UNIVERSIDAD DE SONORA
Departamento de Matemáticas

EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

## MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

# TESIS

## Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos. El caso de las funciones lineales y cuadráticas.

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa presenta:

MAXIMILIANO DE LAS FUENTES LARA

Hermosillo, Sonora

Noviembre de 1998

**Universidad de Sonora**

Repositorio Institucional UNISON

Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

## Agradecimientos

A mis directores de tesis:
Silvia Elena Ibarra Olmos y Agustín Grijalva Monteverde por sus enseñanzas, por la motivación, confianza y apoyo incondicional que siempre me brindaron.

A mis sinodales:

M.C. Ramiro Ávila Godoy
Dr. Rosa María Farfán Márquez
M.C. Agustín Grijalva Monteverde
M.C. Silvia Elena Ibarra Olmos
M.C. Martha C. Villalba y Gutiérrez

Por las valiosas aportaciones que hicieron para enriquecer y mejorar la tesis.

A mis maestros y compañeros del programa de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, por sus enseñanzas y por compartir sus experiencias.

A las autoridades académicas y administrativas de la Facultad de Ingeniería y de la propia Universidad Autónoma de Baja California, por su apoyo siempre incondicional para la realización de mis estudios de posgrado.

Y sobre todo,

A mi familia, particularmente a mi esposa Olga, por su comprensión y apoyo brindado, por aceptar mis ausencias y acompañarme en los momentos difíciles por los que pasé.

# Presentación

En este documento se reporta una investigación que recoge las observaciones y experiencias obtenidas durante el diseño y experimentación de una secuencia de actividades didácticas. Nuestra investigación tiene como propósito más general el análisis de los procesos que viven los estudiantes cuando son enfrentados a situaciones problemáticas organizadas de forma cualitativamente diferente a la tradicional y que tienen como fundamentos teóricos a la *dialéctica herramienta-objeto* y al *juego de marcos.* El saber matemático cuya construcción nos interesa es el de raíz real de funciones lineales y cuadráticas.

Es nuestra aspiración que las reflexiones hechas a través de este trabajo, por elementales que sean, aporten mínimamente a la comprensión de las complejidades que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas implican.

El documento está integrado por cuatro capítulos y el apéndice, los cuales describiremos brevemente a continuación.

En el Capítulo 1, *El problema y su contexto*, se presenta el problema de investigación abordado, algunos de los argumentos que lo justifican y el marco de referencia donde la parte experimental se llevó a cabo.

En el Capítulo 2, *Consideraciones teóricas*, está centrado en los preceptos teóricos empleados y en las concepciones particulares de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El Capítulo 3, denominado *Ingeniería Didáctica*, se dedica a la descripción de las fases de la investigación, las cuales son: los análisis preliminares, el análisis a priori, la realización didáctica, el análisis a posteriori y la validación.

En el Capítulo 4 se escriben las conclusiones y reflexiones producto del desarrollo de la investigación.

Finalmente en el Apéndice se incluyen los problemas y situaciones problemáticas que sirvieron de base para la realización didáctica.

# ÍNDICE

# Capítulo I. El problema y su contexto

## 1.1 El problema

Uno de los problemas detectados en la enseñanza de las matemáticas es lo que aquí denominaremos disociación algoritmia–conceptualización, para referirnos a las dificultades que manifiestan los estudiantes para conectar de manera adecuada los conceptos matemáticos y los algoritmos asociados a los mismos en la resolución de determinados problemas.

Preguntas como las que a continuación se mencionan podrán hacernos reflexionar respecto de esta problemática, ¿por qué el estudiante universitario de ingeniería presenta serias dificultades para modelar y aplicar algoritmos en problemas contextualizados?, ¿Por qué se les dificulta interpretar los resultados de problemas contextualizados una vez que éstos han sido solucionados?, ¿Qué característica o características en la enseñanza de las matemáticas promueve que se presente esta disociación?. Sin lugar a dudas las respuestas a estas preguntas no son triviales y sin el afán de responderlas, pero sí con el de introducirnos en esta problemática, se presentan los siguientes comentarios.

La formación del ingeniero implica actividades como la elaboración de proyectos y diseños de estructuras, máquinas, circuitos eléctricos, sustancias químicas, entre otras; de tal forma debe contar con aptitudes particulares como la capacidad de análisis, interpretación, imaginación, creatividad y modelación de fenómenos, por mencionar algunas. Estos diseños y proyectos son la respuesta segura, funcional y económica a problemas de orden técnico - social.

Un problema en ingeniería requiere para su solución conocer el comportamiento o patrón del fenómeno o proceso físico o químico de que se trate. Este patrón al cual llamaremos modelo, permite discernir y formular las soluciones a los problemas que se presentan.

En el área de ingeniería civil, por ejemplo, para diseñar una estructura es necesario modelar y resolver un sistema de ecuaciones que permita conocer los esfuerzos a los que los elementos que componen la estructura son sometidos.

En el diseño de compuertas hidráulicas que forman parte de un sistema de distribución de agua para consumo o riego, es requerido establecer el patrón de comportamiento de los esfuerzos (en función de la profundidad) a los que la compuerta está sometida, con el objeto de condicionarla desde el punto de vista del dimensionamiento y capacidad de resistencia del material con que se construya.

Para diseñar un canal a cielo abierto es necesario plantear un modelo que involucre variables como el gasto, la sección transversal del canal, coeficiente de rugosidad, pendiente, entre otras, de tal manera que con dicha formulación sea posible establecer las dimensiones precisas del canal.

Los preceptos matemáticos implicados en los ejemplos prácticos de ingeniería que se acaban de plantear son: la derivada, la integral, sistemas de ecuaciones y raíces reales.

Las actividades en ingeniería de diseño, proyecto e investigación, no sólo requieren de una buena manipulación algebraica, de la determinación de modelos o representaciones algebraicas con las que se pueda estudiar o analizar el proceso físico, químico o fenómeno de que se trate, sino también de una aprehensión conceptual del objeto matemático en cuestión con la cual sea posible además de operar o trabajar en las distintas representaciones, facultar el estudio y tratamiento de aspectos especializados en nuevas situaciones.

Las aptitudes mencionadas con anterioridad para realizar las actividades propias del ingeniero no son fortuitas, obedecen y son producto de un estudio serio de las matemáticas en sus distintas áreas. Sin embargo, se sabe que tradicionalmente en la enseñanza de las matemáticas no se es sistemático en el trabajo sobre problemas contextualizados, el profesor regularmente trabaja con sus alumnos en los conceptos matemáticos con carácter únicamente de objeto, suponiendo que posteriormente estos objetos matemáticos serán aplicados adecuadamente en el análisis y resolución de problemas. La verdad es que difícilmente un alumno puede aplicar conceptos como la derivada, la integral, funciones, raíces, sistemas de ecuaciones, por mencionar algunos, en el mejor de los casos tan sólo los recuerda.

Los alumnos “aprenden” a resolver sistemas de ecuaciones con distintos métodos, derivan e integran funciones con carácter algebraico, resuelven ecuaciones algebraicas o trascendentes, en ocasiones lo hacen con versatilidad y soltura, a veces se apoyan de la calculadora o la computadora para acelerar los procesos de resolución, pero cuando se trata de resolver un problema en donde haya que determinar el patrón o modelo algebraico que permita describir y analizar el comportamiento del proceso o fenómeno y proseguir hacia la solución del problema, manifiestan dificultades para tal ejecución.

Una vez que se ha resuelto parcialmente el problema, al menos en términos algorítmicos, queda pendiente la interpretación de resultados, en la cual también presentan serias dificultades.

Esta situación se suma al hecho del predominio del cuadro algebraico en el desenvolvimiento del estudiante dentro de sus actividades escolares; otros cuadros como el gráfico, el numérico e incluso verbal son subutilizados. En este sentido, los intentos de resolución de problemas por parte del estudiante generalmente se basan en técnicas meramente algebraicas, propias de la enseñanza tradicional.

Con el propósito de hacer explícito el problema central de la investigación que nos ocupa, éste se plantea así:

***¿De qué manera una estrategia didáctica que incorpore al juego de marcos y a la dialéctica herramienta-objeto incide en la construcción del concepto de raíz real?***

Entenderemos que un alumno ha construido el concepto de raíz real, cuando su concepción al respecto es rica en significados y, además, se moviliza en los diferentes marcos para la comprensión, resolución e interpretación de situaciones problemáticas que involucre raíces reales.

Cabe mencionar, que el trabajo que aquí se presenta esta limitado al tratamiento de funciones lineales y cuadráticas.

.En el siguiente apartado nos ubicaremos en el ambiente donde se realizó la investigación. Esto es, trataremos lo referente a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California y sus características.

## 1.2 El ambiente

**La Escuela de Ingeniería de la U.A.B.C.**

La Escuela de Ingeniería surgió en la Universidad Autónoma de Baja California en octubre de 1967, iniciando sus trabajos en 1968 con la carrera de Ingeniero Topógrafo y Geodesta; posteriormente se incorporaron las carreras de Ingeniero Civil, Ingeniero Mecánico, Ingeniero Electrónico, Ingeniero Electricista, Ingeniero en Computación y Licenciados en Sistemas Computacionales. En 1997 se creó la carrera de Ingeniero Industrial.

A partir de 1993 los planes y programas de estudio de todas las carreras de la Escuela de Ingeniería fueron modificados adoptando una postura curricular flexible; el sistema tradicional por semestre fue cambiado al sistema por créditos, y como consecuencia de esta transformación el porcentaje de cursos de matemáticas se incrementó de 14% a 18% aproximadamente. Los cursos del área son los siguientes: Matemáticas I, Matemáticas II, Álgebra Lineal, Álgebra Superior, Métodos Numéricos, Matemáticas III, Ecuaciones Diferenciales, Investigación de Operaciones, Probabilidad y Estadística y Matemáticas Avanzadas. Hacemos la aclaración de que los cursos de Matemáticas I, II y III corresponden al estudio del Cálculo en una y varias variables.

La Escuela de Ingeniería en sus inicios contaba con cursos propedéuticos donde los estudiantes tenían la oportunidad de homologar sus conocimientos de álgebra elemental, trigonometría y geometría, para luego proseguir con los cursos respectivos a matemáticas. En 1983 se eliminaron tales cursos reiniciándose en 1997 con la misma temática.

En junio de 1998 el H. Consejo Universitario aprobó el programa de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Electrónica y en consecuencia la Escuela de Ingeniería pasó a ser Facultad.

La Facultad cuenta con espacios suficientes para el desarrollo de las actividades académico–estudiantiles. Existen laboratorios de cómputo para el desarrollo de los cursos de programación y computación que se ofertan en el área básica y especializada de Ingeniería aunque hasta el momento no se tienen laboratorios disponibles para la impartición de cursos de matemáticas con el uso de herramientas computacionales.

