánica Clásica

Considérese un sistema cerrado en el cual la carga se mueve armónicamente y con aceleración constante. En esto el hamiltoniano para el electrón no depende explícitamente del tiempo. Este puede escribirse como $H = K + U$ y aquí K , U son energía cinética y potencial respectivamente y E es la energía total del sistema. Entonces el lagrangiano puede escribirse como $L = K - U = 2K - E$. La acción clásica para un electrón acotado en una órbita circular en este caso sería [4]:

$$S = \int_0^t L d\tau = 2 \int_0^t K d\tau - Et = S_0 - Et, \quad (6.1)$$

pero

$$\Delta S = \int_0^t L_1 d\tau - \int_0^t L_2 d\tau = 0 \quad (6.2)$$

donde T_1 y T_2 son los períodos de movimiento del electrón en el sistema en la primera y segunda órbita, respectivamente [4].

Luego, considérese la ecuación de Hamilton-Jacobi, para dos órbitas 1 y 2 diferentes [4]:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = 2 \int_0^t K_2 d\tau - 2 \int_0^t K_1 d\tau - (E_2 T_2 - E_1 T_1) = 0 \quad (6.3)$$

sin embargo $(E_2 T_2 - E_1 T_1) = h\nu T_{Fotón} = h$ es la acción para un fotón emitido o absorbido, así se tiene [4]

$$2 \int_0^t K_2 dt - 2 \int_0^t K_1 dt = h \quad (6.4)$$

que representa la primera condición de Borh-Sommerfeld [4].

Como se mencionó anteriormente el modelo de Bohr-Sommerfeld solo corresponde a la teoría de Bohr para el primer orbital. Una teoría debería tener poder predictivo, mientras que el modelo del átomo de Bohr y la mecánica cuántica ortodoxa no siempre tienen ese poder predictivo.

Considérese al electrón en un campo central en el límite no relativista. Se tiene que $K = \frac{1}{2}p\dot{q}$ y $dt = \frac{dq}{\dot{q}}$, donde $p = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}}$. Así la expresión (6.4) es dada por [4]:

$$\oint p_2 dq_2 - \oint p_1 dq_1 = h. \quad (6.5)$$

Esto permitió hacer un desarrollo directo de la condición de cuantización de Sommerfeld desde la mecánica clásica.

Siguiendo el criterio de partir de consideraciones clásicas dado en la ecuación (6.5), en la siguiente sección se usará la condición de cuantización de Sommerfeld considerando el momento angular, esto con la intención de construir un modelo atómico clásico.

6.2. Átomo de Hidrógeno

La ecuación (6.5) expresada para el átomo de hidrógeno da la siguiente expresión de cuantización

$$mr_2^2\dot{\varphi}_2 - mr_1^2\dot{\varphi}_1 = \hbar, \quad (6.6)$$

o de la forma $M_2 - M_1 = \hbar$, donde M_1 y M_2 son los momentos angulares. Esto es debido a que los valores $mr^2\dot{\varphi}$ coinciden con los momentos angulares para el electrón en el campo de Coulomb [4].

Si $r_0 = 0$, se tiene que $M_0 = 0$. En este caso $M_1 = M_0 + \Delta M$, y se tiene que el diferencial del momento angular da $\Delta M = \hbar$, entonces gracias a esto se puede obtener [4]

$$M_1 = M_0 + \hbar = \hbar, \quad M_2 = M_1 + \hbar = 2\hbar, \dots, \quad M_n = n\hbar. \quad (6.7)$$

Para esta expresión y para el potencial central ($U \sim r^k$). Puede usarse la teoría de similitud mecánica. Esta dice que un cambio de todas las coordenadas de las partículas por un mismo factor significa pasar de ciertas trayectorias a otras, geoméricamente semejantes a las primeras, pero de tamaño diferente. Se llega así a la siguiente conclusión: si la energía potencial de un sistema $U(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots, \alpha r_n) = \alpha^k U(r_1, r_2, \dots, r_n)$; siendo α una constante cualquiera y k el grado de homogeneidad de las coordenadas; las ecuaciones de movimiento admiten una serie de trayectorias geoméricamente semejantes. Con esto se tiene [12], [4]:

$$\frac{M'}{M} = \left(\frac{r'}{r}\right)^{1+\frac{k}{2}}; \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{r'}{r}\right)^k \quad (6.8)$$

de estas ecuaciones es posible obtener los valores para el radio $r_n = r_1 (n)^{\frac{1}{1+\frac{k}{2}}}$ y la energía $E_n = E_1 (n)^{\frac{k}{1+\frac{k}{2}}}$. Para el caso del oscilador armónico clásico $k = 2$ por lo que se tiene $r_n = r_1 \sqrt{n}$; $E_n = E_1 n$ y para el átomo de hidrógeno $r_n = r_1 n^2$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ [4].

Gracias al hecho de que la constante de Planck puede obtenerse para la condición de cuantización $(E_2 T_2 - E_1 T_1) = h$ y que el periodo clásico para una órbita puede calcularse como [4]

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{(E - U(r))}}. \quad (6.9)$$

Considerando que para órbitas elípticas se tienen los ejes mayor y menor escritos de la forma $a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$ y $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$. Donde p y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}$ son el parámetro y excentricidad de la órbita respectivamente con una constante positiva α . Siendo para el momento angular de una partícula como $M = 2mf$, donde f es el área de la órbita y su derivada \dot{f} es la tasa de cambio a la que una partícula barre el área a medida que se mueve a lo largo de la órbita. Para una elipse $f = \pi ab$. Con lo que resulta:

$$T = 2\pi ma^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}} = m\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \quad (6.10)$$

Para el caso de una órbita circular $e = 0$ y la energía es $E = -\frac{m\alpha^2}{2l^2}$. En el siguiente capítulo, se abordará la teoría mecánica del potencial central más a detalle.

En este caso es importante considerar el periodo para una partícula con carga eléctrica e en un átomo de hidrógeno:

$$T = \pi e^2 \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \quad (6.11)$$

Ahora que se ha construido este modelo atómico desde la mecánica clásica, se buscará en la siguiente sección encontrar de la misma manera la energía del oscilador armónico cuántico.

6.3. Oscilador Armónico en el Modelo Atómico

Puede obtenerse el valor para la energía del átomo de hidrogeno $E_1 = \frac{me^4}{2\hbar^2}$. Por lo tanto, la cuantización dada por los axiomas de Bohr-Sommerfeld surge en forma clásica de las propiedades intrínsecas del campo electromagnético [4].

De acuerdo con la mecánica clásica la energía del oscilador armónico es [4]:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2), \quad (6.12)$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Teniendo en cuenta que para el valor promedio del oscilador armónico $\bar{T} = \bar{U}$, se obtiene la energía promedio para el período $E_n = mr_n^2 \omega^2$ [4].

Para llevarse a cabo la transición desde un estado inicial del sistema hasta el final $E_n \rightarrow E_k$ el oscilador debe perder energía por medio del campo electromagnético [4].

El factor de proporcionalidad entre la energía y la frecuencia del campo electromagnético es $\Delta E = E_n - E_k = \hbar\omega_{nk}$. Las expresiones $r_n = r_1 \sqrt{n}$; $E_n = E_1 n$ dan una relación entre los niveles de energía; sin embargo, de la ecuación $\Delta E = E_n - E_k = \hbar\omega_{nk}$ es la energía residual que no puede ser emitida por un fotón con energía $\hbar\omega$, porque [4]:

$$\Delta E = E_1 - E_0 = mr_1^2 \omega^2 - \frac{1}{2}mr_1^2 \omega^2 = \frac{1}{2}E_1 < \hbar\omega. \quad (6.13)$$

Por lo tanto, esta constante aditiva (que aparece debido a la forma del potencial) debe agregarse a las expresiones $r_n = r_1\sqrt{n}$; $E_n = E_1n$ de la forma [4]:

$$E_n = nE_1 + \frac{1}{2}E_1 = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}). \quad (6.14)$$

Por lo tanto, la constante aditiva $1/2$ aparece por consideraciones clásicas [4].

Siendo así, todo lo dicho hasta este punto en las secciones 6.1, 6.2 y 6.3, sobre el átomo de hidrogeno y el oscilador armónico fue considerado de mecánica clásica y la teoría de invariantes adiabáticos para un caso no relativista.

En la siguiente sección se mencionará como existe una relación de la ecuación de movimiento para una partícula cargada (4.18) con el momento magnético y el momento magnético de acuerdo al del electrón. Este tema será desarrollado más en detalle en el capítulo 7.

6.4. Momento Magnético del Electrón en un Sistema Atómico Relativista en Variedad de Finsler

Ahora desea abordarse el tema para un caso relativista usando el mismo contexto de la variedad de Finsler. Para esto será necesario partir de la ecuación de movimiento para una partícula cargada en una variedad de Finsler que cambia adiabáticamente en el tiempo dada en la ecuación (4.18), [3]:

$$mc\frac{du_\mu}{ds} - \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu = -\frac{\eta^\mu}{(x^\mu)^2}. \quad (6.15)$$

En esta ecuación de movimiento puede correrse los índices de forma que el 4-vector de posición sea $x^\mu = (x^0, x^k)$, la 4-velocidad sea $u_\nu = (\gamma ct, \gamma u_i)$, donde γ es el factor de Lorentz y el elemento de longitud es también aquí $ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}d\tau$.

Como se había mencionado antes el volumen unitario $\eta_\mu = (h, h, h, h)$ [3] junto con los 4-vectores anteriores permiten obtener las ecuaciones para la componente temporal [32].

$$mc\frac{du_0}{ds} - \frac{e}{c}\gamma\vec{E} \cdot \vec{v} = -h, \quad (6.16)$$

y para la componente espacial [32]

$$mc\frac{d\vec{u}}{ds} - \frac{e}{c}\gamma\left(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})\right) = -h. \quad (6.17)$$

La ecuación espacial (6.17) se reduce a la ecuación de movimiento clásica para una partícula cargada que se usa para un electrón en el átomo de hidrógeno, donde el potencial se debe al campo electromagnético oscilatorio y esto fue demostrado usándose la formulación de Bohm para la mecánica cuántica [32]:

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = e\left(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})\right). \quad (6.18)$$

El modelo atómico de Bohr permite encontrar el momento magnético del electrón combinando las ecuaciones $k\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$ y $L = mvr = n\hbar$ y considerando que $n = 1$ [33]

$$\mu_e = \frac{ge\vec{L}}{2m_e} = \frac{ge\hbar}{2m_e}, \quad (6.19)$$

donde g es el factor Landé o también conocido como momento magnético adimensional [33]. En mecánica cuántica ortodoxa, el factor de Landé es una constante de proporcionalidad adimensional entre el momento magnético de un sistema y sus correspondientes números cuánticos. Un factor g (también llamado valor g o momento magnético adimensional) es una cantidad que caracteriza el momento magnético y el momento angular de un átomo, una partícula o el núcleo.

Para el caso presentado en este trabajo en el que la ecuación de movimiento corresponde a la ecuación adiabática en la variedad de Finsler, sabiendo que la interpretación clásica de la constante de estructura fina conduce a $\alpha = v/c$ [32].

Aquí se desea verificar que la magnitud para el momento magnético anómalo del electrón dado por la teoría de la electrodinámica cuántica y calculado por Julian Schwinger es [34]:

$$\mu_e = 2\frac{e\hbar}{2m_e} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right). \quad (6.20)$$

que contiene el factor de Landé [34]

$$g = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) = 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \quad (6.21)$$

solo se puede derivar de correcciones relativistas en la variedad de Finsler que cambia adiabáticamente en el tiempo.

El término del momento magnético del electrón (6.20) como se puede ver, puede ser representado en términos solo de la carga eléctrica, lo que permite expresar los términos del desarrollo anterior en términos de la constante de estructura fina α . Como la expansión alrededor de la ecuación anterior se podía obtener el factor de Landé g , para el momento magnético anómalo del electrón, dado en (6.20) y (6.21).

El momento magnético anómalo del electrón (de acuerdo con (6.19), (6.20) y (6.21)) y ya con las correcciones dadas por la teoría de la electrodinámica cuántica es [33]

$$a_e = \frac{g-2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + 0,328479\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1,183\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \dots \approx 0,0011614. \quad (6.22)$$

Donde el factor de Landé g es $g = 2(1 + 0,0011614) = 2,0023228$. En el caso clásico, que puede encontrarse un sistema donde se consideran las componentes de momento angular y de espín para el electrón acoplado a un campo magnético dado como en [35]

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \frac{e}{2mc}\vec{L} \cdot \vec{B} - \frac{e}{mc}\vec{S} \cdot \vec{B}. \quad (6.23)$$

Este representa hamiltoniano para una partícula cargada en función del espín y el momento angular [35].

Tomando en consideración las ecuaciones de la electrodinámica en la variedad de Finsler y el modelo atómico realizado en este capítulo; en el siguiente capítulo será abordado el momento magnético anómalo del electrón.

Se verá en el siguiente capítulo, que el momento magnético anómalo del electrón puede ser estudiado utilizando la mecánica clásica, el electromagnetismo y la relatividad, en este capítulo no se recurrirá a los diagramas de Feynman y será posible por medio de aproximaciones comparar con datos experimentales.

Capítulo 7

Momento Magnético Anómalo del Electrón

El momento magnético es una magnitud vectorial que determina la intensidad de una fuente de campo magnético, así como la orientación de su dipolo magnético resultante. Este término se refiere normalmente al momento dipolar magnético de un sistema.

En el presente capítulo se abordará un cálculo relativista de la ecuación de movimiento para partículas cargadas (4.18) y como de esta puede encontrarse un valor para el momento magnético anómalo del electrón a_e sin el uso de la electrodinámica cuántica.

7.1. Mediciones Experimentales

A lo largo de la historia, se ha observado un aumento en la precisión de las mediciones obtenidas experimentalmente del momento magnético anómalo del electrón. En las primeras medidas, realizadas en Columbia por Kusch y otros, se usó un método de haz de resonancia magnética para observar el efecto Zeeman, primero en galio y sodio [36] y luego en hidrógeno atómico [37].

En este experimento, los campos magnéticos se determinaron mediante una medición de resonancia magnética nuclear auxiliar al momento magnético del protón en una muestra de aceite mineral; por lo tanto, el grupo Columbia realmente determinó la cantidad $(\frac{g_s}{g_p})$, donde g_p es el valor del factor de Landé g para el protón y g_s es la contribución del espín al factor de Landé g ; es decir, el momento magnético (6.19) está en función de la masa del protón m_p , el espín \vec{S} y del momento angular \vec{L} . Las mediciones más recientes del momento magnético anómalo a_e para el electrón fueron hechas por Gabrielse y sus colaboradores en Harvard [38].

Los autores realizaron experimentos con iones tipo hidrógeno $^{12}\text{C}^{5+}$, $^{16}\text{O}^{7+}$ y $^{28}\text{Si}^{13+}$ y con iones tipo litio $^{28}\text{Si}^{11+}$, $^{40}\text{Ca}^{17+}$ y $^{48}\text{Ca}^{17+}$. En ambos casos, un ion quedaba confinado en una trampa Penning con un campo magnético homogéneo superpuesto de 3.76 T . La trampa contenía cinco polos con un electrodo de anillo central de 7 mm de diámetro interior, dos tapas de extremo y dos electrodos de corrección colocados

entre ellos. Al elegir los voltajes adecuados en estos electrodos, el potencial de captura pudo hacerse altamente armónico cerca del centro de la trampa. Un ion confinado con pequeñas amplitudes de movimiento realizó oscilaciones armónicas alrededor del centro de la trampa en las direcciones radial y axial, cuyas frecuencias que dependen de las condiciones de funcionamiento de la trampa. Los valores típicos de estas frecuencias son de 700 kHz para la oscilación axial $\omega_-/2\pi$ [36].

La trampa estuvo situada en el centro de un solenoide superconductor de alta homogeneidad y estabilidad temporal. Para evitar el intercambio de carga del ion atrapado debido a una colisión con el gas residual, la trampa se enfrió a 4 K , lo que garantizó un bombeo eficaz. Se usó una presión superior a 10^{-16} mbar en el volumen de la trampa. En consecuencia, se consiguió tener tiempos de almacenamiento de iones de muchos meses. En los electrodos de la trampa había circuitos de resonancia superconductores de alta calidad. Estos sirvieron para la detección de iones atrapados mediante la medición de las corrientes de imagen inducidas en los electrodos de la trampa. Además de la trampa, los circuitos de resonancia y la electrónica asociada se mantienen a 4 K para reducir el ruido térmico [36].

Se usó una resonancia axial que fue de utilidad también para determinar las frecuencias radiales que están acopladas a un campo de radio frecuencias axial. El conocimiento de esta frecuencia fue necesario para calibrar el campo magnético B en la posición del ion a través de la frecuencia del ciclotrón de iones libres $\omega^2 = qB/M$, donde q es la carga del ion y M es la masa del ion. ω_c se obtuvo mediante la relación $\omega_c^2 = \omega_+^2 + \omega_z^2 + \omega_-^2$ [44]. El factor de Landé g del electrón ligado se determina mediante una medida de la frecuencia de precesión de Larmor $\omega_L = \frac{g}{2} \frac{e}{m} B$, donde e es la carga, m es la masa del electrón y B es la magnitud del campo magnético. Las transiciones entre los dos estados de espín del del electrón fueron inducidas por un campo de microondas a una frecuencia de 104 GHz . En una trampa de Penning perfecta, la precesión de espín está completamente desacoplada de la oscilación del ion y no puede ser medido directamente. Por lo tanto, los autores indujeron el acoplamiento haciendo que el campo magnético de la trampa no sea homogéneo a causa de un anillo ferromagnético que distorsionaba localmente el campo magnético, que de otro modo sería un campo homogéneo. En primer orden, esto condujo a una dependencia cuadrática del campo B con respecto a la coordenada espacial: $B = B_0 + B_2 z^2 + \dots$. La fuerza adicional $F = \mu_z \nabla_z B$ del campo B no homogéneo que actuaba sobre el momento magnético de espín se suma o se resta a la fuerza eléctrica de atrapamiento, dependiendo de la dirección del espín, y conduce a un cambio en las frecuencias de oscilación. Para la dirección axial, el cambio de frecuencia es $\Delta\nu_z = \frac{g\mu_B}{(2\pi)^2 M\nu_z} B_2$ donde μ_B es el magnetón de Bohr y $B_2 = 10.500 \text{ T/m}^2$ es la fuerza del campo magnético homogéneo [36].

La introducción de la inhomogeneidad del campo magnético fue requerida para la detección de la dirección de espín que impedía una gran precisión en la determinación de las frecuencias de oscilación y de la frecuencia de precesión de Larmor. Para evitar este problema, la región donde se midieron las frecuencias ("trampa de precisión") fueron separadas de la región donde se analizó el estado de espín a una segunda trampa ("trampa de análisis") de idénticas dimensiones, pero sin el anillo ferromagnético. La

distancia entre los dos centros de la trampa es de 3.5 *cm*. El ion se pudo desplazar entre las trampas moviendo el mínimo de potencial a lo largo del eje mediante cambios adecuados de las tensiones en los electrodos. Un ciclo de medición comienza con la determinación de la dirección de espín en la trampa de análisis. A continuación, el ion se transportó a la trampa de precisión donde se determinaron las frecuencias de movimiento y, simultáneamente, se intentaron inducir los cambios de espín electrónicos. Tras el transporte de vuelta a la trampa de análisis, se sondeó la dirección del espín para determinar si el intento a una determinada frecuencia de microondas fue exitoso, y el procedimiento se repitió para diferentes frecuencias de microondas. La probabilidad de éxito del giro medido como en función de la relación $\Gamma = \omega_L/\omega_c$ tiene un máximo en Γ_0 a partir del cual se determina el factor de Landé g mediante $g = 2\Gamma_0 \frac{q}{e} \frac{m}{M}$ [36].

Se encontraron tres resultados experimentales para el factor de Landé g ; para $12\text{C}5+$ con valor de $g = 2.001\ 041\ 592\ 44$ (232), para $16\text{O}7+$ con valor de $g = 2.000\ 047\ 025\ 4$ (46)) y para $28\text{Si}13+$ con valor de $g = 1.995\ 348\ 959\ 04$ (81) que coincidieron muy bien con las predicciones teóricas $g = 2.001\ 041\ 590\ 117$, $g = 2.000\ 047\ 021\ 28$ (11) $g = 1.995\ 348\ 957\ 93$ (165). Representan hasta la fecha la prueba más estricta de los cálculos QED de estado ligado. En los resultados experimentales, la mayor contribución al presupuesto de errores surge de la incertidumbre de la masa del electrón. La validez del cálculo del factor de Landé g se ha comprobado en el nivel de 10^{-10} en el caso de $28\text{Si}13+$ [36].

En el experimento fue posible también medir la energía dependiente del espín de un electrón libre en un campo electrostático porque el electrón se aceleró rápidamente fuera de la región de observación. Aunque una de las primeras búsquedas se realizó en Michigan en un experimento especial con electrones libres [39], las búsquedas más recientes han empleado una técnica más sensible en la que se aplica un campo electrostático externo a un átomo o molécula paramagnética [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46] y [47].

Ahora que se han mencionado algunos experimentos sobre la medición del momento magnético anómalo del electrón, en la siguiente sección se mencionarán algunas consideraciones teóricas sobre la electrodinámica cuántica y como a partir de esta fue posible encontrar el valor del momento magnético anómalo del electrón.

7.2. Aspectos Teóricos de la Electrodinámica en Física Cuántica

La electrodinámica cuántica es la teoría cuántica del campo electromagnético. Esta teoría describe los fenómenos que implican las partículas eléctricamente cargadas que obran recíprocamente por medio de la fuerza electromagnética [48].

La electrodinámica cuántica es una descripción detallada de la interacción entre fotones y partículas cargadas de tipo fermiónico [48].

La evolución temporal de un sistema de partículas cargadas y fotones puede ser calculada mediante un cálculo perturbativo en serie de potencias. Cada uno de los términos perturbativos admite una representación gráfica conocida como diagrama de

Feynman [48].

En la teoría cuántica de campos ortodoxa, los diagramas de Feynman, son gráficos que representan las trayectorias de las partículas en las fases intermedias de un proceso de colisión para resolver de manera eficaz los cálculos implicados en dicho proceso [48].

Los posibles diagramas de Feynman se pueden clasificar por el número de bucles internos a medida que se conoce el fin de cada bucle, y como parte de un desarrollo en serie. Hay una cantidad indefinida de diagramas posibles. Sin embargo, las contribuciones de orden superior dependen de las potencias correspondientes determinadas a partir de las constantes de acoplamiento α hasta anularlas [48].

El momento magnético anómalo de una partícula es una contribución de los efectos de la electrodinámica cuántica ortodoxa, expresados por diagramas de Feynman con bucles, al momento magnético de esa partícula [48].

La contribución de un bucle al momento magnético anómalo correspondiente a la primera y más grande corrección cuántica del electrón, se calcula por medio de la función de vértice que se muestra en el diagrama adyacente (la función de vértice describe el acoplamiento entre un fotón y un electrón más allá del orden principal de la teoría de la perturbación) [48]. El resultado de un bucle es $a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.001614$ [49], donde α es la constante de estructura fina. Este resultado fue encontrado por primera vez por Julian Schwinger en 1948 [48] y [50]. A partir de 2016, los coeficientes de la fórmula de la electrodinámica cuántica para el momento magnético anómalo del electrón se conocen analíticamente hasta α^3 [50] y se han calculado hasta el orden de $a_e = 0.00159652181643(764)$ [51], [52], [53], [54] y [55].

La predicción de la electrodinámica cuántica concuerda con el valor medido experimentalmente en más de diez cifras significativas, lo que hace que el momento magnético anómalo del electrón sea considerada actualmente la predicción verificada con mayor precisión en la historia de la física. El valor experimental actual del momento magnético anómalo del electrón junto con su incertidumbre de medición es $a_e = 0.0015965218073(28)$ [55].

Por otro lado, gracias al modelo atómico de Bohr donde las órbitas del electrón son circulares, se ha hecho una representación del átomo como un problema de potencial central, que puede tratarse de manera clásica y que, para el modelo de Sommerfeld, la primera órbita atómica también es circular.

Dado que el potencial en este sistema es el potencial eléctrico ya que las partículas en el átomo están cargadas, podría encontrarse con cantidades tales como el radio de Bohr, la energía cinética y la velocidad, entre otras; que son dados todos en términos de la carga eléctrica; entonces el problema central en el átomo se convierte en un problema electrostático.

En el presente trabajo, se escribió la ecuación de movimiento para un electrón en una variedad Finsleriana que cambia adiabáticamente con el tiempo. Esta ecuación nos permite escribir un modelo clásico para el átomo de hidrógeno, donde los campos eléctricos y magnéticos aparecen como una onda electromagnética que guía el electrón y que esto representa el potencial cuántico. Por esta razón, aparece el término de la fuerza de Lorentz y dado que es un problema relativista, puede compararse con velocidades

cercanas a las de la luz.

Si el átomo se considera como un sistema unido de dos partículas; se puede calcular el radio en el centro de masa. Posteriormente, el momento magnético de los electrones se puede encontrar alrededor del centro de masa. Este momento magnético del electrón gracias a una expansión del factor de Lorentz, donde el parámetro pequeño de expansión es la constante de estructura fina α , puede corresponder al momento magnético anómalo del electrón dado por la teoría de la electrodinámica cuántica.

También existe una ecuación relativista para la precesión de espín conocida como la ecuación *BMT*, solo que aquí se describe en una variedad de Finsler que presenta invariancia adiabática a lo largo del tiempo.

En este caso, el momento anómalo del electrón aparece como una corrección relativista en un universo representado por una variedad de Finsler que cambia adiabáticamente con el tiempo y para un sistema de potencial central en el que el núcleo atómico y el electrón giran alrededor de un centro de masas. Este cálculo tiene un sentido físico sacado de primeros principios y permite encontrar de forma aproximada el momento magnético anómalo del electrón sin apelar a los diagramas de Feynman. Además, esto justifica el uso de la electrodinámica representada en la métrica de Finsler con invariancia adiabática.

El momento magnético se define clásicamente en coordenadas cilíndricas como [5] y [56]

$$\vec{\mu} = IA = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 \quad \text{o} \quad \vec{\mu} = IA = \frac{e\dot{\phi}}{2\pi r}\pi r^2. \quad (7.1)$$

Se sabe que la corriente eléctrica puede ser expresada como $I = qv$ y el momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ ya que esto produce el valor del momento magnético del electrón [5] y [56]:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}e\dot{\phi}\vec{r} = \frac{e\vec{L}}{2mr} \quad (7.2)$$

y para la expresión cuántica del momento angular según el modelo de Bohr $L = nh$, se sustituye $\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{nh}{mr^2}$ la ecuación (7.2) se convierte en $\vec{\mu} = \frac{e}{2mr}\vec{L}$ y que $r_0 = a_0$.

Dicho lo anterior en esta sección, en la siguiente sección se buscará encontrar el momento magnético y el momento magnético anómalo del electrón en el marco relativista de la variedad de Finsler con invariancia adiabática.

7.3. Momento Magnético del Electrón Derivado de la Ecuación de Movimiento para una Partícula Cargada en Variedad de Finsler

El valor del momento magnético del electrón aquí se calculará considerando la contribución del momento angular, la contribución del espín y su contribución dada por la interacción espín-órbita.

Ahora bien, para un caso relativista se puede considerar una variedad Finsleriana que cambia como un invariante adiabático, en la cual se describe la ecuación de movimiento para una partícula cargada eléctricamente (en este sistema la partícula se acopla a un campo electromagnético acotado, el cual se interpreta aquí como un fotón virtual como el descrito en el capítulo 5 y por esta razón el sistema no presenta pérdidas de energía por irradiación electromagnética) [3].

$$mc \frac{du^\mu}{ds} - \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu = - \frac{\eta^\mu}{(x^\mu)^2} \quad (7.3)$$

donde la 4-velocidad es [5]

$$u^\nu = (\gamma c, \gamma u^i). \quad (7.4)$$

Introduciendo aquí el 4-vector η^μ que tiene componentes del volumen unitario [3]:

$$\eta^\mu = (h, h, h, h). \quad (7.5)$$

Siendo aquí para la variedad de Finsler [3]:

$$h = - \frac{c^4 H}{8\pi^2 G} (R - 4\Lambda) t^2 \quad (7.6)$$

y el 4-vector x^μ corresponde a las siguientes componentes cuando se expresa como [5]

$$x^\mu = (x^0, x^k) = (ct, x^k), \quad (7.7)$$

aquí μ corresponde a las componentes temporales y espaciales respectivamente.

El elemento de longitud aquí se puede escribir en términos del factor de Lorentz y el tiempo propio $ds = c\sqrt{1 - \alpha^2} d\tau$ [5], el cual es usado en la ecuación (7.3)

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \frac{du^\mu}{d\tau} - \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu = - \frac{\eta^\mu}{(x^\mu)^2}. \quad (7.8)$$

Dado que el sistema describe un átomo de hidrógeno, en el modelo de Sommerfeld (y de Bohr) el electrón se traslada con una trayectoria circular para $n = 1$. Usando coordenadas cilíndricas, el tensor de Faraday se escribe como [5]:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_\rho & -\frac{E_\phi}{\rho} & -E_z \\ E_\rho & 0 & -\frac{B_z}{\rho} & B_\phi \\ \frac{E_\phi}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & 0 & -\frac{B_\rho}{\rho} \\ E_z & -B_\phi & \frac{B_\rho}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

y el tensor dual

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_\rho & \rho E_\phi & E_z \\ -E_\rho & 0 & -\rho B z & B_\phi \\ -\rho E_\phi & B z & 0 & \rho B_\rho \\ -E_z & B_\phi & -\rho B_\rho & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

El vector posición en coordenadas cilíndricas (véase la Fig. 7.1) puede escribirse de la forma $\rho^2 = r^2 + z^2$ y en el caso en que $z = 0$ se tiene que $\rho^2 = r^2$. Este vector se usa para calcular los términos $f^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$, que corresponden a la ecuación de movimiento, este tensor se usa en coordenadas cilíndricas $u_\nu = (c, r, r\phi, 0)$. Con este se obtienen las siguientes componentes para coordenadas polares [5]:

$$\begin{aligned} f^0 &= \frac{\gamma e}{c} \left[\frac{\dot{r}}{c^2} E_r + \frac{\dot{\phi}}{c^2 r} E_\phi \right] & f^2 &= -\frac{\gamma e}{c^2} \frac{E_\phi}{r^2} \\ f^1 &= -\frac{\gamma e}{c} E_r & f^3 &= \frac{\gamma e}{c} \left[B_\phi \dot{r} - \frac{B_r \dot{\phi}}{r} \right]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

A continuación, se muestra un diagrama sobre el sistema de coordenadas cilíndricas escogido para este modelo:

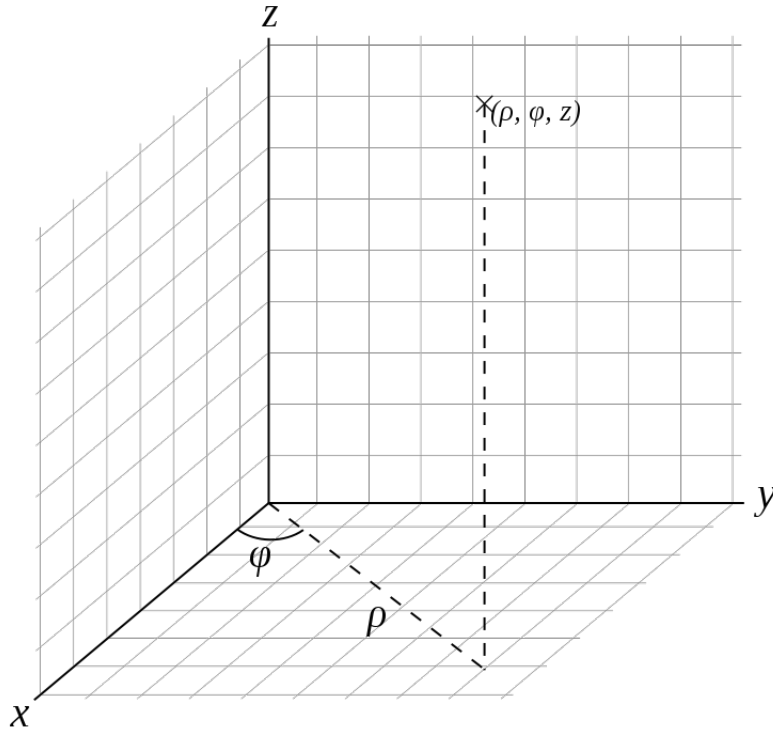


Figura 7.1. Sistema de Coordenadas Cilíndricas

ahora bien, haciendo las transformaciones de Lorentz para las componentes de los campos eléctricos y magnéticos se obtiene [5]:

$$\begin{aligned} E'_r &= E_r & E'_\phi &= \frac{\gamma}{r^2} \left(\frac{E_\phi}{c^2} + (\vec{\alpha} \times \vec{B})_z \right) & E'_z &= -\gamma \left(\frac{E_z}{c^2} + (\vec{\alpha} \times \vec{B})_\phi \right) \\ \frac{B'_r}{r^2} &= \frac{B_r}{r^2} & B'_\phi &= \gamma (B_\phi - (\vec{\alpha} \times \vec{E})_z) & B'_z &= \gamma (B_z - (\vec{\alpha} \times \vec{E})_\phi). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Como se puede ver aquí, la componente radial del campo eléctrico permanece constante, mientras que las componentes perpendiculares se transforman antes las transformaciones de Lorentz [5].

Dado que la carga del electrón y el protón son iguales. Para la componente temporal se tiene

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{e}{c} \left[\frac{\dot{r}}{c^2} E_r + \frac{\dot{\phi}}{c^2 r} E_\phi \right] = -h. \quad (7.13)$$

La ecuación temporal (7.13) se reduce a la ecuación de movimiento clásica para una partícula con carga eléctrica [5], que se usa para un electrón en el átomo de hidrógeno, donde el potencial se debe al campo electromagnético oscilatorio (esto se demostró usando la visión de Bohm para la mecánica cuántica [3], [18]) y la componente espacial se escribe considerando un sistema de dos partículas con el núcleo atómico en el centro de masas $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{e}{2m_1 c} \left[(r p_r - p_r r) \ddot{r} + (\phi p_\phi - p_\phi \phi) \ddot{\phi} \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{e}{2m_2 c} \left[(r p_r - p_r r) \ddot{r} + (\phi p_\phi - p_\phi \phi) \ddot{\phi} \right] \\ & - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left[\frac{e}{c} E_r + \frac{e}{c} \frac{E_\phi}{r^2} + (B_\phi \dot{r} - \frac{B_r \dot{\phi}}{r}) \right] = -h, \end{aligned} \quad (7.14)$$

aquí se considera que las aceleraciones son constantes.

Como se puede ver en esta ecuación de movimiento, el momento magnético se expresa covariantemente y aquí se obtiene el factor g , que es el factor de Landé o también conocido como momento magnético adimensional [57]

$$\mu_j^{ik} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{eg}{2m_j c} (x^i p^k - p^i x^k) \quad (7.15)$$

donde $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ es el factor de Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

La ecuación de movimiento de una partícula cargada contiene los términos en desarrollo en parámetro pequeño para el factor de Lorentz. Considerando la ecuación (7.14) se obtiene un desarrollo en serie para el factor de Lorentz para

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha^4 + \frac{5}{16}\alpha^6 + \frac{35}{128}\alpha^8 + \frac{63}{256}\alpha^{10} \dots, \quad (7.16)$$

el momento magnético contiene un término de velocidad con el momento angular covariante. Usando la ecuación (7.14) y la expansión en (7.16) se expresa como:

$$\mu_j^{ik} = \frac{eg}{2m_jc}(x^i p^k - p^i x^k)(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha^4 + \frac{5}{16}\alpha^6 + \frac{35}{128}\alpha^8 + \frac{63}{256}\alpha^{10} \dots). \quad (7.17)$$

este es un valor del momento magnético del electrón que considera efectos relativistas. En la siguiente sección se tratará una aproximación clásica al valor del momento magnético anómalo del electrón considerando un sistema para el átomo de hidrogeno en el que el electrón y el nucleó atómico se encuentran girando alrededor de un centro de masas.

7.4. Aproximación Clásica del Momento Magnético Anómalo del Electrón para un Sistema de Potencial Central

Se sabe que el término $\frac{\alpha}{2\pi}$ que aparece en los diagramas de Feynman es conocido como momento anómalo del electrón:

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (7.18)$$

este será empleado como se explica a continuación. Conociendo la interpretación clásica de la constante de estructura fina como la velocidad del electrón en la primera órbita de Bohr [57] y que se ha visto en trabajos anteriores que pueden cambiar adiabáticamente en la evolución de la vida del universo [58]

$$\alpha = \frac{v}{c}. \quad (7.19)$$

La interpretación cuántica de la constante de estructura fina y que representa la constante de acoplamiento entre el campo electromagnético (fotones) y una partícula cargada es

$$\alpha = \frac{1}{\hbar c} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (7.20)$$

Para el caso presentado en este trabajo en el que la ecuación de movimiento corresponde a la ecuación adiabática en una variedad finleriana, sabiendo que la interpretación clásica de la constante de estructura fina conduce a $\alpha = v/c$. Anteriormente se ha considerado que la constante de estructura fina para las escalas cosmológicas puede variar adiabáticamente con el tiempo [54] y [55]. Se intenta verificar que el momento magnético anómalo del electrón dado por la teoría de la electrodinámica cuántica y calculado por Julian Schwinger [56], [57] y [59]

$$\mu_e = \frac{e\hbar g}{2m_e c} = \frac{e\hbar}{m_e c} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right), \quad (7.21)$$

donde $g = 2(1 + \frac{\alpha}{2\pi}) = 2 + \frac{\alpha}{\pi}$, puede derivarse solo de correcciones relativistas en la variedad adiabática de Finsler.

Anteriormente se ha encontrado que en una variedad de Finsler la constante de estructura fina varía con el tiempo [3]. Hay una gran diversidad de mediciones y cálculos realizados para la constante de estructura fina como [60], [61] y [62].

El término del momento magnético del electrón (7.17) como se puede ver, solo está en términos de la carga eléctrica, lo que permite expresar los términos del desarrollo previo en términos de la constante de estructura fina α . Como la expansión alrededor de la ecuación anterior, se pudo obtener el factor g de Landé para el momento magnético anómalo del electrón, dado en (7.17) y (7.21).

El momento magnético anómalo del electrón está de acuerdo con (7.10), (7.13), (7.14), (7.16), (7.18) y (7.21). Ya con las correcciones dadas por la teoría de la electrodinámica cuántica y considerando que el núcleo del átomo está en el origen

$$a_e \approx 0,0011620849647. \quad (7.22)$$

El término del momento magnético del electrón (7.17) y (7.21) se puede representar en términos solo de la carga eléctrica, lo que permite expresar los términos del desarrollo anterior en términos de una expansión alrededor de α . En la ecuación anterior fue posible la obtención del factor de Landé g , para el momento anómalo del electrón, dado en (7.17).

El momento magnético anómalo del electrón está de acuerdo con (7.8), (7.11), (7.13), (7.15), (7.17) y (7.19); ya con las correcciones dadas por la teoría de la electrodinámica cuántica. Donde el factor de Landé g es [34], [55], [56], [57] y [59].

$$g = 2(1 + 0,0011614) = 2,0023228 \quad (7.23)$$

el valor del parámetro a_e considerando la expansión de parámetro pequeño para α en las ecuaciones (7.17) es [34], [55], [56], [57] y [59]

$$a_e = \frac{g-2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + 0,328479\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1,183\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \dots \approx 0,0011614. \quad (7.24)$$

en el trabajo de [55] se reporta un valor de $g/2 = 1,00115965218073$ lo que da un valor para el factor de Landé de $g = 2,00231930436146$, este mismo valor es usado en sus cálculos en el trabajo [33].

Todo este cálculo podría hacerse teniendo en cuenta un átomo de hidrógeno en el formalismo de la variedad de Finsler que cambia adiabáticamente con el tiempo. Aquí g es el valor del factor Landé que se encuentra en la electrodinámica cuántica.

Ahora, considere los siguientes valores: $a_0 = r_e = 5,2917720859 \times 10^{-11} m$, $m_e = 9,10938291 \times 10^{-31} kg$, $m_p = 1,672621898 \times 10^{-27} kg$, $e = -1,602176565 \times 10^{-19} C$, $c = 299792458 \frac{m}{s}$ y $\hbar = 1,054571818 \times 10^{-34} J \cdot s$ [47].

Si el átomo se considera como un sistema acoplado de dos partículas; el radio en el centro de masa se puede calcular usando $\mu R_{12} = r_{cm} m$, donde se sabe que [11]

$$R_{12} = \frac{r_1 m_1 + r_2 m_2}{m_1 m_2}. \quad (7.25)$$

Para este sistema, el radio del centro de masas se calcula utilizando el radio de la órbita del electrón como [11]:

$$r_e = R + r_{cm} = r_{cm} \left(1 + \frac{m_e}{\mu}\right). \quad (7.26)$$

Con un valor calculado aquí de $r_{cm} = 5,282166811 \times 10^{-11} \text{ m}$ que en comparación con el radio de Bohr $a_0 = r_e = 5,2917720859 \times 10^{-11} \text{ m}$, se puede observar que el radio en el centro de masas es un poco menor que el radio de la órbita del electrón. Una vez que se ha calculado el radio en el centro de masas; se puede calcular con respecto a esto un nuevo valor para la constante de estructura fina $\alpha_{cm}^* = \frac{v_{cm}^*}{c}$. Con esta finalidad es utilizada la definición del radio de Bohr [57]:

$$a_0 = \frac{1}{\hbar c} \frac{4\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar}{cm_e \alpha} \quad (7.27)$$

que por analogía puede encontrarse la expresión del radio en el centro de masas

$$r_{cm} = \frac{\hbar}{cm_e \alpha_{cm}^*}. \quad (7.28)$$

La constante de estructura fina se puede calcular para el radio del centro de masas como

$$\alpha_{cm}^* = \frac{\hbar}{cm_e r_{cm}} = 7,285094422 \times 10^{-3} = \frac{1}{137,2665805}. \quad (7.29)$$

Teniendo en cuenta la definición del momento magnético anómalo del electrón.

En el trabajo reportado en [55] se reporta un valor para la constante de estructura fina de $\alpha = 1/137,035999084$.

Se comparan la gran diversidad de mediciones experimentales y cálculos numéricos realizados con el valor teórico calculado aquí para el momento magnético anómalo del electrón [55], [62] [63], [64], [65], [66] y [67]

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,00115965218091, \quad (7.30)$$

que como se puede observar tiene un valor aproximado al obtenido en las mediciones

$$a_{e_{cm}} = \frac{\alpha_{cm}^*}{2\pi} = 0,001159458788. \quad (7.31)$$

Todo este cálculo se puede hacer considerando un átomo de hidrógeno en el formalismo de una variedad de Finsler que cambia adiabáticamente en el tiempo. El error de medición entre el valor experimental (7.30) y el valor calculado (7.31) es de $\epsilon = 0,0166768\%$.

Ahora bien, ya que el espín del electrón contribuye al momento magnético y al momento magnético anómalo, en la siguiente sección se verá dicha contribución de los efectos relativistas del espín en una variedad de Finsler con invariancia adiabática.

7.5. Interacción Espín-Orbita en Variedad de Finsler

Ahora, hay una ecuación que permite describir el movimiento de precesión de espín para una partícula cargada, esta ecuación se llama ecuación BMT (Bargmann-Michel-Thomas), aquí se presenta esta ecuación para una variedad de Finsler con invariancia adiabática en el tiempo [56]:

$$\frac{dS^\mu}{ds} - \frac{e}{mc} \left[\frac{g}{2} F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{1}{c^2} \left(\frac{g}{2} - 1 \right) u^\mu (S_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta) \right] = -\frac{\eta^\mu}{(x^\mu)^2}. \quad (7.32)$$

Nuevamente aquí, el elemento de longitud se puede escribir en términos del factor de Lorentz y el tiempo propio $ds = c\sqrt{1 - \alpha^2} d\tau$.

Esta ecuación es una generalización covariante para la ecuación [56]

$$\frac{1}{c\sqrt{1 - \alpha^2}} \frac{d\vec{s}}{d\tau} = \frac{ge}{2mc} \vec{s} \times \vec{B}'. \quad (7.33)$$

Un electrón posee un momento angular de espín que toma valores cuantizados de $\hbar/2$ y un momento magnético $\vec{\mu}$ relacionado a \vec{S} por

$$\vec{\mu} = \frac{ge}{2m_e c} \vec{S}, \quad (7.34)$$

donde g es el factor de Landé. Suponiendo que un electrón se mueve con velocidad v en campos externos \vec{E} y \vec{B} . Considerando que la ecuación de movimiento para el momento angular en el marco de referencia es

$$\left(\frac{d\vec{s}}{dt} \right)_{restframe} = \vec{s} \times \vec{B}'. \quad (7.35)$$

donde \vec{B}' es el campo magnético en el marco de referencia que se mueve con el electrón.

En un sistema de coordenadas moviéndose con el electrón en el campo magnético, se aplica una transformación de Lorentz $F^{\mu'\nu'} = \Lambda_\nu^{\mu'} \Lambda_{\nu'}^{\mu}$ donde

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

Aplicando las transformaciones de Lorentz al campo magnético se obtiene $\vec{B}' \approx (\vec{B} - \frac{v}{c} \times \vec{E})$, con lo que la ecuación (7.35) queda como:

$$\left(\frac{d\vec{s}}{dt} \right)_{restframe} = \vec{\mu} \times \left(\vec{B} - \frac{v}{c} \times \vec{E} \right) \quad (7.37)$$

La ecuación (7.37) corresponde a la energía de interacción del espín del electrón

$$\vec{U}' \approx -\vec{\mu} \cdot \left(\vec{B} - \frac{v}{c} \times \vec{E} \right) \quad (7.38)$$

En un átomo de hidrógeno, el potencial puede aproximarse como:

$$e\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{dV(r)}{dr} \quad (7.39)$$

Así la energía de interacción de espín puede escribirse como:

$$U' = -\frac{ge}{2m_e c} \vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{g}{2m_e^2 c} \vec{S} \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr}, \quad (7.40)$$

Esta ecuación esta descrita en términos clásicos y el segundo término da un valor alejado de las observaciones experimentales. Sin embargo, es necesario considerar algunos aspectos relativistas y para un sistema de coordenadas rotantes:

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{nonrot} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{restframe} + \vec{\omega}_T \times \vec{G} \quad (7.41)$$

donde $\vec{\omega}_T$ es una velocidad angular de rotación dada por Thomas. Aplicando el espín del electrón a la ecuación (7.41)

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{nonrot} = \vec{s} \times \left(\frac{ge\vec{B}'}{2m_e c} - \vec{\omega}_T \right). \quad (7.42)$$

Correspondiente a la energía de interacción $U = U' + \vec{S} \cdot \vec{\omega}_T$. Para el electrón en un átomo se ve afectado por la fuerza de Coulomb (7.39), la velocidad angular correspondiente dada por Thomas se expresa como:

$$\vec{\omega}_T = -\frac{1}{2c^2} \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{m} \frac{1}{\vec{r}} \frac{dV(r)}{dr} = -\frac{1}{2m^2 c^2} \vec{L} \frac{1}{\vec{r}} \frac{dV(r)}{dr}. \quad (7.43)$$

Considerando (7.42) y (7.43) se tiene una contribución extra en la energía para la precesión de Thomas y que considera el acoplamiento espín-orbita.

Si S^α denota las componentes del 4-vector de espín en el marco inercial K , (S^α es dual a $S_{\gamma\delta}$):

$$S^\alpha = \frac{1}{2c} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} U_\beta S_{\gamma\delta}. \quad (7.44)$$

la componente temporal en el sistema de referencia K' es

$$S^{0'} = \gamma(S^0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{s}) = \frac{1}{c} U_\alpha S^\alpha. \quad (7.45)$$

donde U^α es la 4-velocidad de la partícula además de que se impone la restricción covariante $U_\alpha S^\alpha = 0$ para que la componente temporal del espín desaparezca. Si el

electrón y el protón se encuentran girando alrededor de un centro de masas, entonces se tiene $\vec{\alpha}_{cm}^* = \frac{v_{cm}}{c}$. Usando las transformaciones de Lorentz:

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{x}) \quad (7.46)$$

y

$$\vec{X} = \vec{x} + \frac{(\gamma - 1)}{\gamma(x^0 - \vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{x})} (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{x}) \vec{\alpha}_{cm}^* - \gamma \vec{\alpha}_{cm}^* x_0. \quad (7.47)$$

Donde $x_0 = \vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{x}$, esto conduce a:

$$\vec{s} = \vec{S} - \frac{\gamma}{(\gamma + 1)} (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{S}) \vec{\alpha}_{cm}^*. \quad (7.48)$$

Aquí, $S_0 = \gamma \vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{S}$. La expresión inversa de (7.48) se escribe como:

$$\vec{S} = \vec{s} + \frac{\gamma^2}{(\gamma + 1)} (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{s}) \vec{\alpha}_{cm}^*. \quad (7.49)$$

Sí en el marco de referencia K' el 4-tensor de espín se escribe como $S'^{\mu} = (0; \vec{s})$ y las ecuaciones de movimiento para el espín en ese marco de referencia se expresan como:

$$S'^{\mu} = (0; \vec{s}) \quad (7.50)$$

y

$$\frac{dS'^{\mu}}{d\tau} = \left(\frac{dS'^{\mu}}{d\tau}; 0 \right) \quad (7.51)$$

la componente espacial es cero debido a que el marco de referencia se encuentra identificado con el tiempo propio y porque se considera que no existen fuerzas de torque externas. Donde \vec{s} es la dirección del momento angular intrínseco o espín medido en el marco de referencia de la partícula. En este sistema se tiene la restricción $U_{\alpha} S^{\alpha} = 0$, derivando dicha expresión y pasando un término al lado derecho se tiene:

$$\frac{1}{c\sqrt{1 - \alpha^2}} S_{\mu} \frac{dU^{\mu}}{d\tau} = -\gamma \vec{S} \cdot \frac{d\vec{v}}{d\tau} = U^{\mu} \frac{dS_{\mu}}{d\tau}. \quad (7.52)$$

Expresando una ecuación covariante para la precesión de espín:

$$\frac{dS^{\mu'}}{d\tau} = k u^{\mu} \quad (7.53)$$

Considerando que al multiplicar (7.53) por u^{μ} se tiene

$$u^{\mu} \cdot \frac{dS^{\mu}}{d\tau} = k u^{\mu} \cdot u^{\mu} = k c^2 \quad (7.54)$$

y

$$S^\mu \cdot \frac{du^\mu}{d\tau} = -kc^2. \quad (7.55)$$

Insertar (7.54) en (7.53) conduce a:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^{\mu'}}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} (S^\mu \cdot \frac{du^\mu}{d\tau}) u^\mu \quad (7.56)$$

La derivada para la velocidad respecto al tiempo propio puede expresarse como:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = (0; \frac{d\vec{v}}{d\tau}). \quad (7.57)$$

La parte en paréntesis de la ecuación (7.56) se puede expresar como:

$$S^\mu \cdot \frac{du^\mu}{d\tau} = S^0 \cdot \frac{du^0}{d\tau} - \vec{S} \cdot \frac{d\vec{u}}{d\tau} = -\gamma^2 c \vec{S} \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{\alpha}_{cm}^*. \quad (7.58)$$

Insertando (7.58) en (7.52) conduce a

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^{\mu'}}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} (S^\mu \cdot \frac{du^\mu}{d\tau}) u^\mu. \quad (7.59)$$

Expresando la ecuación (7.59) en componentes se tiene:

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^0}{d\tau} = \gamma^2 (\vec{S} \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}) \quad (7.60)$$

y

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{d\vec{S}}{d\tau} = \gamma^2 (\vec{S} \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}) \vec{\alpha}_{cm}^*. \quad (7.61)$$

Ahora bien, tomando la derivada de la transformación de Lorentz (7.47), para expresar la ecuación de precesión de espín

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{d\tau} = \frac{d\vec{S}}{d\tau} - \vec{\alpha}_{cm}^* (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{S}) \left(\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{\alpha}_{cm}^* (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \frac{d\vec{s}}{d\tau} + \vec{S} \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}) \right. \\ \left. + (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{S}) \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau} \right). \end{aligned} \quad (7.62)$$

Después de varias simplificaciones se llega a la ecuación:

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{d\vec{S}}{d\tau} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\vec{S} \times (\vec{\alpha}_{cm}^* \times \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau})). \quad (7.63)$$

Gracias a esto, la precesión de Thomas (7.43) ahora puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\vec{\omega}_T = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\vec{\alpha}_{cm}^* \times \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}). \quad (7.64)$$

En presencia de un campo electromagnético externo, en el sistema de referencia K' se tiene análogamente a (7.33):

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{d\vec{s}}{d\tau} = \frac{ge}{2mc} \vec{s} \times \vec{B}'. \quad (7.65)$$

El campo \vec{B}' es medido en el marco de referencia K' . Así para $S^{\mu'} = (0; \vec{s})$ y las ecuaciones (7.50) y (7.51) se tiene en presencia de fuerzas externas:

$$S^{\mu'} = (0; \vec{s}) \quad (7.66)$$

y

$$\frac{dS^{\mu'}}{d\tau} = \left(\left(\frac{dS^{0'}}{d\tau} = \vec{s} \cdot \frac{d\alpha_{cm}^*}{d\tau} \right); \frac{ge}{2mc} \vec{s} \times \vec{B}' \right). \quad (7.67)$$

Considerando para el tensor de Faraday $F^{\mu\nu}$. $F^{j0} = -F^{0j} = E^j$ y $F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$. Ahora bien, en el marco de referencia de k' se tiene $F^{\mu\nu'} S'_\nu = (\vec{E}' \cdot \vec{s}; \vec{s} \times \vec{B}')$. De igual forma para el tensor de espin se tienen las propiedades $S^{0'} = 0$ y $-S^{j'} = -\vec{s}^j$. Esto permite reescribir (7.67) como:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^{\mu'}}{d\tau} = \left(\frac{ge}{2mc} F^{\mu\nu'} \vec{S}'_\nu + \left(\vec{s} \cdot \frac{d\alpha_{cm}^*}{d\tau} - \frac{ge}{2mc} \vec{s} \cdot \vec{E}'; \vec{0} \right) \right). \quad (7.68)$$

Colocando como una constante el segundo término para el marco de referencia k' , una vez que se considera que $u^\mu = (c; \vec{0})$

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^{\mu'}}{d\tau} = \frac{ge}{2mc} F^{\mu\nu'} S'_\nu + k u'^\mu. \quad (7.69)$$

y para el marco de referencia k :

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^\mu}{d\tau} = \frac{ge}{2mc} F^{\mu\nu} S_\nu + k u^\mu. \quad (7.70)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (7.70) por u_μ y usando que $u_\mu u^\mu = c^2$ despejando k se tiene:

$$k = -\frac{1}{c^2} u \cdot \frac{dS}{d\tau} + \frac{ge}{2mc^3} F^{\mu\nu} u_\mu S_\nu. \quad (7.71)$$

o también la ecuación anterior se expresa como:

$$k = -\frac{1}{c^2} S \cdot \frac{du}{d\tau} + \frac{ge}{2mc^3} S_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta. \quad (7.72)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (7.70) se tiene

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^{\mu'}}{d\tau} = \frac{ge}{2mc} [F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{1}{c^2} U^\alpha (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu)] - \frac{1}{c^2} U^\alpha (S_\lambda \frac{dU^\lambda}{d\tau}). \quad (7.73)$$

Considerando ahora invariancia adiabática para las ecuaciones (7.70) y (7.73); la ecuación anterior queda de la forma:

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^{\mu'}}{d\tau} - \frac{ge}{2mc} [F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{1}{c^2} U^\alpha (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu)] - \frac{1}{c^2} U^\alpha (S_\lambda \frac{dU^\lambda}{d\tau}) = -\frac{\eta^\mu}{(x^\mu)^2}. \quad (7.74)$$

Debe recordarse que el tensor η^μ se define como $\eta^\mu = (h, h, h, h)$. Considerando la parte de la ecuación para el espín:

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^{\mu'}}{d\tau} = \frac{ge}{2mc} [F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{1}{c^2} (\frac{g}{2} - 1) U^\alpha (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu)]. \quad (7.75)$$

Escribiendo la ecuación (7.73) como:

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^{\mu'}}{d\tau} = \mathcal{F}^\alpha - \frac{1}{c^2} U^\alpha (S_\lambda \frac{dU^\lambda}{d\tau}) \quad (7.76)$$

donde

$$\mathcal{F}^\alpha = \frac{ge}{2mc} [F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{1}{c^2} U^\alpha (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu)]. \quad (7.77)$$

Esta ecuación se convierte, con la ayuda de (7.58) en

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^{\mu'}}{d\tau} = \mathcal{F}^\alpha + \frac{1}{c} (\gamma \vec{S} \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}) U^\alpha \quad (7.78)$$

o puede expresarse en componentes de la forma

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{dS^0}{d\tau} = \mathcal{F}^0 + \gamma^2 \vec{S} \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau} \quad (7.79)$$

y

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{d\vec{S}}{d\tau} = \vec{\mathcal{F}} + (\gamma^2 \vec{S} \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}) U^\alpha \quad (7.80)$$

con $\vec{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}^0, \vec{\mathcal{F}})$. Gracias a esto es posible notar que

$$\begin{aligned} U_\alpha \mathcal{F}^\alpha &= U_\alpha \frac{ge}{2mc} [F^{\alpha\beta} S_\beta + \frac{1}{c^2} (S_\mu F^{\mu\nu} U_\nu) U^\alpha] \\ &= \frac{ge}{2mc} [U_\alpha F^{\alpha\beta} S_\beta + (S_\mu F^{\mu\nu} U_\nu)] = 0 \end{aligned} \quad (7.81)$$

es decir, que $u^0 \mathcal{F}^0 - \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{F}} = 0$ o $\mathcal{F}^0 = \vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{F}^\alpha = (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{F}})$.

Ahora bien, es posible derivar la ecuación (7.48) y obtener:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}'}{d\tau} &= \frac{d\vec{s}}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} [\frac{\gamma}{\gamma+1} s^0 \vec{\alpha}_{cm}^*] \\ &= \frac{d\vec{s}}{d\tau} - (\frac{d}{d\tau} \frac{\gamma}{\gamma+1}) s^0 \vec{\alpha}_{cm}^* - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\frac{ds^0}{d\tau} \vec{\alpha}_{cm}^*) - \frac{\gamma}{\gamma+1} s^0 \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}. \end{aligned} \quad (7.82)$$

En esta ecuación se tiene la derivada:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\gamma}{\gamma+1} = \frac{d}{d\tau} \left(1 - \frac{1}{\gamma+1}\right) = \frac{1}{(\gamma+1)^2} \left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right) = \frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^2} \vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau} \quad (7.83)$$

donde

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma^3 \vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}. \quad (7.84)$$

Por lo tanto, haciendo uso de las ecuaciones (7.80), (7.82) y (7.83) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}'}{d\tau} &= \frac{d\vec{S}}{d\tau} - \frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^2} (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}) S^0 \vec{\alpha}_{cm}^* - \frac{\gamma}{\gamma+1} S^0 \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau} \\ &= \vec{\mathcal{F}} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \mathcal{F}^0 \vec{\alpha}_{cm}^* + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} [\vec{S} \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}) (\vec{S} \cdot \vec{\alpha}_{cm}^*)] \vec{\alpha}_{cm}^* \\ &\quad - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{S} \cdot \vec{\alpha}_{cm}^*) \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Ahora, si se considera la igualdad $s^0 = \vec{S} \cdot \vec{\alpha}_{cm}^* = \gamma \vec{s} \cdot \vec{\alpha}_{cm}^*$, se tiene que

$$\vec{S} \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau} = \vec{s} \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau} + \frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{S}) (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}) \quad (7.86)$$

ya que

$$\frac{d\vec{s}}{d\tau} = \vec{\mathcal{F}} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \mathcal{F}^0 \vec{\alpha}_{cm}^* + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{s} \times (\vec{\alpha}_{cm}^* \times \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}). \quad (7.87)$$

Ahora considerando que

$$\vec{\mathcal{F}}' = \vec{\mathcal{F}} + \frac{\gamma-1}{\alpha_{cm}^{*2}} (\vec{\alpha}_{cm}^* \cdot \vec{\mathcal{F}}) \vec{\alpha}_{cm}^* - \gamma \alpha_{cm}^* \mathcal{F}^0 = \vec{\mathcal{F}} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \alpha_{cm}^* \mathcal{F}^0. \quad (7.88)$$

Donde se ha usado la relación

$$\frac{\gamma-1}{\alpha_{cm}^{*2}} = \frac{\gamma-1}{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}. \quad (7.89)$$

Así

$$\frac{d\vec{s}}{d\tau} = \vec{\mathcal{F}} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{s} \times (\vec{\alpha}_{cm}^* \times \frac{d\vec{\alpha}_{cm}^*}{d\tau}) \quad (7.90)$$

y gracias a la ecuación (7.64) y a que $dt = \gamma d\tau$ se tiene

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \vec{\mathcal{F}} - \vec{s} \times \vec{\omega}_T \quad (7.91)$$

Para la fuerza de Lorentz (7.3) la parte espacial es:

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{d(\gamma c \alpha_{cm}^{*i})}{dt} - \frac{e}{mc} F^{i\alpha} U_\alpha \\ &= \frac{d(\gamma \alpha_{cm}^*)}{dt} - \frac{e\gamma}{m} (\vec{E} + \alpha_{cm}^* \times \vec{B})^i = -\frac{h}{cm^2} \end{aligned} \quad (7.92)$$

o

$$\frac{d(\gamma \alpha_{cm}^*)}{dt} = \frac{e\gamma}{m} (\vec{E} + \alpha_{cm}^* \times \vec{B}) = \frac{d\gamma \alpha_{cm}^*}{dt} + \gamma \frac{d\alpha_{cm}^*}{dt} = -\frac{h}{cm^2} \quad (7.93)$$

así que:

$$\frac{d\alpha_{cm}^*}{dt} = \frac{e\gamma}{m} (\vec{E} + \alpha_{cm}^* \times \vec{B}) - \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \alpha_{cm}^*. \quad (7.94)$$

Ahora

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{\gamma d\tau} = \gamma^2 \alpha_{cm}^* \cdot \frac{d\alpha_{cm}^*}{d\tau} = \gamma^3 \alpha_{cm}^* \cdot \frac{d\alpha_{cm}^*}{dt}. \quad (7.95)$$

Por lo que:

$$\frac{d\alpha_{cm}^*}{dt} = \frac{e}{\gamma mc} (\vec{E} + \alpha_{cm}^* \times \vec{B}) - \gamma^2 (\alpha_{cm}^* \cdot \frac{d\alpha_{cm}^*}{dt}) \alpha_{cm}^*. \quad (7.96)$$

Realizando un producto punto por ambos lados de la ecuación (7.96) con el vector α_{cm}^* , se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha_{cm}^* \cdot \frac{d\alpha_{cm}^*}{dt} &= \frac{e}{\gamma mc} \alpha_{cm}^* \cdot \vec{E} - \gamma^2 (\alpha_{cm}^* \cdot \frac{d\alpha_{cm}^*}{dt}) \alpha_{cm}^* \cdot \alpha_{cm}^* \\ &= \frac{1}{1+\gamma^2 \alpha_{cm}^{*2}} \cdot \frac{e}{\gamma mc} \alpha_{cm}^* \cdot \vec{E} = \frac{e}{\gamma^3 mc} \alpha_{cm}^* \cdot \vec{E}. \end{aligned} \quad (7.97)$$

Esto conlleva a tener que la aceleración de una partícula cargada con espín es debida enteramente a la dinámica de los campos electromagnético como en (7.8). Para el movimiento de campos electromagnéticos se tiene:

$$\frac{d\alpha_{cm}^*}{dt} = \frac{e}{\gamma mc} (\vec{E} + \alpha_{cm}^* \times \vec{B} - \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{E})). \quad (7.98)$$

Para:

$$\mathcal{F}^\alpha = \frac{ge}{2mc} [F^{\alpha\beta} S_\beta + \frac{1}{c^2} (S_\mu F^{\mu\nu} u_\nu) u^\alpha] \quad (7.99)$$

se puede observar que:

$$\mathcal{F}^i = \frac{ge}{2mc} [F^{i\beta} S_\beta + \frac{1}{c^2} (S_\mu F^{\mu\nu} u_\nu) u^i]. \quad (7.100)$$

En el sistema de referencia en que $\nu = 0$ y $s^{0i} = 0$, se tiene:

$$\mathcal{F}^{i'} = \frac{ge}{2mc} F^{i'\beta'} S_{\beta'} = \frac{ge}{2mc} F^{i'j'} S_{j'} = \frac{ge}{2mc} \epsilon_{i'j'k'} B_{k'} S^{j'} \quad (7.101)$$

o

$$\mathcal{F}^{i'} = \frac{ge}{2mc} \vec{s}' \times \vec{B}' = \frac{ge}{2mc} \vec{s}' \times \left[\gamma(\vec{B} - \alpha_{cm}^* \cdot \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \times \vec{B}) \right] \quad (7.102)$$

donde

$$\vec{E}' = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{E}) + \gamma(\vec{E} + \alpha_{cm}^* \times \vec{B}) \quad (7.103)$$

se ha usado (7.103) para obtener la expresión (7.102).

La correspondiente expresión para \vec{B}' análoga a la expresión (7.103) puede ser obtenida por la regla ($\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$):

$$\vec{B}' = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{B}) + \gamma(\vec{B} - \alpha_{cm}^* \times \vec{E}). \quad (7.104)$$

De la ecuación (7.102) es posible observar que:

$$\frac{1}{\gamma} \mathcal{F}' = \frac{ge}{2mc} \vec{s}' \times \left[\vec{B} - \alpha_{cm}^* \times \vec{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{B}) \right]. \quad (7.105)$$

Usando las ecuaciones (7.98), la ecuación (7.64) se convierte en:

$$\vec{\omega}_T = \frac{e\gamma}{(\gamma+1)mc} (\vec{E} + \alpha_{cm}^* \times \vec{B}) \times \alpha_{cm}^*. \quad (7.106)$$

Así, la ecuación (7.91) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{dt} &= \frac{1}{\gamma} \vec{\mathcal{F}} - \vec{s} \times \vec{\omega}_T = \frac{ge}{2mc} \vec{s} \times \left[\vec{B} - \alpha_{cm}^* \times \vec{E} - \frac{\gamma}{(\gamma+1)} \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{B}) \right] \\ &\quad - \frac{e\gamma}{(\gamma+1)mc} \vec{s} \times [(\vec{E} + \alpha_{cm}^* \times \vec{B}) \times \alpha_{cm}^*]. \end{aligned} \quad (7.107)$$

Considérese ahora la relación

$$\begin{aligned} \vec{s} \times [(\vec{E} + \alpha_{cm}^* \times \vec{B}) \times \alpha_{cm}^*] &= \vec{s} \times (\vec{E} \times \alpha_{cm}^*) + \vec{s} \times [(\alpha_{cm}^* \times \vec{B}) \times \alpha_{cm}^*] \\ &= \vec{s} \times [\vec{E} \times \alpha_{cm}^* - \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{B}) + \vec{B} \alpha_{cm}^{*2}] \end{aligned} \quad (7.108)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{dt} &= \frac{ge}{2mc} \vec{s} \times \left[\vec{B} - \alpha_{cm}^* \times \vec{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{B}) \right] \\ &\quad - \frac{\gamma e}{(\gamma+1)mc} \vec{s} \times [\vec{B} \alpha_{cm}^{*2} - \alpha_{cm}^* \times \vec{E} - \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{B})]. \end{aligned} \quad (7.109)$$

Rearreglando términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{mc} \vec{S} \times \left(\left(\frac{g}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1} \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{B}) \right. \\ \left. - \left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \alpha_{cm}^* \times \vec{E} \right). \end{aligned} \quad (7.110)$$

Esta forma de la ecuación de movimiento del vector de espín es la ecuación de Thomas, esta ecuación también describe la interacción espín-órbita para el electrón.

Considerando nuevamente que existe invariancia adiabática y que por lo tanto $S_m = S_M$, es posible obtener esta ecuación de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{d\vec{s}}{dt} - \frac{e}{mc} \vec{S} \times \left(\left(\frac{g}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1} \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{B}) \right. \\ \left. - \left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \alpha_{cm}^* \times \vec{E} \right) = -\frac{\hbar}{cm^2}. \end{aligned} \quad (7.111)$$

Aquí es importante aclarar, que la ecuación contiene el término de la frecuencia que corresponde a la ecuación de Thomas:

$$\begin{aligned} \Omega_{em}^T = -\frac{e}{mc} \left(\left(\frac{g}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1} \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{B}) \right. \\ \left. - \left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \alpha_{cm}^* \times \vec{E} \right). \end{aligned} \quad (7.112)$$

La contribución de la precesión de Thomas es la parte sin el factor de Landé g :

$$\Omega_{em}^T = \frac{e}{mc} \left(\left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \alpha_{cm}^* (\alpha_{cm}^* \cdot \vec{B}) + \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \alpha_{cm}^* \times \vec{E} \right). \quad (7.113)$$

Aquí, Ω_{em}^T muestra una interacción espín-órbita.

Escribiendo ahora (7.111) por componentes en coordenadas cilíndricas, aquí la precesión del espín s_z es cero $\frac{ds_z}{d\tau} = 0$ y con esto se obtiene [56]

$$\begin{aligned} -\frac{e}{m_e} s_z \times \left[\left(\frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{B_r}{r} - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1} (\alpha^2 \frac{B_r}{r}) - \left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\alpha E_r) \right. \\ \left. + \left(\frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) B_\phi - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1} (\alpha^2 B_\phi) - \left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\alpha \frac{E_\phi}{r^2}) \right] = -\frac{\hbar}{cm^2}. \end{aligned} \quad (7.114)$$

Ahora bien, la energía potencial para esta interacción se describe como [56]

$$U = U' + \vec{S} \cdot \vec{\omega}_T = -\vec{\mu} \cdot \left(\vec{B} - \frac{v}{c} \times \vec{E} \right) + \vec{S} \cdot \left[\frac{e\gamma}{(\gamma+1)mc} (\vec{E} + \alpha_{cm}^* \times \vec{B}) \times \alpha_{cm}^* \right]. \quad (7.115)$$

donde el término U' se expresa en la ecuación (7.38) y el término $\vec{\omega}_T$ en la ecuación (7.106). Considerando las ecuaciones (7.3), (7.32), (7.114) y (7.115) es posible derivar el valor para el momento magnético del electrón. Se sabe que incluye las contribuciones del momento angular, el giro y la interacción de espín-órbita [56] y [57]

$$\vec{\mu}_{eL} = -\frac{ge}{2m_e} \vec{L}, \quad \vec{\mu}_{eS} = -\frac{ge}{2m_e} 2\vec{S}, \quad \vec{\mu}_{eS:L} = -\frac{ge}{2m_e} \frac{1}{2m_e} \vec{S} \cdot \vec{L}. \quad (7.116)$$

Con este resultado ahora en la sección siguiente se calculará el valor del momento magnético del electrón y se comparará su valor con el encontrado en resultados experimentales.

7.6. Valor Obtenido del Momento Magnético y Comparación con Mediciones Experimentales

Para la ecuación (7.17); el término para el momento angular para el electrón en el centro de masas tiene que ser $(x^i p^k - p^i x^k) = m_e v_{e_{cm}}^* r_{e_{cm}}^* = 1,05471612 \times 10^{-34} J \cdot s \approx \hbar$, el valor medido y conocido para la constante reducida de Planck es $\hbar \approx 1,05471818 \times 10^{-34} J \cdot s$. Aquí, el factor de Landé se escribe como $g = 2(1 + \frac{\alpha_{cm}^*}{2\pi})$.

Teniendo en cuenta estos valores para (7.116) y considerando que $\vec{L} = n\hbar$ y que $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}$, el momento magnético para contribución del momento angular, espín y acoplamiento espín-órbita son calculados de la forma [34], [56], [57] y [59]

$$\vec{\mu}_{eL} = -\frac{e}{2m_e} \hbar (1 + \frac{\alpha_{cm}^*}{2\pi}), \quad (7.117)$$

$$\vec{\mu}_{eS} = -\frac{e}{m_e} \frac{\hbar}{2} (1 + \frac{\alpha_{cm}^*}{2\pi}) \quad (7.118)$$

y

$$\vec{\mu}_{eS \cdot L} = \frac{e^2}{2m_e^2} \frac{\hbar^2}{2} (1 + \frac{\alpha_{cm}^*}{2\pi})^2. \quad (7.119)$$

No obstante, si partimos de la ecuación (7.17) para darle un sentido únicamente relativista y se usa un valor del factor de Landé de $g = 2$, las expresiones (7.117), (7.118) y (7.119) se escriben como:

$$\vec{\mu}_{eL} = -\frac{eg}{2m_e} \hbar (1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha^4 + \frac{5}{16}\alpha^6 + \frac{35}{128}\alpha^8 + \frac{63}{256}\alpha^{10} \dots), \quad (7.121)$$

$$\vec{\mu}_{eS} = -\frac{eg}{m_e} \frac{\hbar}{2} (1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha^4 + \frac{5}{16}\alpha^6 + \frac{35}{128}\alpha^8 + \frac{63}{256}\alpha^{10} \dots) \quad (7.122)$$

y

$$\vec{\mu}_{eS \cdot L} = \frac{e^2 g^2}{2m_e^2} \frac{\hbar^2}{2} (1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha^4 + \frac{5}{16}\alpha^6 + \frac{35}{128}\alpha^8 + \frac{63}{256}\alpha^{10} \dots). \quad (7.123)$$

El valor obtenido para las ecuaciones (7.17) y (7.114) que consideran las contribuciones de (7.121), (7.122) y (7.123) que es dada por el término $\vec{\mu}_{eT}$. Todo este sistema de ecuaciones describe la situación completa para el caso del espín del electrón. Considerando que el momento angular total puede escribirse como $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, es posible realizar el producto escalar de esto consigo mismo, y así obtener $\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$. Con este resultado puede llevarse a cabo la suma de las diferentes contribuciones y obtener el momento magnético del electrón

$$\vec{\mu}_{eT}^2 = \vec{\mu}_{eL}^2 + \vec{\mu}_{eS}^2 + \vec{\mu}_{eL \cdot S}^2. \quad (7.124)$$

Gracias a esto es posible encontrar el valor para la magnitud del momento magnético del electrón, por convención se escoge la orientación del electrón lo que resulta en que el valor obtenido sea escrito con signo negativo (el signo negativo viene de escoger esa orientación):

$$\vec{\mu}_e = -9,275525623 \times 10^{-24} \frac{J}{T}, \quad (7.125)$$

que tiene un valor aproximado al obtenido en varias mediciones [34], [56], [57] y [59]

$$\vec{\mu}_e = -9,284764620 \times 10^{-24} \frac{J}{T}. \quad (7.126)$$

El error de comparación entre los valores teórico y experimental del momento magnético del electrón es de $\epsilon = 0,099507\%$, es un valor muy pequeño, sin embargo, el valor experimental considera los efectos cuánticos producidos por los diagramas de Feynman y la contribución del momento magnético anómalo del electrón, para encontrar un valor más detallado y aproximado al experimental deben considerarse este tipo de efectos cuánticos.

Ahora bien, si se considera la ecuación (7.31) y esta se inserta a mano en las ecuaciones del momento magnético del electrón dadas por la electrodinámica cuántica (7.117), (7.118) y (7.119), para obtener el valor del momento magnético del electrón se tiene:

$$\vec{\mu}_e = -9,2848976802 \times 10^{-24} \frac{J}{T}. \quad (7.127)$$

Cabe aclarar aquí que al insertar a mano la ecuación (7.31) es necesario investigar como trabajo a futuro si es posible crear un modelo que de primeros principios quite por completo la necesidad de usar los diagramas de Feynman. El error de comparación entre los valores del momento magnético del electrón (7.126) y (7.127) es de $\epsilon = 0,001433\%$.

Dado que por consideraciones clásicas como en (7.3), (7.17), (7.32), (7.122) y (7.123) fue posible obtener el valor del momento magnético del electrón para un modelo del átomo de hidrógeno. De la misma manera en el siguiente capítulo también se planea desarrollar una ecuación finsleriana de Klein-Gordon.

En este capítulo se ha observado que el uso de la métrica de Finsler para modificar la electrodinámica (7.3) es justificable, al igual que se puede observar representando el modelo del átomo de hidrógeno en un sentido relativista colocando el núcleo atómico girando junto con el electrón alrededor de un centro de masas.

También se considera que una medición más correcta debe incluir el campo electromagnético descrito por el tensor de Faraday y las transformaciones de Lorentz como en (7.10) y (7.12) y no sus componentes estáticas del campo eléctrico y magnético.

Esto se observa cuando se estudia el caso particular del momento magnético anómalo del electrón (7.18), que, como se puede ver, se ha medido en diferentes experimentos con una precisión muy alta.

Como se observó, al modificar el punto de referencia en el sistema atómico para los radios en el centro de masas (7.26), se pudieron encontrar condiciones en las que el valor medido para la constante de estructura fina se puede obtener de una forma puramente clásica y relativista para nuestra variedad.

En todos estos experimentos solo se produce una interacción entre el electrón y el campo electromagnético. Análogamente, el modelo atómico presentado aquí describe el movimiento del electrón que se acoplará al campo electromagnético que produce el núcleo del átomo, considerando que también gira alrededor del centro de masas (7.26), ha sido posible encontrar un radio ligeramente menor que el radio de Bohr, que permitió por medio de la velocidad encontrar un valor para la constante de estructura fina alrededor del centro de masas como en las ecuaciones (7.26), (7.28), (7.29) y (7.31). El valor del momento magnético del electrón, para un electrón que gira alrededor del centro de masa en un sistema atómico, tiene un valor $a_{emc} = 0,001159458788$ y que a su vez se puede comparar con el valor encontrado en las mediciones experimentales $a_e \approx 0,00115965218091$.

En diferentes experimentos ha sido posible medir el valor del momento magnético del electrón, sin embargo, los cálculos teóricos que describen este momento magnético anómalo se basan en los cálculos de la electrodinámica cuántica.

En muchos experimentos se confina un electrón usando un campo magnético orientado en la dirección de z , por lo que el giro de la partícula está orientado también en esta dirección. Por esta razón, la orientación en z para el espín se ha elegido en la ecuación (7.32) y se ha representado en la ecuación (7.114).

Este nuevo valor para la constante de estructura fina permitió calcular el momento magnético del electrón con un valor cercano a lo que se obtiene en las observaciones sin necesidad de recurrir a la necesidad de la existencia de una función de onda, esto se discute en los artículos [3], [18] y se tiene en cuenta aquí.

El resultado obtenido para el momento magnético del electrón que considera únicamente efectos relativistas es $\vec{\mu}_e = -9,275525623 \times 10^{-24} \frac{J}{T}$ dado en (7.125), está muy cerca del valor medido $\vec{\mu}_e = -9,284764620 \times 10^{-24} \frac{J}{T}$ dado en (7.126), en los experimentos. De igual manera, el valor del momento magnético del electrón que considera la aproximación clásica de la constante de estructura fina α_{cm}^* es de $\vec{\mu}_e = -9,2848976802 \times 10^{-24} \frac{J}{T}$.