**Los profesores y los contenidos**

Los profesores en su mayoría son profesionales de la Ingeniería, con escasa o nula formación docente, cuyas técnicas de enseñanza son empíricas y tradicionales, la utilización del pizarrón y gis es lo más común y sobre todo en el área de las matemáticas, particularmente es mínimo el uso de los sistemas de cómputo como herramienta en la enseñanza de las matemáticas.

En general los profesores de los cursos de matemáticas presentan a sus estudiantes un contenido acabado, depurado y formal, del cual se espera en el mejor de los casos aplicarlo para solucionar problemas y se asume que el estudiante está motivado para tal tarea.

La estructura de contenidos y programas es todavía como una lista de temas que deben abordarse en el orden indicado y con los tiempos especificados; pareciera que las conexiones horizontales y verticales de los contenidos de matemáticas están ausentes, los conocimientos pareciera que están fragmentados y aislados, sin conexión alguna, se suma en general la falta de aplicabilidad y funcionalidad de los modelos y métodos de resolución en torno a la solución de problemas prácticos de las diferentes especialidades. Reflejo de ello es la fuerte crítica de los profesores de semestres avanzados respecto a las deficiencias de elección y aplicabilidad de las herramientas matemáticas revisadas en los primeros cursos de matemáticas.

## Los alumnos y los egresados

La falta de homogeneidad y nivelación de conocimientos al entrar a la Facultad de ingeniería en las distintas especialidades que oferta, dificulta la ya difícil labor del profesor, aunado a la carencia de metodologías para estudiar, las actitudes inmaduras y la situación económica, social y cultural que imperan en el país.

Es común que los estudiantes irregulares (aquellos que han reprobado alguna o algunas asignaturas) opten por llevar una carga excesiva, aunque últimamente se ha tratado de controlar las cargas académicas de los estudiantes a través de las tutorías, dado que la experiencia ha mostrado que tal opción de sobrecarga académica es perjudicial para el estudiante.

En general nuestros alumnos son pasivos y se adaptan fácilmente al sistema tradicional de enseñanza utilizado por el profesor, pero también son resistentes a la introducción en el campo de las matemáticas que carecen de aplicabilidad, es decir, la información es válida para el estudiante si esta es funcional y es asociada con una orientación práctica.

Un estimado del porcentaje de reprobación muestra que entre el 25% y 40% de nuestros estudiantes reprueban en el área de matemáticas, un indicador bastante alarmante de la situación académica que impera en los estudiantes, al menos en lo que corresponde al campo de las matemáticas.

Una característica deseable de nuestros egresados es que cuenten con conocimientos en las áreas de matemáticas, física y química, aunado a la habilidad y capacidad para realizar análisis y diseños de sistemas en cada una de las distintas especialidades. Asimismo la optimización de recursos y la toma de decisiones son atributos necesarios de los egresados de la Facultad de Ingeniería.

Sin lugar a dudas, la física, química, matemáticas y otras ciencias tienen un importante papel en el desarrollo de cualquier ingeniería, de hecho la actividad del ingeniero es en gran parte la aplicación de la ciencia a problemas que implican diseño y proyección.

# Capítulo 2. Consideraciones Teóricas

## 2.1 Introducción

La práctica de la ingeniería es enriquecida no sólo por la efectiva aplicación de los conocimientos que de ella emanan, sino también por la consideración de los resultados arrojados por las investigaciones formales y fundamentadas teóricamente que se realizan en las instituciones o centros de investigación. Igualmente la práctica docente en matemáticas, se enriquece en parte por las investigaciones en matemática educativa, cuyo propósito radica en el mejoramiento de los métodos y contenidos de la enseñanza. Ejemplos de tales investigaciones son:

*Se ha encontrado que la discusión de problemas no rutinarios ayuda a los estudiantes a desarrollar conexiones entre los diversos métodos de solución y permite ampliar la visión del tipo de problemas a resolver.*[1]

*Una enseñanza organizada alrededor de problemas, da significado a las nociones matemáticas implicadas.*[2]

*En el campo del cálculo diferencial se tiene el convencimiento de que un acercamiento significativo a éste a partir de situaciones cotidianas primero en forma intuitiva y concreta y posteriormente con notación matemática evita que el alumno adquiera técnicas de cálculo sin comprender*[3]

Estas aportaciones han sido factor importante en la modificación del esquema de mi trabajo docente, y manifestación de ello es esta investigación, la cual se fundamenta teóricamente en los preceptos siguientes: dialéctica herramienta–objeto y juego de marcos, considerándolos suficientes para el propósito de abordar el problema de investigación.

En este Capítulo se describen brevemente cada uno de los preceptos citados.

---

[1] Santos L.M.;Sánchez, E. 1994. Perspectivas en Educación Matemática.

[2] Régine Douady, La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1995,

[3] Dra. Elfriede Wenzelburger Guttenberger, Cálculo diferencial, una guía para maestros y alumnos. Pag. 32 , Módulo I, Lectura para los maestros. Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.



Nuestra concepción de aprendizaje se apoya en el siguiente principio:

"... el conocimiento, como un ente ideal no puede ser transmitido de manera directa por un sujeto a otro; el conocimiento sólo puede ser elaborado por el sujeto mismo como resultado de su propia actividad".[4]

La enseñanza es considerada como la actividad a través de la cual se genera, y conduce la actividad de aprendizaje.

De esta concepción se desprende la necesidad de realizar ciertas acciones para llevar a cabo la enseñanza. En primer término el diseño de las situaciones didácticas referentes al objeto de estudio; tales situaciones requieren, por una parte, servir para provocar en los estudiantes la actividad intelectual que se requiere para aprender y por otra poder generar la diversidad de significados que se aspira que adquieran.

En este sentido la enseñanza consiste en la creación o promoción de las condiciones que producirán la adjudicación del conocimiento por parte de los estudiantes, mientras que el aprendizaje implica involucrarse en una actividad intelectual cuya meta sea la disposición del conocimiento con su doble status; Aquí el conocimiento en juego deberá ser trascendente para que el estudiante se incorpore a la actividad. Esta incorporación no es trivial, hay que estar consciente de las situaciones variantes de la manifestación del conocimiento desde el punto de vista que ésta sea o no una base de la relación didáctica para el estudiante.

Bajo esta concepción, el conocimiento matemático va apareciendo en papeles alternantes de herramienta y objeto. Este proceso en espiral conduce a plantear situaciones problemáticas en donde las nociones son importantes para su solución y otras en las cuales lo importante es su estudio como parte de una teoría matemática general.

*La dialéctica herramienta – objeto (introducido por Régine Douady en 1984) "Douady describe el crecimiento del conocimiento matemático a través de una dinámica en la cual el sujeto opera y construye herramientas conceptuales; las propiedades y relaciones subyacentes se convierten, posteriormente, en objetos de reflexión... uno de*

---

[4] Y. I. Mashbits, Fundamentos teóricos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Traducido por M.C. José Ramón Jiménez R.. Universidad de Sonora. Primera versión, febrero de 1991.

*los requisitos más obvios para que las propiedades y estructuras de una herramienta conceptual pasen a ser objeto, es que hayan sido una herramienta...'*[5]

Esta forma tiene entre sus ventajas la posibilidad de presentar la matemática en contexto y, como expectativa, propiciar de manera más efectiva el desarrollo de actitudes y habilidades de pensamiento muy necesarias en la resolución de problemas, tales como la paciencia, la tenacidad, la capacidad de análisis, la intuición, por citar algunos.

El modelo que se presenta, está centrado en la construcción del saber por el alumno, partiendo de concepciones existentes en los mismos, las cuales se ponen a prueba para mejorarlas, modificarlas o construir nuevas. Se proponen y organizan situaciones que tengan sentido para el alumno y en las que pueda iniciar un procedimiento de solución, se den acciones de confrontación, búsqueda, formulaciones, validaciones. Las herramientas requeridas en la resolución del problema incluyen las nociones y procedimientos que posteriormente se estudiarán con carácter de objeto.

## 2.3 Juego de marcos

Las situaciones problemáticas que se plantean permiten al estudiante utilizar los conocimientos que presuntamente ya tienen, dando lugar a la posibilidad de que éstos evolucionen. Un "problema" inalcanzable desde el punto de vista de su comprensión no es para el estudiante un problema que deba formar parte del contrato didáctico.

En el estudio y práctica de la ingeniería se genera información respecto de algún proceso, fenómeno o experimento donde esta información regularmente se obtiene a través de algún equipo o instrumento de medición, que proporciona los datos en forma gráfica o numérica. Esta situación permite planear y presentar situaciones problemáticas cuya documentación esté dada en algún cuadro de los mencionados, incluso únicamente verbal, de tal forma que para resolverlo es insuficiente manipular solamente el cuadro original, generando en el estudiante una sensación de ansiedad o perturbación que lo obliga a cambiar de cuadro y a utilizar otros recursos cognitivos adicionales para poder resolverlo.

[5] Nemiroski, Ricardo. La investigación en la enseñanza del cálculo. *II Symposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, (área de cálculo-análisis),* 1990.

En este sentido el diseño de los problemas también se fundamenta en un precepto teórico de matemática educativa, lo que Régine Douady denominó juego de marcos para referirse a la interacción que debe existir entre el marco algebraico, el marco numérico y el marco geométrico, el marco físico, etc.

*"En una perspectiva constructivista de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la dialéctica herramienta–objeto y los juegos de marcos constituyen un recurso fundamental para la problematización y la creación de condiciones que provoquen en el estudiante los procesos de asimilación -acomodación y desequilibrio-reequilibrio; "La dialéctica herramienta–objeto produce significado. Los juegos de marcos son fuente de desequilibrios; la reequilibración participa del aprendizaje. Los juegos de marcos tienen un papel motor en una de las fases de la dialéctica".*[6]

*"Los procesos de asimilación-acomodación y de desequilibrio-reequilibrio son empleados aquí en el sentido que se le da a los mismos en las teorías de Jean Piaget y la Escuela de Ginebra para explicar los mecanismos de aprendizaje de los seres humanos. Es decir, se considera que la información que el ser humano recibe se esquematiza formando un marco conceptual que le permite clasificar e interpretar los objetos con los cuales entra en contacto. Ante la aparición de nuevos conceptos y procesos que no pongan en entredicho este marco conceptual se da un proceso de asimilación. Pero si el nuevo conocimiento provoca un desequilibrio en el marco conceptual del individuo, se da un proceso de acomodación que modifica al marco conceptual mismo estableciéndose con ello, de nueva cuenta, el equilibrio existente.*[7]

Dado que el contenido matemático producto de esta investigación pertenece al campo del álgebra y con las observaciones anteriormente mencionadas respecto de los preceptos teóricos con los cuales esta investigación se fundamenta, será conveniente señalar que nuestra concepción de lo que significa saber álgebra incluye la integración del manejo de información proporcionada en los ambientes gráfico, numérico y verbal.

---

[6] Douady, Régine. Juego de Marcos y Dialéctica Herramienta–Objeto. Lecturas en Didáctica de las Matemáticas, Edición del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV,IPN. 1993.

[7] Silvia Elena Ibarra Olmos – Agustín Grijalva Monteverde – Tesis de Grado, La problemática de la modificación de la currícula de matemáticas en las ingenierías. 1995.