Esto da confianza en el modelo utilizado y muestra que los argumentos utilizados para esto tienen cierta validez.

Esto parece indicar que los modelos matemáticos utilizados en algunas descripciones físicas fallan porque su descripción física es inadecuada, ya que estos modelos se consideran desde un punto de vista matemático más que físico.

Las funciones de Green son soluciones a ecuaciones diferenciales para el problema de Sturm-Liouville. En el formalismo de los diagramas de Feynman, se interpreta que la función de Green dependiente del tiempo corresponde a un propagador. Las líneas internas se llaman propagadores y se interpretan como partículas virtuales que no se pueden observar. Debido a esto, hay una ambigüedad. Cualquier par de gráficos con las mismas líneas de entrada y salida son equivalentes y se pueden agregar juntos. Esta am-

bigüedad considera la existencia de partículas virtuales y también se hace considerando cientos de diagramas diferentes.

Para el cálculo implementado aquí, es considerado que este tiene un sentido más físicamente aceptable para el átomo de hidrógeno, debido al uso del acoplamiento entre un fotón virtual producido por el campo electromagnético del protón que guía al movimiento del electrón y no al uso del postulado de la existencia de la función de onda [3] y [18].

Dado que la relatividad general se describe globalmente en un espacio curvo. Por esta razón, mediante el uso de la geometría de Finsler, que presenta la peculiaridad de no ser localmente euclidiana o plana, se ha buscado encontrar conexiones que permitan describir de manera coherente los fenómenos cuánticos en espacios no euclideos [3].

Es importante considerar aquí que en este trabajo las propiedades de la mecánica cuántica como la constante de Planck, las reglas de cuantización de Bohr y de Sommerfeld por medio del campo electromagnético, se relacionan con la métrica del universo en el que vivimos. Teniendo esto en cuenta, se considera que la física clásica puede explicar muchos de los fenómenos cuánticos.

En este trabajo se ha encontrado el momento magnético del electrón de correcciones relativistas, sin realizar el cálculo a través de los diagramas de Feynman dados en la electrodinámica cuántica.

Aquí es posible describir la ecuación de movimiento para modelar el electrón en un átomo de hidrógeno, encontrada en un universo que vive en una variedad de Finsler que se expande adiabáticamente.

También, el modelo relativista para el átomo de hidrógeno fue tratado en coordenadas polares. El momento magnético covariante del electrón aparece a partir de la ecuación de movimiento para una partícula cargada relativista en coordenadas polares; mientras que el momento magnético anómalo del electrón aparece cuando se realiza una expansión de Taylor para el factor de Lorentz con la constante de estructura fina como un parámetro pequeño de expansión.

El momento magnético anómalo del electrón dado por la teoría de la electrodinámica cuántica tiene el valor $a_e \approx 0,0011620849647$ que se puede comparar con el valor encontrado por Julian Schwinger, que esto es $a_e \approx 0,0011614$. Al fijar el núcleo del electrón en el centro de masa, se pudo calcular el radio del centro de masa y gracias a esto fue posible encontrar la constante de estructura fina modificada para el electrón que gira alrededor del centro de masa como $a_{emc} = 0,001159458788$ y que a su vez se puede comparar con el valor encontrado en las mediciones experimentales dadas por $a_e \approx 0,00115965218091$ como se mencionó anteriormente.

Se encontró la ecuación de movimiento que describe la precesión del espín y su interacción espín-órbita para el electrón y con eso se calculó el momento magnético del electrón dando un valor de $\vec{\mu}_e = -9,275525623 \times 10^{-24} \frac{J}{T}$.

Por lo tanto, se concluye que el potencial eléctrico que siente el electrón debido al campo eléctrico del núcleo cambia si consideramos el radio en el centro de masa en lugar del radio en el origen; porque la velocidad del electrón se modifica y esto modifica la constante de estructura fina. Aquí el radio del centro de masa es más pequeño que

el radio de Bohr.

Debido a que este modelo tiene un resultado atractivo, se ha considerado la posibilidad de buscar un modelo para las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac en una variedad de Finsler que cambia adiabáticamente con el tiempo. En el capítulo siguiente será abordado dicho tema de la ecuación de Klein-Gordon en una variedad de Finsler, mientras que el trabajo de derivar la ecuación de Dirac en una variedad de Finsler quedará como trabajo a futuro y por esa razón no se considerará en este trabajo de tesis.

Capítulo 8

Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Klein-Gordon, que describe la dinámica de las partículas masivas sin espín, es la ecuación de movimiento relativista más simple en teoría cuántica de campos. A pesar de su naturaleza, se usa ampliamente para una descripción aproximada de varios fenómenos cuánticos debido a correcciones relativistas. En primer lugar, se puede nombrar la descripción del nacimiento de partículas en campos externos de gauge [67], [68]. Esto se debe al hecho de que el campo electromagnético es descrito por las ecuaciones de Maxwell y estas son invariantes ante transformaciones de Lorentz, mientras que la ecuación de Schrödinger no es invariante con respecto a las transformaciones de Lorentz. Esto hace que sea imposible construir una teoría autoconsistente y cerrada que describa el comportamiento de las cargas en presencia de un campo electromagnético.

La ecuación Klein-Gordon aún no se ha obtenido de primeros principios. Al igual que la ecuación de Schrödinger, se construyó en base a postulados, uno de los cuales es la existencia de una función de onda [69]. Este hecho sugiere que tales postulados deberían ser reconsiderados.

El primer intento de obtener la ecuación de Schrodinger a partir de las condiciones de estabilidad del movimiento fue realizado en 1929 por Chetaev [70] (ver también [71], [72]). Este resultado fue discutido y extendido por muchos autores (ver, por ejemplo, [73], [75] y referencias allí). Recientemente se obtuvo la ecuación de Schrödinger sin la introducción axiomática de las funciones de onda [18].

En ese trabajo se busca demostrar que las llamadas funciones de onda son en realidad las funciones propias del operador de Liouville, que forman un conjunto completo de funciones ortogonales, en las cuales se expanden las funciones de campo electromagnético.

En el presente capítulo se verá cómo fue posible anteriormente para Cheatev obtener las ecuaciones de conservación de energía-momento para el caso relativista por medio de condiciones de estabilidad para encontrar la ecuación de Klein-Gordon y sin la introducción axiomática de las funciones de onda, esto en la sección 8.1.

Posteriormente, se obtendrá la ecuación de Klein-Gordon usando la transformada de Fourier en la sección 8.2 y que sugiere una interpretación física de la naturaleza de la función de onda.

En este capítulo se supone que los índices latinos corren como $i, j, k, l, m = 1, 2, 3$, mientras que los griegos corren como $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$. La signatura de la métrica es la siguiente $(1, -1, -1, -1)$.

8.1. La Ecuación de Klein-Gordon dada por Condiciones de Estabilidad

Usando el teorema de Chetaev sobre trayectorias dinámicas estables en presencia de fuerzas de perturbación, se hará un repaso sobre como la condición de estabilidad generalizada para sistemas hamiltonianos permite deducir la ecuación de Klein-Gordon.

Chetaev mencionó que: "La estabilidad, que es un fenómeno fundamentalmente general, tiene que aparecer de alguna manera en las principales leyes de la naturaleza" [70].

En las ecuaciones de movimiento, los movimientos teóricamente estables son de importancia fundamental y tienen relación con los fenómenos mecánicos reales. Chetaev lo explicó como sigue: "La teoría hamiltoniana de sistemas mecánicos holonómicos que están bajo la acción de fuerzas que admiten la función de fuerza ha demostrado su eficacia, aunque, como ha demostrado Liapunov, fuerzas de perturbación arbitrariamente pequeñas pueden hacer teóricamente inestables tales movimientos estables. Sin embargo, en la naturaleza, los movimientos precisos y solo estables conservan las características generales del movimiento y, por lo tanto, solo ellos describen más o menos correctamente los movimientos que realmente tienen lugar" [74].

Considérese un sistema material, donde q_1, \dots, q_n y p_1, \dots, p_n son las coordenadas y momentos generalizados en un campo de las fuerzas $U(q_1, \dots, q_n)$ [74].

Cuando la acción S es una función explícita del tiempo, la integral completa de la ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi correspondiente al sistema considerado tiene la forma [74]

$$S = f(t, q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) + A \quad (8.1)$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y A son constantes arbitrarias, y la solución general del problema mecánico, de acuerdo con el conocido teorema de Jacobi, está definida por [74]

$$\beta_i = \frac{\partial s}{\partial \alpha_i}, \quad p_i = \frac{\partial s}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.2)$$

donde β_i son nuevas constantes de integración. Los posibles movimientos del sistema mecánico están determinados por diferentes valores de las constantes α_i y β_i [74].

Ténganse en cuenta que el movimiento del sistema, del que se está abordando la estabilidad, es un movimiento no perturbado. Si se toma en cuenta la estabilidad de tal movimiento con respecto a las variables q_i bajo la perturbación solo de los valores iniciales de las variables (es decir, de los valores de las constantes α_i y β_i) en ausencia de fuerzas de perturbación [74].

Si se denotan por $\xi_j = \delta q_j = q_j - q_j(t)$ y $\eta_j = \delta p_j = p_j - p_j(t)$ las variaciones de las coordenadas q_j y el momento p_j , y por $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ la función de Hamilton,

entonces es posible de obtener para las ecuaciones de movimiento canónicas de Hamilton [74]

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (8.3)$$

y

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (8.4)$$

las ecuaciones diferenciales en las variaciones de Poincaré [76], que tienen la siguiente forma [76], [74]

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} \xi_j + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \eta_j, \quad (8.5)$$

y

$$\frac{d\eta_j}{dt} = -\sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} \xi_j - \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} \eta_j, \quad (8.6)$$

donde los coeficientes son funciones reales continuas y limitadas de t . Estas ecuaciones son de importancia esencial en los estudios sobre la estabilidad del movimiento de los sistemas mecánicos conservativos [74].

Poincaré encontró en [76] que si ξ_s , η_j y ξ'_s , η'_j son soluciones particulares de las ecuaciones variacionales (8.4) y (8.5) la siguiente cantidad es invariante [76], [74]:

$$\sum_s (\xi_s \eta'_s - \eta_s \xi'_s) = C, \quad (8.7)$$

donde C es una constante [76], [74].

Para cada ξ_s , η_s siempre hay al menos una solución ξ'_s y η'_j para la cual la constante C en el invariante de Poincaré no desaparece. De hecho, para una solución no trivial ξ_s , η_s uno de los valores iniciales ξ_{s0} , η_{s0} en el momento t_0 será diferente de cero. Entonces, la segunda solución particular siempre se puede definir por los valores iniciales ξ'_{s0} y η'_{j0} de tal manera que la constante bajo la consideración no desaparece [74].

Supóngase que dos soluciones de las ecuaciones de variación ξ_s , η_s y ξ'_s y η'_j el valor de la constante C sea diferente de cero, y λ y λ' son las funciones características correspondientes a estas soluciones. Si aplicamos a esta teoría un invariante de Liapunov [77], entonces se puede, por un lado, concluir que el valor característico del lado izquierdo de la relación de invariancia (8.7), correspondiente a la constante que no desaparece, es cero [74].

Esto permite obtener la siguiente desigualdad $\lambda + \lambda' \leq 0$. Para la estabilidad del movimiento no perturbado del sistema hamiltoniano considerado es necesario que todos los números característicos de las soluciones independientes en $\lambda + \lambda' \leq 0$ sean iguales a cero $\lambda = \lambda' = 0$ [74].

Esta condición representa una condición de estabilidad para el movimiento del sistema hamiltoniano (8.5) y (8.6) con respecto a las variables q_i y p_i bajo la perturbación

de los valores iniciales de las variables solamente, es decir, los valores de las constantes α_i y β_i .

Si observamos que, dado que el movimiento no perturbado de nuestra condición satisfactoria del sistema hamiltoniano (8.5) y (8.6) es estable bajo cualquier perturbación de las condiciones iniciales, tiene que ser estable solo bajo perturbaciones arbitrarias de las constantes β_i . En otras palabras, el problema se reduce a la determinación de la llamada estabilidad condicional [74].

De acuerdo con la suposición sobre el carácter de las perturbaciones iniciales de las soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi (8.2) las siguientes relaciones se obtienen hasta los términos del segundo orden [74]

$$\eta_i = \sum_j \frac{\partial^2 S_0}{\partial q_i \partial q_j} \xi_j, \quad (8.8)$$

lo que nos permite, teniendo en cuenta la relación [74]

$$H = \frac{1}{2} g_{ij} p_i p_j + U. \quad (8.9)$$

Con esto se escribe la ecuación (8.5) en la forma [74]

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \sum_{js} \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \left(g_{ij} \frac{\partial S_0}{\partial q_j} \right), \quad (8.10)$$

donde los coeficientes g_{ij} dependen solo de las coordenadas. Aquí las variables q_j y las constantes α_j deben ser reemplazadas usando sus valores correspondientes al movimiento no perturbado [74].

Si las ecuaciones de variación (8.10) son correctas, entonces, de acuerdo con el teorema de Liapunov [77] sobre la suma de los valores propios de las soluciones independientes y para condicionar (8.10), puede concluirse que la siguiente condición es necesaria para la estabilidad de (8.10) [74]:

$$\lambda \{ \exp \int L dt \} = 0, \quad \text{donde} \quad L = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial S_0}{\partial q_j} \right), \quad (8.11)$$

donde λ es el eigenvalor de la función entre llaves.

Además, si el sistema de ecuaciones en (8.10), además de la condición de corrección (8.11), satisface los requisitos de reducibilidad y si la transformación lineal correspondiente $x_i = \sum_j \gamma_{ij} \xi_j$ tiene un determinante constante $||\gamma_{ij}|| \neq 0$, entonces, debido a la invariancia de los valores propios de las soluciones del sistema (8.10) bajo tal transformación y debido al conocido teorema de Ostrogradsky-Liouville (este teorema afirma que el determinante de la solución de una matriz cuadrada de un sistema de primer orden de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, puede ser expresado en términos

de la suma de los coeficientes diagonales del sistema), se puede demostrar que, en este caso, de la ecuación (8.11) se obtendrá una estabilidad en la forma [74]:

$$L = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial S_0}{\partial q_j} \right) = 0, \quad (8.12)$$

que expresa la desaparición de la suma de los valores propios del sistema (8.11).

Considérese la condición de estabilidad de Chetaev obtenida en [70], [71] y discutida en [73], [75], y reexpresada como:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^\nu} \right) = 0, \quad (8.13)$$

donde x^μ son coordenadas y \tilde{S} es la integral completa de Hamilton-Jacobi para un problema perturbado con la función de Hamilton $\tilde{H} = H + \varepsilon H_1$ como en el trabajo de Chetaev [72].

Estas condiciones corresponden a los primeros términos de expansión en el parámetro pequeño de perturbación ε .

Como puede observarse aquí, las funciones S y \tilde{S} no son funciones univaluadas y, por lo tanto, siguiendo a Chetaev, se presenta la función univaluada ψ en la forma:

$$i \frac{S}{S_0} = Ln\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right), \quad i \frac{\tilde{S}}{S_0} = Ln\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right), \quad \text{donde } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi = \psi. \quad (8.14)$$

En este caso, el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene para la ecuación (8.13):

$$\sum \left[\frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \right) - \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \right)^2 \right] = 0. \quad (8.15)$$

Pero para (8.15) se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} = \psi \frac{i}{S_0} \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \quad (8.16)$$

Por esta razón uno puede escribir la ecuación (8.13) de la forma

$$\left[\frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \right) - \frac{1}{S_0^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right)^2 \right] = 0. \quad (8.17)$$

Teniendo en cuenta la relación $p_\gamma p^\gamma = m^2 c^4$ y redefiniendo la variable $S_0 = h$ se obtiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left(\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu} + m^2 c^4 \right) \psi = 0. \quad (8.18)$$

En esta sección pudo observarse como la ecuación de Klein-Gordon puede obtenerse de la teoría de estabilidad. En este sentido en lugar de representar un campo

escalar que es cuantizado como un oscilador armónico, se interpreta que la ecuación de Klein-Gordon representa un sistema dinámico que es estable respecto a pequeñas perturbaciones.

Ahora, en la siguiente sección será realizada otra derivación de la ecuación de Klein-Gordon a través de la ecuación relativista de energía-momento y una función armónica que representa el campo electromagnético y que permite de manera análoga a la sección 5.3 construir una transformada de Fourier para pasar de un espacio en el que se representa dicha ecuación de energía-momento a otro espacio en el que se representa la ecuación de Klein-Gordon.

8.2. Ecuación de Klein–Gordon sin el Postulado de la Función de Onda

Nuestro objetivo en esta sección es obtener la ecuación de Klein-Gordon sin el axioma de la existencia de la función de onda. Puede suponerse aquí que se puede aplicar la ley clásica de conservación de energía-momento. Por esta razón, se puede considerar un sistema caracterizado por una masa m y comenzar con una ecuación relativista para el 4-momento:

$$p_\mu p^\mu - m^2 c^2 = 0. \quad (8.19)$$

Por un lado, se está buscando una ecuación diferencial; que es la ecuación de Klein-Gordon.

Para obtenerla, debe aplicarse la transformada de Fourier a la ecuación (8.19). Por otro lado, una función armónica que es posible usar para esta transformación es la función que describe el campo electromagnético. (Se destaca aquí que el campo electromagnético solo es significativo en la escala mayor a 10^{-11} cm.)

Este campo puede ser descrito por la función armónica:

$$\varphi = \exp(-ik_\alpha x^\alpha), \quad (8.20)$$

donde k_α y x^α son 4-vectores.

Aplíquese a (8.19) la transformada inversa de Fourier en la coordenada x utilizando la función armónica del fotón virtual (8.20):

$$\int (p_\mu p^\mu - m^2 c^2) \varphi(k_\alpha x^\alpha) d\Omega = 0, \quad (8.21)$$

donde Ω es el 4-volumen. Esto puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int p_\mu p^\mu e^{-\frac{i}{\hbar} p_\alpha x^\alpha} d\Omega - m^2 c^2 \int e^{-\frac{i}{\hbar} p_\alpha x^\alpha} d\Omega = 0. \quad (8.22)$$

En la ecuación (8.22) aparece el término p_α/\hbar , esto debido a que el 4-vector de onda está relacionado con el 4-momento por medio de la longitud de onda de de Broglie de la forma $p = h/\lambda = \hbar/k$ (o en su versión relativista como $p^\mu = \hbar k^\mu$).

De donde se obtiene:

$$\int \hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\alpha x^\alpha} d\Omega + m^2 c^2 \int e^{-\frac{i}{\hbar} p_\alpha x^\alpha} d\Omega = 0 \quad (8.23)$$

o

$$\int \left(\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + m^2 c^2 \right) \varphi(p_\alpha x^\alpha) d\Omega = 0, \quad (8.24)$$

por integración se puede ver el operador de Liouville, que tiene un conjunto completo de funciones propias ortogonales en las que se puede expandir cualquier función.

Sea $\Psi_k(x)$ un conjunto completo de funciones propias del operador, entonces este puede expandirse como

$$\varphi(p, x) = \sum_m a_m(p) \Psi_m(x) \quad (8.25)$$

y la ecuación (8.24) se convierte en

$$\int d\Omega \sum_m a_m(p) \left(\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + m^2 c^4 \right) \Psi_m(x) = 0. \quad (8.26)$$

Esta ecuación, puede también ser presentada en su forma usual como (usando $\hbar = 1$ y $c = 1$):

$$(\square - m^2) \Psi_m(x) = 0, \quad (8.27)$$

que es la ecuación de Klein-Gordon.

En este capítulo pudo construirse la ecuación de Klein-Gordon en la sección 8.1 haciendo uso de condiciones de estabilidad y en la sección 8.2 de la transformada de Fourier. El objetivo aquí fue encontrar dicha ecuación, de tal forma que sea posible prescindir de los postulados de la física cuántica y utilizar el mismo enfoque de los capítulos anteriores.

Fue posible derivar de los fundamentos de la mecánica clásica, el electromagnetismo y la relatividad especial la ecuación de Klein-Gordon. La métrica de Minowski aquí tiene signatura de $(1, -1, -1, -1)$. Gracias a lo anterior, puede ser posible en el futuro describir la ecuación de Klein-Gordon en la métrica de Finsler. Existen trabajos también donde la ecuación de Dirac, ha podido ser descrita usando únicamente un enfoque relativista [78], [79], [80], [81], [82], [83], [84], [85] y [86].

Esto permite demostrar que muchas de las ecuaciones de la física cuántica pueden ser descritas de primeros principios, usando un enfoque geométrico y basado en la teoría clásica de campos.

En los capítulos 1 y 3 de esta tesis se habló sobre modelos cosmológicos que pueden ser construidos en una variedad de Finsler. También en el capítulo 4 fue estudiada la electrodinámica relativista expresada en esta variedad de Finsler.

En los capítulos 5, 6, 7 y 8 se analizaron diversos aspectos de los sistemas cuánticos, principalmente en los capítulos 7 y 8 se abordaron sistemas cuánticos para casos relativistas como consecuencia de ser abordados en la variedad de Finsler y desde primeros principios; como fueron el átomo de hidrogeno, el momento magnético anómalo del electrón y la ecuación de Klein-Gordon.

Ahora bien, en los dos capítulos siguientes (capítulos 9 y 10) se analizarán consecuencias astronómicas para la dinámica de galaxias, que pueden inferirse de modelar la métrica del universo en una variedad de Finsler.

Capítulo 9

Curva de Rotación de Galaxias de Disco

En este capítulo se calcula una solución analítica para la curva de rotación de galaxias espirales. Se considera que las curvas de rotación se pueden explicar por la cinética de la materia. Aquí será sugerido en primer lugar un enfoque integral al problema. Posteriormente, el mismo problema será abordado por la solución directa de la ecuación diferencial de Poisson en sistema de coordenadas cilíndricas, como se verá más adelante.

Por medio de observaciones, Plummer haciendo uso de la luminosidad L y la densidad de flujo de potencia $F = \frac{L}{A} = \frac{L}{4\pi r^2}$, encontró para la ecuación de Poisson una distribución esférica de masa. En muchos sistemas esféricos se espera que la densidad sea más o menos constante cerca del centro y tienda a cero en puntos muy lejanos al origen. El potencial de un sistema de este tipo sería proporcional a $r^2 + c$ en radios pequeños y proporcional a $1/r$ en radios grandes. Un potencial gravitacional derivado de **la ecuación de Poisson** de dicha distribución con estas propiedades es, **el modelo de Plummer**. Donde a es una constante con dimensiones de longitud para el radio de la galaxia [87]

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \quad (9.1)$$

y cuya función de densidad se describe como

$$\rho(r) = \frac{3b^2M}{4\pi} \frac{1}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (9.2)$$

Por otro lado, Toomre a través de la ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas encontró el potencial gravitacional [87]

$$\Phi(r, z) = \frac{GM}{(R^2 + (b + |z|)^2)^{1/2}}, \quad (9.3)$$

donde b es un parámetro que representa el espesor de la galaxia. Aquí la función de densidad que se deriva de este modelo viene dada por la ecuación

$$\rho(R, z) = \mu(R)\delta(z) = \frac{aM}{2\pi} \frac{1}{(R^2 + b^2)^{3/2}} \delta(z). \quad (9.4)$$

Miyamoto y Nagai generalizaron los modelos de Plummer y Toomre para coordenadas cilíndricas de la forma [87]

$$\Phi(r, z) = \frac{GM}{\left(R^2 + (a + (z^2 + b^2)^{1/2})^2\right)^{1/2}} \quad (9.5)$$

y

$$\rho(R, z) = \frac{b^2 M a R^2 + \left(a + 3(z^2 + b^2)^{1/2}\right) \left(a + (z^2 + b^2)^{1/2}\right)^2}{4\pi \left(R^2 + \left(a + (r^2 + b^2)^{1/2}\right)^2\right)^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (9.6)$$

Estas expresiones (9.5) y (9.6) son el potencial gravitacional y la función de densidad más generales para galaxias espirales. Para las ecuaciones (9.1) a la (9.6), el parámetro a es una constante con dimensiones de longitud para el radio de la galaxia y además el parámetro b es una constante con dimensiones para el espesor de la galaxia.

Usando una función de densidad aproximada para galaxias de disco, en las secciones 9.1 y 9.2 se analizarán dos métodos diferentes, uno integral y otro diferencial respectivamente, para encontrar la curva de rotación de galaxias de disco.

9.1. Método Integral para Obtener la Curva de Rotación de Galaxias

En coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , puede expresarse un elemento diferencial de la forma $dS = \rho d\phi dz$ (donde ρ es la coordenada radial (que no debe confundirse con una función de densidad), ϕ es la coordenada angular azimutal y z es la coordenada de altura), y su diferencial de ángulo sólido $\Omega = \frac{S}{R^2}$ puede obtenerse como [91], [92]:

$$d\Omega = \frac{\cos \alpha dS}{r^2} = \frac{\cos \alpha \rho d\phi dz}{r^2} = \frac{z \rho d\phi dz}{r^3}. \quad (9.7)$$

Ahora considérese un disco delgado de espesor $2b$ como el mostrado en la figura 9.1, es decir $z \in [-b, b]$, y además se fija el diferencial de masa como un punto que representa una masa dentro del disco y r es la distancia de la masa al observador que también se encuentra dentro del disco a la distancia R del centro de la galaxia, es decir $\rho \in [0, R]$. Esta distancia del observador a la masa puntual se puede escribir como $r^2 = z^2 + R^2 - 2R\rho \cos \phi$ [91], [92].

Considerando un disco delgado y la distancia para un observador al diferencial de masa se escribe como $r = \sqrt{z^2 + y^2}$, donde y^2 se representa como una función del ángulo formado entre la distancia entre el origen del cilindro y el punto de observación

dado por a y entre la distancia ρ que forman un ángulo entre el origen y el punto m , $y^2 = (R - \rho \cos \theta)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \phi$. Gracias a esto la distancia para este disco del observador a un punto del disco que representa una masa puntual m puede escribirse $r = \sqrt{z^2 + a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta}$, y como puede observarse en la imagen el observador se sitúa en el mismo plano que el origen [91], [92].

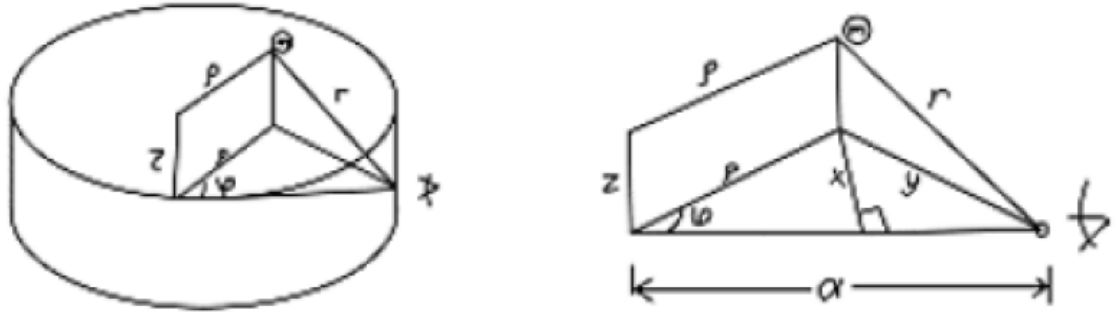


Figura 9.1. Elemento diferencial para una galaxia de disco. Para un observador a distancia r del diferencial de masa m cuyo punto de observación se encuentra en la frontera de las paredes del disco en su altura z y en el plano para $z = 0$, siendo los límites para la altura de la galaxia para $b > z > -b$.

Este planteamiento permitirá encontrar en las siguientes dos subsecciones el potencial gravitacional y la curva de rotación de una galaxia de disco.

9.1.1. Potencial Gravitacional

Debido a la simetría cilíndrica de la galaxia, la contribución del potencial formado por la masa en el punto de observación puede dividirse en componentes radial y tangencial $u = u_{\parallel} + u_{\perp}$.

La componente tangencial del potencial no tiene efecto en la curva de rotación, pero el radial si lo tiene ya que este se encuentra en función del radio de la galaxia [91], [92]

$$u_{\parallel} = u \frac{R - \rho \cos \phi}{r}, \quad (9.8)$$

pero para la masa puntual el potencial es $u = \frac{Gm}{r}$.

Como el propósito es conocer la curva de rotación para una galaxia espiral es importante especificar que ésta se construye comparando la velocidad de giro de la galaxia respecto al radio de la galaxia. Eso sólo es posible por medio de la siguiente condición de frontera (en esta condición de frontera se puede observar que las fuerzas están en equilibrio) [91], [92]:

$$\frac{\partial u}{\partial R} \Big|_{r=R} = \frac{V^2}{R}, \quad (9.9)$$

la cual expresa que la aceleración centrípeta $a_r^{(cen)} = \frac{V^2}{r}$ (aquí las fuerzas están en equilibrio) para la galaxia puede conocerse debido al cambio del potencial gravitacional respecto a su radio en la frontera dado por el elemento diferencial de masa dm [91], [92]:

$$du_{\parallel} = Gdm \frac{R - \rho \cos \phi}{r^2}, \quad (9.10)$$

integrando la ecuación (9.10) y expresando explícitamente todos los términos; aquí el diferencial de masa se expresa explícitamente como el producto de la función de densidad para la galaxia por el elemento diferencial de volumen para coordenadas cilíndricas [91], [92].

$$u_{\parallel} = G \int_0^R \int_{-b}^b \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(\rho, z) (R - \rho \cos \phi) \rho d\rho d\phi dz}{z^2 + R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \phi}. \quad (9.11)$$

donde $\sigma(\rho, z)$ es aquí una función de densidad para la galaxia. Integrando sobre ϕ se obtiene lo siguiente [91], [92]

$$u_{\parallel} = \frac{2\pi G}{R} \int_0^R \int_{-b}^b \sigma(\rho, z) \rho d\rho dz. \quad (9.12)$$

Al llegar a este punto, es necesario que se defina la función de distribución de densidad. Una distribución que es ampliamente utilizada para representar la función de densidad obtenida de las observaciones astronómicas es la función de densidad de Miyamoto-Nagai [87]:

$$\rho(R, z) = \frac{b^2 M a R^2 + \left(a + 3(z^2 + b^2)^{1/2}\right) \left(a + (z^2 + b^2)^{1/2}\right)^2}{4\pi \left(R^2 + \left(a + (r^2 + b^2)^{1/2}\right)^2\right)^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (9.13)$$

La función de densidad de Miyamoto-Nagai está escrita en coordenadas cilíndricas, para realizar la aproximación se han factorizado las funciones $\sigma(r, z) = \sigma(r) \sigma(z)$.

Sean a y b parámetros que caracterizan el valor en la frontera para el radio y la altura de la galaxia respectivamente. Los parámetros adimensionales $x = r/a$ y $t = z/b$, permiten gracias a la factorización para la función de densidad representar una aproximación a la función de densidad dada en (9.13) como sigue [91], [92]

$$\sigma(\rho, z) = \frac{10^{10} M_{\odot}}{(\gamma t^2 + 1)^{3/2}} \sum_k \frac{\alpha_k}{(\beta_k x^2 + 1)^{3/2}}. \quad (9.14)$$

Se debe aclarar que se puede construir una función de distribución de densidad usando cualquier función o series de funciones, no hay ninguna restricción para ello. Aun así, es importante considerar que debe ser cumplido que la función de distribución de densidad tiene que coincidir con la distribución de densidad observada para el tipo galaxia que se esté estudiando.

En este caso la integración sobre z se realiza de la siguiente manera [91], [92]

$$I = \int_0^b \frac{1}{(\gamma t^2 + 1)^{3/2}} dz = \frac{bt}{\sqrt{\gamma t^2 + 1}} \Big|_0^1 = \frac{b}{\sqrt{\gamma + 1}}, \quad (9.15)$$

y renombrando la constante $\eta = 2\pi G 10^{10} M_\odot$ para facilitar la escritura, puede llevarse a cabo la integral sobre r de (9.12), [91], [92]

$$u_{\parallel} = \frac{\eta b}{R\sqrt{\gamma + 1}} \int_0^R \sum_k \frac{\alpha_k}{(\beta_k x^2 + 1)^{3/2}} \rho d\rho, \quad (9.16)$$

gracias a esto la componente radial para el potencial gravitacional es expresado por [91], [92]

$$u_{\parallel} = \frac{\eta a^2 b}{R\sqrt{\gamma + 1}} \sum_k \frac{\alpha_k}{\beta_k} \left[1 - \frac{1}{(\beta_k \frac{R^2}{a^2} + 1)^{1/2}} \right]. \quad (9.17)$$

Este es el potencial gravitacional producido por la galaxia en el punto R y será posible con el encontrar la curva de rotación de una galaxia de disco en la siguiente subsección.

9.1.2. Curva de Rotación

Gracias a el potencial gravitacional encontrado en la ecuación (9.17) la velocidad de giro de la galaxia puede escribirse a través de la condición de frontera (9.9) lo que permite encontrar la velocidad y obtener la curva de rotación para nuestra galaxia [91], [92]

$$V(R)^2 = \frac{\eta a^2 b}{R\sqrt{\gamma + 1}} \sum_k \frac{\alpha_k}{\beta_k} \left[1 - \frac{\frac{3}{2}\beta_k \frac{R^2}{a^2} + 1}{(\beta_k \frac{R^2}{a^2} + 1)^{3/2}} \right]. \quad (9.18)$$

Ahora presentamos por conveniencia, nuevos coeficientes α_k^* y β_k^* en los que se reducen los parámetros del modelo. Es decir, $\alpha_k^* = b\alpha_k/\sqrt{\gamma + 1}$, y $\beta_k^* = \beta_k/a^2$. En este caso (9.18) se escribe de la forma:

$$V(R)^2 = \frac{\eta}{R} \sum_k \frac{\alpha_k^*}{\beta_k^*} \left[1 - \frac{\frac{3}{2}\beta_k^* R^2 + 1}{(\beta_k^* R^2 + 1)^{3/2}} \right]. \quad (9.19)$$

La expresión para la curva de rotación usada por Miyamoto y Nagai en su trabajo [87] es la siguiente:

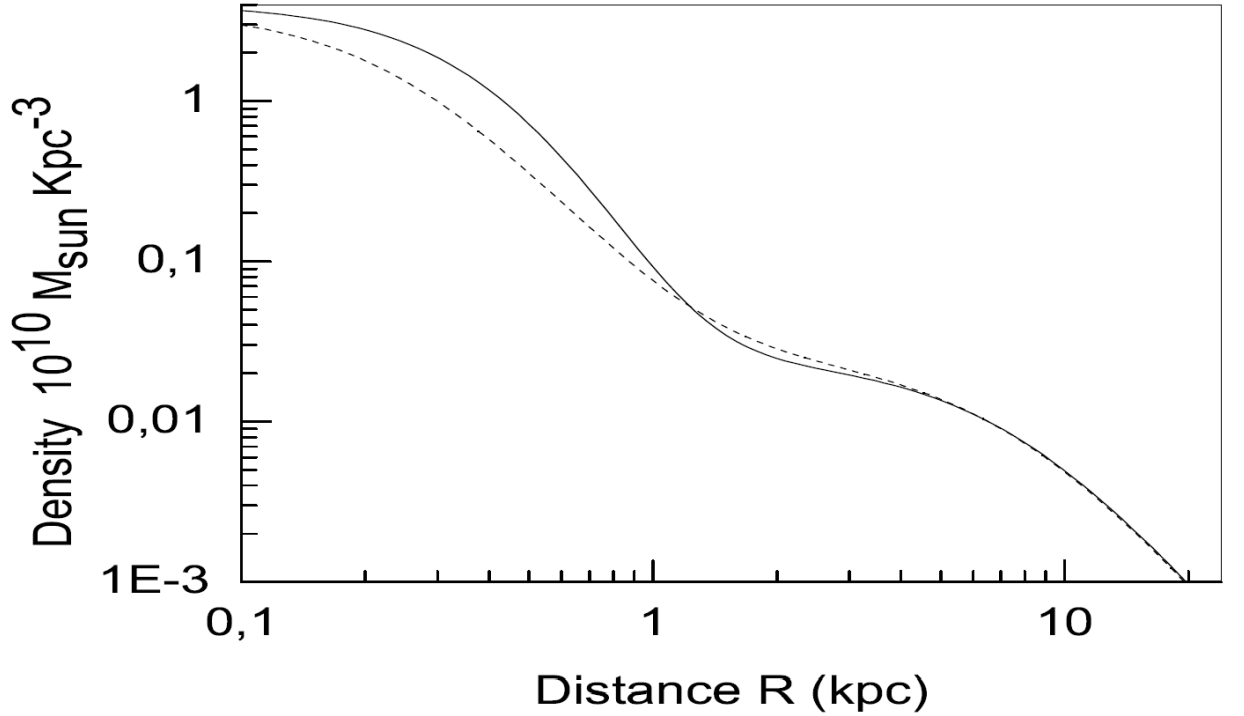
$$V(R)^2 = R \left[\frac{Gm_1}{[R^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^2]^{3/2}} + \frac{Gm_2}{[R^2 + (\alpha_2 + \beta_2)^2]^{3/2}} \right] \quad (9.20)$$

para la ecuación de la curva de rotación (9.20) Miyamoto y Nagai utilizaron los valores de los siguientes parámetros $\alpha_1=0$ kpc, $\alpha_2=7.258$ kpc, $\beta_1=0.495$ kpc, $\beta_2=7.258$ kpc, $M_1=2.05 \times 10^{10} M_\odot$ y $M_2=25.47 \times 10^{10} M_\odot$.