# Capítulo 3. Ingeniería Didáctica

## 3.1 Caracterización de la ingeniería didáctica como metodología de la investigación

En los cursos escolares de matemáticas, se acostumbra identificar la calificación asignada como medida de los conocimientos adquiridos por el estudiante. Este hecho obedece a una concepción del aprendizaje basada en "medir" la capacidad del estudiante para reproducir el discurso del profesor.

Los currículos están organizados alrededor de esta concepción y regularmente sugieren la exposición como método de enseñanza y la aplicación de exámenes parciales y globales para la evaluación. En cuanto a este último aspecto, se contempla como fundamental la reproducción de un conocimiento previamente analizado; habitualmente si un alumno resuelve correctamente un problema o conjunto de ellos, de la manera en como el profesor lo hizo en clase, se considera que satisface los requisitos necesarios para la aprobación.

Contrariamente, si no utiliza los modelos o reglas institucionalizadas en su momento, entonces la conclusión es que no cuenta con los conocimientos requeridos. En cualquier caso, los procedimientos, las estrategias, los medios, los errores y, en general, las herramientas de las cuales el alumno se vale para intentar o resolver el problema o ejercicio, no son aspectos trascendentes que se analicen y se tomen en cuenta para realizar una evaluación del aprendizaje del estudiante.

Desde nuestro punto de vista, lo que es de interés predominante es el estudio de los procesos de aprendizaje que viven los individuos. Esto es, los procedimientos que los estudiantes realizan como producto de su enfrentamiento con situaciones problemáticas, el análisis de las ocurrencias respecto de las estrategias a seguir, la observancia del desempeño en la clase con sus complejidades y múltiples variantes, etc. De esta manera, consideramos que la metodología utilizada en esta investigación no debe ser de carácter cuantitativo, toda vez que involucraría análisis estadísticos producto de evaluaciones externas, y dado que la intención no es la medición de productos finales, se requiere de una metodología cuya validación sea interna.

En este sentido la metodología por la cual se optó es la ingeniería didáctica, referida al método de investigación de corte cualitativo en la que se realiza *"una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas con los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo".*[1]

Esta metodología de investigación relativamente nueva pero trascendente por su carácter cualitativo, está integrada por un conjunto de fases o etapas que permiten la sistematización de la misma; dichas fases merecen una atención especial en cuanto a su caracterización.

Las fases de esta metodología a las que nos referimos son las siguientes: los análisis preliminares, la concepción y el análisis a priori, la realización didáctica, el análisis a posteriori y la validación.

Los análisis preliminares están constituidos a su vez por un conjunto de análisis, a saber: el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva y finalmente los objetivos de la investigación.

En el primer análisis nos referiremos a la descripción de las formas, técnicas o métodos de enseñanza tradicional, a las concepciones predominantes de lo que es la enseñanza, las estrategias de los profesores para el logro de los objetivos, la metodología o las formas para evaluar, lo que se evalúa o quiere evaluarse, lo que se mide o pretende medir y finalmente las consecuencias efectivas de aptitudes, actitudes o habilidades en el alumno como resultado de tal enseñanza.

---

[1] Artigue, Michéle, Ingeniería Didáctica, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Grupo Editorial

*El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución*, se refiere a las formas o creencias de los alumnos con relación a como es, pueden o deben ser las formas de enseñanza, cuál es el papel, responsabilidad u obligación del profesor, ésta se describe en torno al objeto motivo de la investigación.

Se incluirán las dificultades y obstáculos de los alumnos en términos generales referidos por ejemplo a sus competencias, aptitudes o actitudes que hemos detectado como resultado de otras investigaciones, de exploraciones, de la experiencia u otras de carácter bibliográfico.

El último análisis preliminar, que se refiere al *campo de las restricciones donde se va a situar la realización didáctica,* implica información correspondiente a las condiciones en cuanto a tiempo, forma o lugar en que ha surgido o se ha dado el conocimiento, así como las formas o métodos de su validación, e inclusive respecto a la manera en que habitualmente es tratado, estudiado o enseñado. Esta descripción corresponde al carácter epistemológico del análisis.

Un enfoque cognoscitivo de este análisis permite abordar a través de distintos mecanismos la concepción, las características, estrategias, deficiencias o dificultades que los estudiantes tienen respecto al objeto matemático de interés, las competencias particulares, el vehículo o vehículos que utiliza para enfrentarse a situaciones problemáticas, entre otras.

Un tercer enfoque o dimensión de este mismo análisis del campo de restricciones, llamada didáctica, nos permite incidir en la manera como se ha tratado el objeto matemático en el ambiente educativo, las conveniencias, o desventajas desde nuestro parecer de éstas formas de tratamiento. Se puede sumar la concepción del profesor respecto a la manera en que el estudiante se incorpora intelectualmente a la actividad, así como los conceptos o competencias que están presentes o ausentes y de los cuales creemos afectan la actividad de aprendizaje.

---

Iberoamérica, 1995.

Es conveniente también, hacer explícita la finalidad de la investigación, estableciendo los aspectos que habrán de observarse durante el proceso, como por ejemplo las observancias genéricas de los efectos que produce en los alumnos el enfrentamiento a la situación diseñada, que a su vez incorpora nuestras consideraciones teóricas y los medios de que nos valemos para provocar los efectos. Este apartado corresponde a los objetivos específicos de la investigación.

*La concepción y el análisis a priori* es otra etapa de la ingeniería didáctica que implica por una parte, la consideración de los análisis previos asociados al objeto de estudio y al problema de investigación que se plantea, para concebir en cuanto a estructuración, forma y dimensión la estrategia a diseñar, así como las variables involucradas, de los medios o herramientas requeridas a incorporar para el logro de los objetivos.

Por otra el establecimiento de las reacciones, actitudes, habilidades y aptitudes que esperamos de los estudiantes con motivo de su enfrentamiento a la estrategia didáctica, de manera general y particular.

Los conocimientos que posee o presuntamente posee y lo que debe hacer para entender o comprender la situación y resolver el problema.

*La realización didáctica* se refiere a la puesta en marcha de la estrategia didáctica diseñada, en ésta explicaremos las condiciones en las que se llevó a la práctica: el lugar, el curso curricular, los alumnos, la duración, los momentos, la organización, la dinámica que se siguió, etcétera.

*El análisis a posteriori* está constituido por el registro de las observaciones durante la realización didáctica, como por ejemplo: las estrategias utilizadas por los alumnos, los modelos usados, el avance logrado, las inconsistencias, la frecuencia de ciertas actitudes, las reflexiones, justificaciones, argumentaciones, propuestas, presupuestos, y las producciones de los estudiantes, entre otras.

Como metodología de investigación cuenta con una fase de *validación*. A diferencia de otras, ésta es de carácter interno, consistente en la confrontación del análisis a priori y el análisis a posteriori.

## 3.2 Desarrollo de la propuesta de la ingeniería didáctica

En este apartado daremos seguimiento paso a paso a la metodología, con el objeto de ser lo más claro y explícito posible.

### 3.2.1 Los análisis preliminares

#### 3.2.1.1 El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos

Si analizamos las características de la enseñanza de las matemáticas en el nivel superior, nos daremos cuenta del empirismo de los profesores que en él laboramos. La gran mayoría de los docentes somos profesionales de algún campo de conocimiento pero no fuimos preparados para la docencia; aunque este hecho tiene algunas ventajas, ocasiona que a la hora de enfrentar un grupo de estudiantes reproduzcamos los métodos de enseñanza – fundamentalmente expositivos - que nuestros profesores emplearon con nosotros, la mayor parte de las veces sin tener conciencia del hecho mismo.

Entre los recursos de que disponemos los profesores, podemos mencionar la buena dicción, la prestancia, los cambios de volumen y tono de voz, los comentarios introductorios que motiven, la coherencia en las ideas, aclaraciones con lenguaje apropiado, la mímica, además del uso de los recursos tecnológicos como los proyectores, videos, equipo computacional.

Los recursos a los que hemos hecho mención serán usados por el profesor sobre la base de sus concepciones de objetivos, contenidos, enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, si cree que por exponer magistralmente algún tema de interés para los estudiantes o por organizarlos mediante alguna de las dinámicas grupales, éstos "aprenderán", además, verifica o corrobora tal aprendizaje por medio de un examen en el cual el alumno reproduce en el momento y lugar preciso definiciones o conceptos matemáticos y ejecuta convenientemente aunque de manera temporal operaciones de corte un tanto automatizadas por la práctica cotidiana, entonces sus actividades estarán centradas en esa dirección.

Así, el profesor en su clase construirá una sucesión de actividades cuyo grado de dificultad será de menor a mayor, colocando inicialmente peldaños muy pequeños para evitar tropiezos y confusiones en los estudiantes. La planeación es tan estricta aunado a lo cuidadosamente que se presenta en clase el objeto de estudio que incluso los alumnos ni dudas tendrán.

El alumno no propone, ni argumenta, ni cuestiona, salvo para pedir que se haga explícito o se repita alguna parte del procedimiento o algoritmo tratado. En este sentido parece que lo deseado es que el alumno desarrolle destrezas algorítmicas, las cuales por cierto regularmente carecen de sentido y significado para el alumno, y para lograrlas se recurre a la repetición o ejercitación continua.

La resolución de problemas que implique asociar algún algoritmo para luego desarrollarlo se realiza a través de alguna señal - hecha por el maestro- que muestre el camino a seguir.

Así que la planeación y organización hecha no toma en cuenta la posibilidad de promover en el estudiante la reflexión, la libertad de que proponga, discuta y valide o invalide sus propias ideas respecto del objeto de estudio o problema en cuestión. Esto significa que entonces nuestros alumnos esperarán paciente o impacientemente a que el profesor diga cómo se hacen las cosas, cómo se resuelve tal o cual problema; comentarios del estilo, "bueno, pues ya díganos cómo se hace", "¿qué fórmula hay que aplicar?", "¿Por qué tanto rodeo para llegar a eso?" Son frecuentes.

En la enseñanza tradicional se considera al error como el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar. El tiempo dedicado a la resolución de problemas en contexto es mínimo comparado con aquel que se dedica a las demostraciones algebraicas, a los desarrollos y destrezas operativas o algorítmicas.

Los ejercicios o "problemas" planteados están diseñados de tal forma que no se invadan temas u objetos matemáticos no considerados en el contenido, ni ejercicios carentes de solución.

*"Esta metodología tiene como consecuencia que en la clase típica de matemáticas los estudiantes hacen intentos de resolver todos los problemas con el método que aprendieron ese día y casi no se da la situación en la cual los alumnos entiendan y usen varios métodos y estrategias para resolver problemas tomando en consideración sus respectivas ventajas y desventajas (Grows, 1988)".*

*"El conocimiento es sustituido por el aprendizaje de un conjunto de técnicas mas o menos memorizadas, lo cual es atractivo para el profesor, sin embargo, esta opción aleja a los estudiantes de aquello que podría tener significado para ellos"*[2]

La enseñanza tradicional se centra en el funcionamiento dentro del cuadro algebraico, en una praxis algorítmica y en la evaluación de las competencias algebraicas correspondientes.