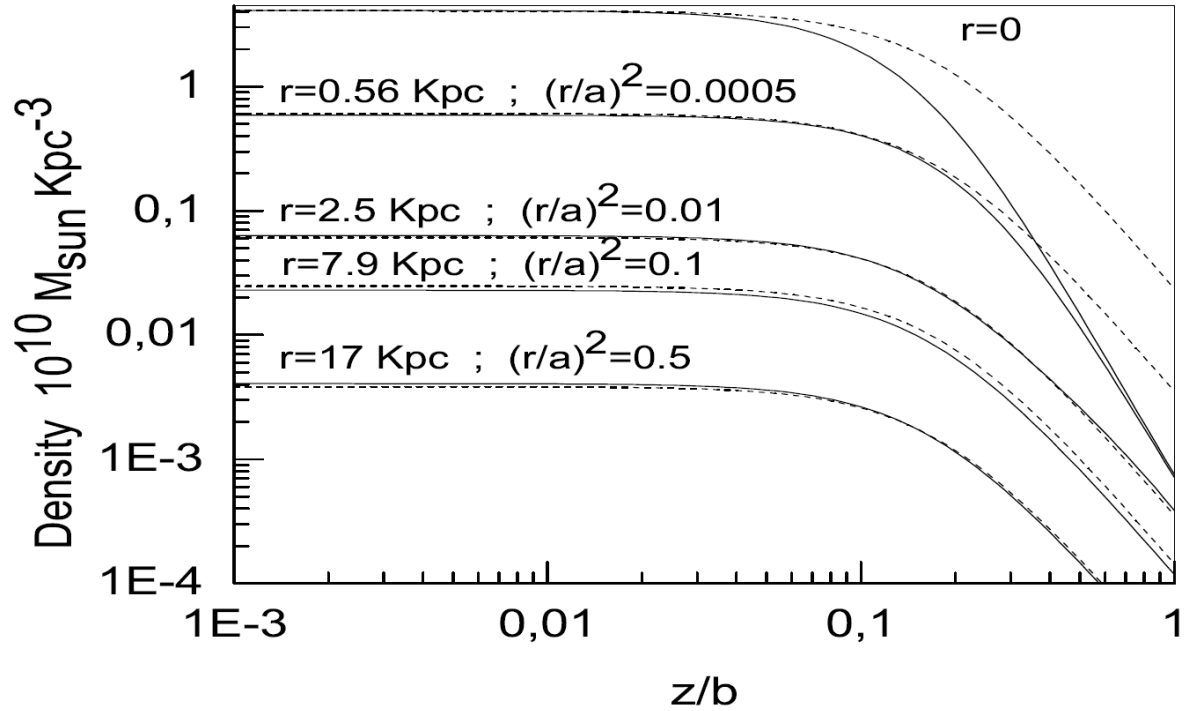
Concluyendo, se puede calcular la masa total de nuestra galaxia. Esta es la aproximación de la densidad de Miyamoto-Nagai; la masa en el disco de la galaxia [91], [92]:

$$M_G = \frac{4\pi a^2 b 10^{10} M_\odot}{\sqrt{\gamma + 1}} \sum_k \frac{\alpha_k}{\beta_k} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\beta_k \frac{R^2}{a^2} + 1}} \right] = 25,2 \cdot 10^{10} M_\odot. \quad (9.21)$$

Como se ha utilizado una aproximación a la densidad de Miyamoto-Nagai, esta densidad contiene la parte central del bulbo y el disco de la galaxia. Considerando a nuestra galaxia: la Vía Láctea, la región para el radio de la galaxia es de $1 < R < 25$ kpc (para un valor de $R = 0$ las funciones (9.18) y (9.19) no están definidas por la presencia del término $\frac{1}{R}$). Los comportamientos de las densidades en función de R y z pueden ser graficados para la ecuación (9.14) de la siguiente manera [91], [92]



1)



2)

Figura 9.2. 1) Densidad bariónica en función de la distancia a para el modelo de dos componentes (bulbo + disco) de la galaxia. Se comparan la densidad de Miyamoto-Nagai (9.6) (línea continua) y la densidad dada por la expresión (9.14) (curva discontinua) [91], [92]. 2) Densidad en función de la altura z . La densidad de Miyamoto-Nagai (9.6) (línea continua) y densidad determinada por la expresión (9.14) (curva discontinua) [91], [92].

Puede trazarse la curva de rotación para la Vía Láctea usando la expresión (9.19). Esta se muestra en la figura 9.3 para tres casos diferentes en comparación con la curva de rotación encontrada por Miyamoto y Nagai [87] con la ecuación (9.20) (esta se muestra en rojo) y comparada respecto a una curva de rotación observada reportada por Sofué [126] (esta se muestra con una línea punteada en azul con barras de error). La primera curva de rotación (línea continua en negro) se calculó utilizando solo dos términos de la expansión en (9.14) y (9.19). Para la ecuación (9.19) se usaron los valores de los parámetros del modelo que son $\gamma = 30$, $\alpha_1 = 0,007$, $\alpha_2 = 0,1$, $\alpha_3 = 0,35$, $\alpha_4 = 13$, $\alpha_5 = 13$, $\beta_1 = 2,5$, $\beta_2 = 20$, $\beta_3 = 100$, $\beta_4 = 20000$ y $\beta_5 = 900000$ [91], [92]. Para el caso en el que se toman los coeficientes α_k^* y β_k^* de la siguiente manera: $\alpha_1^* = 0,2317$, $\beta_1^* = 0,112$, $\alpha_2^* = 6,358$, $\beta_2^* = 28,8$, $\alpha_3^* = 7,005$ y $\beta_3^* = 1440$ se obtiene para la expresión de la curva de rotación (9.19) [91], [92].

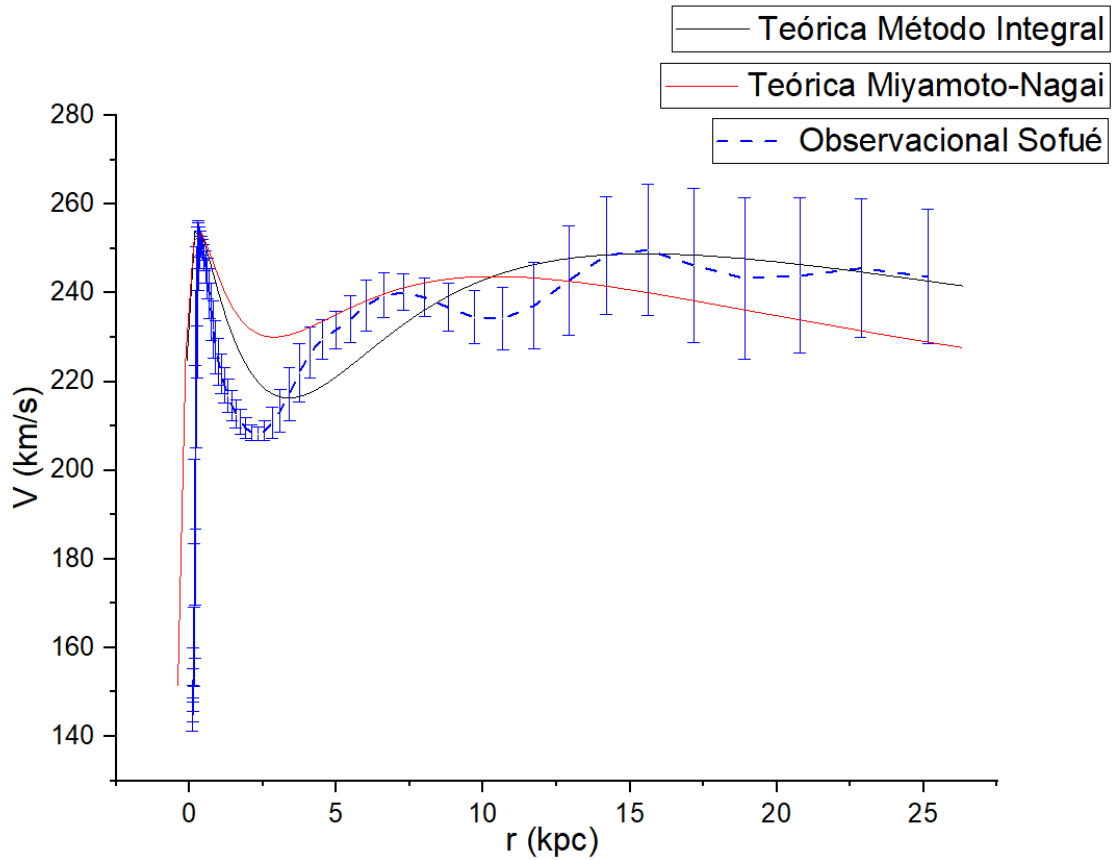


Figura 9.3. En la figura se muestra la curva obtenida por la ecuación (9.19) en color negro, comparada con la obtenida por Miyamoto-Nagai con la ecuación (9.20) en color rojo y reportada en su trabajo [87] y además reportada con la curva de rotación obtenida con datos experimentales reportada en el trabajo de Sofué [126].

Como puede observarse la curva de rotación encontrada con la ecuación (9.19) tiene similitud con la encontrada por Miyamoto-Nagai con la ecuación (9.20) en su artículo [87]. Se puede observar cierta similitud en la forma de las curvas de rotación, además al comparar la curva de rotación teórica obtenida en este trabajo contra la encontrada por Miyamoto y Nagai; los valores son similares y se ajustan para el valor del radio hasta 10 kpc mientras que la curva de Miyamoto-Nagai cae dando un valor cerca de los 210 km/s para un radio de 24 kpc , en la curva de rotación el valor para la velocidad a 24 kpc es poco mayor de los 240 km/s y. Aún con estas diferencias en los valores es posible observar que el comportamiento general para estas dos curvas es consistente, ya que el pico más grande se encuentra en ambos casos en el rango de valores menor a 1 kpc y el segundo pico es menos pronunciado este se encuentra en un rango de valores entre 6 y 14 kpc , sin embargo en la curva encontrada en este trabajo se refleja una caída menos remarcada para la curva de rotación.

Ahora si se compara nuestra curva de rotación obtenida con la ecuación (9.19) (línea continua en negro) con respecto a la curva observacional más reciente encontrada por

Sofué (línea punteada en azul con barras de error) reportada en su trabajo [126], es posible observar que la curva observacional no presenta un comportamiento tan suave como la curva de rotación teórica encontrada en este trabajo (línea en negro).

En este punto es deseable ajustar nuestra curva de rotación; ajustar una curva de rotación, al igual que una función, es que lo que uno calcula sea similar, dentro de los errores, a lo que se observa; para esto es necesario encontrar una curva que contenga una serie de datos y que se ajusten de la mejor manera y sujeta a restricciones. Por esa razón para hacer una comparación más justa y objetiva es posible calcular el porcentaje de variación o error porcentual ϵ para un valor de la velocidad de las curvas a un valor para el radio determinado. Es importante aclarar que esta comparación puede realizarse para cualquier valor del radio, sin embargo, aquí se tomará el valor del radio de 10 *kpc* para hacer la comparación entre nuestra curva de rotación teórica (línea continua en negro) y la curva de rotación teórica de Miyamoto-Nagai:

$$\epsilon = \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Miyamoto-Nagai)}}{V_{CR-Observada(Miyamoto-Nagai)}} \right| \times 100 \% \quad (9.22)$$

$$\epsilon = \left| \frac{240 \frac{km}{s} - 238 \frac{km}{s}}{238 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 0,84 \%$$

esto da una idea objetiva de que tan parecidas o diferentes es la curva de rotación teórica comparada con la curva de rotación observada. Observando las imágenes es posible ver que para nuestra galaxia su curva de rotación no cae de una forma abrupta para un radio mayor de 10 *kpc*.

Como puede verse, la curva de rotación obtenida en esta sección, coincide con curvas de rotación obtenidas por medio de datos observacionales. Entonces, podemos concluir que la distribución de la densidad (9.14) es una buena aproximación para explicar las curvas de rotación.

Ahora es posible hacer una comparación objetiva de nuestra curva de rotación teórica (línea continua en negro) respecto a la curva de rotación observacional de Sofué usando la ecuación (9.22) para tres diferentes radios:

Para un valor del radio de 2,5 *kpc*:

$$\epsilon = \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \quad (9.23)$$

$$= \epsilon = \left| \frac{210 \frac{km}{s} - 225 \frac{km}{s}}{225 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 6,66 \%$$

Para un valor del radio de 10 *kpc*:

$$\epsilon = \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \quad (9.24)$$

$$\epsilon = \left| \frac{228 \frac{km}{s} - 240 \frac{km}{s}}{240 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 5 \%$$

Para un valor del radio de 25 *kpc*:

$$\epsilon = \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \%.$$

$$\epsilon = \left| \frac{242 \frac{km}{s} - 240 \frac{km}{s}}{240 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 0,83 \%$$
(9.25)

para estos valores de variación es posible encontrar un promedio del error de $\epsilon = 4.16 \%$.

Ahora bien, esta curva de rotación también puede graficarse de forma semilogarítmica como en la mostrada en la figura 9.4. Esta puede construirse usando las ecuaciones (9.14) y (9.19) y los parámetros α y β mencionados anteriormente se obtiene para la expresión de la curva de rotación (9.19) [91], [92].

Gracias a esto se puede observar que la curva de rotación para galaxias espirales puede explicarse usando la distribución de densidad (9.14) [91], [92].

En la curva de rotación semilogarítmica obtenida con la expresión (9.19) y mostrada en la figura 9.4 es posible observar también que los datos para un rango de valores del radio entre 1 y 10 *kpc* se desvían poco de los datos observacionales reportados por Sofué en [126].

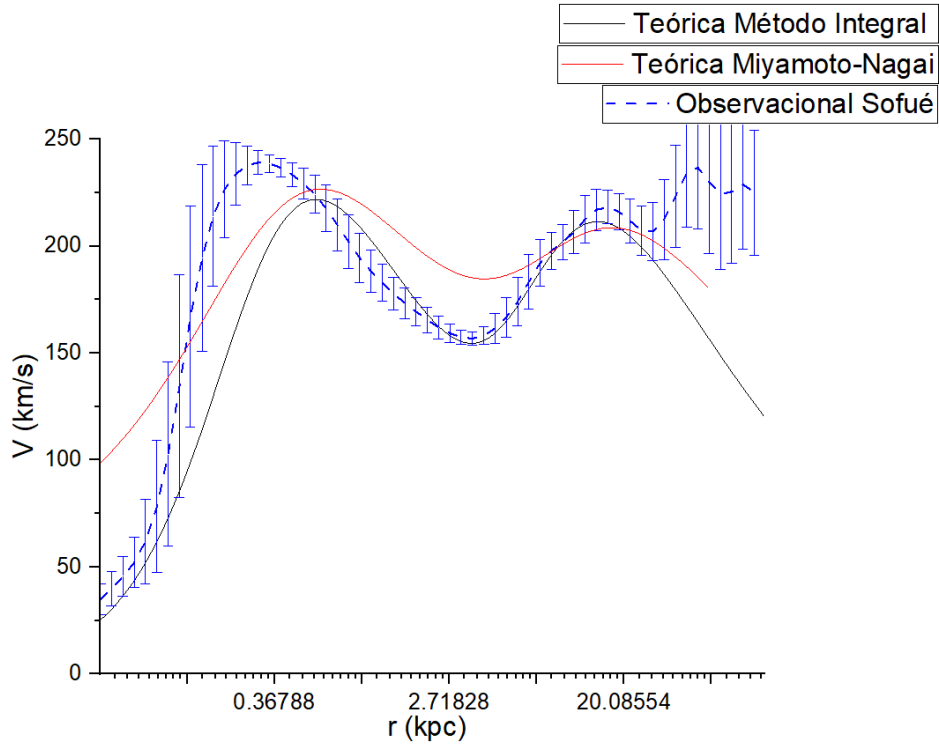


Figura 9.4. Comparación de curvas lineales de rotación de la Vía Láctea [126].

Varias curvas de rotación de las galaxias de disco observacionales se han reportado y estudiado en detalle, hay un gran número de publicaciones sobre este tema (véanse, por ejemplo, los trabajos de Sofue [122], [123], [122], [124], [125], [126], [127], [128]). En

estos artículos las distribuciones de densidad de la materia en las galaxias se construyen a partir de las curvas de rotación observadas.

En su artículo Sofué [126] revisó el estado actual del estudio de la curva de rotación de la Vía Láctea y presentó una curva de rotación unificada desde el centro galáctico hasta la distancia galactocéntrica de unos $r = 100 \text{ kpc}$ (aquí se muestra hasta un valor de $r = 25 \text{ kpc}$). La curva de rotación mostrada en la figura 9.4, se utiliza para calcular directamente la distribución de la densidad de masa superficial.

Es calcular el error porcentual también para las curvas semilogarítmicas mostradas en la figura 9.4

Para un valor del radio de $0,5 \text{ kpc}$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\ & = \left| \frac{225 \frac{\text{km}}{\text{s}} - 220 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{220 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \right| \times 100 \% = 2,27 \%. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Para un valor del radio de 24 kpc :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\ & = \left| \frac{228 \frac{\text{km}}{\text{s}} - 242 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{242 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \right| \times 100 \% = 5,78 \%. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Para un valor del radio de 25 kpc :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\ & = \left| \frac{225 \frac{\text{km}}{\text{s}} - 140 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{140 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \right| \times 100 \% = 60,71 \% \end{aligned} \quad (9.28)$$

para estos valores de variación es posible encontrar un promedio del $22,92 \%$.

Existen otros trabajos que han estudiado diferentes curvas de rotación. Por ejemplo, basándose en la suposición de órbitas circulares, los autores Pato Miguel y Iocco Fabio [129] presentan una compilación que se centra en el rango de radios de galaxias entre $r = 3 \text{ kpc} - 20 \text{ kpc}$ y no se utilizó fuera de este rango.

Los autores del artículo [129] construyeron la curva de rotación para la Vía Láctea, teniendo en cuenta la cinemática del gas y las estrellas. En esta curva de rotación reportada por los autores, se puede ver que a partir del valor del radio $r = 8 \text{ kpc}$, la dispersión de la velocidad aumenta significativamente.

También hay que destacar el trabajo de Karukes E. V., Benito M. et al. [130] en el que se describen las distribuciones de masa de tres componentes de la galaxia: el bulbo estelar, el disco estelar y el gas. Los autores utilizaron la curva de rotación para calcular la materia oscura y la distribución de masa total para el perfil de la materia oscura, así como el perfil de masa estelar total.

En el artículo [131] publicado por Fich Michel, Blitz Leo y Stark Antony A., se estudia la curva de rotación de la galaxia de la Vía Láctea para distancias desde $r = 3$

kpc hasta $17 kpc$. Los autores utilizaron funciones polinómicas y leyes de potencia para simular las curvas de rotación. Como resultado, los autores informan de la insatisfactoria convergencia de la aproximación propuesta a la curva de rotación observada para distancias superiores a $r = 10 kpc$.

Ahora que se ha encontrado el potencial gravitacional y la curva de rotación de la galaxia por medio de la ley de Gauss (método integral), en la siguiente sección serán encontradas de nuevo para un método de solución de ecuaciones diferenciales parciales llamado Método de Transformadas Integrales Finitas.

9.2. Método Diferencial para Obtener la Curva de Rotación de Galaxias de Disco.

En la presente sección se presenta una solución analítica para la ecuación de Poisson que aparece en las aplicaciones abordadas con frecuencia con respecto al cálculo del potencial gravitacional de las galaxias espirales. Se sugiere aquí una solución analítica para el problema en coordenadas cilíndricas mediante el uso de la técnica de transformación integral finita. La solución final se presenta como una expansión de las funciones propias del problema de Sturm-Liouville correspondiente y con ello la función de Green del problema puede ser obtenida [1]. Cabe mencionar que lo presentado en esta sección, fue publicado en la revista rusa *Astrophysical Bulletin* que puede leerse en la cita mencionada aquí mismo [1].

El método de transformadas integrales finitas emplea el problema de Sturm-Liouville para encontrar por medio de proyecciones la solución de una ecuación diferencial parcial. Lo que puede resumirse como [93]:

- a) Se elige un problema de Sturm-Liouville $(-\frac{d}{dx} [p(x)\frac{dy}{dx}] + q(x)y = \lambda\omega(x)y)$ el cual es cercano al problema original.
- b) Se escribe la solución como un desarrollo de eigenfunciones como proyecciones del problema de Sturm-Liouville.
- c) Transformar la ecuación diferencial original para encontrar la transformada, las transformadas son coordenadas del vector base del problema de Sturm-Liouville.
- d) Se desarrolla la solución en la base de la transformada.

En una amplia variedad de aplicaciones astrofísicas hay una gran cantidad de problemas extremadamente importantes que pueden reducirse al problema de Poisson en coordenadas cilíndricas. Estos problemas aparecen en el modelado de las galaxias, discos de acreción, entre otros, cuando estamos interesados en la reconstrucción del potencial gravitacional del objeto en consideración mediante el uso de datos observacionales. Como ejemplo, debe mencionarse el método que determina el grosor de las galaxias espirales a través de la solución de la ecuación de Poisson [94] y [95]. Desafortunadamente, todas estas soluciones tratan casos muy particulares de la función de distribución de densidad y, por esta razón, existen algunas restricciones en la aplicación de estos modelos a galaxias reales. El modelo de Peng [94] y [95], por ejemplo, se basa en la distribución

de densidad de Parenago a lo largo de la dirección en z , como $\rho_h(z) \sim \exp(-\alpha|z|)$ (en este trabajo los autores suponen que la función de distribución de densidad se puede factorizar, es decir; $\rho(r, \phi, z) = \rho_\sigma(r, \phi)\rho_h(z)$). Pero esta función no puede considerarse una opción satisfactoria, porque no tiene una derivada definida en el plano de la galaxia $z = 0$, y además se puede obtener de la fórmula barométrica ($\rho_h(z) = \frac{P_0 M T_0}{M_0 T} e^{-\frac{Mgz}{RT}}$) que supone la presencia de una masa gravitacional constante para $z < 0$. Como se puede ver, no es del todo correcto en el caso de una galaxia, donde el potencial gravitacional en un punto particular se define por la distribución de densidad que a su vez no debería escribirse a partir de la relación barométrica. Por estas razones, el modelo mencionado anteriormente debe generalizarse.

Otra aplicación importante que conduce al problema en consideración es el cálculo del potencial gravitacional y el campo de velocidades de las estrellas en presencia de la llamada materia oscura (ver por ejemplo [96]). Al tener en cuenta la gran relevancia que los fenómenos de materia oscura producen para la física teórica moderna, se hace evidente la necesidad de una solución analítica precisa de la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional de un elipsoide oblatado delgado, caracterizado por una función de distribución de densidad más sofisticada.

Hasta ahora, las soluciones de problemas de Poisson han sido sugeridas para una clase bastante pequeña de las funciones de distribución de densidad. El propósito del presente trabajo es llenar este vacío y sugerir la función de Green para el problema de Poisson para el caso más general de una función de distribución de densidad arbitraria.

Por un lado, se tiene el interés en la distribución de materia oscura, la solución final es aproximadamente independiente de la estructura en espiral de la galaxia, por lo que la variable angular puede omitirse en una primera aproximación como insignificante [96]. Por otro lado, la solución $2D$ es importante porque aparece en muchas aplicaciones. Teniendo en cuenta todo lo mencionado anteriormente, se considerará el problema $2D$ debido a su gran importancia.

En el presente trabajo resolvemos el problema $2D$ de Poisson en coordenadas cilíndricas utilizando la técnica de transformación integral finita (*TTIF*) [97], [98], [99], [100], [101], [102], [103], [104], [105], [106], [107], desarrollada por primera vez por Grinberg en [97], (en este documento se denomina este método como el método de Grinberg). La solución final se presenta como una expansión de las funciones propias del problema de Sturm-Liouville correspondiente. Se construye la función de Green del problema.

El método más utilizado para dicho cálculo se basa en el potencial de Miyamoto-Nagai [87] (ver también [108],[109],[110]). La densidad de Miyamoto-Nagai se usa para estudiar galaxias de disco. Un enfoque de esta densidad se presentó anteriormente [91], [92].

Gracias a este enfoque, en la siguiente subsección se puede calcular el potencial gravitacional y posteriormente se podrá encontrar la curva de rotación para la Vía Láctea en la subsección 9.2.2.

9.2.1. Potencial Gravitacional de Galaxias de Disco

Considere un objeto simétrico, plano, giratorio, con forma de disco, caracterizado por la distribución de densidad $\rho(r, \phi, z)$. En este caso la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = \varkappa \rho$ en coordenadas cilíndricas, para un potencial gravitacional u es [2]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \varkappa \rho(r, \phi, z) \quad (9.29)$$

donde $\varkappa = 4\pi G$.

Como se mencionó anteriormente, la estructura espiral de la galaxia es aproximadamente despreciable en los problemas mencionados anteriormente (la variación de la velocidad de las estrellas debido a la presencia de la estructura espiral es más de un orden de magnitud menor en comparación con su valor no perturbado [96]) y por esta razón aquí se puede considerar solo dos variables r y z , estableciendo que hay simetría con respecto al eje de rotación. En este caso la ecuación de Poisson se convierte en [2]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \varkappa \rho(r, z), \quad (9.30)$$

donde $\rho(r, z)$ es la densidad superficial de materia.

Esta ecuación también está sujeta a las siguientes condiciones de frontera [2]:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{V_0^2}{a} g(z) \quad (9.31)$$

y

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. u \right|_{z=\infty} < \infty, \quad (9.32)$$

(en estas condiciones de frontera se puede observar que las fuerzas están en equilibrio) donde V_0 es la velocidad medida experimentalmente de las estrellas ubicadas a una distancia a del centro de la galaxia y $g(z)$ es la función del Heaviside (función discontinua cuyo valor es 0 para cualquier argumento negativo, y 1 para cualquier argumento positivo, incluido el cero: $g(z) = 0$ si $x < 0$ y $g(z) = 1$ si $x \geq 0$). Para resolver el problema descrito en las ecuaciones (9.30), (9.31) y (9.32), el método de Grinberg (o Método de Transformadas Integrales Finitas) [97], [98], [99], [100], [101], [102], [103], [104], [105], [106], [107], es aplicado. Para ser aplicado, primero se debe definir y resolver el problema de Sturm-Liouville (SLP) y el método de separación de variables, para obtener el conjunto completo de funciones propias con las que se puede expandir la solución final. La ecuación homogénea correspondiente se escribe como [2]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\lambda. \quad (9.33)$$

Sea $u(r, z) = R(r)Z(z)$, en este caso se obtiene el correspondiente SLP para $R(r)$ lo que permite obtener la ecuación de Bessel [2]:

$$(rR')' + \lambda rR = 0, \quad (9.34)$$

que cumple con las condiciones de contorno homogéneas [2]:

$$R' \Big|_{r=0} = 0 \quad ; \quad R' \Big|_{r=a} = 0. \quad (9.35)$$

Notamos aquí que el SLP basado en $Z(z)$ no es regular y por esta razón el problema (9.34) y (9.35) debe ser favorecido. Como se puede ver, la ecuación (9.34) y las condiciones de contorno (9.35) forman el SLP. Para eigenvalor con $n = 0$ se tiene la solución [2]:

$$\lambda_0 = 0 \quad ; \quad R_0 = 1. \quad (9.36)$$

En el caso cuando el valor propio $\lambda \neq 0$, obtenemos la ecuación de Bessel, que tiene la solución radial para este problema expresada con funciones de Bessel [2]:

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2 \quad ; \quad R_n = J_0(\sqrt{\lambda_n}r), \quad (9.37)$$

donde las raíces $\gamma_n = (\sqrt{\lambda_n}a)$ satisfacen la siguiente ecuación trascendente [2]:

$$J_1(\gamma_n) = 0. \quad (9.38)$$

Para conveniencia del lector, también se escriben aquí los valores absolutos de las funciones propias, que respetan la condición de ortogonalidad [2]:

$$\|R_n\|^2 = \int_0^a R_n R_n r dr, \quad (9.39)$$

donde $\|R_n\|$ representa la norma de R_n . Para el eigenvalor $n = 0$ se tiene [2]

$$\|R_0\|^2 = \frac{a^2}{2}, \quad (9.40)$$

y para $n \neq 0$ estos valores [2]

$$\|R_n\|^2 = \frac{a^2}{2} J_0^2(\gamma_n). \quad (9.41)$$

Las funciones propias del problema de Sturm-Liouville (9.34) y (9.35) forman un conjunto completo de funciones en el espacio de Hilbert. Por esta razón, si la función $u(r, z)$ cumple con la condición de Dirichlet dentro del intervalo $[0, \alpha]$, puede expandirse la serie de Dini [111] como:

$$u(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z) R_n(r) = C_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z) J_0(\sqrt{\lambda_n}r), \quad (9.42)$$

donde

$$C_n(z) = \frac{\bar{u}_n(z)}{\|R_n\|_r^2}, \quad (9.43)$$

y la función potencial transformada $\bar{u}_n(z)$ es dada por la integral [2]

$$\bar{u}_n(z) = \int_0^a u(r, z) R_n(r) r dr. \quad (9.44)$$

Para encontrar la función potencial transformada $\bar{u}_n(z)$, de acuerdo con el método de Grinberg, se debe transformar la ecuación inicial (9.30) y las condiciones de contorno (9.31) y (9.32). Las ecuaciones transformadas se pueden obtener utilizando las condiciones de contorno (9.31), (9.32) y (9.35). Se pueden escribir de la siguiente manera [2]:

$$\frac{d^2 \bar{u}_n(z)}{dz^2} - \lambda_n \bar{u}_n(z) = F_n(z), \quad (9.45)$$

donde

$$F_n(z) = \varkappa \rho_n(z) + V_0^2 J_0(\gamma_n) g(z), \quad (9.46)$$

y la densidad superficial transformada $\rho_n(z)$ es determinada por la relación [2]

$$\rho_n(z) = \int_0^a \rho(r, z) R_n r dr. \quad (9.47)$$

Las condiciones de frontera transformadas son [2]:

$$\bar{u}_n|_{z=\infty} < \infty \quad ; \quad \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial z}|_{z=0} = 0. \quad (9.48)$$

La ecuación (9.45) debe cumplir con las condiciones de frontera (9.48) para que el problema obtenga la función potencial transformada $\bar{u}_n(z)$ [2].

Ahora debería considerarse dos casos particulares. El primero corresponde al valor propio cero, cuando $n = 0$, $\lambda_0 = 0$ y $R_0 = 1$. En este caso la ecuación (9.44) se convierte en $\bar{u}_0''(z) = F_0(z)$ [2].

Al tener en cuenta la simetría del problema con respecto a la variable z , se puede escribir la solución de la ecuación $\bar{u}_0''(z) = F_0(z)$ que satisface las condiciones de contorno (9.48) [2]:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(z) &= 4 \int_0^z \int_0^{z'} F_0(z'') dz'' dz' + B_0 \\ &= 4\varkappa \int_0^z \int_0^{z'} \int_0^a \rho(r, z'') r dr dz'' dz' + 4V_0^2 \int_0^z \int_0^{z'} g(z'') dz'' dz' + B_0, \end{aligned} \quad (9.49)$$

donde B_0 es una constante de integración con unidades de altura [2].

Considere ahora el caso cuando $n \neq 0$ i.e. $\lambda_n \neq 0$. La solución de la ecuación (9.45) puede ser escrita como [2]:

$$\bar{u}_n(z) = D_1(z) e^{-\sqrt{\lambda_n} z} + D_2(z) e^{\sqrt{\lambda_n} z}, \quad (9.50)$$

donde $e^{\sqrt{\lambda_n} z}$ y $e^{-\sqrt{\lambda_n} z}$ son soluciones generales de la correspondiente ecuación homogénea [2]

$$\frac{d^2 \bar{u}_n(z)}{dz^2} - \lambda_n \bar{u}_n(z) = 0, \quad (9.51)$$

y los coeficientes $D_1(z)$ y $D_2(z)$ son funciones que pueden ser determinadas. Las funciones $D_1(z)$ y $D_2(z)$ puede ser obtenidas calculando un wronskiano para $e^{\sqrt{\lambda}z}$ y $e^{-\sqrt{\lambda}z}$ de la forma [2]:

$$D_1(z) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^z F_n(z') e^{\sqrt{\lambda_n} z'} dz' \quad (9.52)$$

y

$$D_2(z) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^z F_n(z') e^{-\sqrt{\lambda_n} z'} dz'. \quad (9.53)$$

Por lo tanto, la solución al problema para resolver la ecuación (9.45) considerando las condiciones de frontera (9.48) para el caso $\lambda_n \neq 0$ i.e. $n \neq 0$ pueden escribirse como [2]:

$$\bar{u}_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \left[e^{\sqrt{\lambda_n} z} \int_0^z F_n(z') e^{-\sqrt{\lambda_n} z'} dz' - e^{-\sqrt{\lambda_n} z} \int_0^z F_n(z') e^{\sqrt{\lambda_n} z'} dz' \right], \quad (9.54)$$

donde $F_n(z')$ es dada por (9.46), y [2]

$$\rho_n(z) = \int_0^a \rho(r, z) R_n(r) r dr. \quad (9.55)$$

Gracias a todo lo anterior, ahora es posible construir una función de Green y escribir la expresión final para el potencial gravitacional $u(r, z)$. La solución del problema en consideración descrito por la ecuación (9.30) y las condiciones de contorno (9.31) y (9.32), se pueden escribir de la siguiente manera [2]:

$$u(r, z) = \bar{u}_0(z) \frac{R_0}{\|R_0\|_r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(z) \frac{R_n(r)}{\|R_n(r)\|_r^2}. \quad (9.56)$$

Sustituyendo (9.36), (9.37), (9.40), (9.41), (9.49) y (9.55) en (9.56) se puede obtener la solución general del problema [2]:

$$u(r, z) = \frac{8}{a^2} \int_0^z \int_0^{z'} F_0(z'') dz'' dz' + \frac{2B_0}{a^2} + \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(z) \frac{J_0(\sqrt{\lambda_n} r)}{J_0^2(\gamma_n)}, \quad (9.57)$$

donde $\bar{u}_n(z)$ es dada por la relación (9.54) [2].

La expresión (9.57) describe el potencial gravitacional para una galaxia espiral en el caso de una distribución de densidad $\rho(r, z)$ [2].

Con esto ahora se procederá en la siguiente sección a encontrar la curva de rotación para una galaxia de disco.

9.2.2. Curva de Rotación

A partir de la expresión para el potencial gravitacional (9.57), se puede obtener la curva de rotación de una galaxia de disco:

$$V^2(r) = \frac{2r}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \bar{u}_n(z) \frac{J_1(\sqrt{\lambda_n} r)}{J_0^2(\gamma_n)}. \quad (9.58)$$

La expresión (9.58) obtenida para la curva de rotación permite calcular los valores indicados para cualquier distribución arbitraria de la materia en las galaxias. Este resultado es nuevo y fue publicado precisamente en la cita ya mencionada anteriormente [1].

Para ilustrar cómo funciona esto en la práctica apliquemos estas expresiones en un caso concreto.

Recientemente, se ha propuesto una función de distribución de la densidad, que se factoriza $\rho(r, z) = \rho_r(r)\rho_h(z)$ y tiene una forma bastante simple [15]:

$$\rho(r, z) = \frac{10^{10} M_{\odot}}{(\gamma t^2 + 1)^{3/2}} \sum_{k=1}^{k'} \frac{\alpha_k}{(\beta_k x^2 + 1)^{3/2}}, \quad (9.59)$$

donde γ , α_k , β_k son parámetros de aproximación, $x = r/a$, $t = z/z_0$ son variables adimensionales y el parámetro z_0 es la **escala de altura** del disco. Utilizando esta función de densidad, podemos integrar analíticamente las expresiones (9.54) y (9.55). Integrando sobre z y sustituyendo estos resultados en (9.58) se obtiene:

$$V^2(r) = \frac{2r}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (E_n^- - E_n^+) \left(\frac{J_1(\sqrt{\lambda_n} r)}{J_0^2(\gamma_n)} \right), \quad (9.60)$$

donde los coeficientes E_n^+ and E_n^- son:

$$E_n^+ = \frac{e^{\sqrt{\lambda_n} z_0}}{\sqrt{\lambda_n}} \left(\varkappa \rho_{rn}(a) \gamma^n \binom{-3/2}{n} [(\sqrt{\lambda_n} z_0)^{-2n-1} \Gamma((2n+1), \sqrt{\lambda_n} z_0) + (e^{-\sqrt{\lambda_n} z_0} - 1) V_0^2 J_0(\gamma_n)] \right) \quad (9.61)$$

$$E_n^- = \frac{e^{-\sqrt{\lambda_n} z_0}}{\sqrt{\lambda_n}} \left(\varkappa \rho_{rn}(a) \gamma^n \binom{-3/2}{n} [(-\sqrt{\lambda_n} z_0)^{-2n-1} \Gamma((2n+1), -\sqrt{\lambda_n} z_0) - (e^{\sqrt{\lambda_n} z_0} - 1) V_0^2 J_0(\gamma_n)] \right) \quad (9.62)$$

y

$$\rho_{rn}(a) = \int_0^a \rho_r(r) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) r dr. \quad (9.63)$$

Aquí $\rho_r(r)$ es la parte radial de la distribución de densidad (9.59):

$$\rho_r(r) = 10^{10} M_{\odot} \sum_{k=1}^{k'} \frac{\alpha_k}{(\beta_k x^2 + 1)^{3/2}}. \quad (9.64)$$

En este caso, el coeficiente $\rho_{rn}(a)$ puede escribirse como:

$$\rho_{rn}(a) = 10^{10} M_{\odot} \int_0^a \sum_{k=1}^{k'} \frac{\alpha_k}{\left(\beta_k \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1\right)^{3/2}} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) r dr. \quad (9.65)$$

Expandiendo la función de Bessel en una serie e integrando, obtenemos los siguientes coeficientes:

$$\rho_{rn}(a) = \frac{10^{10} M_{\odot}}{a^2} \sum_{k=1}^{k'} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{\gamma_n}{2\sqrt{\beta_k}}\right)^{2m} \sum_{0 \leq l \leq m} \binom{m}{l} \frac{(-1)^{l+1} (\beta_k x^2 + 1)^{l-\frac{1}{2}}}{(1-2l)} \Big|_{x=0}^{x=1} \quad (9.66)$$

La expresión resultante en (9.60) da la curva de rotación para la distribución de densidad de la forma más general (9.66) en forma de una expansión en términos de funciones de Bessel de primera especie $J_1(\sqrt{\lambda_n} r)$.

Para calcular la curva de rotación de la Galaxia, adoptamos los coeficientes de [45]: $\gamma = 30$, $\alpha_1 = 0,2317$, $\beta_1 = 0,112$, $\alpha_2 = 6,358$, $\beta_2 = 28,8$, $\alpha_3 = 7,005$ y $\beta_3 = 1440$. El valor de la escala de altura $z_0 = 2 \text{ kpc}$ se adoptó para la Vía Láctea [18]. El resultado de los cálculos se muestra en la figura 9.6.

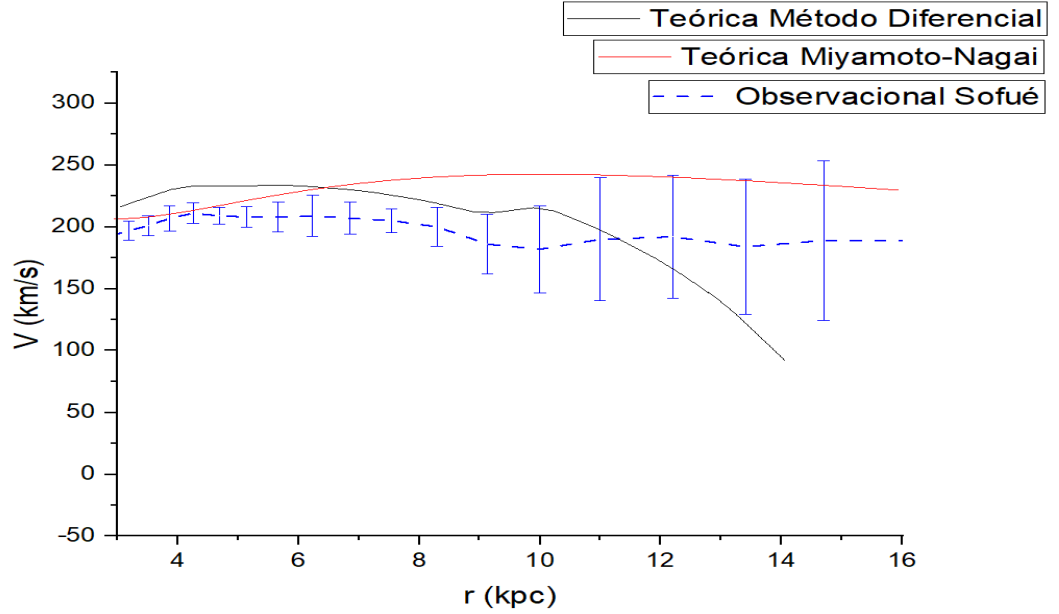


Figura 9.6: Curva de rotación de la Galaxia calculada con la expresión (9.60) (línea sólida) y la medida (círculos abiertos con barras de error) del trabajo Sofué [42].

En la figura 9.6, comparamos nuestra curva de rotación calculada de la Galaxia (ver expresión (9.60)) con la curva de rotación teórica obtenida por Miyamoto y Nagai y con la curva de rotación observacional publicada por Sofué en [43].

Para la curva de rotación mostrada en la figura 9.6 la comparación de la variación se obtiene para diferentes valores, ya que la desviación de la curva es mucho mayor:

Para un valor del radio de 10 kpc :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\ &= \left| \frac{220 \frac{km}{s} - 180 \frac{km}{s}}{220 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 22,22 \%. \end{aligned} \quad (9.67)$$

Para un valor del radio de 11 kpc :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\ &= \left| \frac{190 \frac{km}{s} - 200 \frac{km}{s}}{200 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 5 \%. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Para un valor del radio de 12 kpc :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\ &= \left| \frac{180 \frac{km}{s} - 190 \frac{km}{s}}{190 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 5,26 \%. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Para un valor del radio de 13 kpc :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\ &= \left| \frac{150 \frac{km}{s} - 190 \frac{km}{s}}{190 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 21,05 \%. \end{aligned} \quad (9.70)$$

Para un valor del radio de 14 kpc :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\ &= \left| \frac{85 \frac{km}{s} - 190 \frac{km}{s}}{190 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 55,26 \%. \end{aligned} \quad (9.71)$$

para estos valores de error porcentual es posible encontrar un valor promedio que es $\epsilon = 21.758 \%$.

Es posible de igual manera que en la sección anterior encontrar la curva de rotación teórica semilogarítmica y compararla respecto a la curva de rotación teórica encontrada por Miyamoto y Nagai y la curva de rotación observacional reportada por Sofué.

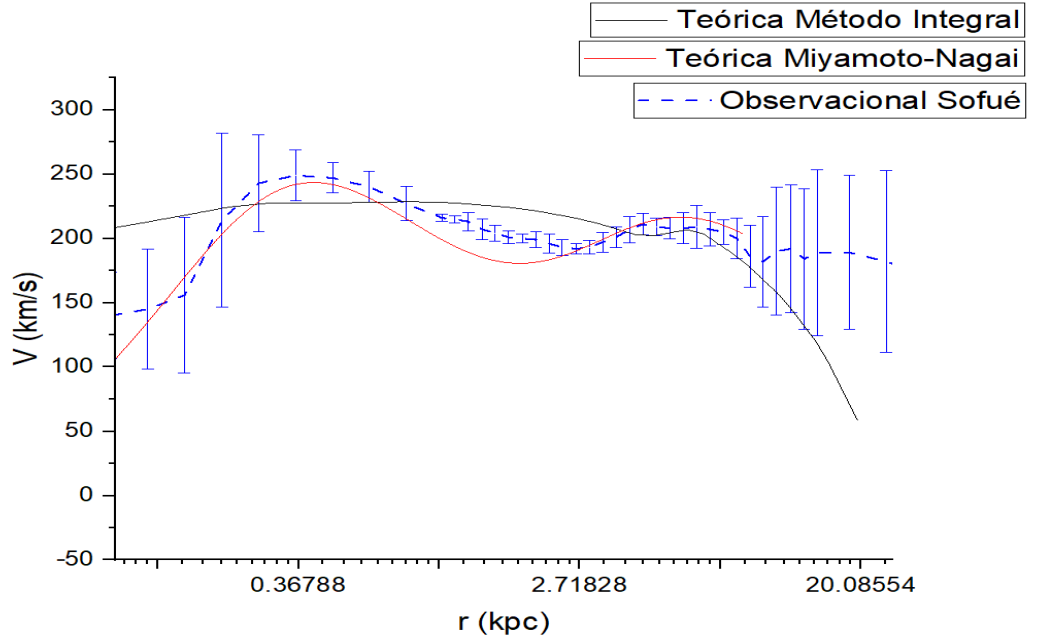


Figura 9.7: Curva de rotación de la Galaxia calculada con la expresión (9.60) (línea sólida) y la medida (círculos abiertos con barras de error) del trabajo Sofue [42].

Este resultado refleja la desviación del comportamiento para la curva de rotación teórica de este trabajo (línea continua en negro) comparada con la curva de rotación teórica de Miyamoto y Nagai (línea continua en rojo) y la observacional de Sofué (línea punteada en azul con barras de error).

Para la curva de rotación semilogarítmica se realizan los mismos calculos del error de la siguiente manera:

Para un valor del radio de 10 kpc :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\
 & = \left| \frac{200 \frac{km}{s} - 201 \frac{km}{s}}{201 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 0,4975 \%.
 \end{aligned} \tag{9.72}$$

Para un valor del radio de 11 kpc :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\
 & = \\
 & \left| \frac{180 \frac{km}{s} - 190 \frac{km}{s}}{190 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 5,26 \%.
 \end{aligned} \tag{9.73}$$

Para un valor del radio de 12 kpc :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\
 & = \left| \frac{150 \frac{km}{s} - 190 \frac{km}{s}}{190 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 21,05 \%.
 \end{aligned} \tag{9.74}$$

Para un valor del radio de 13 kpc :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\ & = \left| \frac{145 \frac{km}{s} - 190 \frac{km}{s}}{190 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 23,68 \%. \end{aligned} \tag{9.75}$$

Para un valor del radio de 14 kpc :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_{CR-Teórica} - V_{CR-Observada(Sofué)}}{V_{CR-Observada(Sofué)}} \right| \times 100 \% \\ & = \left| \frac{100 \frac{km}{s} - 170 \frac{km}{s}}{170 \frac{km}{s}} \right| \times 100 \% = 41,18 \% \end{aligned} \tag{9.76}$$

para estos valores de error porcentual es posible encontrar un valor promedio que es $\epsilon = 18.33 \%$.

Mientras que las curvas de rotación observacional de Sofué y teórica de Miyamoto y Nagai se mantiene constante para valores mayores a 10 kpc en la curva de rotación teórica de este trabajo su comportamiento decae. Esto es así, ya que el método empleado en esta sección llevó a construir un código numérico para encontrar dicha curva; ya que las ecuaciones para la curva de rotación (9.60) y para la función de densidad (9.66) presentan varias series matemáticas y una combinación de funciones exponenciales, factoriales, funciones gamma, coeficientes binomiales y funciones de Bessel; la capacidad y precisión del código para tratar con la convergencia de las series llevó también a este error en el comportamiento de nuestra curva de rotación teórica, por lo que se considera que debe emplearse un código más robusto y preciso, o con un lenguaje diferente que tenga una mayor capacidad para encontrar soluciones mejor aproximadas fuera de las zonas donde la curva de rotación teórica no se ajusta a los datos de la curva de rotación observacional.

Como se ha mencionado anteriormente, el método aplicado se basa en un problema de valor de frontera. Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales y sus soluciones sólo funcionan correctamente dentro del intervalo seleccionado para la frontera especificada. En este trabajo, el intervalo de la frontera de cálculo se eligió desde $r = 0,00112$ kpc hasta 15 kpc.

Como se puede observar, la curva de rotación tórica obtenida coincide para un rango de $r = 4$ kpc a $r = 10$ kpc respecto a la curva de rotación teórica de Miyamoto y Nagai y la curva observacional de Sofué dentro de las barras de error con las observaciones en el área interna $R < R_0 \approx 15$ kpc. Mientras que, al mismo tiempo, hay una discrepancia para la parte externa del disco, esto permite encontrar un sustituto físico para el potencial tipo Miyamoto-Nagai como el de la ecuación (9.57) [2].

Como un dato adicional, en la siguiente sección se mostrará un cálculo de la masa bariónica total para la Vía Láctea.

9.3. Masa Bariónica en Galaxias de Disco

Anteriormente, se calculó una evaluación de la masa bariónica total de una galaxia [91]. Para el modelo de distribución de la densidad aproximada tipo Miyamoto-Nagai, al integrar (9.59) obtenido en el trabajo [91]:

$$M_G = 4\pi 10^{10} M_\odot \sum_k \left(1 - \frac{1}{(\beta_k a^2 + 1)^{1/2}} \right). \quad (9.77)$$

Aquí, se reemplazaron los parámetros para un mejor ajuste de la curva de rotación observada (línea continua), y se usó un parámetro $a = 15$ kpc para la galaxia (debe notarse aquí que el parámetro a afecta débilmente la masa calculada) [91], con esto se pudo obtener la masa bariónica de nuestra galaxia $M_G = 23 \times 10^{10} M_\odot$ que arroja un error calculado de $\epsilon = 9,69\%$ respecto al resultado de Miyamoto-Nagai $M_G = 25,47 \times 10^{10} M_\odot$ [87], [108].

Como es sabido, se puede reducir al problema de Poisson en coordenadas cilíndricas. Desgraciadamente, las soluciones disponibles actualmente son engorrosas y se han obtenido para un pequeño número de funciones de distribución específicas, mientras que para una función de distribución de masa arbitraria tal solución no existe, y sólo pueden aplicarse cálculos numéricos.

En este trabajo, hemos obtenido una solución analítica del problema de Poisson en coordenadas cilíndricas para una función de distribución de masa arbitraria tanto en radio como en altura. La función de Green correspondiente se obtiene por el método de Grinberg [22] (el método de las transformadas integrales finitas). A partir de la solución analítica obtenida, se calcula una expresión para la correspondiente curva de rotación de una galaxia espiral.

Como ejemplo de la aplicabilidad de la solución encontrada, la utilizamos para calcular la curva de rotación de la Vía Láctea y comparar los resultados obtenidos resultados con la curva de rotación observada.

En este capítulo se consideró el problema de Poisson en coordenadas cilíndricas, que a menudo surge en el cálculo del potencial gravitatorio de las galaxias espirales.

Mediante la técnica de transformación integral finita, se obtiene una solución analítica de la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional para una función de distribución de masa arbitraria.

Como ejemplo, se han mostrado al principio del capítulo soluciones para funciones de densidad astrofísica ampliamente utilizadas, como lo son, las funciones de Plummer en la ecuación (9.2) y Toomre en la ecuación (9.4). Estas expresiones permiten evitar o reducir la complejidad de los cálculos, al permitir de manera sencilla la separación de variables.

El método de Grinberg es una forma nueva para encontrar el potencial gravitacional y la curva de rotación, sin embargo, la física es independiente del método empleado.

Pudo observarse que no obstante el método empleado para la curva de rotación mostrada en las figuras 9.8 y 9.9 presentó ciertas desventajas respecto al primer método,

ya que esta curva de rotación fue construida por un código numérico y la convergencia de las soluciones no pudo ser tratada de la manera correcta por dicho código debido a su precisión, esto provocó la discrepancia entre la curva de rotación teórica presentada en esta sección respecto a la teórica de Miyamoto y Nagai y la observacional de Sofúe como muestran las figuras.

En el siguiente capítulo, se describirá la hidrodinámica de galaxias de disco y su uso en diferentes simulaciones para encontrar las curvas de rotación de dichas galaxias.

Capítulo 10

Cinética del Gas en Galaxias de Disco

Anteriormente se habló de como la curva de rotación de las galaxias de disco puede construirse por medio de la teoría del potencial gravitacional. En este apartado se hablará de como la hidrodinámica (HD) de la galaxia contribuye a su velocidad de giro de la galaxia, esta puede ser expresada respecto al radio de la galaxia mediante de dicha curva de rotación.

Generalmente, la rotación que se observa para las galaxias de disco produce una fuerza centrípeta que se encuentra en equilibrio con la fuerza interior de la gravedad. Esto permite construir modelos para el estudio de la dinámica galáctica.

En el presente capítulo, se analiza cómo las propiedades físicas del gas afectan la curva de rotación de una galaxia espiral. La cinética del gas debe tenerse en cuenta para construir un modelo adecuado para la galaxia de disco. Se enfatiza que, si bien, aunque la parte interna de la curva de rotación está sujeta al potencial gravitacional, para la descripción correcta de la parte externa de la curva de rotación la propiedad de colisión del gas también debe tenerse en cuenta.

Para confirmar este hecho, se sugiere que la parte externa de la curva de rotación está relacionada con la densidad de gas del disco galáctico.

Se argumenta aquí que el enfoque hidrodinámico (HD) no es aplicado de manera correcta, para el modelado de la cinemática de gases a gran escala del disco galáctico. Para que las ecuaciones de la hidrodinámica y las ecuaciones de difusión sean aplicadas de la manera correcta es necesario considerar ciertas restricciones impuestas por la teoría cinética de los gases.

En principio, en este capítulo no estamos interesados en movimientos locales a pequeña escala, por el contrario, se necesita calcular la curva de rotación global de la parte externa de un disco galáctico.

Para modelar el disco de la galaxia, se debería tener en cuenta la cinética de los gases, ya que, si se descuida la influencia de la cinética de los gases en la formación de la curva de rotación, conduciría a un modelo puramente gravitacional del disco galáctico y sin tomar en cuenta la distribución del gas.

Gracias a esto, será posible observar que las desviaciones de las curvas de rotación para galaxias espirales se pueden explicar si se toma en cuenta la cinética del gas (en el capítulo anterior las curvas de rotación se estudiaron considerando el potencial gravitacional).

De hecho, para grandes distancias de la galaxia solo contribuye a la velocidad de rotación el viento del gas bariónico que sigue a la materia del interior del disco.

Debido a su importancia para comprender la curva de rotación de galaxias de disco, en la siguiente sección, se mencionarán algunos pocos aspectos sobre la dinámica e hidrodinámica de galaxias.

10.1. Dinámica de Galaxias

En el estudio de la dinámica de galaxias, se ha observado que a medida que aumenta la distancia desde el centro, la dispersión de velocidades de las estrellas también aumenta y alcanza valores considerables (aproximadamente a media distancia para nuestra galaxia, por ejemplo, esta distancia comienza desde 10 *kpc*). Por esta razón las estrellas del halo (la antigua población de una galaxia espiral) se mueven más lentamente que la población joven del disco.

Esto hace pensar que se debe considerar directamente para las ecuaciones de difusión deben implicar la contribución cinética de las colisiones de las partículas que se encuentran presentes en el flujo de gas. Esto conlleva a que la densidad del gas (para una columna de densidad) también tenga influencia en las curvas de rotación. Es más, por esta razón se observa que la cinética del gas debería dominar en la contribución de las curvas de rotación de las galaxias espirales a grandes distancias.

En el caso de movimientos a gran escala y densidades de gas extremadamente bajas en la parte externa del disco que nos interesa. Es usual que las ecuaciones hidrodinámicas no sean aplicadas considerando el enfoque de las ecuaciones cinéticas de los gases.

Se sabe que en las observaciones se mide la columna de densidad, mientras que la función de densidad del gas depende del modelo. Por esta razón, se calculará la columna de densidad en la sección 10.5.

En el disco de la galaxia el gas ejerce una presión que disminuye con el radio y esto hace que la galaxia experimente una fuerza adicional.

Dalcanton y Stilp en su trabajo [132] mencionan que, en los discos realistas de galaxias, al disminuir la presión del gas con el radio, se observa un soporte radial adicional a la velocidad del disco. Gracias a esto, la velocidad de rotación tangencial medida tenderá a retrasar la verdadera velocidad circular del gas.

En su trabajo Dalcanton y Stilp mencionan que la presión del gas está dominada por la turbulencia, esta es impulsada continuamente por vientos y supernovas estelares. Los autores mostraron que donde la amplitud de la curva de rotación es comparable a las velocidades características de la turbulencia interestelar, el soporte de presión puede llevar a subestimar la densidad de masa del halo de materia oscura subyacente y la pendiente interna de su perfil de densidad. Estos efectos pueden ser significativos

para galaxias con velocidades de rotación $\lesssim 75 \text{ kms}^{-1}$, pero es poco probable que sea significativo en galaxias de mayor masa. Encontramos que el soporte de presión puede sostenerse en escalas de tiempo largas, porque cualquier reducción en el soporte debido a la conversión de gas en estrellas se compensa con un flujo de gas hacia adentro [132]

La fuente de soporte de presión final, y probablemente la más dominante, proviene de la turbulencia interestelar. Esta turbulencia es probablemente impulsada continuamente por vientos y supernovas estelares, aunque la fuente exacta está bajo cierto debate, y se cree que otros mecanismos de conducción pueden tomar el control en regiones donde la tasa de formación de estrellas es baja [132].

El soporte de presión en un disco estable de galaxias depende de las propiedades de la turbulencia interestelar. Se piensa que esta turbulencia es impulsada por varias formas de retroalimentación estelar (vientos, super novas estelares, etc.), que inyectan energía en el ISM en un rango de escalas físicas. Esta energía se conecta en cascada a un amplio rango de escalas, formando un amplio espectro de energía de energías turbulentas. La presión que resulta de la turbulencia depende, por lo tanto, de la suma de energía cinética en un amplio rango de escalas de longitud [132].

Cualquier reducción en el soporte debido a la conversión de gas en estrellas se compensa con un flujo de gas hacia adentro. Para el análisis de estas propiedades del gas (dispersión de la velocidad σ , densidad ρ y presión P) suelen estar dentro del campo de estudio de la termodinámica y de la hidrodinámica (HD), de donde parten las ecuaciones utilizadas para el estudio de estos sistemas.

Por todas estas razones, en la sección 10.4 de este capítulo se describirán algunas propiedades del comportamiento del fenómeno observado para las galaxias del soporte de presión descrito en los trabajos mencionados anteriormente.

En la sección 10.3 se dará una breve introducción sobre el equilibrio de fuerzas encontrado en las galaxias de disco; en este equilibrio de fuerzas actúan las fuerzas de presión, la fuerza de la gravedad y la fuerza centrípeta.

Para la fuerza del soporte de presión, es posible emplear una presión debida a la turbulencia (que está en función de la velocidad del gas). No obstante, nosotros señalaremos también en la sección 10.3, que dicha presión turbulenta ha sido empleada de forma incorrecta por algunos trabajos ya que ha sido utilizada para algunos sistemas que son descritos como gases ideales.

Aunque cabe mencionar, que esta presión turbulenta se ve disminuida de manera radial para el disco por la formación de estrellas; lo que contribuye en la evolución de la presión ejercida por el gas en el disco y disminuye la fuerza centrípeta de la galaxia, retrasando la velocidad circular real para una partícula de prueba. El problema que señalamos no consiste en el hecho de que Dalcanton y Stilp [132] consideraran la turbulencia, sino que esta misma fue considerada considerando la ley de Dalton para las presiones parciales, la cual se usa para mezcla de gases ideales (es decir, no presentan turbulencia).

Si la densidad del gas en la zona exterior de la galaxia es extremadamente baja, esta densidad se encuentra en el rango en el que las longitudes características L_K para un elemento de volumen son mucho más grandes que la longitud de camino libre medio

l_{fp} significativas. Esto conlleva a que no se cumpla la siguiente restricción

$$L_k \gg l_{fp}. \quad (10.1)$$

aquí L_k se conoce como la longitud característica (para sistemas macroscópicos en los que L_k es mayor a la distancia media intermolecular del gas \bar{r} , es decir $L_k \gg \bar{r}$).

Pero esta restricción anterior debe considerarse para que la aplicación de las ecuaciones cinéticas pueda ser utilizada para derivar de ellas las ecuaciones HD y usar correctamente la restricción dada en la ecuación 10,1.

Por ejemplo, la densidad típica de las partes externas del disco es $\rho = 10^{-3} - 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$ que conducen a una longitud de camino libre medio del rango de valores de $l_{fp} = 3 - 30 \text{ pc}$.

Por esta razón, el enfoque puramente hidrodinámico se vuelve inapropiado (por lo que debe partirse de la cinética física), ya que las longitudes características L_k en las que los valores (densidad ρ , temperatura T , presión P , etc.) cambian considerablemente y se vuelven comparables o incluso menores que l_{fp} .

Se hará en la sección 10.4 una descripción de cómo obtener las ecuaciones de Euler a través de la ecuación de Boltzman. También se darán argumentos de porque la aplicabilidad y validez de estas ecuaciones no es correcta para el uso del código FLASH y para las simulaciones que se han realizado en estudios anteriores.

En la sección 10.6 se construirán curvas de rotación de galaxias usando la ecuación de difusión y ecuaciones que representan las columnas de densidad.

Para finalizar se da una breve discusión en la sección 10.7 donde se habla de diversos trabajos de simulaciones numérica con la finalidad de dar mayor validez al análisis descrito en este trabajo y para finalizar se describen las conclusiones y comentarios finales.

En la siguiente sección se darán estimaciones importantes para este capítulo, especialmente para el valor de camino libre medio l_{fp} valido para la densidad de gas en un disco galáctico.

10.2. Estimaciones Importantes

Como se mencionó anteriormente, hay dos componentes muy diferentes de la población de galaxias: estrellas y gas, su contenido se infiere al medir la velocidad de rotación de la galaxia. El primer componente es impulsado solo por el potencial de gravitación, mientras que para describir el segundo debemos tener en cuenta las colisiones y la cinética del gas. Para confirmar este hecho, se van a evaluar algunos parámetros del gas.

Una estimación aproximada del tiempo medio de trayectoria de camino libre medio para un átomo de hidrógeno $t_{fp} = (N\sigma V_t)^{-1}$ (aquí N es la densidad del gas en cm^{-3} , la cantidad $\sigma = \pi a_0$ es la sección transversal de colisión elástica y V_t es la velocidad térmica media del átomo) da $t_{fp} \approx 1,3 \cdot 10^{10}/N \text{ (seg)} = 4,1 \cdot 10^2/N \text{ (años)}$.

Sin embargo, el gas intergaláctico, así como la componente de gas caliente del disco de las galaxias espirales está ionizado. Cuando dos partículas cargadas chocan, una medida del radio de colisión es la distancia perpendicular, b , entre la partícula más lenta y la trayectoria original de la partícula más rápida. Si Z_1e y Z_2e son las dos cargas, entonces este parámetro de impacto es

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{M_1 V_1^2 \tan(\phi/2)} \quad (10.2)$$

donde M_1 y V_1 son, respectivamente la masa y la velocidad de la carga más rápida, y ϕ es el ángulo de desviación. Bajo condiciones de equilibrio térmico a la temperatura, T , la velocidad media cuadrática, V_{rms} , es dada por:

$$V_{rms} = \left(\frac{3kT}{M}\right)^{1/2}. \quad (10.3)$$

Para un gas compuesto mayoritariamente por partículas neutras, las ecuaciones (10.1), (10.2) y (10.3) dan la trayectoria de camino libre medio

$$l \approx \frac{M^2 V^4}{N_e Z^2 e^4} \quad (10.4)$$

donde N_e es la densidad del electrón libre, y una colisión efectiva es asumida como uno para la que el ángulo de desviación es de 90° .

Cuando un gas está compuesto mayoritariamente por partículas cargadas, existe un parámetro de impacto dado por

$$b_m = R_D = \left(\frac{kT}{4\pi N_e e^2}\right)^{1/2} \quad (10.5)$$

donde R_D es el radio de Debye, k es la constante de Boltzmann, T es la temperatura y N_e es la densidad de electrones. En este caso, el parámetro de impacto debe integrarse en su rango de valores, para estimar el camino libre medio del protón como en los trabajos de [135] y [136]:

$$l_{fp} = \frac{m^2 V_{rms}^4}{z_1^2 z_2^2 N_e e^4 \ln \Lambda} \approx \frac{3,2 \cdot 10^6 T^2}{z_1^2 z_2^2 N_e e^4 \ln \Lambda} \quad (10.6)$$

donde:

$$\Lambda = \frac{R_D}{b} = \frac{3}{2Z_1 Z_2 e^3} \left(\frac{k^3 T^3}{\pi N_e}\right)^{1/2} = 1,3 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{T^3}{N_e}} \approx 2 \cdot 10^{11}, \quad (10.7)$$

entonces $\ln \Lambda = 26$, la trayectoria de camino libre medio del protón es $l_{fp}^* = 10^{16} \text{ cm}$ para la temperatura $T = 3000 \text{ K}$. En este caso, el tiempo medio de camino libre se puede evaluar como $t_{fp}^* = l_{fp}^*/V_t = 10^{10} \text{ seg} = 3 \cdot 10^2 \text{ años}$. Como se puede ver, estos tiempos (t_{fp} o t_{fp}^*) son mucho más pequeños que el tiempo característico de la vida de la galaxia, por lo que se deben tener en cuenta las colisiones [136].

De la ecuación (10.6) se deduce que el camino libre medio para las colisiones de electrones con electrones es el mismo que el de las colisiones de protones con protones, siempre que los electrones y los protones tengan la misma temperatura cinética.

Por lo tanto, se puede ver que para la descripción del gas ubicado en la parte externa $R > R_{25} \gtrsim R_0$ del disco galáctico, se deben usar las ecuaciones de dinámica de gases completas para explicar las curvas de rotación observadas. Aquí R_0 denota una distancia a la zona de transición en la que la contribución de la cinética del gas en la formación de corrientes de viento (y, por lo tanto,) la curva de rotación comienza a dominar, en comparación con la causada por las leyes de Kepler [136].

Ahora bien, puede hacerse otra estimación para poder responder a la cuestión de porque el gas sigue la materia bariónica que cae para formar corrientes de viento [136].

Según las observaciones, sabemos que la materia bariónica de una galaxia tipo S se mueve a lo largo de una espiral (téngase en cuenta aquí que una galaxia no es un objeto estacionario. Tiene un comienzo, un final y evoluciona con el tiempo, consumiendo gas intergaláctico) [136].

En este caso, puede **imaginarse** a la materia bariónica subyacente como un **pistón** (materia bariónica en la parte interna $R < R_0$ del disco de la galaxia) que se mueve en el túnel espiral con paredes ideales (puede aplicarse las condiciones límite homogéneas en este caso particular), y que es seguido por el gas HI (en este caso no se consideran los procesos de formación de estrellas, que diluyen el componente del gas) [136].

La aceleración media del pistón para la galaxia típica puede ser evaluada aproximadamente como $\langle \omega \rangle = \Delta V / \Delta t = (200 \text{ Km/s}) / (10^9 \text{ años}) = 10^{-9} \text{ (cm/s}^2\text{)}$ [136].

Incluso en el peor de los casos de t_{fp} para un componente de gas neutro, se tiene $\Delta V = \langle w \rangle t_{fp} = 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{10} / N = 20 / N \text{ (cm/s)}$. Para la densidad típica $N = 10^{-3} \text{ (cm}^{-3}\text{)}$ se obtiene $\Delta V = 2 \cdot 10^4 \text{ (cm/s)} \ll Vt \approx 10^6 \text{ (cm/s)}$. Por lo tanto, se puede concluir que incluso el gas neutro seguirá al pistón si la densidad del gas es lo suficientemente alta $N(\text{cm}^{-3}) \geq 2 \cdot 10^{-5} \cdot (10^6 / V_t)$. Destacando aquí que esto puede explicar cualitativamente la gran variedad de formas de las curvas de rotación debido a su dependencia de la densidad del gas. A partir de esta estimación, se puede ver que cuando la densidad es pequeña ($N(\text{cm}^{-3}) \geq 2 \cdot 10^{-5} \cdot (10^6 / V_t)$), las corrientes de viento no se formarán y la curva de rotación correspondiente disminuirá y coincidirá con las leyes de Kepler [136].

Para concluir esta parte, se hace énfasis en que incluso en consecuencia con estas estimaciones, uno puede ver que el gas, impulsado por colisiones, seguirá la materia bariónica subyacente [136].

El gas en consideración forma una corriente de viento que sigue rígidamente la materia bariónica subyacente que, a su vez, es impulsada principalmente por la gravedad a distancias $R < R_0$. De esta manera, se puede explicar la ausencia de la curva de rotación de galaxias de tipo S en el universo temprano, informada por [137]. Es decir, la estimación aproximada de la distancia sobre la cual se extenderá la corriente del viento (o la misma curva de rotación) es $t \cdot V_t \approx 10^{10} \text{ años} \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 10^6 \approx 3 \cdot 10^{23} \text{ (cm)} = 100 \text{ kpc}$ [136].

Las variables termodinámicas como presión P , volumen V y temperatura T se en-

cuentran presentes en las ecuaciones HD, por tal motivo en la siguiente sección se hablará de las ecuaciones de estado de la termodinámica y como estas son usadas en algunas simulaciones astronómicas.

10.3. Termodinámica y Ecuaciones de Estado

Los modelos hidrodinámicos para sistemas astrofísicos usualmente necesitan incluir las relaciones entre las propiedades termodinámicas. Es necesario tener para estos modelos ecuaciones de estado que presenten de manera óptima y precisa la física de estos sistemas, como los sistemas estelares y galácticos.

Las galaxias de disco son sistemas dinámicos y por esta razón es deseable analizar las fuerzas en equilibrio que presentan y que ofrecen la presencia de movimiento circular en las galaxias de disco.

En su trabajo [132] calcularon para una partícula de prueba una velocidad en una órbita circular

$$v_c(r) \equiv \sqrt{r \frac{d\Phi(r)}{dr}}. \quad (10.8)$$

En este caso, se ha considerado un gas no ideal que ejerce una fuerza adicional debido a la presión. Esto proporciona un soporte radial adicional al disco gaseoso giratorio. Aquí, la fuerza externa resultante permite que el gas en el disco gire más lentamente que la velocidad circular, mientras tanto se mantiene una órbita circular estable. Para obtener una órbita circular, la fuerza radial se equilibra para las fuerzas causadas por la gravedad, para la fuerza centrípeta y una para el gradiente de presión

$$0 = F_{grav} + F_{cen} + F_P. \quad (10.9)$$

Para calcular el gradiente de presión radial, se considera que la presión del gas está dominada por movimientos turbulentos, en lugar de procesos térmicos. Por lo tanto, la presión del gas local se aproximó a

$$P = \rho_{gas} \sigma^2, \quad (10.10)$$

donde ρ_{gas} es la densidad del gas y σ^2 es la dispersión unidimensional de la velocidad.

También tuvieron en cuenta al utilizar las simulaciones, que para calcular la presión turbulenta en las capas de gas estratificadas, era necesario adoptar una relación tipo ley de potencia, entre la densidad del gas y la tasa de formación de estrellas.

Para una relación entre la presión turbulenta y la densidad superficial del gas local $P_{turb} \propto \Sigma^{0.92 \pm 0.05}$. a Dalcanton y Stilp les fue posible calcular la curva de rotación con la que pudieron observar una desviación dada para la presión ocasionada por la turbulencia.

Por otro lado, en [140] mencionan que el soporte de presión en un disco de galaxias estable depende de las propiedades de la turbulencia interestelar. Los autores hacen

énfasis en que la presión que resulta de la turbulencia depende de la suma de la energía cinética en un amplio rango de escalas de longitud. Ellos creen que la gran mayoría de la energía cinética se debe a movimientos turbulentos en escalas más pequeñas que $\sim 200 pc$ [140].

Existen trabajos de simulaciones como el de [134], que permiten estudiar los movimientos turbulentos a escalas muy pequeñas ($\sim 2 pc$). Sin embargo, esta alta resolución espacial se utiliza a costa de no modelar el disco galáctico completo.

El soporte de presión descrito anteriormente también depende de la densidad de la superficie del disco gaseoso.

Se ha observado, que la formación de estrellas tenderá a erosionar la densidad de la superficie del gas y, por lo tanto, reducirá el soporte de presión. El gas se agotará preferentemente en las regiones internas, debido a la dependencia no lineal de la velocidad de formación de estrellas en la densidad del gas [132]. Además, el consumo de gas conducirá a un flujo de gas hacia el interior, que a su vez ayudará a restablecer el soporte de presión.

La evolución del soporte de presión en un disco depende en primer lugar, de la evolución de la densidad superficial del gas y esto da como consecuencia que se encuentre un ligero cambio en la curva de rotación de las galaxias de disco.

Sin embargo, para la evolución de la fuerza radial, para velocidades radiales pequeñas, la velocidad angular y la presión ya no son suficientes para equilibrar la fuerza resultante del potencial gravitatorio [132].

En el trabajo escrito por [140] es definida la presión total en la galaxia de disco P_{tot} ; como la suma de la presión térmica (presión para gases ideales: $P_{ther} = nkT$) y la presión turbulenta

$$P_{turb} = \rho \sigma_{turb}^2 = \rho \langle v_{turb}^2 \rangle, \quad (10.11)$$

esta suma es conocida como ecuación de Bernoulli y se escribe como sigue:

$$P_{tot} = P_{ther} + P_{turb} = nkT + \rho \langle v_{turb}^2 \rangle. \quad (10.12)$$

De manera similar, la presión turbulenta también se encuentra en un equilibrio de presión aproximado en escalas grandes donde $P_{turb} \gtrsim P_{ther}$. No obstante, es necesario mencionar que esta consideración no se tiene en cuenta en el paper de [132].

El problema que aquí se observa es que, la existencia de la presión turbulenta, debe ser tomada con cautela ya que el sistema de esta galaxia, además de estar en un equilibrio mecánico para el equilibrio de las fuerzas, debe permanecer también en equilibrio termodinámico.

Este equilibrio termodinámico es usado en el código FLASH en [133] y descrito por Dalcanton y Stilp [132] como una suma de presiones parciales, en la que las fases gaseosas tienden a entrar en un equilibrio de presión turbulenta. También ellos mencionan que esta presión total "se encuentra reflejando el comportamiento de las presiones térmicas ($P_{ther} = nkT$)".

No obstante, la ley de Dalton de las presiones parciales establece que la presión de una mezcla de gases ideales es igual a la suma de las presiones parciales que ejerce cada gas individual al ocupar todo el volumen de la mezcla. Dicha ley se expresa de la siguiente manera:

$$P = \sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n. \quad (10.13)$$

Este modelo que corresponde a las ecuaciones (9.12) y (9.13) es un modelo empírico para incorporar el efecto de la turbulencia en la ecuación de estado que solo funciona parcialmente.

Por esta razón, aquí se considera que es deben considerarse ciertos aspectos mencionado en el trabajo de Dalcanton y Stilp [132] al usar la ecuación (10.13) para un caso de presión turbulenta ($P_{turb} = \rho \sigma_{turb}^2$), ya que esta ecuación únicamente es válida para una mezcla de gases ideales y donde el comportamiento de la presión se da de manera lineal.

La presión para una mezcla de gases en la que la velocidad gradualmente va aumentando, tiende a pasar al régimen turbulento. Generalmente en las ecuaciones de HD aparece el término $\nabla \cdot \rho v v$, este es la razón por la cual los fluidos se vuelven turbulentos y esto no puede ser considerado de ninguna manera para una mezcla de gases ideales. Estas ecuaciones HD serán tratadas en la siguiente sección.

En ese sentido el término para una dispersión de velocidad $\langle v_{turb}^2 \rangle$ encontrado en la presión turbulenta $P_{turb} = \rho \langle v_{turb}^2 \rangle$ es una velocidad que suele asociarse a un movimiento adicional (que se modela como una perturbación) o dispersión de velocidad que no depende de la temperatura, es decir; este es un exceso de velocidad que no se le puede atribuir a la temperatura. Por esa razón, se puede considerar que hay un exceso de movimiento de las partículas que no se atribuye a los gases ideales.

En los modelos hidrodinámicos, es necesario tomar en cuenta las ecuaciones de estado que plasmen con precisión el fenómeno físico de estudio.

En este caso el código FLASH busca que la hidrodinámica y la termodinámica sean compatibles. Si bien FLASH incluye cualquier ecuación de estado, un grupo de ecuaciones de las más destacadas y usadas por el código FLASH, son las ecuaciones de estado para gases ideales en presencia del coeficiente de dilatación adiabática γ como en el trabajo de Fryxell et al [133]:

$$P_{Tot} = \frac{nk\rho T}{m}, \quad (10.14)$$

$$\epsilon_{Tot} = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{P_{Tot}}{\rho} \quad (10.15)$$

y

$$S_{Tot} = \frac{(P/\rho + \epsilon)}{T}, \quad (10.16)$$

donde k es la constante de Boltzmann, n el número de moles, m la masa, ϵ la energía interna específica y S la entropía.

Otro grupo destacado de ecuaciones de estado usado por el código FLASH en el trabajo de Fryxell et al [133], representa las ecuaciones de estado de Helmholtz que provienen de un potencial termodinámico:

$$F = \epsilon - TS. \quad (10.17)$$

La primera ley de la termodinámica dice que:

$$d\epsilon = TdS + \frac{P}{\rho^2}d\rho \quad (10.18)$$

y esta puede expresarse en forma de una diferencial exacta, y que requiere de las relaciones termodinámicas:

$$P = \rho^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \Big|_T + T \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_\rho, \quad (10.19)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \Big|_\rho = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_\rho \quad (10.20)$$

y

$$-\frac{\partial S}{\partial \rho} \Big|_T = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_\rho, \quad (10.21)$$

sean satisfechas.

En [133] se dice que si estas tres identidades de arriba son verdaderas una ecuación de estado es termodinámicamente consistente.

El potencial libre de Helmholtz se escribe como:

$$dF = -SdT + \frac{P}{\rho^2}d\rho \quad (10.22)$$

con la presión definida como:

$$P = \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} \Big|_T \quad (10.23)$$

y la entropía

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \Big|_\rho. \quad (10.24)$$

Estas ecuaciones para la energía libre de Helmholtz cumplen con el requerimiento de que las derivadas parciales conmutan:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \rho} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial T}. \quad (10.25)$$

Todas estas ecuaciones de estado han sido presentadas en [133]. En este trabajo son abordadas con la finalidad de mostrar que debe existir un vínculo entre las ecuaciones termodinámicas y las ecuaciones HD que serán presentadas en la siguiente sección.

Así como para mencionar que la entropía es una función de varias variables termodinámicas macroscópicas, en estos casos de ρ , P , T y ϵ . Si todas estas variables están cambiando la entropía no debería ser constante y esto afectaría también a las ecuaciones HD.

Ahora que se ha hablado de las variables y propiedades termodinámicas que son de relevancia para las simulaciones de galaxias de disco se abordarán en la siguiente sección algunas cuestiones de las ecuaciones HD y de la cinética física; se verán como pueden obtenerse las ecuaciones de Euler por medio de las ecuaciones de la cinética física y como pueden imponer restricciones para las ecuaciones de HD.

10.4. Hidrodinámica y Ecuaciones Cinéticas para la Densidad del Gas en Función de la Distancia para Curvas de Rotación Constantes

En el estudio de la dinámica de una galaxia de disco, el gas se encuentra distribuido a lo largo de la galaxia, contribuye de manera significativa al comportamiento de las curvas de rotación.

Las ecuaciones que usualmente se utilizan para el estudio del comportamiento de los fluidos son las ecuaciones de la hidrodinámica; estas ecuaciones tienen un alcance concreto y limitado para el estudio correcto del gas en la galaxia.

Para un tratamiento cualitativo de los fenómenos de transporte en los gases, las colisiones se estiman aproximadamente mediante el camino libre medio l_{fp} , esta se define como la **distancia media recorrida por una molécula entre dos colisiones sucesivas** (esto sólo tiene un significado cualitativo).

El estudio de los fenómenos de transporte se refiere al intercambio de masa, energía, carga, momento lineal y momento angular entre los sistemas observados y estudiados. Si bien se basa en campos tan diversos como la mecánica continua y la termodinámica, pone un gran énfasis en los puntos en común entre los temas tratados. El transporte de masa, impulso y calor comparten un marco matemático muy similar, y los paralelos entre ellos se explotan en el estudio de los fenómenos de transporte para establecer conexiones matemáticas profundas que a menudo proporcionan herramientas muy útiles en el análisis de un campo que se deriva directamente de los demás.

Los análisis fundamentales en los tres subcampos de transferencia de masa, calor y momento a menudo se basan en el simple principio de que la suma total de las cantidades estudiadas debe ser conservada por el sistema y su entorno.

Por esta razón, si se observa; esta dependencia puede pensarse que existe una relación de la cinética de los gases en la formación de la parte externa de curva de rotación.

Pueden imponerse requisitos estrictos que acotan el comportamiento y las propie-

dades de un fluido. Se puede considerar que las ecuaciones HD del gas se deducen de la teoría cinética y esto; por lo tanto, debe respetar las leyes de la termodinámica.

Las propiedades macroscópicas del sistema (temperatura T , densidad ρ y presión P) que aparecen en las ecuaciones HD deben obtenerse también de una correspondiente ecuación de estado.