Esta enseñanza sólo prepara a los estudiantes con destrezas y capacidades algorítmicas, sin incorporar ni los avances en el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes ni los recursos tecnológicos modernos.

#### 3.2.1.2 El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución

Para el desarrollo de esta experiencia es importante describir la concepción de los estudiantes respecto al aprendizaje y a la enseñanza, lo cual haremos de manera general, aunque nuestro interés se centra en el caso de las matemáticas.

Para el estudiante regularmente la metodología de enseñanza adecuada es aquella en la cual el papel de los profesores es transmitir conocimientos, ya sea en forma oral o escrita. El papel de los estudiantes consiste entonces, en poner atención a la conferencia que el profesor imparte, quien debe decidir cómo se hacen las cosas, qué estrategias emplear, cuáles algoritmos aplicar, cuántas veces, etcétera.

Para el estudiante, incluso en estos tiempos, es un tanto agresivo proponerle que él inicie la resolución de un "problema" o ejercicio sin haberle dicho cómo se hace. Es decir, parece que la actitud fabricada por los años de educación escolarizada es un obstáculo para la devolución e incluso para la misma evolución de sus conocimientos.

Algunas dificultades evidentes detectadas por la experiencia y otras por el registro de éstas en artículos de investigación son:

La deficiente o nula manipulación en el ambiente gráfico. Difícilmente un estudiante puede graficar mediante patrones de comportamiento, y sobre todo manifiesta dificultades para interpretar un modelo gráfico.

La deficiente manipulación en el cuadro numérico, donde las habilidades y la agilidad mental son desaprovechadas, aunada al escaso y deficiente manejo de las calculadoras.

*"Sabemos de los trabajos de Vinner (1989), Eisenber y Dreyfus (1990), que existe de parte de los alumnos una resistencia al uso de consideraciones visuales. Ellos señalan que hay predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, una de las causas posibles es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente; otra, es que los profesores de matemáticas promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual. ... Los estudiantes manipulan coherentemente las transformaciones de representaciones en un mismo sistema semiótico, sobre todo el algebraico, pero muestran una carencia de articulación cuando se trata de convertir una representación de un sistema a otro, por ejemplo, del gráfico al algebraico".*[3]

---

[2] Wenzelburger Guttenberger, Elfriede, ¿Cómo enseñar hoy matemática para mañana?. *Revista en Educación Matemática,* pag. 20, vol 2, no. 2. Agosto 1990

[3] Hitt Espinoza, Fernando. Visualización Matemática, nuevas tecnologías y currículum, *en imprenta*. 1997.

En cuanto a la actividad de graficación, ésta es realizada en forma aceptable para polinomios hasta de segundo orden, mientras que para otras funciones, como las trascendentes o algebraicas, menos simples que las polinomiales, presentan alto grado de dificultad.

En general los estudiantes presentan dificultades para articular o cambiar de un cuadro a otro, particularmente del gráfico al algebraico, del gráfico, numérico y algebraico al verbal; quizá la mejor manipulación se presente en el tránsito del marco algebraico al numérico e inclusive al gráfico; esto es muestra del énfasis que ha tenido la enseñanza desde el punto de vista algebraico.

Investigaciones no formales que realizamos recientemente con un grupo de profesores de nivel medio superior muestran en general dominio en los procesos de resolución algorítmica, para expresiones hasta de segundo grado, mientras que para superiores utilizaron la técnica de prueba y error. Dado que las situaciones se presentaron algunas en contexto, se reflejaron dificultades o carencias para interpretar los resultados obtenidos, así como una nula utilización de las representaciones gráficas para comprender, abordar o resolver un problema.

Otras investigaciones recientes en el nivel superior con estudiantes de segundo semestre mostraron las deficiencias y lo incompleto del concepto de función. En lo referente a la solución de problemas, éstos fueron abordados estrictamente desde un enfoque algebraico y sólo el 30% los planteó y resolvió correctamente, a pesar de haber trabajado los mismos problemas el semestre anterior.

En los casos de soluciones de desigualdades y ecuaciones, éstas también son abordadas en un 100% con un único sistema de representación, el algebraico, y con serias dificultades para expresar el resultado preciso, lo que da indicios de la aplicación de algoritmos algebraicos carentes de sentido en algunos casos, e incluso en forma cotidiana es común la insistencia en calcular las raíces de funciones sin solución real mediante métodos algebraicos alternos.

La manipulación única en el cuadro algebraico (en el mejor de los casos) no permite interactuar con el objeto matemático, sino simplemente navegar sin rumbo claro sobre un algoritmo institucionalizado, buscando una respuesta obviamente descontextualizada y carente de significado, incluso matemáticamente.

Desde luego se suman las deficiencias en las competencias algebraicas propias originadas por la falta de práctica en la mecanización o en la aprehensión conceptual.

#### 3.2.1.3 El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva

El análisis del campo de restricciones comprende tres dimensiones, a saber: epistemológica, cognitiva y didáctica, las cuales son descritas a continuación.

**La dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego**

*Definimos que un número real a es raíz de f(x) sí f(a)=0. A las raíces de f(x) también se les llaman ceros de f(x).* Este acercamiento muestra una de las formas más usadas por la escuela para la introducción de las nociones matemáticas: como objetos descontextualizados, despersonalizados y atemporizados, dejando fuera *la naturaleza intrínseca del saber matemático que se pone en escena en la situación escolar.*

Como señala Farfán, R.M., *una de las características de la dimensión epistemológica es que contribuye a desterrar otra de las ficciones de la escuela, a saber, la concepción de que los objetos de enseñanza son copia simplificadas pero fieles de los objetos de la ciencia. El análisis epistemológico nos permite comprender qué es lo que gobierna la evolución del saber científico y tomar conciencia de la distancia que separa a esos dos sistemas. En este sentido, la noción de transposición didáctica toma en cuenta esas diferencias.*

Situándonos en el caso particular de las raíces de funciones, la escuela ha generado una identificación de dos procesos diferentes íntimamente ligados: las soluciones de una ecuación y las raíces de una función. Pero, desde el punto de vista de la construcción del saber científico, ¿Cuál ha sido el camino que la humanidad siguió para llegar a la construcción de la noción de raíz?

Para analizar este aspecto, debemos remitirnos a la génesis del álgebra. Al revisar literatura existente, encontramos que en civilizaciones tan antiguas como la egipcia, la babilónica, la china y la hindú, se resolvían lo que hoy conocemos como ecuaciones. Los grados de desarrollo están diferenciados pero en todos ellos encontramos que los problemas resueltos están estrechamente ligados a problemas de naturaleza práctica. Así por ejemplo, en el caso de los babilónicos, se resolvían situaciones de los trabajos agrícolas, construcción de presas, terraplenes, pozos, entre otros. Las soluciones planteadas a sus problemas son particulares y específicas a cada uno de ellos.

Un salto cualitativo importante lo tenemos en la matemática desarrollada por los árabes en la edad media, a grado tal que algunos historiadores de la ciencia reconocen en ellos a los creadores del álgebra. Aunque nos parece muy discutible esta postura, debe reconocerse que en sus trabajos se encuentran las primeras sistematizaciones y generalizaciones similares a las actuales.

Hacer un estudio a fondo de como se dieron estos procesos de formación del álgebra y ubicar en los mismos a la teoría de ecuaciones es una empresa lejos de los propósitos de nuestro trabajo, pero nos interesa señalar que vemos aquí la aparición del papel de la dialéctica herramienta-objeto. Esto quiere decir que ubicamos los primeros trabajos matemáticos ligados a fines utilitaristas como el uso de herramientas conceptuales que paulatinamente fueron concibiéndose en su carácter de objeto. Los algoritmos de los árabes obedecen a planteamientos de carácter general, descontextualizados, a diferencia de lo señalado en el caso de las civilizaciones antiguas.

Dada la influencia social y política de los árabes en Europa en algún sentido puede reconocerse en el desarrollo de los trabajos europeos su continuación y su profundización en el carácter objetal, centrado en los procesos generales. En el Renacimiento ubicamos un considerable avance en la generación de algoritmos para resolver ecuaciones hasta de cuarto grado y en la representación simbólica de los mismos.

Destacamos como un momento importante en el estudio de la teoría de ecuaciones la invención de los números complejos pues su falta de relación con problemas prácticos evidencian el estudio como objeto de las ecuaciones.

Otro hecho interesante en nuestro análisis es el relativo al surgimiento del pensamiento variacional y de la geometría analítica en el siglo XVII. Para el caso que nos ocupa ubicamos en este periodo la génesis del punto de vista moderno del concepto de raíz y la identificación de las raíces como puntos en una representación gráfica.

Indicios de obstáculos existentes en nuestros estudiantes se encuentran en lo señalado en el párrafo anterior. De alguna manera la matemática escolar ha retomado el desarrollo histórico de la teoría de ecuaciones en su carácter de objeto, haciendo caso omiso de la aplicabilidad y necesidad de introducir a las raíces de funciones en su carácter herramental. Los procesos de transposición didáctica se han centrado en el discurso matemático formal, pero con inconsistencias como las que a continuación señalamos:

a) En la enseñanza media se inicia el estudio de las ecuaciones y se asigna una relevancia mayor al concepto de incógnita. Se estudian en forma descontextualizada y atendiendo al discurso matemático de la actualidad pero aplicando los conceptos y los algoritmos de la Edad Media y el Renacimiento.

b) En los niveles superiores se aborda la teoría de ecuaciones bajo la perspectiva funcional, las literales se utilizan como variables ignorando la identificación de las mismas en su carácter de incógnita por parte de los estudiantes. Aquí una vez más se trabaja con problemas descontextualizados. Esta última perspectiva aunada al empleo de la geometría analítica posibilita una visión diferente de las raíces de funciones.

**La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza**

Es importante mencionar respecto de los antecedentes cognitivos de los estudiantes participantes en la investigación, pues éstos son un factor trascendente en el diseño de la ingeniería que se presenta. Tales antecedentes se obtuvieron por medio de un examen exploratorio constituido por dos etapas, la primera de ellas con el objeto de conocer las competencias algebraicas, gráficas y numéricas, así como la habilidad para transitar entre los cuadros y las dificultades que en cada uno de ellos predominan.

La segunda etapa tenía por objeto conocer las estrategias a seguir de los estudiantes para abordar situaciones problemáticas que involucren raíces reales de funciones lineales y cuadráticas.

Los resultados del primer exploratorio se clasificaron de acuerdo a los cuadros numérico, gráfico y algebraico.

**En el cuadro numérico**

- Se presentaron frecuentes errores numéricos en la evaluación de funciones.
- En general no se presentó problema para validar una raíz mediante el proceso de sustitución.
- Pocos estudiantes detectaron la existencia de raíces mediante el criterio de cambio de signo.
- No se asoció la descomposición de un polinomio en factores lineales con las raíces del mismo.
- Se mostró un deficiente tratamiento de tablas numéricas.

**En el cuadro gráfico**

- Este cuadro fue subutilizado, lo que se puso de manifiesto en la búsqueda de soluciones con procedimientos algebraicos aún contando con gráficas en las cuales las raíces son fácilmente identificables.
- El dominio de una función parecía estar subordinado a la gráfica.
- Con frecuencia no se recurrió al cambio de ambiente (del tabular al gráfico) para la obtención o al menos estimación de la solución, y cuando se recurrió a ésta, se hizo deficientemente.
- Algunos estudiantes identificaron la raíz en el cuadro gráfico.
- Se manifestó una deficiente apreciación y capacidad de análisis en el caso de las funciones de segundo grado, incluyendo la generación de la misma.

- Los puntos de intersección fueron identificados (por quienes lo hicieron) en el cuadro gráfico a partir de los modelos algebraicos.
- No se asoció la gráfica de una función sin raíces reales con las expresiones algebraicas.
- No se emplearon las gráficas como recurso para saber si hay o no raíces reales partiendo de un modelo algebraico.
- Existen indicios de que la información gráfica es considerada como informal.
- El 40% no identificó visualmente el número de raíces.

**En el cuadro algebraico**

- A pesar de que en algunos de los ejercicios se manejó la notación p(x) para una función, al plantear procedimientos o soluciones recurrieron al uso de f(x).
- Se identificó el concepto de raíz pues la justificación predominante fue f(x) = 0
- Se identificó, aunque en pequeña escala, la disociación entre el grado del polinomio y el número posible de raíces.
- Se manifestó un predominio indiscutible de desarrollo algorítmicos para encontrar las raíces.
- Parecen no estar asociados en términos algebraicos los puntos de intersección de dos gráficas con la igualdad de valores de dos funciones.

**Conclusiones generales del segundo exploratorio**

Se identifican serias deficiencias para pasar del cuadro verbal al algebraico, lo cual obstruye la posibilidad de que los problemas sean resueltos, el tránsito del marco verbal al numérico o gráfico no es utilizado en ningún caso ya sea para la comprensión o para la resolución del problema, al menos como paso intermedio.

Algunos alumnos incluso en el problema 2 generaron un sistema de ecuaciones sin resolver, quizá se deba a que tales planteamientos se habían visto recientemente.

Se detectó también falta de interpretación de los resultados una vez que encontraron la solución. Pareciera que los estudiantes no supieron qué hacer con tales determinaciones, particularmente cuando se trataba de funciones cuadráticas. En algunos casos los resultados obtenidos estuvieron fuera de contexto.

Cuando se trató de intersecciones entre gráficas, en general no se concibió la relación de una función con la otra, es decir, no se consideró que $f_1(x) = f_2(x)$, aquí las ordenadas son iguales y se presenta la intersección, no se utilizó la apreciación gráfica para obtener un resultado al menos aproximado, ni se compararon los resultados obtenidos algebraicamente (en caso de determinarlos) con la gráfica presentada. Esto es reflejado por los resultados erróneos de tales intersecciones, pues de considerarlas se detectarían las incorrecciones.

En general se detectó el predominio del cuadro algebraico, aunque no se desempeñaran eficientemente en él, y de hecho fue el único recurso empleado para abordar problemas, contextualizados o no.

**La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza**

Si revisamos los programas de matemáticas, particularmente los de Álgebra, Matemáticas I, Matemáticas II y Métodos Numéricos, notaremos que en ellos se incursiona de forma directa o indirecta en el cálculo de raíces. En algunos momentos el conocimiento matemático tiene carácter objetal y en otros momentos carácter de herramienta. En el caso de los cursos de álgebra el objeto matemático es visto solamente desde un cuadro, lo cual es una situación desfavorable para el estudiante.

En los cursos de matemáticas, a pesar de que se trabaja con varios cuadros, no hay entre ellos una articulación que permita la construcción de significados, sólo se aspira a lograr competencias en los distintos cuadros, sin que se presente el juego entre ellos.

A pesar de que las deducciones de algunos métodos se hacen a partir de análisis gráficos, el énfasis y los ejercicios siempre se centran en los procedimientos algebraicos y en la aplicación de los algoritmos algebraicos correspondientes. Pareciera que lo único importante es la operatividad de los métodos algebraicos para calcular raíces. En este sentido se descuida la significación conceptual del objeto matemático.

No obstante, bajo este esquema se pudieran desarrollar actitudes deseables de corte operativo o reproductivo, pero de cualquier forma insuficientes.

Los esquemas gráficos no están ausentes cuando se estudia el tema de raíces; en algunos casos son utilizados por el profesor para deducir el modelo algebraico de algún método particular; en otros casos se emplea como ilustración del funcionamiento del algoritmo.

Una vez "aprendido" el método o métodos, el profesor declara la necesidad de aplicarlos para resolver algunos ejercicios siguiendo la dinámica de lo que Régine Douady denomina la mecánica objeto-herramienta.

Sin embargo, si las condiciones habituales de empleo no son exactamente iguales, el alumno no será capaz de adaptar las herramientas ya sea para interpretar o plantear los problemas. En este sistema de enseñanza se les da poca responsabilidad a los alumnos en su aprendizaje.

Obviamente este funcionamiento podrá tener sus ventajas pero dificulta el enfrentamiento a situaciones novedosas y genera dependencia con el profesor. Una de las causas es que en el contrato didáctico[4] no están previstas actividades que coadyuven a la generación de significados, como dice Guy Brousseau, *"en la didáctica moderna, la enseñanza es la transmisión no del conocimiento sino de una situación a-didáctica[5] correcta, el aprendizaje es una adaptación a esta situación".*

La concepción del profesor sobre la manera en que el pensamiento del estudiante se activa es importante. Creer que enfrentar un estudiante a ejercicios y problemas es suficiente para que éste acepte el reto y se active mentalmente, pudiera ser una ingenuidad. Nosotros sostenemos que para que esto se dé es necesario que el estudiante interactúe con los objetos y, como producto de los conflictos entre lo que se conoce y lo que se desea conocer, se construya conocimiento.

---

[4] El término contrato didáctico es empleado aquí en el sentido que le da G. Brousseau, puede verse en Brousseau Guy. FUNDAMENTOS Y MÉTODOS DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. Página 15.

[5] El término situación a-didáctica es empleado aquí en el sentido que le da G. Brousseau, puede verse en Brousseau Guy. FUNDAMENTOS Y MÉTODOS DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. Página 14.

También se está consciente de que una de las restricciones que limitan la construcción de significado de los conceptos matemáticos es la utilización del cuadro algebraico como único vehículo de conceptualización.

El tratamiento curricular que se ha dado al estudio de ecuaciones, que en la secundaria enfatiza el papel de la literal *x* como incógnita, y a partir del bachillerato como variable, provoca confusiones posteriores y dificulta la conceptualización de la raíz de una función, privilegiando los procesos algebraicos mediante la identificación de la "solución de una ecuación", sin incorporar el punto de vista funcional.

**Objetivos específicos de la investigación**

Los objetivos que se plantean son observar:

Los efectos generados con el diseño y ejecución de una estrategia de enseñanza que incorpore a la dialéctica herramienta-objeto como medio de producción de significados.

La resistencia del alumno para cambiar de un marco a otro.

Cuál es el cambio de marco que más causa dificultad al alumno

En que medida las situaciones problemáticas diseñadas y la incorporación de la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos en éstas, permiten promover acciones de argumentación, conjetura, justificación y proposición en el alumno.

Los atributos cualitativos logrados por el estudiante con relación a la construcción del concepto de raíz real, mediante su enfrentamiento con la estrategia didáctica.

El desempeño de los estudiantes en lo concerniente a sus competencias

La manera en que el juego de marcos genera conflictos cognoscitivos entre lo que conoce y lo que desea conocer.

En que medida el juego de marcos enriquece la significación conceptual del estudiante en relación con el objeto matemático en estudio.

Las posibilidades de identificación de la raíz real en la situación problemática

La participación de la dialéctica herramienta-objeto para promover el sentido del estudio del concepto en calidad de objeto.

### 3.2.2 La concepción y el análisis a priori

El problema y los objetivos de investigación, las consideraciones teóricas y los análisis realizados hasta estos momentos, nos conducen a la elaboración de un diseño didáctico que permita en general la construcción del concepto de raíz real.

Sintéticamente, para el diseño didáctico asumimos lo siguiente:

- La consideración de la dialéctica herramienta-objeto permite presentar a la matemática en contexto, abordando problemas de ingeniería que propician el sentido de las nociones matemáticas tanto en su aplicabilidad para la resolución de problemas como para su estudio en tanto objeto, reconociendo sus propiedades, conceptualizándolo, etcétera.

- La presentación de situaciones que conducen a expresiones algebraicas cuyas raíces son más de una, obliga a considerar, por una parte la correspondencia entre los resultados numéricos y la situación contextualizada y, por otra, a entender que un modelo matemático incluye también la existencia de dominios de definición de las funciones involucradas.
- La diversidad de situaciones con diferentes contextos que se plantean, coadyuva a la formación de un concepto de la raíz real rico en significados.

- La representación en la que se dispone la información inicial de las situaciones problemáticas permite incidir en la generación de significados matemáticos del concepto.

- La incorporación del juego de marcos al diseño permite generar conflictos cognoscitivos entre lo que el estudiante conoce y aquello que pretende conocer. Los conflictos son superados cuando el estudiante recurre al cambio de marco para enfrentar la situación problemática.

En razón de lo anterior pensamos que el diseño de la secuencia didáctica que incorpora tanto a la dialéctica herramienta-objeto como al juego de marcos permitirá a los alumnos construir el concepto de raíz real. Concebimos que un alumno habrá construido el concepto de raíz real cuando:

Describa, Identifique o asocie a la raíz real en distintas representaciones, a saber: gráfica, algebraica y numérica.

Resuelva situaciones problemáticas que involucren raíces reales.

Asocie a la raíz real con la situación práctica del problema.

Interprete de manera adecuada los resultados obtenidos producto de una situación problemática que involucra raíces reales

Afronte situaciones nuevas que involucren raíces reales

También sostenemos que como producto de la confrontación del estudiante con la estrategia didáctica diseñada, observaremos durante el proceso el desarrollo de actitudes y habilidades para hacer conjeturas, para argumentar, para proponer estrategias de solución, para ejecutarlas, para validarlas, etc., las cuales son sumamente valiosas en la formación de un estudiante.

El diseño de ingeniería que aquí se presenta está integrado o formado por tres bloques, llamados así porque cada uno de ellos a su vez consta de un conjunto de situaciones problemáticas en donde se requiere del objeto matemático como herramienta para resolverlas, y además de un conjunto de ejercicios cuya solución requiere del objeto matemático como tal.

Como ya se señaló, la intención es observar el proceso de solución de problemas de raíces reales de funciones lineales y cuadráticas, a partir de información dispuesta inicialmente en el cuadro gráfico, después en el cuadro numérico y finalmente en el verbal. En general en cualquiera de ellos se promueve el cambio de marco para resolver el problema.