Estas propiedades deben concordar de manera coherente y compatible para la termodinámica y la hidrodinámica.

Por otro lado, las ecuaciones de Euler para la HD consideran que la entropía es constante. Sin embargo, de la termodinámica se ve que la entropía es función de otras propiedades que no son constantes.

Para hacer un uso correcto de las ecuaciones cinéticas, estas deben promediarse primero sobre un volumen para evitar las limitaciones impuestas a la aplicabilidad de las ecuaciones hidrodinámicas, y solo después de dicho procedimiento pueden integrarse sobre la variable de momento lineal. Al hacerlo, se consigue obtener la ecuación de difusión.

La aplicabilidad para las ecuaciones HD en el sistema considerado está también limitada por las escalas utilizadas. Ya que la distancia de camino libre medio entre los choques de las partículas del gas l_{fp} para un volumen dado debe ser considerada para el estudio de sus propiedades macroscópicas termodinámicas dentro de dicho volumen. Esta consideración toma en cuenta los procesos atómicos y moleculares en el interior de los gases, por esa razón consideramos la importancia de la física estadística.

En la actualidad, se supone que tener en cuenta las colisiones en un gas tiene un efecto insignificante incluso para las galaxias pequeñas [132] y para las grandes galaxias espirales no es tan necesaria su consideración. Tales conclusiones se basan en simulaciones hidrodinámicas y la suposición de que la ecuación de Euler, y por lo tanto la ecuación de Bernoulli, siempre se cumple, [138]; [134].

Ahora bien, para un gas diluido la trayectoria de camino libre medio es inversamente proporcional a la densidad. Si se presenta el caso en que la densidad del fluido disminuye, se puede esperar que el camino libre medio de las partículas se incremente, de tal forma que si esta última cantidad es del orden de la dimensión lineal de las fronteras que lo contienen, se dice que el fluido es enrarecido [139].

Los resultados presentados por los autores muestran que la escala característica de las inhomogeneidades, en la que los parámetros del gas cambian significativamente, es $L_k = 1 - 10$ pc, mientras que la trayectoria de camino libre medio de una partícula con una densidad de $N = 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ es $l_{fp} = 3 - 30$ pc.

Ahora bien, cabe mencionar que las ecuaciones hidrodinámicas se pueden obtener a partir de integrar las ecuaciones cinéticas.

Los movimientos traslacional y rotacional de las moléculas de un gas son clásicos. En [141] se hace mención de que el movimiento traslacional es descrito por el vector de coordenadas $\vec{r} = (x, y, z)$ para un centro de masas y para las componentes del momento \vec{p} (o de la velocidad $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$) de su movimiento. Mientras que en un gas monoatómico el movimiento es puramente traslacional.

Para una velocidad angular de rotación de la molécula

$$\dot{\varphi} = \Omega = \frac{\vec{M}}{\vec{I}}, \quad (10.26)$$

para el cambio del ángulo φ , donde \vec{M} es el vector de momento angular e \vec{I} es el momento de inercia de la molécula ($\vec{I} = \sum m_i \vec{r}_i^2$). Sea para la distribución de moléculas en el ángulo $\varphi = \varphi_0$ (de 0 a 2π) y para una velocidad angular Ω al tiempo inicial $t = 0$ dada para una función $f(\varphi_0, \Omega)$. Donde la función de distribución f se escribe para los ángulos independientes φ y φ_0 como [141]:

$$f = \tilde{f}(\Omega) + f'(\varphi_0, \Omega), \quad (10.27)$$

donde,

$$\tilde{f}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(\varphi_0, \Omega) d\varphi_0, \quad (10.28)$$

aquí $f'(\varphi_0, \Omega)$ es una función periódica en φ_0 con periodo de 0 a 2π [141].

La ecuación de transporte de Boltzmann da una descripción microscópica de la forma en que el estado del gas varía con el tiempo. Mostraremos cómo la ecuación de transporte se puede convertir en las ecuaciones habituales de la mecánica de fluidos, que proporcionan una descripción macroscópica menos detallada de esta variación de tiempo. La descripción es válida cuando las propiedades macroscópicas (temperatura, densidad, velocidad, etc.) del gas varían lo suficientemente lento como su volumen; las distancias L_k sobre las cuales cambian apreciablemente deben ser mucho mayores que el camino libre medio l_{fp} de las moléculas [141]. En este trabajo se denota por Γ al conjunto de todas las variables de las que depende la función de distribución, que las coordenadas de las moléculas en su conjunto (y el tiempo t). Separamos del elemento de volumen de fase $d\tau$ el factor $dV = dx dy dz$, y denotamos por $d\Gamma$ el factor restante en términos de las variables utilizadas (e integradas sobre los ángulos de los que f no depende.) Las cantidades Γ tienen una importante propiedad común: son integrales de movimiento, y permanecen constantes para cada molécula durante su movimiento libre (en ausencia de un campo externo) entre colisiones sucesivas; pero en general se ven alteradas por cada colisión. Las coordenadas x, y, z de la molécula en su conjunto varían, por supuesto, durante su movimiento libre.

La integral

$$N(t, \vec{r}) = \int f(t, r, \Gamma) d\Gamma \quad (10.29)$$

es la distribución espacial de densidad de las moléculas del gas; el producto $\rho = mN$ es correspondiente a la densidad de masa del gas, donde la cantidad Γ son las tres componentes de momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ del átomo, así $d\Gamma = d^3p$. La velocidad macroscópica del gas es denotada por \vec{V} (en contraste con las velocidades microscópicas \vec{v} de las moléculas); esto es definido como el promedio [141]:

$$\vec{V} = \bar{\vec{v}} = \frac{1}{N} \int \vec{v} f d\Gamma. \quad (10.30)$$

Las colisiones no alteran ni el número de partículas en colisión ni su energía y momento totales. Por lo tanto, la parte de colisión del cambio en la función de distribución tampoco puede afectar las cantidades macroscópicas en cada \vec{V} . Las partes de colisión del cambio en el número total, la energía y el momento de las moléculas en la unidad de volumen del gas son dado por las integrales cero [141]

$$\int C(f)d\Gamma = 0, \quad \int \epsilon C(f)d\Gamma = 0, \quad \int \vec{p}C(f)d\Gamma = 0. \quad (10.31)$$

Estas ecuaciones pueden derivarse aplicando la integral de transformación [141]

$$\int \varphi(\Gamma)C(\Gamma)d\Gamma = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1)w'f'f'_1d^4\Gamma. \quad (10.32)$$

con $\varphi = 1$, ϵ y \vec{p} respectivamente [141].

La primera integral es cero idénticamente, las otras dos son cero en virtud de la conservación de la energía y el impulso en colisiones [141].

Con todas estas consideraciones, la ecuación cinética de transporte para un tipo de partículas descrita por la función de distribución f es [141]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(v_\alpha f)}{\partial x_\alpha} = C(f), \quad (10.33)$$

donde $C(f)$, se conoce como la integral de colisión denotada por:

$$C(f) = (w'f'f'_1 - wf f_1)d\Gamma_1 d\Gamma'_1. \quad (10.34)$$

En el segundo término en la integral, la integración sobre $d\Gamma' d\Gamma'_1$ relaciona solo una función w , ya que f y f_1 no dependen de estas variables. Esta parte de la integral, por lo tanto, puede transformarse mediante la relación unitaria [141]

$$\int w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1)d\Gamma' d\Gamma'_1 = \int w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1)d\Gamma' d\Gamma'_1. \quad (10.35)$$

La colisión integral se convierte en [141]:

$$C(f) = w'(f'f'_1 - ff_1)d\Gamma_1 d\Gamma'_1 \quad (10.36)$$

en donde ambos términos tienen el factor w' .

Por otro lado, para un gas monoatómico, las cantidades Γ se reducen a tres componentes de momento \vec{p} y para $w(\vec{p}, \vec{p}_1; \vec{p}, \vec{p}_1)$ la función w' en colisión integral puede ser remplazada por $w = w'(\vec{p}', \vec{p}'_1; \vec{p}, \vec{p}_1)$. Expresando esta función en términos de la sección de cruce de colisiones $d\sigma$ que se define por [141]:

$$d\sigma = \frac{w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1)}{|\vec{v} - \vec{v}_1|}d\Gamma' d\Gamma'_1, \quad (10.37)$$

la función w puede en principio ser determinada solo por resolver el problema mecánico de colisión de partículas interactuando y v_{rel} se define como $v_{rel} = |\vec{v} - \vec{v}_1|$. Esta sección

de cruce contiene los factores de la función delta que expresan las leyes de conservación para el momento y la energía, como un resultado del cual las variables \vec{p}_1 , \vec{p} y \vec{p}_1 para un \vec{p} dado no son independientes [141].

Integrando (10.33) sobre $d\Gamma$ y multiplicando por m , p_α o ϵ . En este caso el lado derecho es cero y se obtienen las ecuaciones [141]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = 0, \quad (10.38)$$

$$\frac{\partial(\rho V_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \quad (10.39)$$

y

$$\frac{\partial(N\bar{\epsilon})}{\partial t} + \text{div} \vec{q} = 0. \quad (10.40)$$

Para un tratamiento cualitativo de fenómenos de transporte en gases, la colisión integral es estimada por medio de la trayectoria de camino libre medio l_{fp} , que es una distancia promedio atravesada por las moléculas entre dos colisiones sucesivas.

El camino libre medio l_{fp} puede ser expresado en términos de la sección de cruce de colisiones y el número de densidad n de las moléculas en el gas [141].

Ahora bien, se pueden obtener otras ecuaciones hidrodinámicas de la misma manera, multiplicando la ecuación cinética por p y energía ϵ y luego integrando, pero no nos darán algo nuevo y conducirán a una restricción para la aplicabilidad de las ecuaciones hidrodinámicas $L_k \gg l_{fp}$.

También puede integrarse (10.33) sobre el momento p bajo la asunción de que la variación de todos los parámetros (temperatura T , densidad ρ , presión P , velocidad v , etc) son pequeñas en la longitud de camino libre medio l_{fp} , es decir, la longitud característica $L_k \gg l_{fp}$, obteniendo la ecuación de continuidad [136]:

$$\frac{dn}{dt} + \frac{d}{dx^\alpha}(v^\alpha n) = 0. \quad (10.41)$$

Si una molécula atraviesa una distancia unitaria en este camino, esta colisiona con las moléculas presentes en un volumen σ (que de un cilindro con un área de sección de cruce σ y una longitud unitaria), el número del cual es σn [141]. Esto es:

$$l_{fp} = \frac{1}{\sigma n}, \quad (10.42)$$

aquí n es el número de densidad de moléculas en el gas y σ es la sección de cruce de colisión.

Con esta consideración anterior, se supone que las variaciones de todos los parámetros macroscópicos de la galaxia (temperatura T , densidad ρ , velocidad \vec{v} , etc) son pequeñas dentro de un volumen, donde la longitud de los lados de dicho volumen dada por la longitud media de la trayectoria de camino libre medio l_{fp} , es decir; la longitud característica L_k en el que se produce un cambio significativo en estas propiedades termodinámicas debe ser mucho mayor que la longitud media de la trayectoria de camino

libre medio l_{fp} y esta restricción para las ecuaciones de hidrodinámicas (10.38), (10.39) y (10.40) es un punto importante a considerar $L_k \gg l_{fp}$.

Lo que impone algunas restricciones en la aplicabilidad de las ecuaciones hidrodinámicas. Desafortunadamente, muchos autores que investigan numéricamente la cinemática del ISM violan estas restricciones. Por lo tanto, los resultados obtenidos pueden dar problemas a la hora de ser utilizados, esto de igual manera lo mencionan Dalcanton y Stilp en su trabajo [132], aquí ellos analizan limitaciones en las observaciones, en las simulaciones y en los cálculos analíticos.

Para eliminar esta restricción, comenzamos con la misma ecuación cinética (10.33) que tiene lugar en el caso de la hidrodinámica. Para obtener la ecuación (10.41) se considera la condición (10.42). Pero si este no es el caso, es decir $(v^\alpha f)$ cambia significativamente dentro de la escala l_{fp} , entonces lo único que podemos hacer es promediar un volumen (recuerde que no se está interesado en el movimiento del gas a pequeña escala y, por lo tanto, puede promediarse). Ahora se reescribe (10.33) como [136]:

$$\int \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(v_\alpha f)}{\partial x_\alpha} \right) d^3x d^3p = 0, \quad (10.43)$$

al integrar, el primer término da dm/dt donde m es una masa dentro del volumen de integración. El segundo término se puede transformar a $\Delta S dn/dx^\alpha$, por lo que finalmente se tiene [136]:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -D \Delta S \frac{dn}{dx^\alpha}, \quad (10.44)$$

donde $D = \langle v \rangle \Delta l$. Esto es conocido como la ecuación de difusión [136].

En la ecuación de difusión (10.44) el término ΔS es una superficie que es colineal con el término dx . Es decir, el flujo pasa en la dirección de dx cruzando la superficie ΔS de forma ortogonal.

Se observa que las ecuaciones hidrodinámicas no pueden aplicarse para simular la estructura a gran escala de ISM de baja densidad. Además, no necesitamos este enfoque para calcular la curva de rotación. Al integrar sobre un volumen y hacer que el problema sea insensible a las turbulencias a pequeña escala, obtenemos la ecuación de difusión (10.44) adecuada para describir los movimientos a gran escala del gas enrarecido en la parte externa del disco.

Ahora bien, tómesese bajo consideración las ecuaciones de Euler de la HD, estas permiten describir la dinámica de un gas compresible y se pueden derivar de (10.38), (10.39) y (10.40) al considerar $\Pi_{\alpha\beta}$ y \vec{q} en términos de cantidades macroscópicas. Lo que da una descripción macroscópica del gas. Estas ecuaciones pueden escribirse de forma conservativa como en [133]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0, \quad (10.45)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v v + \nabla P = \rho g \quad (10.46)$$

y

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E + P) v = \rho v g. \quad (10.47)$$

Aquí, en [133] se menciona que la presión P fue obtenida para la energía interna ϵ y la densidad ρ fue obtenida para una ecuación de estado.

Para la ecuación de Euler (10.46) el término $\nabla \cdot \rho v v$ es la razón por la cual los fluidos se vuelven turbulentos. Esto como se mencionó brevemente en la sección anterior se escapa de consideración para una mezcla de gases ideales descrita como en la ecuación (10.13) y así fue erróneamente utilizada en [133].

Cabe considerar también, que las ecuaciones (10.45), (10.46) y (10.47) describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso donde E , es la energía total del sistema representada por

$$E = \epsilon + \frac{1}{2} v^2; \quad (10.48)$$

donde en el lado derecho de la ecuación, el primer término representa la ya mencionada energía interna y el segundo término la energía cinética por unidad de masa.

Por otro lado, para la galaxia completa, la entropía es considerada variable dado a las ecuaciones de estado, al considerar un volumen con lado de longitud dados por la distancia característica L_k , la entropía no debe cambiar en dirección del vector de velocidad turbulenta y por ello la ecuación (10.12) no puede ser aplicada para este caso.

Un gas dejado solo, como cualquier sistema macroscópico cerrado, tenderá a alcanzar un estado de equilibrio. En consecuencia, la variación en el tiempo de una función de distribución sin equilibrio de acuerdo con la ecuación de transporte debe ir acompañada de un aumento en la entropía del gas.

La entropía de un gas ideal en un estado macroscópico sin equilibrio descrito por una distribución f , es [141]

$$S = \int f \log \left(\frac{e}{f} \right) dV d\Gamma. \quad (10.49)$$

Diferenciando esta expresión con respecto al tiempo, se tiene [141]:

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} \left(f \log \frac{e}{f} \right) dV d\Gamma = - \int \log f \frac{\partial f}{\partial t} dV d\Gamma. \quad (10.50)$$

Dado que el establecimiento del equilibrio estático en el gas se produce por colisiones de moléculas, el aumento de la entropía debe surgir de la parte de colisión del cambio en la función de distribución. El cambio en esta función debido al movimiento libre de las moléculas, por otro lado, no puede alterar la entropía del gas, ya que esta parte del cambio en la función de distribución se da (para un gas en un campo externo $U(r)$) por los dos primeros términos del tamaño del lado derecho de la ecuación [141]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla f - \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} + C(f). \quad (10.51)$$

Su contribución a la derivada dS/dt es [141]

$$-\log \int f \left[-\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} - \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} \right] dV d\Gamma = \int \left[\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial p} + \vec{F} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \right] \left(f \log \frac{e}{f} \right) dV d\Gamma. \quad (10.52)$$

La integral sobre dV del término que involucra la derivada $\partial/\partial r$ es transformada por el teorema de Gauss en una integral de superficies; esta da cero en la integración a través del volumen total del gas [141].

De manera similar, el término que involucra la derivada $\partial/\partial p$, en la integración sobre d^3p , se convierte en una integral sobre una superficie infinitamente distante en el espacio de momento, y de igual manera da cero [141].

Por lo tanto, el cambio en la entropía es expresado mediante [141]

$$\frac{dS}{dt} = - \int \log f \cdot C(f) dV d\Gamma. \quad (10.53)$$

Esta integral puede ser transformada, fórmese para la integral general $\int \varphi(\Gamma) C(f) d\Gamma$, es cualquier función de las cantidades Γ . Con la integral de colisión en la forma (10.32), escribimos [141]

$$\int \varphi(\Gamma) C(\Gamma) d\Gamma = \varphi w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d^4\Gamma - \varphi w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d^4\Gamma \quad (10.54)$$

donde se puede considerar que $d^4\Gamma = d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1$. Ya que la integración aquí es sobre todas las variables $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma', \Gamma'_1$, se puede, sin alterar la integral, renombrar las variables en cualquier manera. Intercambiando Γ, Γ_1 y Γ', Γ'_1 en la segunda integral, se encuentra [141]

$$\int \varphi(\Gamma) C(\Gamma) d\Gamma = (\varphi - \varphi') w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d^4\Gamma. \quad (10.55)$$

Integrando aquí Γ, Γ_1 y Γ', Γ'_1 , tomando la mitad de la suma de las integrales resultantes y observando la obvia simetría de w con respecto a las dos partículas en colisión, se obtiene la regla de transformación [141]

$$\int \varphi(\Gamma) C(\Gamma) d\Gamma = \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) w' f' f'_1 d^4\Gamma. \quad (10.56)$$

En particular, $\int C(\Gamma) d\Gamma = 0$; con $C(\Gamma)$ aquí en la forma (10.36), se tiene [141]

$$\int C(f) d\Gamma = w' (f' f'_1 - f f_1) d^4\Gamma = 0. \quad (10.57)$$

Aplicando la integral (10.53), la regla (10.56) se transforma en [141]:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \int w' f' f'_1 \log \left(\frac{f' f'_1}{f f_1} \right) d^4\Gamma dV = \frac{1}{2} \int w' f f_1 x \log x d^4\Gamma dV, \quad (10.58)$$

donde $x = \frac{f'f_1}{ff_1}$. Restando de esta ecuación, la mitad de la integral cero (10.57), la regla ecuación (10.58) da [141]

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \int w' f' f_1' (x \log x - x + 1) d^4\Gamma dV. \quad (10.59)$$

La función en el paréntesis en la integral es no negativa para toda $x > 0$; es decir, es cero cuando $x = 1$, incrementando a cada lado de ese punto. Por definición, los factores w' , f' y f_1' en la integral son también positivos. Se obtiene así el resultado [141]

$$\frac{dS}{dt} \geq 0, \quad (10.60)$$

expresando la ley de incremento de la entropía, esta ocurre en el equilibrio [141].

La prueba de la ley de aumento de la entropía por medio de la ecuación de transporte se debe a Boltzmann, y fue la primera prueba microscópica de esa ley. Aplicada a los gases, la ley a menudo se llama teorema H, ya que Boltzmann usó el símbolo H para la entropía [141].

Teniéndose en cuenta que, dado que el integrando en (10.58) (y, por lo tanto, en (10.53)) no es negativo, no solo la integral completa (10.53) sobre $d\Gamma dV$ sino también que sobre $d\Gamma$ solo es positivo [141].

Así, las colisiones aumentan la entropía en cada elemento de volumen del gas. Esto, por supuesto, no implica que la entropía aumente en cada elemento de volumen, ya que puede ser transferida de una región a otra por el movimiento libre de las moléculas [141].

A partir de observaciones y simulaciones cosmológicas numéricas, conocemos el hecho bien establecido de que las galaxias evolucionan con el tiempo. En la época pregaláctica, las galaxias jóvenes comenzaron a formarse a partir de gas más o menos homogéneo. Las galaxias gradualmente recogen el gas de los medios intergalácticos circundantes y finalmente, en la época actual, podemos observar una gran variedad de galaxias masivas con estructuras espirales desarrolladas [136].

En realidad, esto significa que el gas en las partes externas de la galaxia espiral sigue una espiral (no la confunda con los brazos galácticos o la estructura espiral) que puede escribirse como [136]:

$$R = R_0 e^{k(\varphi)}, \quad (10.61)$$

donde R_0 es una distancia definida [136].

En este caso, para la velocidad radial total V y tangencial V_\perp se puede escribir $V = k'V_\perp$, donde k' es $\partial k / \partial \varphi$. Pero la velocidad radial viene dada por la primera ley de difusión obtenida en (10.44) [136]:

$$V_\parallel = -\frac{D}{N} \frac{\partial N}{\partial R} \quad (10.62)$$

o

$$k'V_\perp = -\frac{D}{N} \frac{\partial N}{\partial R}, \quad (10.63)$$

donde D es el coeficiente de difusión, N es la densidad y R es la distancia en el sistema de coordenadas cilíndricas [136].

Teniendo en cuenta el hecho de que $D = \text{const}$ para gas muy empobrecido y suponiendo que $V_{\perp} = V_{K0} = \text{const}$. (aquí V_{K0} es la velocidad kepleriana a la distancia R_0) se obtiene [136]

$$\frac{D}{n} \frac{1}{R_0} \frac{\partial n}{\partial r} = k' V_{K0}. \quad (10.64)$$

Donde se introduce $n = N/N_0$, $r = R/R_0$ y por definición [136]:

$$V_{K0} = \sqrt{\frac{MG}{R_0}}. \quad (10.65)$$

Integrando (10.62) se obtiene [136]:

$$n = n_0 \exp \left\{ -\frac{V_{K0} R_0 k'}{D} r \right\} \quad (10.66)$$

donde

$$n_0 = \exp \left\{ \frac{V_{K0} R_0 k'}{D} r \right\}. \quad (10.67)$$

Como se puede ver, esta distribución de densidad depende exponencialmente de la distancia r .

Ahora en la siguiente sección, se verá un cálculo particular para el caso de las columnas de densidad formadas por la distribución (10.64), debida a su importancia en observaciones astronómicas [136].

10.5. Columnas de Densidad

Se define la columna de densidad como [136]:

$$N_L = 2 \int_0^L N dl, \quad (10.68)$$

donde N es la función de densidad. Tomando en cuenta que $l^2 = R^2 - r^2$, esta ecuación puede reescribirse como [136]:

$$N_L = 2N_0 R_0 \int_{r=\rho/R_0}^{r^{\text{máx}}} \frac{nr dr}{\sqrt{r^2 - \frac{\rho^2}{R_0^2}}}. \quad (10.69)$$

Expandiendo la expresión [136]:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{rR_0}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{rR_0}\right)^{2n} \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k}\right) \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{rR_0}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{\rho}{rR_0}\right)^4 + \dots, \quad (10.70)$$

con lo que se obtiene [136]:

$$N_L = 2N_0R_0 \int_{r=\rho/R_0}^{r_{\text{máx}}} n(r) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{rR_0} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{\rho}{rR_0} \right)^4 + \dots \right] dr, \quad (10.71)$$

donde $n(r)$ es la relación dada en (10.66). La columna de densidad puede ser expresada como [136]:

$$N_L \approx N_{L1} + N_{L2} + N_{L3}, \quad (10.72)$$

donde

$$N_{L1} = 2N_0R_0 \int_{r=\rho/R_0}^{r_{\text{máx}}} e^{-\kappa(r-1)} dr, \quad (10.73)$$

$$N_{L2} = N_0R_0 \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^2 \int_{r=\rho/R_0}^{r_{\text{máx}}} e^{-\kappa(r-1)} \frac{dr}{r^2}, \quad (10.74)$$

$$N_{L3} = \frac{3}{4}N_0R_0 \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^4 \int_{r=\rho/R_0}^{r_{\text{máx}}} e^{-\kappa(r-1)} \frac{dr}{r^4}, \quad (10.75)$$

y

$$\kappa = \frac{V_{K0}R_{K0}k'}{D}. \quad (10.76)$$

Estas expresiones pueden ser integradas y así obtenerse para el primer término de expansión [136]:

$$N_{L1} \left(\frac{\rho}{R_0} \right) = \frac{2N_0R_0}{\kappa} e^{-\kappa(\frac{\rho}{R_0}-1)} \left(1 - e^{-\kappa\frac{\rho}{R_0}\frac{\Delta V}{V}} \right), \quad (10.77)$$

donde $\frac{\Delta V}{V}$ es el ancho de banda relativo observado para la velocidad [136].

Estimando las integrales (10.74) y (10.75), puede mostrarse que los términos segundo, tercero y superiores de nuestra expansión tendrán el mismo comportamiento exponencial ($\alpha \exp(-\kappa(\rho/R_0 - 1))$), pero en valor absoluto serán mucho más pequeños que el primer término (10.75). Esto es así porque la expansión en (10.70) puede escribirse como una serie de Taylor de la forma mostrada, en ese sentido los coeficientes de la expansión son los que hemos nombrado como α en la expresión ($\alpha \exp(-\kappa(\rho/R_0 - 1))$). Por esta razón para nuestro objetivo, podemos tomar la expresión (10.77) como una buena aproximación para la densidad de la columna [136].

En este caso, no es necesario tener en cuenta el ángulo de inclinación de la galaxia, y esto simplifica el modelado.

Por todo lo anterior, se concluye que las ecuaciones de HD (que realizan una descripción macroscópica de la evolución de un gas) deberían ser derivadas con respecto a las ecuaciones cinéticas más fundamentales [136].

Por este motivo, en el caso $L_k \geq l_{fp}$, la aproximación HD no funciona y se debe usar otro método para describir un gas enrarecido. Por esto se considera que las ecuaciones de HD fueron erróneamente usadas en las simulaciones numéricas como [132], [133], [134] y [140], etc.

Como pudo observarse en este apartado, las ecuaciones de la hidrodinámica pueden ser obtenidas de las ecuaciones de la cinética física. También se vio que las ecuaciones de la cinética física imponen restricciones a la aplicabilidad de las ecuaciones de HD.

Ahora bien, en la siguiente sección se mostrarán comparaciones gráficas para las columnas de densidad respecto a observaciones astronómicas y su contribución a la formación de curvas de rotación de galaxias de disco.

10.6. Curvas de Rotación con Consideraciones de Cinética del Gas

Las distribuciones de densidad de columnas calculadas, en el supuesto de que la curva de rotación es constante coinciden con las observadas para galaxias muy diferentes, caracterizadas por diferentes masas y pendientes de la función de la de columna de densidad.

Por esta razón se analizará la expresión como una aproximación para la columna de densidad (10.75). Puede compararse las columnas de densidad de las ecuaciones (10.71) a (10.75). Estas son comparadas con valores observados sugeridos por [144] y [145] para NGC7331 (figura 10.1) y NGC3198 (fig. 10.2) [136].

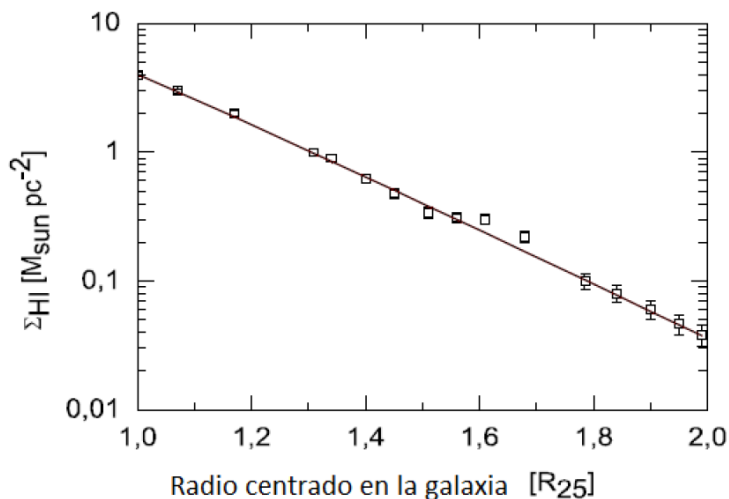


Figura 10.1: Medición (cuadrados) reportados por [144]; [145] y calculado con (10.77) (línea continua) columna de densidad HI para NGC 7331 [136].

Para estas dos galaxias se simplificó el modelado, puesto que no se tomó en cuenta el ángulo de inclinación de la galaxia [136].

Como se puede ver en la figura 10.1 y figura 10.2, las distribuciones de columnas de densidad calculadas (en suposición $CR = const$) coinciden con las observadas para galaxias muy diferentes, caracterizadas por diferentes masas y pendientes de la función de la columna de densidad. Por lo tanto, puede concluirse que la curva de rotación a grandes distancias $R > R_0$ están formadas principalmente por corrientes de gas de

viento que obedecen no solo la ley de Kepler, sino también las ecuaciones de difusión [136].

Ahora bien, teniendo en cuenta que la curva de rotación consta de dos partes: una donde domina la gravitación para $R < R_0$, y otra donde la contribución de la cinética de gas se vuelve dominante $R > R_0$.

Aquí se estiman las masas de las dos galaxias mencionadas anteriormente utilizando su curva de rotación medida y sugerido por [144], [146] y [147], utilizando el modelo previamente obtenido para la distribución de masa de la ecuación (9.21) [91], [136].

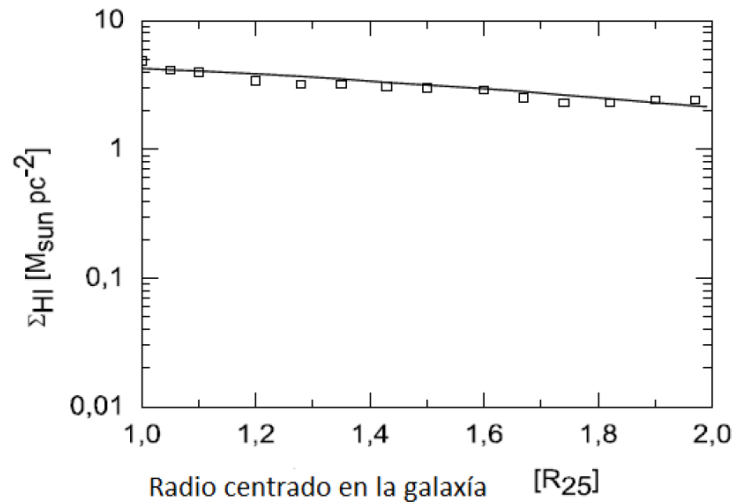


Figura 10.2: Medición (cuadrados) reportados por [144]; [145] y calculados con (10.77) (línea solida) HI columna de densidad para NGC3198 [136].

Los coeficientes α_k^* y β_k^* son utilizados para encontrar por medio de la ecuación (9.21) la curva de rotación de estas dos galaxias. Las figuras 6 y 7 muestran los resultados de dicha aproximación para NGC7331 y NGC3198 respectivamente [136].

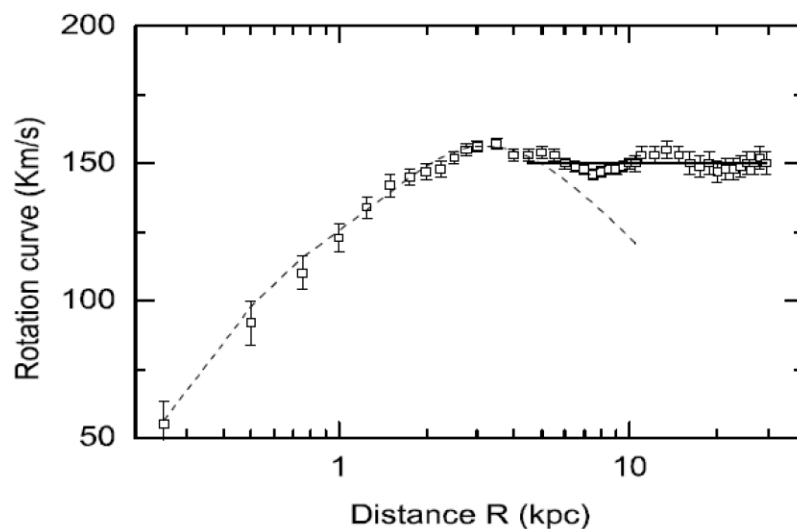


Figura 10.3: Medición (cuadrados) reportados por [144]; [146] y [147], calculado con el modelo de curva de rotación [91]; (línea continua) para NGC 7331. La corriente de viento (parte externa de la curva de rotación) que corresponde a la distribución de HI (vease figura 10.1) se muestra mediante la línea continua en negrita horizontal [136].

La línea recta gruesa (la parte constante de la curva de rotación) en las figuras 8 y 9 corresponde a corrientes de viento (curvas de rotación) formadas por gas que obedece a las ecuaciones de difusión y tiene densidades de columna que se muestran en las figuras 6 y 7.

Como puede ser visto aquí, las corrientes de viento (curvas de rotación constantes) se extienden a la distancia donde la función de densidad de la columna tiene la forma exponencial (10.75) [136].

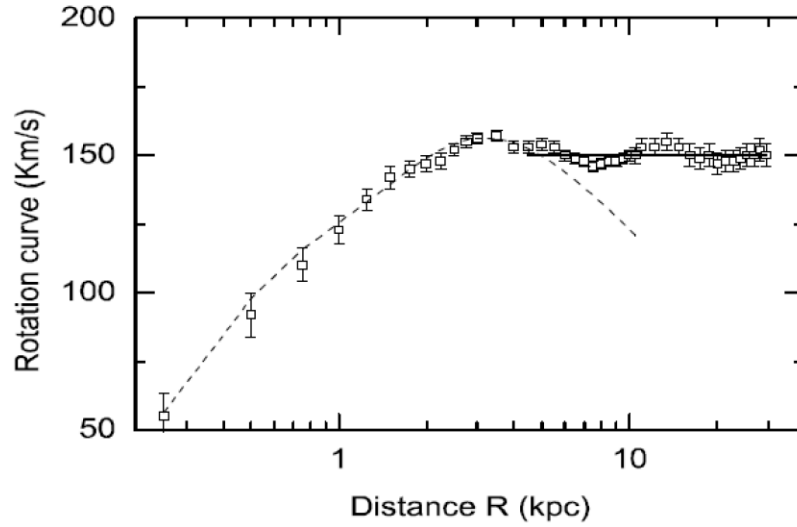


Figura 10.4: Medido (cuadrados) como lo reportan [144], [146], [147], y calculado con el modelo de curva de rotación [91] (línea discontinua) para NGC3198. La corriente del viento (parte externa de la curva de rotación) que corresponde a la distribución HI (véase la figura 10.2) se muestra mediante la línea continua horizontal en negrita [136].

Los coeficientes obtenidos para NGC7331 son $\alpha_1^* = 0,39$, $\beta_1^* = 0,112$, $\alpha_2^* = 5,5$, $\beta_2^* = 28,8$, ya para NGC3198 se usan $\alpha_1^* = 0,21$, $\beta_k^* = 0,33$, $\alpha_2^* = 0,55$ y $\beta_2^* = 6$ [136].

Ahora las masas de estas galaxias se pueden obtener con relación a la masa total bariónica sugerida por [91]. En este caso para NGC7331 se encuentra que $M_{7331} = 37,6 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ y para NGC3198 la masa total es $M_{3198} = 7,7 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ [136].

Las curvas de rotación presentadas en esta sección tienen en consideración los efectos hidrodinámicos para el componente del gas en la galaxia. Estos efectos pueden modelarse gracias a la ecuación de difusión (10.64). Esta ecuación de difusión permite obtener las expresiones para la columna de densidad mostradas de (10.72) a (10.77) y con estas fue posible construir las curvas de rotación para las galaxias NGC7331 y NGC3198 mostradas en las fig. 10.3 y 10.4.

A lo largo de este capítulo se han venido mencionando algunos aspectos importantes acerca de los códigos numéricos que son aplicados en simulaciones astronómicas, por eso mismo a continuación, se abordarán las diferentes limitaciones físicas que son impuestas y que son importantes en el uso de los códigos numéricos.

También, se mencionará de las razones que se tienen para pensar que el uso de las ecuaciones termodinámicas e hidrodinámicas no ha sido desarrollado de la manera correcta. Todo esto haciéndose énfasis en las diferencias de escalas para las que se diseñan los códigos numéricos; comparados con muchas de las escalas de los sistemas a los que se les aplican dichos códigos.

10.7. Limitaciones Físicas en uso de Códigos Numéricos

Toda teoría física presenta limitaciones en su aplicabilidad. Estas limitaciones tienden a acotar las ecuaciones y la física en los sistemas. Estas limitaciones pueden deberse a las condiciones de frontera, a las escalas, a la naturaleza física del problema, el objeto de estudio, simetrías, predictibilidad; entre otros factores. Estos factores además de afectar a la misma naturaleza del problema, también implican restricciones a los códigos numéricos y en ocasiones no se han considerado esas restricciones al aplicar dichos códigos como en [132], [133], [134] y [140], etc.

Como se vio en el apartado anterior, las ecuaciones de HD se derivan de las ecuaciones cinéticas al promediarlas (integrándolas) sobre las velocidades [141].

Dado que se ha visto en este trabajo que en el equilibrio de fuerzas y en la dinámica de la galaxia actúa la presión del gas, se hizo énfasis en que las ecuaciones que dominan la dinámica de los gases provienen de la teoría de la cinética física.

En la actualidad, simulaciones de la distribución de densidad se realizan sobre la suposición del dominio de la fuerza gravitacional. En este caso, basado en simulaciones hidrodinámicas, se ha concluido que el efecto de la cinética del gas en la formación de curvas de rotación es significativo.

En el trabajo escrito por [133] se desarrolló un código de simulación llamado FLASH que resuelve las ecuaciones HD basado en un código llamado PROMETHEUS. El código FLASH fue desarrollado para estudiar los problemas de los flashes nucleares en las superficies de estrellas de neutrones y enanas blancas, así como en el interior de enanas blancas.

Este código FLASH ha sido actualizado con el tiempo y su utilidad ha ido evolucionando a tareas cada vez más diversas para cubrir otros fenómenos físicos (con diferentes escalas) a los originalmente planteados, esto explica porque el código FLASH pudo ser usado para simulaciones de fenómenos a escalas de nuestra galaxia a pesar de haber sido creado para el estudio de flashes nucleares en las superficies estelares. Por esa razón, aunque el código inicialmente fue concebido para ciertas simulaciones, después fue adaptado para tratar casos más generales.

Es precisamente este código FLASH el que es utilizado por [132] para realizar sus

simulaciones sobre el efecto del soporte de presión en las galaxias de disco. Este código describe en este artículo desde el punto de vista físico las ecuaciones de Euler de forma conservativa para la dinámica de un gas compresible. Todo esto para una, dos y tres dimensiones; además también se escriben para la dinámica de un gas o para la dinámica de una mezcla de gases.

Existe también el estudio sobre la retroalimentación de las estrellas masivas para la formación de galaxias [134]. En este trabajo se realizó un conjunto de modelos de medio interestelar local (ISM) estratificado verticalmente; es decir, un gas que se encuentra a muy baja presión y cercana al vacío, donde las moléculas o átomos del gas están muy alejadas una de las otras. Aquí las tasas de supernova y las densidades de columna de gas vertical varían.