Se decidió presentar este tipo de problemas prácticos que implicaran el uso de herramientas con las que ya los estudiantes contaban (supuestamente), además de la presentación de nuevos conocimientos que se institucionalizarían en su momento; estos problemas debieran ser un reto alcanzable para los estudiantes y no implican procedimientos desconocidos para su solución.

Los problemas que integran los bloques pretenden que el alumno vaya incursionando en situaciones que le permitan generar significados del concepto de raíz real; en una representación algebraica o numérica este concepto implicaría la anulación de la función, es decir, A(x)=0, donde A(x) representa la función y, en términos gráficos, la solución de la ecuación se traduce a la búsqueda de los puntos donde la gráfica corta al eje de las abscisas.

Los problemas que se consideran en el diseño de las secuencias de enseñanza tienen el propósito de generar competencias en los diferentes marcos y por lo tanto haremos explícitas las consideraciones para cada uno de ellos.

Las competencias las clasificaremos en aquellas que presuntamente deben tener los alumnos y aquellas que deben estar disponibles.

**Competencias que presuntamente deben poseer los alumnos**:

En el marco gráfico: trazar ejes ortogonales y graduarlos, ubicar coordenadas, leer coordenadas de puntos establecidos, trazar curvas, manipulación correcta de los términos eje, ordenada, coordenada, abscisa, graduación.

En el marco algebraico: sustituir los valores numéricos por las literales o variables en la expresión algebraica y calcular su valor, modelar para el cálculo de áreas, perímetros y volúmenes de figuras geométricas simples (paralelepípedo, círculo, triángulo, rectángulo), modelo pitagórico para el triángulo rectángulo, semejanza de triángulos, resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con el método de factorización, mediante la fórmula general y completando un trinomio cuadrado perfecto.

En el cuadro numérico: manipulación correcta de los números racionales e irracionales, utilización de la calculadora (uso de memoria, funciones trigonométricas, exponenciales) como ayuda para los cálculos y la elaboración de tabulaciones.

**Competencias que deben estar disponibles por los alumnos:**

En el marco gráfico: trazo de ejes ortogonales, graduación, ubicar coordenadas, graficación de funciones lineales y cuadráticas, distinción de puntos importantes (vértice de una parábola, cortes con los ejes).

En el marco algebraico: desarrollo de expresiones algebraicas de primer y segundo grado, aplicación de la fórmula general cuando se requiera, despejes, semejanza de triángulos.

En el marco numérico: uso de la calculadora para ejecución de operaciones con varios dígitos y evaluación de funciones.

**Las herramientas**

Los estudiantes contaban con cierta experiencia - basándose en sus conocimientos de geometría analítica- en torno a la determinación de la representación algebraica de funciones lineales y cuadráticas a partir de información gráfica y en caso de contar con información numérica, - mediante el cálculo de las primeras y segundas diferencias de las ordenadas- cuando el "paso" en los valores de las abscisas fuera constante.

**Las variables globales del diseño son las siguientes:**

a) El concepto matemático objeto de aprendizaje es el de raíz real.
b) Las funciones que se generan por las situaciones problemáticas son de primer grado o de segundo grado.

**Las variables locales del bloque 1**

a) La información de la situación problemática está dispuesta en forma gráfica, y puede o no cortar el eje de las abscisas.
b) Las funciones con las cuales se trabaja en los problemas son lineales o cuadráticas.
c) En el caso de las funciones lineales la pendiente puede ser positiva o negativa y la ordenada en el origen siempre es diferente de cero.
d) En el caso de las funciones cuadráticas la concavidad puede ser hacia abajo o hacia arriba.
e) Los parámetros de las funciones, sean lineales o cuadráticas, son enteros o fraccionarios.
f) La solución de los problemas, es decir, la raíz, puede ser cualquier número real.
g) Los estudiantes pueden utilizar la calculadora graficadora para corroborar que la expresión algebraica determinada corresponde a la gráfica representada.
h) El número de raíces reales puede ser uno o dos, según el caso.
i) Todos los problemas correspondientes al bloque 1 presentan contexto diferente.

**Las variables locales del bloque 2**

a) La información de la situación problemática está dispuesta en forma numérica, y puede o no mostrar cambio de signo en las ordenadas.
b) Las funciones con las cuales se trabaja en los problemas son lineales o cuadráticas.
c) En el caso de las funciones lineales la pendiente puede ser positiva o negativa y la ordenada en el origen es diferente de cero.
d) En el caso de las funciones cuadráticas la concavidad puede ser hacia abajo o hacia arriba.
e) Los parámetros de las funciones, sean lineales o cuadráticas, son enteros o fraccionarios.
f) La cantidad de datos numéricos que se presentan en cada problema puede o no ser igual.
g) El "paso" de un valor de abscisa a otro puede o no ser igual.
h) En el caso de la información numérica correspondiente a funciones cuadráticas se explicita la coordenada del vértice en términos numéricos, no verbal.

i) Los contextos de los problemas son diferentes.
j) Los números que son raíces, pueden ser o no enteros.
k) Los estudiantes pueden utilizar la calculadora graficadora para corroborar que la expresión algebraica determinada corresponde a la gráfica representada.

**Las variables locales del bloque 3**

a) Las funciones con las cuales se trabaja en los problemas son lineales o cuadráticas.
b) En el caso de las funciones lineales la pendiente puede ser positiva o negativa y en cada una la ordenada en el origen es diferente de cero.
c) En el caso de las funciones cuadráticas la concavidad puede ser hacia abajo o hacia arriba.
d) Los parámetros de las funciones, sean lineales o cuadráticas, son enteros o fraccionarios.
e) La información de la situación problemática está dispuesta sólo en forma verbal.
f) Los contextos de los problemas son diferentes.

**Las selecciones didácticas del bloque 1 que fijan las variables y las intervenciones del profesor**

En los primeros 4 problemas:

a) Se espera que los estudiantes, después de leer los problemas, reflexionen en torno a la relación práctica existente entre el problema y la información gráfica presentada. En algún momento, por ejemplo para el problema 1, se espera identifiquen que para un tiempo cero el volumen de agua en el tanque es de 7 galones y que la razón de cambio de la extracción de agua es precisamente la pendiente de la recta, o bien que por cada unidad de tiempo que transcurre el volumen de agua que se extrae es de 2 galones.
b) Se espera también una estimación de la raíz basándose en la observación directa de la información gráfica como respuesta al problema.
c) Se espera determinen el modelo algebraico que representa la información dispuesta gráficamente, para que posteriormente igualen a cero, producto de la confrontación por la situación práctica prevaleciente. Por ejemplo en el problema

1, se asocie que si el tanque está vacío entonces V(t) = 0, o, en el problema 4, asocien que como no hay ingreso, I(t) = 0.

d) Se espera que utilicen los conocimientos previos, con relación a sus competencias algebraicas, para encontrar el valor de t en el cual V(t) = 0 o bien, el valor de t para el cual I(t) = 0.

e) En todos los casos el conocimiento tiene carácter de herramienta.

f) Se espera la utilización de algún algoritmo para determinar los ceros de las funciones planteadas, por ejemplo, en el caso de las cuadráticas el uso de la fórmula general, de una factorización o la completación de un trinomio cuadrado perfecto.

g) Se espera la interpretación del resultado obtenido.

**Institucionalización local**

En esta primer institucionalización local (al término de los primeros 4 problemas) se hace explícito que los valores t para los cuales las funciones V(t) e I(t) son cero se denominan raíces reales o ceros de la función correspondiente.

Además de lo anterior:

- En términos gráficos las raíces reales corresponden a la determinación del punto donde la representación gráfica de la función de que se trate corte al eje de las abscisas, es decir, los valores de t (en los problemas planteados) por donde la representación gráfica corta o toca al eje t.

- Que el método utilizado para resolver el problema consiste en el tránsito entre el cuadro gráfico (en el cual se dispone la información inicial) al cuadro algebraico, mediante el uso de sus competencias gráficas, en el sentido de la determinación de la representación algebraica a partir de la representación gráfica de una función lineal o cuadrática.

- Se analiza el valor numérico obtenido para la raíz a la luz de la situación problemática de donde surgió, tratando de incorporar aspectos de sentido común, de posibilidad, de criterio inclusive; dicho de otra manera, interpretamos el valor obtenido de la raíz real en términos contextuales.

- Se resalta la importancia que tiene el objeto matemático en la resolución de situaciones problemáticas.

**En los problemas del 5 al 8**

- Se espera que el alumno utilice los mismos procedimientos empleados para resolver los problemas anteriores, con la diferencia de que en éstos el conocimiento tiene carácter de objeto. Vale la pena aclarar que:

a) Se incluyó en el problema 7 un caso de raíz doble para identificar las reacciones de los alumnos, en cuanto a incorporar esta variante.
b) Se espera relacionar la función con el número de raíces posibles.

**Las selecciones didácticas del bloque 2 que fijan las variables y las intervenciones del profesor**

**En los primeros 5 problemas se espera que:**

a) Los estudiantes después de leerlos, reflexionen acerca de la relación que existe entre el problema y la información numérica que se presenta.
b) Los alumnos transiten de la representación numérica a la representación gráfica, pues por experiencias pasadas, a través de ésta última como intermediaria, es posible llegar a la representación algebraica de la función. Después los alumnos tienen dos opciones, estimar gráficamente el valor de la raíz (lo cual para ellos ya sería una respuesta un tanto incompleta), o transitar hacia la representación algebraica.
c) Utilicen los conocimientos previos con relación a sus competencias algebraicas para encontrar el valor de t (tiempo) para el cual por ejemplo en el problema 3, P(t) = 0, o bien, en el problema 1, el valor de t (temperatura) para el cual V(t) es 0.
d) En todos los casos el alumno utilice la raíz real para resolver el problema. Aquí el conocimiento tiene carácter nuevamente de herramienta.
e) La utilización de algún algoritmo para encontrar las raíces de las funciones planteadas.
f) Identifiquen la existencia de una raíz al detectar los cambios de signo en la función del problema 2, la cual corresponde a una función continua.
g) Identifiquen el comportamiento gráfico a partir de las tabulaciones.

**Institucionalización local**

En esta segunda institucionalización local (al término de los primeros 5 problemas) se hará explícito que:

- Los valores que se determinaron de t para los cuales las funciones V(t) y P(t) son cero (ejemplos 1 y 4 respectivamente) también se denominan raíces reales.

- En términos gráficos las raíces reales corresponden a la determinación del punto donde la representación gráfica de la función de que se trate corte al eje de las abscisas, es decir, los valores de t (en los problemas planteados) por donde la representación gráfica corta o toca al eje t.

- El método utilizado para resolver el problema consiste en transitar del cuadro numérico (en el cual se dispone la información inicial) al cuadro gráfico y con posterioridad al cuadro algebraico, mediante el uso de sus competencias gráficas,

- En la práctica de la ingeniería, cuando se trata de realizar mediciones en procesos o experimentos, la información se dispone frecuentemente en forma numérica, como es el caso de los presentes.