En el código FLASH son utilizadas las ecuaciones HD y algunas de las ecuaciones de estado de la termodinámica que son manejadas en dicho código [133] lo que motivó a hacer un análisis de dichas ecuaciones.

De igual manera se abordan aquí algunas limitaciones físicas para el uso de los códigos numéricos como lo es el código FLASH.

A fines del siglo pasado, en el código FLASH [133] para flashes nucleares en las superficies de las estrellas de neutrones y las enanas blancas; la densidad del gas para el cual se escribió el código es $N = 10^{24} - 10^{35} \text{ cm}^{-3}$. En este caso, se estipula específicamente que existen desviaciones de las restricciones para los valores de la densidad en el código.

Una de estas limitaciones es la suposición de que la presión total es estrictamente igual a la suma de todas las presiones parciales como lo sugiere la ecuación (10.12).

En su artículo Joung y Mac Low [134] utilizaron el código FLASH para calcular la dinámica del medio interestelar, caracterizado por densidades de $N = 10^{-3} - 10^3 \text{ cm}^{-3}$. Como se puede ver aquí, hay una diferencia en 27 órdenes de magnitud comparado con el de $N = 10^{24} - 10^{35} \text{ cm}^{-3}$ para la escala original en la que fue planteado el código. No obstante, el código FLASH ha tenido actualizaciones a lo largo de los años que le han permitido extender su uso a diversas problemáticas astronómicas. En esta sección solo se está presentando una descripción de ciertas limitaciones físicas en los códigos numéricos.

En su trabajo Dalcanton y Stilp [132] usaron los resultados de autores anteriores que utilizaron el código FLASH para describir el gas en densidades $N \lesssim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$. También, los autores Dalcanton y Stilp [132] utilizan el concepto de presión turbulenta para describir la dinámica de las galaxias caracterizadas por dimensiones del orden de 10 pc o más, inmerso en el medio ambiente con una densidad de $N = 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ y que en este sentido esto corresponde a un error de aplicación de acuerdo con el rango de escalas para el código.

También se ha mencionado que, en un gas enrarecido, la presión total no es igual a la suma de todas las presiones parciales [141] como lo describe la ecuación (10.13), lo que conduce a errores en las ecuaciones aplicadas al funcionamiento del código.

El tamaño de las partículas de gas que se considera está constituido por hidrógeno neutro (HI), por lo que para la órbita de Bohr la sección eficaz de choques elásticos es

una superficie con un radio del orden de $r=0.5 \text{ \AA}$ (CODATA). Considerando este radio para el hidrógeno, se obtiene una sección eficaz con valor de $\sigma = 7,853982 \times 10^{-17} \text{ cm}^2$.

Aquí se ve que los autores Dalcanton y Stilp [132] en su trabajo violaron esta restricción, ya que en su trabajo ellos utilizan una longitud característica L_k para un volumen donde se presenta la turbulencia del gas de 10 pc que es mayor a la de un volumen dado por la trayectoria de camino libre medio l_{fp} , y en este caso la aproximación HD no funciona. Los autores muestran que la escala de la longitud característica de las inhomogeneidades es del orden de $L_k = 1 - 10 \text{ pc}$, en que los parámetros del gas cambia significativamente, mientras que la trayectoria de camino libre medio de una partícula a una densidad de $N = 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ es $l_{fp} = 3 - 30 \text{ pc}$.

Entonces el valor para la trayectoria de camino libre medio l_{fp} utilizado del orden $l_{fp} = 3 - 30 \text{ pc}$ es demasiado chico teniendo en cuenta las dimensiones de la galaxia considerada entre $15 - 25 \text{ kpc}$ y eso se puede ver por las dimensiones de las curvas de rotación dadas en el trabajo de Dalcanton y Stilp [132].

Por lo tanto, el enfoque hidrodinámico no se puede aplicar directamente para análisis de las curvas de rotación para galaxias de disco, sino que es necesario partir de la cinética física. Este enfoque no debe ser aplicado para una densidad de $N = 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ ni siquiera para $N = 10^{-2}$, mientras que los autores están modelando [132] la dinámica del gas para densidades de gas del orden de $N = 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ partículas por unidad de volumen.

Existen otros trabajos que se han realizado utilizando un estudio más profundo para la dinámica del ISM e incluso se toman bajo consideración los efectos de los campos magnéticos.

Uno de estos trabajos fue escrito por Tasker, E.J. y Bryan G. L. [142], en el los autores desarrollaron un método hidrodinámico para simular la dinámica del ISM de múltiples fases en una galaxia de disco del tamaño de la Vía Láctea.

El disco fue modelado en una caja cúbica tridimensional, con una longitud por lado de 1 Mpc e incluyen un tratamiento que permite la formación de estrellas y su retroalimentación.

Los autores examinaron la formación de inestabilidades gravitacionales para poder predecir donde ocurrirá la formación de estrellas. También, analizaron dos descripciones para la formación de estrellas, una de ellas basada en simulaciones cosmológicas y la otra basada en un estudio que permitió analizar la formación de estrellas por encima de una densidad numérica de $N = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ y que posee una alta eficiencia. En su estudio Tasker, E.J. y Bryan G. L. [142] pudieron darse cuenta de que ambos métodos pudieron reproducir lo encontrado por observaciones astronómicas para una relación entre formación de estrellas para supernovas de tipo II y alta densidad del gas. Esto incluye la retroalimentación de las supernovas de tipo II que consigue expulsar el gas del plano de la galaxia, la mayor parte del cual cae de nuevo en el disco. Esta retroalimentación también reduce sustancialmente la tasa de formación estelar.

También Tasker, E.J. y Bryan G. L. examinaron la distribución de densidad y la presión del ISM y mostraron que existe un equilibrio de presión aproximado en el disco, pero con un amplio rango de presiones en un lugar determinado.

En simulaciones como la realizada por Dalcanton y Stilp [132] para el estudio de dinámica de galaxias, los autores usaron el código FLASH [133] que se usó originalmente para el estudio de estrellas de neutrones y enanas blancas, donde se consideraron densidades del orden de $N = 10^{24} - 10^{35} \text{ cm}^{-3}$, este uso fue posible debido a la evolución con los años del código FLASH. Por esta razón en su trabajo Dalcanton y Stilp [132] consideran densidades del orden de $N = 10^{-3} - 10^2 \text{ cm}^{-3}$ que se reflejan en los perfiles de densidad descritos y que están fuera del rango de orden de magnitud con el que fue diseñado originalmente del código. Incluso en el trabajo de Joung [140] este mismo código se usa para densidades del orden de $N = 10^{-3} - 10^3 \text{ cm}^{-3}$ que igualmente dejan fuera el rango de orden de magnitud que manejó originalmente el código FLASH [133].

Además, se hace mención en el trabajo de Dalcanton y Stilp [132] que los cálculos analíticos directos demuestran que es probable que el soporte de presión contribuya significativamente al soporte radial de los discos de galaxias de baja masa, de acuerdo con las simulaciones numéricas.

El soporte de presión debido al movimiento turbulento tiene el potencial de producir una diferencia significativa entre la verdadera velocidad circular y la velocidad de rotación observada. El gas de la galaxia puede experimentar una fuerza exterior adicional debido a la presión. Esta presión de gas puede proporcionar un soporte radial adicional al disco gaseoso giratorio. La fuerza exterior resultante permite que el gas en el disco gire más lentamente que la velocidad circular, mientras se mantiene una órbita circular estable. También, el soporte de presión reduce significativamente la densidad aparente de las galaxias de baja masa. Sin embargo, tiene poco efecto en halos de 100 km s^{-1} . Por lo tanto, corregir el soporte de presión podría reducir cualquier discrepancia observada para los halos de baja masa, pero no tendría un impacto significativo en las masas más altas [132].

Los modelos dinámicos de galaxias en los trabajos de Dalcanton y Stilp también muestran una redistribución radial notable del gas en las galaxias de masa más baja, donde el soporte de presión es significativo. En estas galaxias, la conversión de gas en estrellas conduce a una reducción del soporte de presión. El soporte reducido conduce a un flujo de gas hacia el interior, lo que hace que el disco de gas evolucione para una distribución de densidad de su superficie. Este flujo interno de material eleva el momento angular medio en cada radio, lo que hace que la velocidad de rotación aumente con el tiempo. En contraste, las galaxias con velocidades de rotación más altas tienen grados más bajos de soporte de presión, lo que lleva a una pequeña redistribución radial del gas, y no hay cambios evidentes en la curva de rotación [132].

Así también, brevemente puede mencionarse un trabajo realizado por Avillez y Breitschwerdt [143], donde ellos realizaron una simulación a la dinámica del ISM y de su evolución química para galaxias de disco.

En las galaxias de disco de formación estelar, la materia y la energía circulan entre las estrellas y el gas interestelar. En el análisis de estos sistemas los autores Avillez y Breitschwerdt [143] utilizaron una simulación tridimensional por medio de la magneto-hidrodinámica. Donde ellos investigaron, el rol de la circulación de materia magnetizada entre el disco gaseoso y el halo galáctico circundante. Aquí, pusieron especial énfasis en

el efecto del campo magnético con respecto a las fracciones de volumen y masa de las diferentes "fases" del ISM, la importancia relativa de las presiones térmica y magnética, y también consideraron si el campo puede impedir el transporte de materia desde el disco hacia el halo.

La simulación fue realizada centrándose en el círculo solar, y extendiendo su distancia hasta $\pm 10 \text{ kpc}$ perpendicular al disco galáctico y para un rango de densidades que va como $N = 10^{-4} - 10^2 \text{ cm}^{-3}$.

Para alcanzar el equilibrio dinámico global en el caso de una tasa de energía constante, las simulaciones de Avillez y Breitschwerdt [143] se hicieron con una escala de tiempo de 400 Myr (un Myr equivale a un millón de años). Una de sus observaciones principales fue que el transporte de gas al halo en $3D$ no se evita mediante un campo magnético paralelo de disco inicial, pero que solo se retrasó inicialmente, mientras sea necesario para perforar agujeros en el grueso disco de gas magnetizado.

Normalmente el gas homogéneo esta parcialmente ionizado; por esta razón solo una parte del gas es neutra. Se tiene un gas de dos componentes y comportamientos diferentes. Por esta razón es una buena idea para propuesta de trabajo a futuro considerar el uso de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica de dos componentes.

Para esto debe considerarse un análisis más profundo en las ecuaciones, en la física del problema y en sus restricciones para hacer un uso más adecuado de estas ecuaciones y de las simulaciones numéricas.

El análisis de las ecuaciones de la hidrodinámica y de la termodinámica en base a sus restricciones sugiere que estas ecuaciones no pueden ser aplicadas de una forma convincente a las simulaciones numéricas sobre dinámica y evolución de galaxias de disco.

Las ecuaciones de la HD deben ser obtenidas usando las ecuaciones de la cinética física y por esta razón deben respetar las leyes de la termodinámica y sus respectivas ecuaciones de estado.

Como se observó, la turbulencia ocasionada por la presión del gas en la dinámica de una galaxia de disco puede ayudar a soportar dicho disco contra la fuerza interior de la gravedad.

Sin embargo, en el estudio de la dinámica de estas galaxias se utiliza la ley de Dalton de las presiones parciales para gases ideales; resultando en una contradicción ya que la turbulencia es una propiedad que presentan los fluidos no ideales (esto resulta en que este estudio funcione solo parcialmente).

La consideración de que la presión total P_{tot} es la suma de la presión térmica P_{ther} y la presión turbulenta P_{turb} como en la ecuación (10.12), representa por si misma una contradicción, ya que la presión térmica P_{ther} es aplicable para gases ideales, mientras que la presión turbulenta P_{turb} es aplicable para gases no ideales.

Los autores Dalcanton y Stilp realizaron suposiciones para las velocidades de rotación de las galaxias en su modelo. Asumieron que hay un cierto perfil de velocidad circular subyacente conocido por las simulaciones de N-cuerpos y luego calcularon la curva de rotación aparente, incluidos los efectos de la presión. Adoptaron una velocidad circular $V_c(r)$ para las galaxias en su modelo suponiendo que la distribución de masa

está dominada por un perfil de densidad *NFW*. También, calcularon la velocidad circular adoptada $V_c(r)$ que se espera para el perfil *NFW* y derivan de la aparente velocidad angular $V_\theta(r)$ para incluir los efectos de la presión de soporte [132].

Dalcanton y Stilp trazaron las curvas de rotación observadas resultantes para las tres velocidades de rotación. A altas velocidades de rotación, el soporte del momento angular es mucho más importante que el soporte de presión, y la curva de rotación observada es un excelente indicador de la velocidad circular adoptada. Sin embargo, a bajas velocidades de rotación, el soporte de presión se vuelve significativo, de modo que el disco de gas puede rotar más lentamente mientras aún se soporta contra el colapso. En tales casos, la velocidad de rotación observada es significativamente menor que la velocidad circular adoptada [132].

Este es un motivo más para considerar que las limitaciones de las ecuaciones hidrodinámicas en las simulaciones no fueron correctamente respetadas. Estos estudios que incluyen los efectos del apoyo de la presión en su análisis y que se desvían del comportamiento de las curvas de rotación tradicionales. Ya que la galaxia es un sistema termodinámico e hidrodinámico no ideal, las consideraciones utilizadas no han sido correctas.

El campo magnético también debería tener una contribución importante a la dinámica de la galaxia, ya que el gas se encuentra ionizado de manera parcial lo que ocasiona que el campo magnético, aporte una fuerza de presión magnética distribuida a lo largo del disco de la galaxia.

Por estas cuestiones se hace énfasis en que las ecuaciones hidrodinámicas y sus restricciones no son aplicadas de manera correcta a los códigos numéricos. Presentar por otro lado un modelo completo y que abarque toda la naturaleza física para la dinámica de galaxias de disco, resulta imposible para fines prácticos. Pero también es importante considerar adecuadamente las restricciones físicas en simulaciones futuras.

En el presente trabajo se mostró que el análisis y simulaciones de las curvas de rotación de las galaxias espirales, no solo debe basarse en las simulaciones de la dinámica y la distribución de masas. En este sentido, el enfoque del papel dominante de la interacción gravitacional, no está completo y no puede considerarse tan satisfactorio.

Hemos argumentado que la influencia de la cinética del gas en la formación de curvas de rotación no puede descuidarse, es decir, las propiedades físicas del gas deben tenerse en cuenta para determinar la estructura cuasiestacionaria del disco gaseoso y, por lo tanto, la influencia de las colisiones de los átomos e iones en la formación de flujos de gas estacionarios debe ser al menos estimada de otra manera.

Además, para cualquier modelo de disco de una galaxia espiral, se debe tener en cuenta la cinética de los gases, no hacerlo conduce a un modelo incorrecto del disco galáctico y, como consecuencia, a una estimación incorrecta de las masas gravitacionales y su distribución. La solución de las ecuaciones de difusión implica que la curva de rotación del gas depende de la densidad del gas. Tal dependencia, si se observa, demostrará la importancia de la cinética de los gases en la formación de la parte externa de la curva de rotación.

En este caso, aproximadamente las mismas velocidades tangenciales (como lo ha

hecho el gas) de las estrellas que se mueven fuera de R_0 pueden explicarse como momentos obtenidos del gas del que se formaron las estrellas. Por esta razón, mientras que el gas giratorio está limitado, estas estrellas remotas que se mueven con las mismas velocidades no están unidas gravitacionalmente y abandonarán la galaxia anfitriona en el futuro [136].

Para describir correctamente el perfil de una curva de rotación observada en las galaxias espirales, no solo la interacción gravitacional, sino también las propiedades físicas del gas deben tenerse en cuenta [136].

Las curvas de rotación consisten en dos partes. Una parte interna que está formada por un gas ideal sin colisión, que consiste en estrellas, y en este caso domina la interacción gravitacional, mientras que otra parte (localizada en la región externa del disco) está formada principalmente por el gas real, cuyo movimiento obedece no solo la gravedad, sino también las ecuaciones de difusión. Por esta razón, la cinética del gas contribuirá a la formación de los flujos estacionarios de gas (y, en consecuencia, a la formación de la parte externa de la curva de rotación) y, en este caso, la parte correspondiente de la curva de rotación debe calcularse teniendo en cuenta las ecuaciones de difusión [136].

Aproximadamente las mismas velocidades tangenciales, como la que tiene el gas de las estrellas raras remotas que se mueven fuera de R_0 pueden explicarse como momentos obtenidos del gas del cual se formaron las estrellas. Por esta razón, mientras que el gas giratorio está limitado, estas estrellas remotas que se mueven con las mismas velocidades no están unidas gravitacionalmente y abandonarán la galaxia anfitriona en el futuro [136].

Por todo lo anterior, se puede concluir que para describir correctamente el perfil de la curva de rotación observada de galaxias espirales, no solo la interacción de gravitación, sino también las propiedades físicas del gas deben tenerse en cuenta de manera correcta [136].

Por esta razón, la cinética del gas contribuirá a la formación de los flujos estacionarios de gas; y en consecuencia, a la formación de la parte externa de la curva de rotación observada. En este caso, la parte correspondiente de la curva de rotación debe calcularse teniendo en cuenta las ecuaciones de difusión [136].

Las ecuaciones de difusión permiten considerar la función de densidad del gas externo para la curva de rotación plana. A partir de las curvas de rotación medidas, se calcula la columna de densidad HI en función de la distancia R para dos galaxias espirales de borde: NGC7331 y NGC3198 [136].

Con la finalidad de conectar el presente capítulo con lo visto en el anterior y dar un valor numérico comparable con observaciones astronómicas, es posible calcular las masas de las galaxias espirales para las que se construyeron las curvas de rotación de la sección 10.6 por medio de la ecuación (9.77). Es decir, para la galaxia NGC7331 la masa total es del valor de $M_{7331} = 37,6 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ y para la galaxia NGC3198 la masa total consiste en $M_{3198} = 7,7 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ [136].

El uso de un modelo hidrodinámico inadecuado, debido a las restricciones iniciales, no se puede aplicar para calcular la dinámica de un gas enrarecido en las regiones

externas de los discos galácticos [136]. Por lo tanto, se concluye aquí, que es la cinética del gas la que domina en la formación de las curvas de rotación de las galaxias espirales a grandes distancias.

También se concluye que las curvas de rotación observadas en las figuras 10,3 y 10,4, parecen ser un indicio de que las galaxias NGC7331 y NGC3198 no presentan materia oscura.

En el siguiente capítulo se presentaran una serie de comentarios finales y conclusiones acerca de todos los temas que han sido desarrollados en este trabajo de tesis.

Capítulo 11

Resultados y Conclusiones

Del presente trabajo, el cual intenta acercar por medio de la variedad de Finsler algunas áreas de la física como relatividad, física cuántica, electromagnetismo y mecánica clásica; se han obtenido los siguientes resultados:

1. La variedad de Finsler es un marco matemático que generaliza la geometría de Riemann usada por Einstein en su teoría de la relatividad, la cual es adecuada para crear un modelo cosmológico en el que pueda encontrarse un sentido al fenómeno la energía oscuras; donde la expansión del universo se da de forma adiabática, que es libre de singularidades y que localmente conserva curvatura. Tomando en cuenta lo anterior; se consideró un modelo análogo de la métrica Riemanniana de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker para una métrica de Finsler. Debido a esto, en el capítulo 1, se mostró un modelo cosmológico utilizando la variedad de Finsler, de este modelo como resultado se obtienen las ecuaciones de Friedman similares a las derivadas en la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker en el marco de Riemann, solo que estas contienen un término extra que se asocia a la anisotropía del Universo. Estas ecuaciones como se mencionó en tal capítulo describen un universo-auto acelerado que controla la transición del universo para un estado de anisotropía a una fase isotrópica más suave.

2. Haciendo uso del concepto de invariancia adiabática descrito en el capítulo 2, en el capítulo 3 gracias al uso de la electrodinámica y las ecuaciones de Einstein se obtuvo que la constante de Planck es causada por el cambio lento de la curvatura del universo para un espacio-tiempo de Riemann-Cartan y en un espacio-tiempo de Finsler. Lo que expresa que la constante de Planck es el invariante adiabático del cambio de la geometría dada por la expansión del universo en una variedad de Finsler y esta expansión se encuentra en función del campo electromagnético del universo. Y gracias a esto, se ha podido construir una cuantización del campo electromagnético usando un enfoque geométrico y el concepto de variedad de Finsler.

3. Usando el concepto de Sommerfeld de invariancia adiabática para el tensor electromagnético, en el capítulo 4 pudo encontrarse la densidad de energía para el campo electromagnético como un invariante adiabático del cambio en el tiempo del universo en la variedad de Finsler.

También utilizando la teoría de Einstein-Cartan y la variedad de Finsler, se encontró el primer par de ecuaciones de Maxwell, las cuales al no presentar los términos de torsión, ya que estos solo tienen sentido en las proximidades de un agujero negro; se reducen al primer par de las ecuaciones de Maxwell sin fuente.

Por otro lado, el segundo par de ecuaciones de Maxwell se encontró de la variación del funcional $S_m = S_M$ considerando una carga caracterizada por la 4-corrientes j^α , y el campo electromagnético en la variedad de Finsler que varía adiabáticamente en el tiempo.

Es decir; en la variedad de Finsler se utilizó una construcción partiendo de la física clásica con la intención de describir ciertos sistemas cuánticos por medio de la mecánica clásica y el electromagnetismo; para ello se planteó una ecuación de movimiento para una partícula cargada en dicha variedad que cambia adiabáticamente en el tiempo.

4. Se ha intentado, por medio de una generalización no local y la teoría de la onda piloto dar una explicación diferente a la naturaleza de la función de onda, como una energía que proviene de la interacción del campo electromagnético entre un sistema cuántico y el observador. Esta función de onda que representa una onda piloto (fotón virtual) que guía una partícula cuántica.

Dado lo anterior, en el capítulo 5 por medio de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi se discutió la naturaleza del potencial cuántico como un potencial, que en este caso se asocia a la energía de oscilación del campo electromagnético.

5. Se hace también la interpretación de que la mecánica cuántica es la transformada de Fourier de la mecánica clásica, y la transformación para un hamiltoniano clásico $H = E$, va en función del campo electromagnético para una función armónica $\varphi = \exp(-ik_\alpha x^\alpha)$; y para la expansión de un conjunto completo de funciones propias $\Psi_k(x)$. Gracias a estas consideraciones fue posible encontrar la ecuación usual de Schrödinger.

Y en este capítulo, se encuentra el hamiltoniano para el oscilador armónico cuántico. Aquí, se utiliza la frecuencia de oscilación del electrón y del fotón virtual ω .

Con esto se entiende que el potencial cuántico aparece debido a la presencia de un fotón virtual, que por fotón virtual se entiende aquí como el campo electromagnético clásico oscilante acoplado con el electrón en movimiento con frecuencia ω , y que para el oscilador armónico forma una energía cuántica de estado cero $\frac{\hbar\omega}{2}$.

6. En el capítulo 6, por medio del principio de mínima acción de la mecánica clásica, se encuentran la regla de cuantización de Sommerfeld para invariancia adiabática. Gracias a este concepto de invariantes adiabáticos se construyó un modelo para describir la primera órbita atómica de Bohr.

También algunas consideraciones de similitud mecánica para mecánica clásica, son encontradas en el sistema del átomo de hidrógeno; gracias a esto se encontró la energía del oscilador armónico, donde una constante aditiva de $1/2$ para obtener el valor cuántico de la energía de punto cero del oscilador armónico aparece por consideraciones clásicas.

7. Para la ecuación de movimiento de una partícula cargada son encontrados los componentes temporal y espacial y usando una expansión en series para el factor de Lorentz en la variedad de Finsler, para posteriormente encontrar una explicación basada

en primeros principios para el momento magnético de electrón.

8. Debido a lo anterior; en el capítulo 7 se encontró por medio de la teoría de potencial clásica una expresión para el momento magnético del electrón.

Posteriormente se encontró una expresión relativista en la variedad de Finsler para dicho momento magnético y usando una corrección en la que el protón y el electrón giran alrededor de un centro de masas, el valor del momento magnético anómalo del electrón es calculado con el valor de $a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,00115965218091$.

De igual manera, para tomar en consideración el espín del electrón se usó la ecuación BMT y al considerar la contribución del momento angular, el espín y el acoplamiento espín-orbita se encontró el valor del momento magnético del electrón como $\vec{\mu}_e = -9,2848976802 \times 10^{-24} \frac{J}{T}$.

9. En el capítulo 8; se dió un repaso acerca de la condición de estabilidad de Cheatev para la ecuación de Klein-Gordon.

De igual manera que en el capítulo 5, haciendo uso de una transformada de Fourier, para la ecuación relativista del 4-momento. Para una función armónica que describe un campo electromagnético $\varphi = \exp(-ik_\alpha x^\alpha)$; y expandiendo un conjunto completo de funciones propias $\Psi_k(x)$ fue posible nuevamente derivar la ecuación de Klein-Gordon, pasando de un espacio donde vive la relatividad especial a otro espacio donde vive la física cuántica relativista.

10. En el capítulo 9, utilizando un método integral se encontró el potencial gravitacional para una galaxia de disco utilizando coordenadas cilíndricas y una aproximación para la densidad de Miyamoto-Nagai, la cual solo representa la distribución de densidad para la materia. Lo que permitió describir velocidad de rotación de la galaxia y la curva de rotación para nuestra galaxia para encontrar una curva de rotación. Esta curva de rotación que anteriormente fue mostrada y comparada con la encontrada con resultados previos dados por Miyamoto-Nagai.

11. Se usó un método diferencial de transformadas integrales finitas creado por Grinberg con el que se encontró el potencial gravitacional general para distribuciones cilíndricas de materia bariónica, y posteriormente usando la misma aproximación para la densidad de Miyamoto-Nagai de la sección 9,2 del capítulo 9, se encontró dicho potencial para galaxias de disco y con esto se construyó la ecuación para la velocidad de rotación de una galaxia de disco que describe su curva de rotación. Esta fue construida para datos observacionales para la Vía Láctea y esta fue comparada con otra encontrada en la bibliografía.

12. En el capítulo 10 fueron tratados algunos aspectos de la hidrodinámica de galaxias de disco y su contribución a las curvas de rotación. Dado a todo lo que se ha mencionado en los capítulos anteriores, puede afirmarse que la métrica de Finsler tiene algunas ventajas para explicar ciertos aspectos de la naturaleza comparados con la métrica de Riemann. Esto es debido a que la métrica de Finsler depende explícitamente de las velocidades en las que varía su geometría. Y esto permite encontrar ciertas diferencias con los modelos cosmológicos actuales. En primer lugar, gracias a estas velocidades, presenta la ventaja de no convertirse en un espacio plano localmente, ya que la curvatura del espacio no desaparece y permite describir la física cuántica en un espacio

con gravedad. También, aunque la coordenada radial del universo se disminuyera hasta el punto cero, la métrica sigue siendo función de la velocidad. Por esta razón este modelo del universo es libre de singularidades. Al ser libre de singularidades no presenta un Big Bang, en este sentido el universo se ha expandido desde un radio mínimo hasta un radio máximo y una vez que alcanza este radio se contrae hasta llegar a su tamaño inferior. Adicionalmente, la geometría de Finsler genera de manera natural la expansión acelerada del universo sin la necesidad de energía oscura. Las ecuaciones de Friedmman pueden encontrarse en esta métrica de Finsler, y gracias a que presentan un término extra que se refiere a la aceleración, describen un universo autoacelerado y en el que existe anisotropía débil. Por otro lado, el concepto de invariancia adiabática dado en mecánica clásica permitió describir el modelo de Sommerfeld para la física cuántica antigua, en el que la constante de Planck aparece como una cantidad que permanece constante debido a la evolución lenta del sistema. Retomando este concepto considerando que el campo electromagnético del universo varía proporcionalmente a la expansión de su radio y que esta es una expansión lo suficientemente lenta para ser imperceptible por nuestras mediciones. Fue posible encontrar las ecuaciones de Einstein, donde el tensor de energía-momento correspondía al tensor de Faraday. Encontrando así las ecuaciones de Einstein que presentan a la constante de Planck como el invariante adiabático del cambio en la geometría del universo.

Con todo lo anterior se construyó las ecuaciones de Euler-Lagrange, en las que aparecía un término extra, debido a la expansión del universo.

Aquí, el universo al expandirse de forma acelerada es un sistema abierto. Ya que este término extra representa el intercambio de energía de la variedad. Al poder encontrar el momento para la expansión del universo en esta variedad, se pudo encontrar un valor para la constante de Hubble la cual fue comparada con los valores reportados y encontrarse que aquí también aparece la constante de Planck como el invariante adiabático del cambio de la geometría de Finsler para nuestro universo. Un valor para la energía del campo electromagnético fue encontrado, dando de nuevo el valor de la constante de Planck como su invariante adiabático. Aquí el valor de la constante de Planck tiene una buena aproximación a su valor aceptado en la actualidad.

En este modelo, además se puede encontrar un cambio para el valor de la constante de estructura fina. Esto fue encontrado para una métrica de Riemann y una de Finsler.

Algunos estudios sostienen que las constantes de la naturaleza no sean en realidad constantes, y la constante de estructura fina no debería escapar a esta afirmación. Ya que la constante de estructura fina depende del valor de la constante de Planck.

Volviendo a las consideraciones de la métrica de Finsler, una vez que se ha encontrado al campo electromagnético como el invariante adiabático de la expansión del universo fue posible encontrar las ecuaciones de Maxwell. El primer par de ecuaciones de Maxwell, que no presenta fuente; es igual en las variedades de Riemann y de Finsler. Pero aquí, al ser considerada una fuente electromagnética pudo encontrarse que el segundo par de ecuaciones de Maxwell está en función de la invariancia adiabática del campo electromagnético. Con esto una ecuación para la dinámica de una partícula cargada fue construida. Con la diferencia de que esta ecuación presenta la constante de

Planck debido a su invariancia adiabática en la variedad de Finsler. En esta variedad de Finsler también fue posible encontrar un cambio para la constante de estructura fina.

En la ecuación encontrada aquí es posible una descripción de los efectos de Aharonov-Bohm. El efecto magnético de Aharonov-Bohm puede verse como resultado del requisito de que la física cuántica ortodoxa sea invariable con respecto a la elección de la norma para el potencial electromagnético, de los cuales el potencial del vector magnético A_μ forma parte. Comparándose con lo anterior, este efecto Aharonov-Bohm pudo encontrarse de la ecuación de movimiento para una partícula cargada y no fue necesario tomar consideraciones cuánticas derivadas de la ecuación de Schrödinger ni usando el postulado de la función de onda. Cabe mencionarse aquí que el campo acotado en la ecuación de movimiento, en realidad afecta a la partícula en movimiento a través de los potenciales A_μ y este campo acotado corresponde al potencial cuántico en el formalismo de Bohm.

La interpretación de la mecánica cuántica de Bohm es una teoría de variables ocultas en la que se admite que las variables ocultas pueden proveer una descripción objetiva determinista que pueda resolver o eliminar muchas de las paradojas de la mecánica cuántica. La teoría de Bohm además es una teoría determinista.

En el formalismo de la teoría de de Broglie-Bohm, como en el de la mecánica cuántica convencional, existe una función de onda; una función en el espacio de todas las configuraciones posibles, pero adicionalmente contiene también una configuración real, incluso para situaciones donde no hay observador. La evolución temporal de las posiciones de todas las partículas y la configuración de todos los campos queda definida por la función de onda, que satisface la ecuación guía. La evolución temporal de la propia función de onda viene dada por la ecuación de Schrödinger como en la mecánica cuántica no relativista.

Al considerar anteriormente la existencia de un fotón virtual que proviene de la oscilación de un electrón y que además guía el movimiento de esta partícula, se llega a la conclusión de que el campo electromagnético funciona como el mediador entre la interacción de un sistema cuántico y el observador. Por esta razón no se necesitan variables ocultas, ya que aquí la variable a considerar viene dada por un potencial cuántico que está dada por dicho campo electromagnético.

La transformada de Fourier, es una transformación matemática empleada para transformar señales entre el dominio del tiempo o del espacio, y el dominio de la frecuencia. En mecánica cuántica, esta transformada de Fourier puede usarse para pasar de una forma de representar el estado de la partícula, por una función de onda para la posición, a otra forma de representar el estado de la partícula, por una función de onda de momento.

La diferencia principal radica en que aquí, la transformada de Fourier se usó para pasar de un espacio donde se representa un hamiltoniano clásico a un espacio donde este se ve transformado en la ecuación de Schrödinger.

En esta transformación, la transformada de Fourier depende de un potencial electromagnético. Este potencial se puede expandir como una serie para un conjunto completo de funciones propias en el problema de Sturm-Liouville donde sus coeficientes corres-

ponden a los operadores de creación y destrucción, también conocidos como operadores escalera.

En mecánica cuántica ortodoxa estos operadores quitan o agregan un cuanto a la energía que coincide con los autovalores de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Mientras que, en el sentido usado aquí, los operadores son coeficientes de expansión para el potencial electromagnético. Dándole así un sentido físico real a la función de onda y derivándose de primeros principios en lugar de postular su existencia.

Usando la mecánica clásica se encontró la regla de cuantización de Sommerfeld con lo que fue posible encontrar la energía del punto cero del oscilador armónico cuántico. Gracias a esta regla de cuantización se pudo encontrar la energía del campo electromagnético y de la acción clásica, la ecuación para una partícula cargada. Se pudo construir con ello un modelo como potencial central para el átomo de hidrogeno. Con lo que la energía y el momento magnético del electrón fueron encontrados.

De igual forma se encontró una ecuación relativista para calcular el momento magnético del electrón en función de su momento angular. Con ello se construyó un modelo en el que el núcleo y el electrón giran alrededor de un centro de masas y tomando en cuenta la contribución del espín y el acoplamiento espín-orbital se encontró un valor para el momento magnético del electrón $\vec{\mu}$ y otro valor para su momento magnético anómalo a_e . Estos valores se encuentran cercanos a los valores arrojados por los experimentos. Esto se usó considerando que el potencial eléctrico del núcleo causa un cambio en la velocidad del electrón en su órbita. Cambiando así el valor clásico de la constante de estructura fina para el electrón y como consecuencia el valor de a_e .

En electrodinámica cuántica, el momento magnético anómalo de una partícula es una contribución de los efectos de la mecánica cuántica, expresada por los diagramas de Feynman con bucles, al momento magnético de esa partícula. La contribución de un bucle al momento magnético anómalo, correspondiente a la primera y más grande corrección cuántica, del electrón se calcula por medio de la función de vértice que se muestra en el diagrama adyacente. El resultado de un bucle es el valor de $a_e \approx \frac{\alpha}{2\pi}$. En este sentido, la constante de estructura fina representa la intensidad de la fuerza de acoplamiento entre la carga eléctrica y un campo electromagnético. Sin embargo, aquí se ha considerado su interpretación clásica $\alpha = \frac{v}{c}$ dada por Sommerfeld y eso permitió encontrar el momento magnético anómalo del electrón a_e como fue encontrado.

La ecuación de Klein-Gordon; describe un campo escalar libre en teoría cuántica de campos. La manera en que fue encontrada aquí usando la teoría de estabilidad y la transformada de Fourier demuestra que también bajo consideraciones clásicas de mecánica y electromagnetismo es posible abordar la física cuántica relativista. Donde la función de onda por un lado se puede ver como una función que cumple ciertas condiciones de estabilidad para el sistema mecánico. De igual forma que anteriormente pudo construirse usando la transformada de Fourier para pasar de la ecuación para la 4-energía a un espacio donde se manifestó dicha ecuación de Klein-Gordon. Con todo esto no fue necesario postular un campo escalar para partículas de espín nulo ya que se encontró esta ecuación por medio de consideraciones electromagnéticas y de estabilidad.

La teoría de estabilidad permite estudiar la evolución de los sistemas dinámicos y

tiene la ventaja de que puede considerar pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales de las variables que se encuentran en las ecuaciones de movimiento. Por lo que la mecánica clásica puede ser usada en la forma usual.

Se realizó un análisis astrofísico acerca de la dinámica de galaxias de disco, construyendo curvas rotación para estas galaxias.

Estas curvas fueron construidas a través de un método diferencial y uno integral. En estos se usó directamente una aproximación para la densidad de materia de Miyamoto-Nagai, para encontrar el potencial gravitacional de la galaxia.

El método diferencial utilizado aquí fue el método de Grinberg. Este método presenta la ventaja de que permite proyectar un problema en diferentes variables a una sola y su solución se vuelve más sencilla al considerarse como sistema unidimensional. A su vez, posteriormente con la solución general existe la forma de proyectarse de nuevo sobre las demás dimensiones.

Mientras que en el método diferencial se construyó una solución general para el potencial de distribuciones cilíndricas de materia. Posteriormente, la aproximación de la densidad de Miyamoto-Nagai fue usada para construir con este método una curva de rotación. Estas curvas de rotación fueron comparadas con la construida por Miyamoto-Nagai y con otras observaciones astronómicas, dando un resultado aproximado al comportamiento observado.

En el capítulo 10 es tratado el hecho de que las ecuaciones de la hidrodinámica (HD) pueden ser deducidas al integrar las ecuaciones de la cinética de los gases.

La ventaja conceptual que presenta encontrar las ecuaciones de esta forma es que toman en consideración las escalas en las que se analiza la dinámica del gas. Gracias a esto, las ecuaciones cinéticas permiten utilizarse de forma correcta en simulaciones de dinámica galáctica.

Aquí se observó que la dinámica de la galaxia presenta dos fases, una interna donde se encuentra la dinámica de las estrellas y otra externa donde domina la dinámica del gas. Al estudiar la curva de rotación de las galaxias de disco, generalmente solo se toma en cuenta el efecto gravitacional; no obstante, al considerar la dinámica del gas exterior la curva de rotación obtenida es congruente con las observaciones. Por lo que es importante considerar la hidrodinámica del gas para su construcción.

Incluso se considera que la ecuación de Dirac puede también deducirse de primeros principios. Utilizando el concepto de cuaterniones, las matrices de Pauli pueden ser construidas y con ellos puede describirse el espín. De igual manera, está ha sido descrita en un espacio-tiempo con torsión. Sin embargo, se entiende aquí que las componentes de torsión solo pueden existir para las proximidades de un agujero negro. Con todo esto podría describirse la ecuación de Dirac usando primeros principios en el marco de una variedad de Finsler que cambia adiabáticamente en el tiempo.

Dado a todo lo anterior, puede observarse que varios problemas presentes en la cosmología actual pueden ser entendidos usando los fundamentos planteados en este trabajo. Mientras que la física cuántica puede ser construida no de sus postulados; sino por medio de consideraciones clásicas. Aprovechando las propiedades geométricas del espacio-tiempo; las ecuaciones de movimiento y la presencia de los campos electro-

magnéticos en los diversos sistemas cuánticos.

La geometría de Finsler es la extensión de la geometría riemanniana sin restricción cuadrática. En realidad, la geometría pseudo-riemanniana es un caso particular de la geometría de Finsler [136].

También, en el marco de la geometría de Finsler, la constante cosmológica aparece de manera natural a partir de la geometría misma, tiene una explicación natural y es posible unificar la teoría cuántica y la gravedad.

Además de eso en la variedad de Finsler, la constante de Planck calculada a partir de primeros principios, por medio de parámetros cosmológicos medidos, coincide con su valor experimental hasta el segundo dígito [3].

Estos argumentos se presentan a favor de la geometría de Finsler dan a pensar que la necesidad de modelar nuestro universo por medio de la variedad de Finsler puede ser la correcta.

Existe la posibilidad a futuro de extender este trabajo, es posible describir de forma completa la ecuación de Klein-Gordon en una variedad de Finsler con invariancia adiabática. También, haciendo uso de cuaterniones puede describirse la ecuación de Dirac y posteriormente describirla en la métrica de Finsler con invariancia adiabática y donde la función de onda corresponda también con un fotón virtual.