**Problemas del 6 al 10**

a) Se espera que el alumno utilice los mismos procedimientos (en el sentido del tránsito de cuadros) empleados para resolver los problemas anteriores, con la diferencia de que en éstos el conocimiento tiene carácter de objeto.
b) Se incluyó en el problema 7 un caso de raíz doble.
c) Se espera relacionen el tipo de función con el número de raíces posibles.

**Las selecciones didácticas del bloque 3 que fijan las variables y las intervenciones del profesor**

**En los problemas del 1 al 7**

Se espera que:

a) Los estudiantes reflexionen sobre las formas de manipular con información numérica, sin excluir la posibilidad de que transiten al cuadro gráfico o algebraico directamente. Por ejemplo, en el problema 1 se puede generar un conjunto de puntos a partir de t = 0 y v = 88, puesto que el automóvil disminuye su velocidad a razón constante de 15 pies por segundo. El análisis puede continuarse y declarar que para un tiempo t = 1 segundos la velocidad es de 88 – 15 = 73 pies por segundo, y así sucesivamente. Una vez logrado tener un conjunto de datos numéricos, pasar al cuadro gráfico (en el cual pueden obtener ya una solución parcialmente correcta), luego al algebraico y finalmente resolver en éste.

b) En todos los casos el alumno utilice la raíz real para resolver el problema; aquí el conocimiento nuevamente tiene carácter de herramienta.
c) Utilicen algún algoritmo para determinar los ceros de las funciones.
d) Resuelvan los problemas a través uso e interacción de los distintos cuadros e interpreten las soluciones.

**Institucionalización local**

Se hará explícito que:

- El método utilizado para resolver el problema consiste en: a partir de información presentada en el cuadro verbal la manipulación de información numérica y la comprensión misma del problema, y, por otro lado, transitar del cuadro numérico al cuadro gráfico y después al cuadro algebraico mediante el uso de sus competencias gráficas. Por último, con algún algoritmo conocido, determinar las raíces de la función, sea ésta lineal o cuadrática.

- En la práctica de la ingeniería la información también puede estar presentada sólo en forma verbal.

**En los problemas del 8 al 10**

a) Se espera utilicen el concepto de raíz real con carácter de objeto y sus competencias algebraicas para resolver los citados problemas.
b) En el problema 8 se pretende que el alumno iguale las representaciones algebraicas de las funciones que se dan como información, así como en el problema 10, enfatizar la asociación que hay entre la determinación de una raíz y la forma algebraica $f(x) = 0$.

**La institucionalización**

Nuevamente se declara la importancia de la raíz en términos algebraicos, numéricos y gráficos, en relación con la resolución de problemas de naturaleza práctica y matemática. Así como en la forma en que ésta se puede presentar, $f(x)=0$ o en forma similar $f(x)=c$, donde c es diferente de cero y analizar las repercusiones en los distintos cuadros.

Dado que el tratamiento realizado sólo implicó la resolución de problemas con funciones lineales y cuadráticas, se hace explícita la existencia y necesidad de afrontar otros problemas y ejercicios matemáticos que generan funciones de otra naturaleza.

Se hizo explícita la necesidad de analizar e interpretar los resultados obtenidos una vez terminados los cálculos correspondientes.

Se evidenciaron las alternativas de solución a las situaciones problemáticas a través de la utilización y a la conexión entre los distintos cuadros.

### 3.2.3 La realización didáctica y la dinámica de trabajo

Las actividades diseñadas se llevaron a la práctica con un grupo de 14 estudiantes de segundo semestre de la carrera de Ingeniería Industrial en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, en la clase de Métodos Numéricos. Los estudiantes han cursado ya las asignaturas de Matemáticas I, Programación I, Dibujo e Introducción a la Ingeniería, y actualmente cursan las asignaturas de Matemáticas II, Programación II, Probabilidad, Física y Metodología de la Investigación.

Debe hacerse la aclaración de que los cursos Matemáticas I y Matemáticas II corresponden al estudio del cálculo diferencial y cálculo integral respectivamente.

Para el desarrollo de las actividades se organizaron por afinidad ellos mismos en grupos de 3 a 4 personas. Ello facilitó la observación de los procesos de aprendizaje y también permitió una mejor expresión de las ideas, pues se promovió la comunicación entre pares.

Esta forma de organización permite la creación y desarrollo de habilidades para la expresión oral y el cuestionamiento, que de otra manera son difíciles de conseguir; en la medida en que los estudiantes verbalizan, defienden y justifican o argumentan sus acciones, se afinan y evolucionan en ellos sus propias concepciones. Se propicia y estimula que los estudiantes más avanzados auxilien a quienes aún no logran el aprendizaje de un concepto o procedimiento, promoviendo así la solidaridad y el compañerismo.

**Los propósitos de la realización didáctica**

Los siguientes aspectos son los propósitos de la realización didáctica:

Contribuir al desarrollo de actitudes como: la reflexión, validación, comprobación, conjetura.

Dotar de significados matemáticos en las diferentes representaciones y significados prácticos asociados con las situaciones problemáticas.

Dotar de significados en términos contextuales a las representaciones numéricas, gráficas y algebraicas.

Desarrollar el sentido intuitivo para acercarse al concepto de raíz.

Investigar en qué medida la presencia de significaciones diferentes a las utilizadas por la enseñanza tradicional pueden constituirse en auxiliares para la generación de estrategias de manipulación de modelos algebraicos.

Que los alumnos desarrollen las habilidades necesarias para la aplicación de algoritmos y procedimientos que conduzcan a la solución de problemas en donde esté implícito el cálculo y la interpretación de resultados que involucren a las raíces.

Contribuir al desarrollo y valoración de la estimación como un procedimiento útil en la resolución de problemas.

Contribuir al desarrollo de la capacidad de los estudiantes para utilizar las distintas representaciones como recurso en la modelación de los problemas de ingeniería.

### Primer bloque de problemas

Los objetivos particulares del primer bloque son los siguientes:

Dotar de significados en términos contextuales a las representaciones gráficas y algebraicas.

Dotar de significados prácticos a las raíces reales.

Dotar de significados matemáticos a las raíces reales.

Establecer un método para la resolución de problemas de raíces reales de funciones lineales y cuadráticas.

Sensibilizar acerca de las limitaciones que con respecto a un problema en particular puede tener la solución a través de una representación gráfica.

Promover el sentido del estudio de las raíces reales como un objeto matemático.

Para la realización se llevó a la práctica la siguiente dinámica:

1.-Se dio una breve explicación respecto de la organización y de las actividades que se llevarían a cabo, el tiempo aproximado requerido y de la necesidad en algunos momentos de trabajar horas extraordinarias, obteniendo una respuesta positiva por parte del grupo de estudiantes. No se hizo explícito que el tema a abordar correspondía a las raíces reales.

2.-Se inició el trabajo con los primeros 4 problemas del bloque 1, se detectaron dificultades en un equipo. Con el propósito de mejorar la dinámica de trabajo se cambiaron a sus integrantes, lo cual resultó benéfico. Al finalizar esta etapa se llevó a cabo la primer institucionalización local.

3.-Se solicitó a los estudiantes que resolvieran los problemas restantes del bloque 1.

### Segundo bloque de problemas

Los objetivos particulares del segundo bloque son los siguientes:

Dotar de significados en términos contextuales a las representaciones numéricas, gráficas y algebraicas.

Dotar de significados prácticos a las raíces reales.

Dotar de significados matemáticos a las raíces reales.

Establecer un método para la resolución de problemas de raíces reales de funciones lineales y cuadráticas.

Sensibilizar acerca de las limitaciones que con respecto a un problema en particular puede tener la solución a través de una representación gráfica.

Generar en el alumno la observancia y sensibilización del comportamiento de los datos numéricos.

Promover el sentido del estudio de las raíces reales como un objeto matemático.

La dinámica para estos problemas fue la siguiente:

1.-Se trabajó con los primeros 5 problemas del bloque 2. En todos ellos la información que se dispone es numérica y el concepto de raíz aparece nuevamente con el carácter de herramienta.

2.-Al término de los mismos se llevó a cabo la segunda institucionalización local, para que posteriormente los estudiantes concluyeran los problemas restantes del bloque 2, donde el concepto de raíz toma el carácter de objeto.

**Los problemas del bloque 3**

Los objetivos particulares del tercer bloque son los siguientes:

Dotar de significados en términos contextuales a las representaciones numéricas, gráficas y algebraicas.

Dotar de significados prácticos a las raíces reales.

Dotar de significados matemáticos a las raíces reales.

Establecer un método para la resolución de problemas de raíces reales de funciones lineales y cuadráticas.

Sensibilizar acerca de las limitaciones que con respecto a un problema particular puede tener la solución a través de una representación gráfica.

Promover el sentido del estudio de las raíces reales como un objeto matemático.

La dinámica con la que se trabajó fue la siguiente:

1.-Se pidió a los estudiantes que abordaran los primeros siete problemas del bloque en los cuales la información que se dispone es sólo verbal y el concepto de raíz aparece como herramienta.

2.-Al término de los mismos se llevó a cabo la tercer institucionalización local, y posteriormente los estudiantes concluyeron los problemas restantes del bloque 3, donde las raíces toman el carácter de objeto.

En esta etapa hicimos algunas reflexiones acerca de la necesidad de afinar algunas observaciones y profundizar en el conocimiento de lo que estaba pasando. Decidimos entonces hacer algunos ajustes al diseño de la ingeniería didáctica y planeamos una entrevista con 4 estudiantes para enfrentarlos a la resolución de problemas que incluían nuevos contextos o nuevas situaciones.

La selección de los 4 alumnos para la entrevista se realizó de entre los que consideramos que no eran ni los más avanzados ni los más atrasados en función de sus competencias matemáticas. Con el fin de hacer un análisis más completo de lo sucedido en la entrevista, las sesiones se filmaron con una cámara de video.

**Específicamente, con la entrevista se pretendía:**

Observar la forma en que aplicaban los conocimientos construidos en las actividades anteriores para enfrentar situaciones similares (en cuanto al grado de dificultad) a las presentadas en las secuencias didácticas.

Enfrentar al estudiante ante situaciones nuevas (complejidad un tanto mayor que las presentadas en las secuencias didácticas) y observar la aplicación de conocimientos y la generación de mecanismos propios para la resolución de los problemas.

Observar los cambios de cuadros que podían o requerían hacer para resolver las situaciones problemáticas, así como observar el desarrollo de las competencias correspondientes.

Entender en qué medida realizaban una interpretación adecuada de las soluciones en cuanto al contexto.

Distinguir las deficiencias y nuevos obstáculos que inicialmente no se habían detectado.

Aquí también la pretensión es establecer la opción que elegían los estudiantes para resolver el problema, y sí la metodología proporcionada por la estrategia didáctica la seguían utilizando, independientemente de haber otro camino más económico.