Al tener estos dos resultados, pueden extenderse estas descripciones de las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac; al estudio de la interacción de partículas con campos como el electromagnético.

Por otro lado, puede usarse la regla de cuantización de Sommerfeld para cuantizar el campo gravitacional en una variedad de Finsler con invariancia adiabática, al estudiarse dicho campo gravitacional en la cercanía a agujeros negros.

Existen estudios en los que se analizan ciertas propiedades de la relatividad general y los agujeros negros, a partir de este análisis se han intentado dar explicaciones alternativas para las curvas de rotación de galaxias de disco, como en el caso de trabajos como el de Avilés Niebla, Nieto Marín y Nieto [148]. Es posible con ello considerar la influencia del agujero negro en el centro de las galaxias de disco y considerar sus efectos en la dinámica de las galaxias de disco y sus curvas de rotación.

Los autores Avilés Niebla, Nieto Marín y Nieto en su artículo [148] hablan acerca de la existencia de taquiones en el interior de un agujero negro en una signatura para la métrica de $(5 + 5)$, la idea central en este trabajo es el de suponer que dentro del agujero negro existen partículas superlumínicas que influyen en el comportamiento de los objetos exteriores.

Es su trabajo [148] los autores construyen un mapeo complejo para relacionar el interior y el exterior del agujero negro y al final menciona como poder derivar curvas de rotación de galaxias espirales al expresar parámetros para el radio (r y r') y masa (m y m') para partículas dentro y fuera del agujero negro (formando una dualidad análoga al método de las imágenes como en electromagnetismo). Expresando la fuerza gravitacional, el potencial gravitacional y energía total en términos de estos parámetros los autores pudieron construir una curva de rotación para galaxias espirales.

Este es un método completamente diferente pero que sin embargo también conduce

a las curvas de rotación. El uso de la signatura de $(5+5)$ dimensiones es algo demasiado sofisticado. Por un lado, esta signatura no es consistente para explicar los datos observacionales. Por otro lado, nadie sabe cómo desarrollar un modelo correcto y consistente del comportamiento dinámico y relativista de la materia sobre la superficie de una brana y que sea consistente con observaciones astronómicas y resultados experimentales, ni tampoco cómo construir una teoría electrodinámica clásica análoga a nuestro universo de 4 dimensiones en el caso en que se introducen más de 4 dimensiones y que también sea consistente con observaciones astronómicas y resultados experimentales.

Por lo que puede a futuro abordarse el estudio de este problema para establecer si es posible encontrar una manera consistente de que la física dentro de un agujero negro en una signatura de $(5+5)$ dimensiones y este método para relacionarla con el exterior del agujero negro y la curva de rotación de una galaxia de disco pueda demostrar ser útil para explicar las observaciones astronómicas. También es posible analizar si puede construirse un modelo dinámico, electrodinámico y relativista usando la variedad de Finsler donde tenga repercusión directa los fenómenos ya mencionados del interior de los agujeros negros.

De igual manera, se plantea encontrar vínculos sólidos entre la relatividad general y la cosmología modeladas en la variedad de Finsler y las curvas de rotación de galaxias de disco para nuestro universo de signatura de $(1+3)$ dimensiones.

Apéndice: Transformada de Fourier y Principio de Incertidumbre

En términos generales, cuanto más concentrada es una función $f(x)$, más extendida esta su transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$. En particular, la propiedad de escala de la transformada de Fourier puede verse como sigue: si se propaga una función en x , su transformada de Fourier se extiende en ξ . No es posible concentrar arbitrariamente tanto una función como su transformación de Fourier [149] y [150].

La compensación entre la compactación de una función y su transformada de Fourier se puede formalizar en forma de un principio de incertidumbre al ver una función y su transformada de Fourier como variables conjugadas con respecto a la forma simpléctica en el dominio tiempo-frecuencia [149] y [150].

Supóngase que $f(x)$ es una función cuadrado integrable ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$). Sin pérdida de generalidad, también supóngase que $f(x)$ está normalizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1 \quad (\text{A.1})$$

aquí $\hat{f}(\xi)$ también es normalizada.

La dispersión alrededor de $x = 0$ puede medirse por la dispersión alrededor de cero definida por [150].

$$D_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx. \quad (\text{A.2})$$

En términos de probabilidad, este es el segundo momento de $|f(x)|^2$ sobre cero.

El principio de incertidumbre establece que, si $f(x)$ es absolutamente continua y las funciones $x \cdot f(x)$ y $f'(x)$ son funciones de cuadrado integrable, entonces [150].

$$D_0(f)D_0(\hat{f}) \geq \frac{1}{16\pi^2}. \quad (\text{A.3})$$

La igualdad se alcanza solo en el caso en que

$$f(x) = C_1 e^{-\pi \frac{x^2}{\sigma^2}} \quad \hat{f}(\xi) = \sigma C_1 e^{-\pi \sigma^2 \xi^2}, \quad (\text{A.4})$$

donde $\sigma > 0$ es arbitrario y $C_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma}}$ de modo que f esta normalizada en L^2 [150].

En otras palabras, donde f es una función gaussiana (normalizada) con varianza σ^2 , centrada en cero, y su transformada de Fourier es una función gaussiana con varianza σ^{-2} .

De hecho, esta desigualdad implica que:

En el contexto de las matemáticas, más en concreto del análisis armónico; el principio de incertidumbre implica que uno no puede localizar al mismo tiempo el valor de una función y su transformación de Fourier. Es decir, la siguiente desigualdad es válida:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |f(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{\|f\|_2^4}{16\pi^2} \quad (\text{A.5})$$

para $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ [150].

En mecánica cuántica, las funciones de onda de momento y posición son pares de transformadas de Fourier, dentro de un factor de la constante de Planck. Con esta constante debidamente tomada en cuenta, la desigualdad anterior se convierte en el principio de incertidumbre de Heisenberg [150].

Bibliografía

- [1] Meza A. and Lipovka A. A. (2022). ” *Modeling the Rotation Curve of Disk Galaxies*. ISSN 1990-3413, Astrophysical Bulletin, 2022, Vol. 77, No. 2, pp. 123–131. © Pleiades Publishing, Ltd., 2022.
- [2] Meza A. and Lipovka A. A. (2017) ” *Green function for the Poisson equation in a general case of astrophysical interest*”. Department of Research for Physics, Sonora University, 83000, Hermosillo, Sonora, México; arXiv: 1710.09273.
- [3] Lipovka A. A. (2017). ” *Physics on the adiabatically changed Finslerian manifold and cosmology*”. Journal of Applied Mathematics and Physics, 5, 582-595. doi: 10.4236/ jamp.2017.53050. arXiv:1608.04596, ISSN Online: 2327-4379, ISSN Print: 2327-4352.
- [4] Lipovka A. A.(2014) ” *Planck Constant as Adiabatic Invariant Characterized by Hubble’s and Cosmological Constants*”. Journal of Applied Mathematics and Physics, Vol. 2, 61-71. doi:10.4236/jamp.2014.25009.
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, ” *The Classical Theory of Fields*”, Fourth Revised English Edition, Vol. 2. Translated from the Russian by Morton Hamermesh, ISBN: 978-0-08-025072-4.
- [6] H. Rund, ” *The Differential Geometry of Finsler Spaces*”, Reprint of the original edition (1959).
- [7] Shiing-Shen Chern, ”Finsler Geometry Is Just Riemannian Geometry without the Quadratic Restriction”, Notices AMS, 43 (1996), pp. 959–63.
- [8] P.C. Stavrinos, A. P. Kouretsis and M. Stathakopoulos. ” *Friedmann-like Robertson-Walker model in generalized metric space-time with weak anisotropy*”, Department of Mathematics, University of Athens, 15784 Greece, Festou St., 16674 Glifada, Athens, Greece , arXiv:gr-qc; (2006) /0612157v4.
- [9] P.C. Stavrinos and A. P. Kouretsis. ” *FRW-metric and Friedmann Equations in a generalized cosmological model*”, Department of Mathematics, University of Athens, 15784 Greece, Festou St., 16674 Glifada, Athens, Greece; (2007).

- [10] Robert Martin Eisberg. " *Fundamentals of Modern Physics*", Third Printing, February, 1963. Printed in the United States of America.
- [11] H. Goldstein and J. Safko. " *Classical Mechanics*", Third Edition; ISBN 0-201-65702-3.
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. " *Mechanics. Course of Theoretical Physics*". *Volume 1*. Institute of Physical Problems, USSR Academy of Sciences, Moscow.
- [13] Riess, A. G., Macri, L., Casertano, S., Sosey Megan, Lampeitl Hubert, Henry C. Ferguson, V. Filippenko Alexei, W. Jha Saurabh, Li Weidong, Chornock Ryan, Sarkar Devdeep (2009). " *A Redetermination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope from a Differential Distance Ladder*". *Ap. J.*, 699, 539-563. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/699/1/539>.
- [14] Riess, A. G., Macri, L., Casertano, Lampeitl Hubert, Henry C. Ferguson, V. Filippenko Alexei, W. Jha Saurabh, Li Weidong, Chornock Ryan. " *A 3% Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3*". *Ap. J.*, 730, 119-186. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/730/2/119>.
- [15] M.C. March, R. Trotta, P. Berkes, G. D. Starkman and P. M. Vaudrevange. " *Improved constraints on cosmological parameters from SNIa data*". Imperial College London, Astrophysics Group, Blackett Laboratory, Prince Consort Road, London SW7 2AZ, UK; African Institute for Mathematical Sciences, 6 Melrose Rd, Muizenberg, 7945, Cape Town, South Africa; Brandeis University, Volen Center for Complex Systems, 415 South Street, Waltham, MA 02454-9110, USA; CERCA & Department of Physics, Case Western Reserve University, 10900 Euclid Ave, Cleveland, OH 44106, USA; DESY, Notkestrasse 85, 22607 Hamburg, Germany. *Not R. Astron. Soc.* 418,2308-2329, doi: 10.1111/j.1365 (2011).
- [16] Chirkov, A. G.; Ageev, A.N. (2001). " *Technical Physics*", Volume 46, Issue 2, February 2001, pp.147.153. DOI:10.1134/1.1349267.
- [17] Ginzburg V. (1987). " *Theoretical Physics and Astrophysics*". Pergamon Press, Oxford.
- [18] Lipovka A. A. (2016). " *Nature of Quantum Potential*". *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 4, 897-902. doi: 10.4236/jamp.2016.45098.
- [19] Patrick D. Bangert (1998). " *The Hydrogen atom in Bohmian Quantum Theory.*"; University College London.
- [20] David Bohm and Basil J. Hiley (1996). " *The Undivided Universe – An Ontological Interpretation of Quantum Theory appeared after Bohm's death*, in 1993; reviewed by Sheldon Goldstein in *Physics Today* (1994). J. Cushing, A. Fine, S. Goldstein (eds.), *Bohmian Mechanics and Quantum Theory – An Appraisal*.

- [21] Bohm, David (1952). *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables I*". Physical Review 85: 166-179. doi:10.1103/PhysRev.85.166.
- [22] Bohm, David (1952). *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables II*". Physical Review 85: 180-193. doi:10.1103/PhysRev.85.180.
- [23] Jorge Pinochet y Daniel Rojas Líbano (2016). "Una demostración simple de la desigualdad de Bell basada en la teoría elemental de conjuntos". Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 38, nº 3, e3303. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0025>.
- [24] D. Bohm, B. J. Hiley (1975). *On the intuitive understanding of nonlocality as implied by quantum theory*". Foundations of Physics, Volume 5, Number 1, pp. 93-109, doi:10.1007/BF01100319
- [25] B. J. Hiley (2004). *Information, quantum theory and the brain*." In: Gordon G. Globus (ed.), Karl H. Pribram (ed.), Giuseppe Vitiello (ed.): Brain and being: at the boundary between science, philosophy, language and arts, Advances in Consciousness Research, John Benjamins B.V., ISBN 90-272-5194-0, pp. 197-214, p. 207.
- [26] David Bohm, (1989). *Meaning And Information*". Archived 2011-10-09 at archive today, In: P. Pylykänen (ed.): The Search for Meaning: The New Spirit in Science and Philosophy, Crucible, The Aquarian Press, 1989, ISBN 978-1-85274-061-0.
- [27] B. J. Hiley (2005). *Non-commutative quantum geometry: A reappraisal of the Bohm approach to quantum theory*". in: A. Elitzur et al. (eds.): Quo vadis quantum mechanics, Springer, ISBN 3-540-22188-3, p. 299–324.
- [28] B.J. Hiley (2005). *Non-commutative quantum geometry: A reappraisal of the Bohm approach to quantum theory*." In: Avshalom C. Elitzur, Shoham Dolev, Nancy Kolenda (es.): Quo vadis quantum mechanics? Springer, ISBN 3-540-22188-3, pp. 299 ff., therein p. 310.
- [29] BJ Hiley (1999). *Active Information and Teleportation*.", eds. D. Greenberger et al, p. 7; 113-126, Kluwer, Netherlands, 1999.
- [30] B.J. Hiley (2002). *From the Heisenberg picture to Bohm: A New Perspective on Active Information and its Relation to Shannon Information*." pp. 2 and 5. Published in: A. Khrennikov (ed.): Proc. Conf. Quantum Theory: reconsideration of foundations, pp. 141–162, Vaxjö University Press, Sweden.
- [31] . Robert Dabin (2009). *De Broglie-Bohm Theory: A Hidden Variables Approach to Quantum Mechanics*."; Imperial College London, Department of Physics. rd608@imperial.ac.uk.

- [32] J. H. Field (2006). "Derivation of the Lorentz Force Law and the Magnetic Field. Concept using an Invariant Formulation of the Lorentz Transformation". Department de Physique Nucleaire et Corpusculaire Universit e de Geneve. 24, quai Ernest-Ansermet CH-1211 Geneve 4. The Royal Swedish Academy of Sciences, Physica Scripta; Volume 73, Number 6.
- [33] M. Vogel (2009). "The anomalous magnetic moment of the electron". Contemporary Physics, 50:3, 437-452, DOI: 10.1080/00107510902765239.
- [34] J. Schwinger. "On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron". Harvard University, Cambridge, Massachusetts, Physical Review. 73 (4): 416. doi:10.1103/PhysRev.73.416.
- [35] J. Ferrer E., de la Incera V. "Dynamically generated anomalous magnetic moment in massless QED". Department of Physics, University of Texas at El Paso, 500 W. University Ave., El Paso, TX 79968, USA. Nuclear Physics B 824 (2010) 217–238.
- [36] Kusch P, Foley HM. "Precision Measurement of the Ratio of the Atomic 'g Values' in the $^2P_{\frac{3}{2}}$ and $^2P_{\frac{1}{2}}$ States of Gallium." Phys Rev. 72:1256 (1947); Kusch P, Foley HM. Phys Rev. 74:250 (1948).
- [37] Koenig S, Prodell AS, Kusch P. "The Anomalous Spin Gyromagnetic Ratio of the Electron". Phys. Rev. 83:687 (1951); Koenig S, Prodell AS, Kusch P. Phys. Rev.88:191 (1952).
- [38] Brown LS. "Line Shape for a Precise Measurement of the Electron's Magnetic". Phys. Rev. Lett. 52:2013 (1984); Brown LS. Ann. Phys. A 159:62 (1985).
- [39] Nelson DF, Schupp AA, Pidd RW, Crane HR. "Search for an Electric Dipole Moment of the Electron". Phys. Rev. Lett. 2:492 (1959).
- [40] Sandars PGH, Lipworth E. Phys. Rev. Lett. 13:529 (1964); Sandars PGH, Lipworth. "Electric Dipole Moment of the Cesium Atom. A New Upper Limit to the Electric Dipole Moment of the Free Electron". E. Phys. Rev. Lett. 14:718 (1964); Sandars PGH. J. Phys. B 1:494 (1968); Sandars PGH. J. Phys. B 1:511 (1968).
- [41] TS Stein, JP Carrico, E. Lipworth and MC Weisskopf; "Electric Dipole Moment of the Cesium Atom. A New Upper Limit to the Electric Dipole Moment of the Free Electron". Phys. Rev. Lett. 19:741 (1967)
- [42] Player MA, Sandars PGH. "An experiment to search for an electric dipole moment in the 3P_2 metastable state of xenon". J. Phys. B 3:1620 (1970).
- [43] Murthy SA, Krause D, Li L, Hunter LR. "New limits on the electron electric dipole moment from cesium". Phys. Rev. Lett. 63:965 (1989).

- [44] K. Abdullah, C. Carlberg, E. D. Commins, Harvey Gould, and Stephen B. Ross. "New experimental limit on the electron electric dipole moment". Phys. Rev. Lett. 65:2347 (1990).
- [45] Commins ED, Ross SB, DeMille D and Regan BC. *Improved experimental limit on the electric dipole moment of the electron*". Phys. Rev. A 50:2960 (1994).
- [46] Regan BC, Commins ED, Schmidt CJ, DeMille D. "New Limit on the Electron Electric Dipole Moment". Phys. Rev. Lett. 88:071805 (2002).
- [47] Hudson JJ, Kara DM, Smallman IJ, Sauer BE, Tarbutt MR, Hinds EA. *Improved measurement of the shape of the electron*". Nature; 473 (7348), (2011). 493-6. Doi: 10.1038 / nature10104.
- [48] Peskin, M. E.; Schroeder, D. V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*". Stanford Linear Accelerator Center, Weber State University. ISBN 0-201-50397-2.
- [49] Schiff LI. (1963). "Measurability of Nuclear Electric Dipole Moments". Phys. Rev. 132:2194. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRev.132.2194>.
- [50] Julian Schwinger. (1948). *On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron*". Physical Review. 73 (4): 416. doi:10.1103/PhysRev.73.416.
- [51] Laporta, S.; Remiddi, E. (1996). "The analytical value of the electron ($g - 2$) at order α^3 in QED". Physics Letters B. 379: 283–291. arXiv:hep-ph/9602417.
- [52] Aoyama, T.; Hayakawa, M.; Kinoshita, T.; Nio, M. (2012). "Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant". Physical Review Letters. 109 (11): 111807. arXiv:1205.5368.
- [53] Aoyama, Tatsumi; Hayakawa, Masashi; Kinoshita, Toichiro; Nio, Makiko. (2015) "Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment. Contribution of Diagrams without Closed Lepton Loops". Physical Review D. 91 (3): 033006. arXiv:1412.8284.
- [54] Nio, Makiko (2015). "QED tenth-order contribution to the electron anomalous magnetic moment and a new value of the fine-structure constant". Fundamental Constants Meeting 2015.
- [55] Hanneke, D.; Fogwell Hoogerheide, S.; Gabrielse, G. (2011). *Cavity Control of a Single-Electron Quantum Cyclotron: Measuring the Electron Magnetic Moment*". Physical Review A. 83 (5): 052122. arXiv:1009.4831.
- [56] Jackson J. (1999). "Classical Electrodynamics", Wiley, New York, NY, 3rd ed. edition.

- [57] Arthur Beiser. (2003). ” *Concepts of Modern Physics*”, Tata McGraw-Hill, Higher Education, 623 pags.
- [58] Ivan A. Cardenas and Lipovka A. A. (2019) ”Variation of the fine-structure constant caused by expansion of the Universe” *Variation of the fine-structure constant caused by expansion of the Universe*. Modern Physics Letters A. Vol.34, No. 38, 1950315. <https://doi.org/10.1142/S0217732319503152>
- [59] Rym Bouchendira, Pierre Cladé, Saida Guellati-Khélifa, Francois Nez, and Francois Biraben. (2011) ” *Determination of the Fine Structure Constant and Test of the Quantum Electrodynamics*”. Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, Université Pierre et Marie Curie, CNRS, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint Martin, 75141 Paris Cedex 03, France. Physical Review Letters. PRL 106, 080801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.080801. HAL Id: hal-00547525.
- [60] Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita and Makiko Nio. (2012). ” *Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant*”. Kobayashi-Maskawa Institute for the Origin of Particles and the Universe (KMI), Nagoya University, Nagoya, 464-8602, Japan. Nishina Center, RIKEN, Wako, Japan 351-0198. Department of Physics, Nagoya University, Nagoya, Japan 464-8602. Laboratory for Elementary Particle Physics, Cornell University, Ithaca, New York, 14853, U.S.A. RIKEN-QHP-25. Phys Rev Lett. 2012 14 de septiembre; 109 (11): 111807. Epub 2012 sep 13. arXiv: 1205.5368.
- [61] Peter J. Mohr, Barry N. Taylor and David Newell. (2012) ” *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2010*”. National Institute of Standard of Technology, Gaithersburg, Maryland 20899-8420, USA.
- [62] D. Hanneke, S. Fogwell and G. Gabrielse. (2008). ” *New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant*”. Department of Physics, Harvard University, Cambridge, MA 02138. Phys. Rev. Lett. 100, 120801.
- [63] M. Vogel. (2008) ” *The anomalous magnetic moment of electron*”. Physics Department, Imperial College London, SW7 2BW, UK. Contemporary Physics Vol. 00, No. 00.
- [64] D. Hanneke, S. Fogwell Hoogerheide, and G. Gabrielse. ” *Cavity control of a single-electron quantum cyclotron: Measuring the electron magnetic moment*”. Department of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138, USA. PHYSICAL REVIEW A 83, 052122 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevA.83.052122.
- [65] D. Hanneke, S. Fogwell Hoogerheide, and G. Gabrielse. (2006) ” *New Measurements of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant*”. Leverett Professor of Physics. Harvard University. Cambridge, MA 02138. AIP

Conference Proceedings 870, 328; [https://doi.org/ 10.1063/1.2402646](https://doi.org/10.1063/1.2402646). Published Online: 28 November 2006.

- [66] Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita and Makiko Nio. (2014). "*Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment. Contribution of Diagrams without Closed Lepton Loops.*" Kobayashi-Maskawa Institute for the Origin of Particles and the Universe (KMI), Nagoya University, Nagoya, 464-8602, Japan. Department of Physics, Nagoya University, Nagoya, 464-8602, Japan. Laboratory for Elementary Particle Physics, Cornell University, Ithaca, NY, 14853, U.S.A. Amherst Center for Fundamental Interactions, Department of Physics, University of Massachusetts, Amherst, MA, 01003, U.S.A. Nishina Center, RIKEN, Wako, 351-0198, Japan. en Physical Review D 91 (3) ·DOI: 10.1103 / Phys-RevD.91.033006 · arXiv: 1412.8284
- [67] Grib A.A., Mamaev S.G., Mostepanenko V.M. (1980). "*Quantum effects in intense external fields*". Atomizdat, M. (methods and results not connected with the perturbation theory). Kvantovye efekty v intensivnykh vneshnikh polyakh (metody i rezul'taty ne svyazannye s teoriei vozmushchenii). USSR: N. p. Web.
- [68] Kazansky N.L., Kharitonov S.I., Khonina S.N. (2012). "*Computer optics*". v.36, n.4. pp.518-526.
- [69] Schrödinger E. (1928) "*Abhandlungen zur Wellenmechanik*". 2. Ausgabe. Leipzig.
- [70] N.G. Chetaev, (1931). "*Educational notes of Kazan University*" (In Russian). Scientific proceedings of Kazan Aircraft Institute, 91, book4, v.1, pp.3-8.
- [71] N.G. Chetaev, (1936). "*Scientific proceedings of Kazan Aircraft Institute*" (In Russian), v.5, pp.3-8.
- [72] N.G. Chetaev, (1962). "*Motion stability*". Researches on the analytical mechanics, Nauka, Moscow. (in Russian)
- [73] Rusov V.D., Vlasenko D.S. (2011). "*Quantization in classical mechanics and its relation to the Bohmian \hat{I} -field*". Mavrodiev S.Cht. Annals of Physics, 326 1807-1815. DOI: 10.1016/j.aop.2011.04.012
- [74] Rusov V.D. (2009). "*On the Quantization Procedure in Classical Mechanics and the Reality of Bohm's Ψ -Field*". Ukrainian Journal of Physics 54 (11): 1131-1138.
- [75] Carroll R. (2009). "*Aspects of stability and quantum mechanics*". Progress in Physics. v.2, pp.24-28.
- [76] H. Poincare, (1892). "*Les methods nouvelles de la mecanique celeste*", V.1 (Paris).
- [77] F.M. Lyapunov, (1892). "*General problem of motion stability*" (IFML, Kharkov, (in Russian)).

- [78] Golden G. Nyambuya. (2016). "On the Possible Origins of the Dirac Equation". Prespacetime Journal. Vol 7, No 13.
- [79] Golden G. Nyambuya. (2008) "New Curved Spacetime Dirac Equations. On the Anomalous Gyromagnetic Ratio". Foundations of Physics 38(7):665-677, July. DOI: 10.1007/s10701-008-9226-0
- [80] Golden G. Nyambuya. (2007). "Dirac Equation in Curved Spacetime On the Anomalous Gyromagnetic Ratio". Electronic Journal of Theoretical Physics 4, No. 14 95–106.
- [81] S K Srinivasan and E C G Sudarshan. (1996). "A direct derivation of the Dirac equation via quaternion measures." J. Phys. A: Math. Gen. 29 5181–5186. Printed in the UK.
- [82] Katsusada Morita. (2012) "Quaternionic Variational Formalism for General Relativity in Riemann and Riemann-Cartan Space-Times". Progress of Theoretical Physics, Vol. 128, No. 6, December.
- [83] Arbab I. Arbab. (2011) "The Quaternionic Quantum Mechanics". Applied Physics Research. Vol. 3, No. 2; November. doi:10.5539/apr.v3n2p160
- [84] Silvis M. H. (2010). "A quaternion formulation of the Dirac equation". Bachelor's thesis. University of Groningen, The Netherlands.
- [85] De Leo S. (2001). "Quaternionic Lorentz Group and Dirac Equation". Found Phys Lett 14, 37–50.
- [86] Katsusada Morita. (2007). "Quaternions, Lorentz Group and the Dirac Theory". Progress of Theoretical Physics, Vol. 117, No. 3, March.
- [87] Miyamoto and Nagai. (1975). "Three-Dimensional Models for the Distribution of Mass in Galaxies". Publ. Astron. Soc. Japan 27, pp 533-543.
- [88] Simonson S. C. III, and Mader G.L. (1973). "Astron. Astrophys., 27, 337."
- [89] Schmidt, M. (1965). "In Star and Stellar Systems, Vol. 5, Galactic Structure, ed. A. Blaauw and M. Schmidt (University of Chicago Press, Chicago), p. 513."
- [90] W.B. Burton, M.A. Gordon (1978). "Carbon Monoxide in the Galaxy. III. The Overall Nature of its Distribution in the Equatorial Plane". Astron. Astrophys. v.63, pp.7-27.
- [91] Anton A. Lipovka (2018). "Improved analytical model for the mass distribution in S-type galaxies". Astronomical Society of Japan, Volume 70, Issue 5, October, 86, hal-01765539, <https://doi.org/10.1093/pasj/psy082>.

- [92] A. A. Lipovka. (2017). "*Rotation Curves and Dark Matter*", Department of Research for Physics, Sonora University, 83000, Hermosillo, Sonora, México; viXra: 1705.0389.
- [93] R.M. Cotta, "*Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*", CRC Press, Boca Raton, FL, (1993).
- [94] Q. Peng. (1988). "A method of determining the thickness of spiral galaxies by solution of the three-dimensional Poisson equation". *Astronomy and Astrophysics*, vol. 206, no. 1, pp. 18-26.
- [95] Q. Peng, X. Li, H. Su, K. Huang, J. Huang. (1978). "*Integral of Poisson's equations for finite thickness disks and effect of thickness on density waves*". *Scientia Sinica*, v.22, pp.925-933.
- [96] S.S. Mc. Gaugh and F. Lelli. (2016). "*Radial Acceleration Relation in Rotationally Supported Galaxies*". *Phys. Rev. Lett*, Vol. 201101. pp. 1-6.
- [97] G.A. Grinberg (1948), "*Selected problems of mathematical theory of the electric and magnetic phenomena*". Academy of sciences USSR, ISBN: 978-5-458-34549-1, 727 pages.
- [98] T.I. Besselova (2014). "*Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates*", *International Applied Mechanics*, November, Vol. 50, No. 6. DOI 10.1007/s10778-014-0663-5.
- [99] É. A. Gasymov (2009). "*Application of the Finite Integral Transform Method to Solving a Mixed Problem with Integro-Differential Conditions for a Nonclassical Equation*". ISSN 0012-2661, *Differential Equations*, 2011, Vol. 47, No. 3, pp. 319–332. c Pleiades Publishing, Ltd., 2011. Original Russian Text c É.A. Gasymov, (2011), published in *Differentsial'nye Uravneniya*, 2011, Vol. 47, No. 3, pp. 322–334.
- [100] M.D. Mikhailov, M.N. Ozisik. (1994). "*Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*". Department of Mechanical and Aerospace Engineering. Raleigh, North Carolina. State University. John Wiley & Sons, First edition, February, 28th. PY-1984/01/27 SN-0-471-89830-9. ISBN-13: 978-0-486-67876-4, 544 pages.
- [101] R.M. Cotta. (1993). "*Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*", CRC Press, Boca Raton, FL, July 23th. ISBN: 978-0-849-38665-7, 352 pages.
- [102] R.M. Cotta and D. Mikhailov. (1993). "*Integral transform method*". *Appl. Math. Modelling*, Vol. 17, March. pp.156-161.
- [103] R. M. Cotta (1998). "*Hybrid methods in heat transfer: the integral transform method*". Laboratory of Transmission and Technology of Heat. Mechanical Engineering Dept. -EE COPPE- UFRJ. Universidade Federal do Rio de Janeiro Cx. Postal 68503- Rio de Janeiro, RJ 21945-970, Brazil.

- [104] Lisboa KM, Cotta RM. (2018). ”*Hybrid integral transforms for flow development in ducts partially filled with porous media*”. Proc. R. Soc. A 474: 20170637. DOI 10.1098/rspa.2017.0637.
- [105] Evaldiney R. Monteiro, Emanuel N. Macêdo, João N.N. Quaresma, Renato M. Cotta (2009). ”*Integral transform solution for hyperbolic heat conduction in a finite slab. International Communications in Heat and Mass Transfer*”. Transactions on Engineering Sciences vol 20, c 1998 WIT Press, ISSN 1743-3533. Mining Engineering Department, CSSPA, Campus de Marabá, Universidade Federal do Pará, UFPA. School of Chemical Engineering, FEQ/ITEC/UFPA, Universidade Federal do Pará, 66075-110, Belém, PA, Brazil. Mechanical Engineering Department — POLI & COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Cx. Postal 68503 — Cidade Universitária, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- [106] A.R. Almeida and R.M. Cotta. (1999). ”*On the integral transform solution of convection-diffusion problems within in bounded domain*”, J FRANKL I, 336(5), pp. 821-832.
- [107] J.S. Perez Guerrero, L.C.G. Pimentel, T.H. Skaggs, M.Th. van Genuchten. (2009). ”*Analytical solution of the advection diffusion transport equation using a change of variable and integral transform technique*”. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2009, v.52 3297-3304. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.02.002.
- [108] Sofue, Y. (2013). ”*Rotation Curve and Mass Distribution in the Galactic Center From Black Hole to Entire Galaxy*”. PASJ: Publ. Astron. Soc. Japan V. 65, 118.
- [109] Sofue, Y., & Rubin, V. (2001). ”*Rotation Curves of Spiral Galaxies*”. ARA&A, 39, 137.
- [110] Takamiyay T., Sofue Y. (2000). ”*Radial distribution of the mass-to-luminosity ratio in spiral galaxies and massive dark cores*”. The Astrophysical Journal, 534: 670 - 683.
- [111] Bowman, F (1958). ”*Introduction to Bessel Functions*”. New York: Dover, ISBN-10: 0486604624; ISBN-13: 978-0486604626 p. 109, 160 pages.
- [112] H.C. Plummer. (1911). ”*On the problem of distribution in globular star clusters*”. MNRAS v.71, p.460-470.
- [113] J. Binney and S. Tremaine. (2008). ”*Galactic Dynamics (Princeton Series in Astrophysics)*”, Princeton University Press. Second edition, January, 27th. ISBN: 9780691130279, 904 pages.
- [114] J. Binney and D. Mihalas, (1981). ”*Galactic Astronomy: Structure and Kinematics of Galaxies*”, Editor, W. H. Freeman & Co (Sd); Second Edition, June, 01, ISBN:9780691025650, 597 pages.

- [115] Stacy S. McGaugh, Federico Lelli and James M. Schombert (2016). ” *The Radial Acceleration Relation in Rotationally Supported Galaxies*”. Physical Review Letters. PRL 117, 201101. arXiv:1609.05917v1. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.201101.
- [116] R. Sancisi. (2004). ” *In Dark Matter in Galaxies*”, IAU Symposium, v.220, edited by S. Ryder, D. Pisano, M. Walker, and K. Freeman p.233, arXiv:astro-ph/0311348.
- [117] S.S. McGaugh (2004). ” *The Mass Discrepancy-Acceleration Relation: Disk Mass and the Dark Matter Distribution*”. Astrophys. J. v.609, pp 652.
- [118] O. Möller, E. Noordermeer (2006). ” *The kinematical structure of gravitationally lensed arcs*”. MNRAS.
- [119] D.P. Clemens (1985). ” *Massachusetts-Stony Brook Galactic Plane CO Survey: The Galactic Disk Rotation Curve*”. The Astrophysical Journal. v.295, pp422-436.
- [120] L. Blitz, M. Fich and A.A. Stark (1982). ” *Catalog of CO Radial Velocities Toward Galactic HII Regions*”. The Astrophysical Journal Supplement Series. v.49, pp.183-206.
- [121] W.B. Burton, M.A. Gordon (1978). ” *Carbon Monoxide in the Galaxy. III. The Overall Nature of its Distribution in the Equatorial Plane*”. Astron. Astrophys. v.63, pp.7-27.
- [122] Sofue Y. (2012). *Grand Rotation Curve and Dark-Matter Halo in the Milky Way Galaxy*. PASJ: Publ. Astron. Soc. Japan 64, 75.
- [123] Sofue Y. (2013). *The Mass Distribution and Rotation Curve in the Galaxy*. In: Oswalt T.D., Gilmore G. (eds) Planets, Stars and Stellar Systems. Springer, Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-5612-0-19>.
- [124] Sofue Y. (2014). *Rotation and Mass in the Milky Mass and Spiral Galaxies*. Publ. Astron. Soc. Japan (2014) 00(0), 1–34 Publ. Astron. Soc. Japan (2014) 00(0), 1–34. doi: 10.1093/pasj/xxx000.
- [125] Sofue Y. (2016). *Rotation curve decomposition for size–mass relations of bulge, disk, and dark halo components in spiral galaxies*. Publ. Astron. Soc. Japan.68 (1), 2 (1–15). doi: 10.1093/pasj/psv103.
- [126] Sofue Y. (2020). *Rotation Curve of the Milky Way and the Dark Matter Density*. Galaxies, 8(2), 37. <https://doi.org/10.3390/galaxies8020037>.
- [127] Sofue Y. (2009). *Unified Rotation Curve of the Galaxy — Decomposition into de Vaucouleurs Bulge, Disk, Dark Halo, and the 9-kpc Rotation Dip—*. Publ. Astron. Soc. Japan 61, 227–236.

- [128] Sofue Y. (2015). *Dark halos of M31 and the Milky Way*. Publ. Astron. Soc. Japan (2015) 67 (4), 75 (1–9). doi: 10.1093/pasj/psv042.
- [129] Miguel Pato and Fabio Iocco. (2017). *galkin: a new compilation of the Milky Way rotation curve data*. *ScienceDirect, SoftwareX*. Vol. 6. pp. 54-62. <https://doi.org/10.1016/j.softx.2016.12.006>
- [130] E.V. Karukes, M. Benito, F. Iocco, R. Trotta, A. Geringer-Samethd. (2020). *A robust estimate of the Milky Way mass from rotation curve data*. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. Vol. 2020. Ed. 05. P. 033. arXiv:1912.04296v2.
- [131] Fich Michael, Blitz Leo and Stark Antony A. (1989). The Rotation Curve of the Milky Way to 2R0. *The Astrophysical Journal*, 342:272-284.
- [132] Dalcanton, J. J., Stipl, A, (2009). *Pressure support in galaxy disks: Impact on rotation curves and dark matter density profiles* *ApJ*, 721, 547.
- [133] Fryxell, B., Olson, K., Ricker, P., Timmes, F. X., Zingale, M. et al. (2000). *FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermonuclear Flashes* *ApJS*, 131, 273.
- [134] Joung, M. R., Mac Low, M., & Bryan, G. L. (2009). *Dependence of interstellar turbulent pressure on supernova rate* *ApJ*, 704, 137-149.
- [135] Lang K.R. (1974). *Astrophysical Formulae*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New-York. eBook ISBN 978-3-662-21642-2. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-21642-2>.
- [136] Lipovka A. (2018). *Gas kinetics in galactic disk. Why we do not need a dark matter to explain totation curves of spirals?* hal-01832309v2.
- [137] Genzel R., Förster N.M., Übler H., Lang P., Naab T., et al. (2017) ”*Strongly baryon-dominated disk galaxies at the peak of galaxy formation ten billion years ago*”. *Nature* v.543, pp. 397-401. doi:10.1038/nature21685.
- [138] Shevchenko M.G., Vasiliev E.O., and Shchekinov Y.A. (2017). ”*Transport of gas from disk to halo in starforming galaxies*”. *Open Astronomy*. 26: 224—232, 18.
- [139] Jorge López Lemus, (2000). *Condiciones de Frontera para un gas enrarecido*”, Departamento de Física, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa.
- [140] Joung, M. K. R., & Mac Low, M. (2006). *Turbulent Structure of a Stratified Supernova-driven Interstellar Medium* *ApJ*, 653, 1266.
- [141] Lifshitz and Pitaevskii. (1981) ”*Course of Theoretical Physics. Vol. 10*”, First Edition. Translate from *Fizicheskaya kinetika*, Nauka, Moscow. ISBN 0-08-020641-7.

- [142] Tasker, E. J., & Bryan, G. L. (2006). *The Effect of the Interstellar Model on Star Formation Properties in Galactic Disks* ApJ, 641, 878.
- [143] de Avillez M. A. and Berry D. L. (2001). *Three-dimensional evolution of worms and chimneys in the Galactic disc* Mon. Not. R. Astron. Soc. 328, 708–718.
- [144] Begeman, K.G. (1987) *HI Rotation Curves of Spiral Galaxies*. PhD Thesis, University of Groningen, Groningen.
- [145] Bigiel F., Leroy A., Walter F., Blitz L., Brinks E., et al. (2010). "*Extremely inefficient star formation in the outer disks of nearby galaxies.*" The Astronomical Journal, 140:1194-1213. Doi: 10.1088/0004-6256/140/5/1194.
- [146] Begeman K.G. (1989) "*HI rotation curves of spiral galaxies.*" Astronomy & Astrophysics, 223, 47-60.
- [147] de Blok W.J.G., Walter F., Brinks E., Trachternach C., Oh S-H., and Kennicutt R.C., Jr. (2008) "*High-resolution rotation curves and galaxy mass models from things*" The Astronomical Journal, 136:2648—2719.
- [148] C. Avilés Niebla, P. A. Nieto Marín y J. A. Nieto. (2020)". "*Towards Exterior/Interior Correspondence of Black-Holes*", Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 17 2050180, doi: 10.1142/S0219887820501807.
- [149] Pinsky Mark (2002). *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets.*", Brooks/Cole, ISBN 978-0-534-37660-4.
- [150] Stein Elias and Shakarchi Rami. (2003). "*Fourier Analysis: An introduction.*" Princeton University Press, ISBN 978-0-691-11384-5.