En los problemas de la entrevista se presentaron dos variantes, una variante implicaba tomar la decisión por parte del alumno para resolver de la manera económica o a través del tránsito de marcos, mientras que la otra variante implicaba un solo camino, en el cual podíamos observar las competencias adquiridas en tal cuadro.

### 3.2.4 Análisis a posteriori

En este análisis se rescatan los detalles, comentarios, estrategias y reflexiones considerados importantes, realizados por los estudiantes durante el desarrollo de las secuencias de enseñanza; no obstante se está consciente que seguramente se han pasado por alto algunos de ellos.

El análisis está organizado de acuerdo a cada uno de los bloques que integran el diseño de ingeniería, posteriormente se presenta el correspondiente a la entrevista.

**Análisis del bloque 1**

En esta primer parte, particularmente en los primeros 4 problemas, se evidenció la dependencia de algunos alumnos con el profesor, pues en cada paso se pedía su aprobación. Además, se notó inicialmente cierto individualismo que a través del tiempo fue disminuyendo.

No se recurrió a la apreciación gráfica (salvo en un equipo) para estimar una primera solución al problema, sin embargo, posterior al cálculo de la raíz, en algunos casos revisaron la gráfica para observar si había correspondencia con el resultado obtenido. Esto sugiere la predominancia que tiene el cuadro algebraico sobre el gráfico. Sin embargo, tal comparación implica la asociación de ambas representaciones cuyo común denominador es el concepto de raíz real. Aquí la dialéctica herramienta-objeto esta representando su papel de generadora de significados.

Para determinar la pendiente de la recta se recurrió a fijar las coordenadas de dos puntos y calcularla con $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o, a dibujar un triángulo rectángulo sobre la recta con unidades enteras para calcular con $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Para encontrar la representación algebraica se utilizaba la pendiente y un punto cuyas coordenadas fueran números enteros, aunque después empezaron a sugerir usar la pendiente y la ordenada en el origen, tomando en cuenta que en todos los casos esta información también se daba con números enteros.

Aparentemente no se presentó dificultad para que, una vez obtenida la representación algebraica, ésta se igualara a cero, salvo en un equipo, el cual tuvo dificultades en los problemas de las funciones cuadráticas, donde insistían en derivar la función e igualar a cero, pues un alumno señaló *"en el curso de Matemáticas I así resolvíamos los problemas"*. La actitud de los estudiantes de ese equipo motivó que se intercambiaran algunos de sus miembros y se abandonó su intención de proceder así. En este mismo equipo se identificó a la razón con que se extraía agua del tanque (problema 1) como $\frac{dv}{dt} = -2$, mientras que en otro se identificó a tal razón como la pendiente de la recta.

Los comentarios asociados al hecho de igualar a cero las expresiones algebraicas fueron que en ese instante el agua del tanque se había acabado (primer problema).

En un equipo se presentó confusión respecto de lo que se estaba calculando, esto es, si se trataba de F(0) o de F(x) = 0.

Sólo algunos estudiantes, en los problemas 2 y 4, proyectaron las gráficas hasta cortar el eje de las abscisas.

En el caso de los problemas con funciones cuadráticas, después de establecer la representación algebraica de la forma $a(x-c)^2+b=0$, los estudiantes procedieron a desarrollarla para aplicar la fórmula general; sólo un alumno las resolvió empleando la forma original, pero para los demás esto no fue trascendente.

Cuando se encontraban las raíces de funciones cuadráticas con la fórmula general, los resultados emitidos variaban con respecto a las cifras significativas, siendo éstas desde 2 hasta 10.

En el caso de las raíces de funciones lineales, éstas se expresaron en forma decimal o en forma fraccionaria.

En general y sin mucha controversia se interpretaba el resultado obtenido, inclusive en el problema 4, cuya solución es t = 3.8284 meses, algunos alumnos hicieron transformaciones para encontrar el día y hora correspondiente.

Se identificaron problemas operativos de corte tanto algebraico como numérico (manejo de signos en el interior del radical y el doble signo generado por la raíz cuadrada) en la aplicación de la fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado.

A partir del tercer problema, en 3 de los 4 equipos se hacía explícito que debían determinar una raíz.

En los problemas del 5 al 8 en forma automatizada y en poco tiempo obtuvieron las soluciones correspondientes, salvo aquellos que mostraron desde el principio deficiencias en las competencias gráficas - particularmente en las cuadráticas - y algebraicas. Aquí el conocimiento tenía carácter de objeto.

En el problema 7, los estudiantes resolvieron directamente por factorización y en ningún caso aplicaron la fórmula general. Sin embargo, la respuesta emitida varió, algunos escribieron x = 2 y x = 2 y otros sólo x = 2.

En dos de los equipos, integrantes de los mismos tuvieron que auxiliar a sus compañeros dando explicaciones como las siguientes: "si está sumando pasa restando", "si está dividiendo pasa multiplicando", reflejo de la existencia de incompetencias algebraicas elementales.

Cuando se llevó a cabo la institucionalización se notó que para la mayoría el concepto de raíz era familiar, pero, al hacer explícito que tal concepto había sido el medio para resolver los problemas en contexto, hubo manifestaciones de asombro. Incluso hubo comentarios entre ellos respecto de la utilidad o aplicabilidad que tenía un tema de matemáticas.

**Análisis del bloque 2**

La dependencia del alumno hacia el profesor disminuyó, a pesar de que ahora la información que se daba era numérica, es decir, no hubo quejas. También se notó un buen ambiente de trabajo y en ningún momento se escucharon comentarios ajenos a la resolución de los ejercicios. Los alumnos, todos, estaban dedicados a la resolución de los problemas.

Se hicieron evidentes los liderazgos de cada uno de los grupos. Este liderazgo se ganó en función de los conocimientos y de las destrezas que mostraban para hacer planteamientos y desarrollos algebraicos. Una actitud permanente de los "líderes" consistió en explicar a sus compañeros paso a paso el desarrollo de los problemas.

El problema 1 lo resolvieron haciendo análisis sólo numérico y comentaban cosas como: "si aumentamos 200 grados de temperatura el volumen aumenta en 150", "si se disminuyen 200 grados de temperatura, el volumen disminuye en 150". Sólo un equipo elaboró la gráfica para pasar a continuación al cuadro algebraico, igualar a cero y determinar la temperatura a la cual el volumen es cero; este mismo equipo graficó para resolver el problema 2, transitar al cuadro algebraico y resolver. Sin embargo, por detalles de manipulación gráfica y manejo de signos, se tardaron un tiempo considerable respecto a los demás equipos.

En el problema 2 un equipo tenía presente el modelo de transformación de grados Centígrados a Fahrenheit por lo cual resolvieron el problema sin utilizar el cuadro gráfico.

En este mismo problema otro de los equipos también elaboró la gráfica dándole continuidad y estableciendo que con el aumento de cada grado Fahrenheit los grados Centígrados aumentan 5/9. Con esto incrementaron la tabulación incluyendo dos valores mas, calcularon la pendiente y encontraron la representación algebraica, y por último, resolvieron igualando a cero.

En el problema 3 uno de los equipos continuó con su estrategia de graficar y determinar la función en términos algebraicos para posteriormente igualar a cero y despejar. Otros pasaron directamente al cuadro algebraico y resolvieron ahí.

Otro de los equipos (en el mismo problema), basándose en tanteos para calcular lo que pierde por año, resolvió en el marco numérico, con lo cual interpretamos que para el alumno el concepto de raíz tiene significación en el cuadro numérico, previsto esto por la incorporación de la dialéctica herramienta-objeto en el diseño didáctico y, para satisfacer el requisito de obtener el modelo algebraico, lo obtuvo con posterioridad a la emisión explícita del resultado.

En el problema 4 se optó en general por graficar primero (dado que no estaban seguros de que se trataba de una función cuadrática), identificando la parábola, el vértice correspondiente y un punto, para proceder a determinar la representación algebraica, salvo un equipo que a través del análisis de la tabulación identificó plenamente que el comportamiento era de una cuadrática, procediendo a determinar la representación algebraica y resolver mediante despeje.

En la elaboración de la gráfica de volumen y temperatura del problema 1 utilizaron la notación, a pesar de que estaban explícitas las variables v de volumen y t de temperatura. Quizá se deba a la falta de la matemática en contexto.

Mostraron deficiencias para transformar y operar decimales y fracciones, causándoles un retraso considerable salvar tal detalle.

En el problema 4 uno de los equipos elaboró un esquema gráfico del lanzamiento para comprender lo que pasaba, tomándolo como la gráfica adecuada, para después determinar la representación algebraica y resolver empleando la fórmula general. El procedimiento y sus comentarios posteriores indican que confundieron la gráfica de la trayectoria con la de la posición del objeto con respecto al tiempo.

En los problemas donde las funciones tratadas tienen un dominio natural, fueron representadas gráficamente por los estudiantes como si fueran gráficas continuas.

En el problema 5 (que cuenta con una tabulación de 3 renglones y se refiere a pozos petroleros) se presentó confusión entre los estudiantes respecto a qué datos serían los que habrían de considerarse para elaborar la gráfica. Finalmente, a partir de sus reflexiones, optaron por tomar los datos del primer y tercer renglón, correspondientes al número de nuevos pozos perforados y a la producción total diaria de barriles respectivamente, para obtener la representación algebraica, mientras que otros equipos usaron la representación gráfica como intermediario antes de obtener la representación algebraica. Cabe señalar que un estudiante obtuvo el modelo directamente del texto, lo justificó ante sus compañeros y los convenció de que tal modelo era correcto; finalmente resolvieron empleando la fórmula general.

En general, en este problema la primer respuesta fue 13, después fue 13 nuevos pozos, posteriormente se percataron que la otra raíz también era un número positivo, por lo cual pareció que ésta también podía ser la solución, pero no consideraron las implicaciones económicas que podría tener perforar 13 nuevos pozos en vez de 7. Esto es muestra de que para los estudiantes con frecuencia la resolución de un problema concluye al hacer el último cálculo, sin analizar (como parte de la interpretación) la validez de los resultados obtenidos.

En este mismo problema la función fue igualada sin dificultad a la producción requerida (4455 barriles). Es decir, teníamos un caso de la forma $F(x) = c$, donde c es diferente de cero, y los estudiantes procedieron a resolver la ecuación $F(x) - c = 0$ sin mayores dificultades.

La manipulación de los signos es otra deficiencia que causó serios problemas en la resolución de la función cuadrática empleando la fórmula general.

En los problemas del 6 al 10, uno de los equipos que mostró buenas competencias algebraicas, transitó directamente de las representaciones numéricas a las algebraicas, resolviendo los problemas correctamente. Otros equipos procedían con el juego de marcos esperado.

En el problema 9 se identificó por parte de dos estudiantes, a través de la representación numérica, que la función involucrada no tenía raíces, argumentando que su gráfica no cortaría el eje de las abscisas (esta argumentación se fue extendiendo), además de que uno de ellos hizo explícito que el radical generado con la fórmula general sería negativo.

En este bloque algunos alumnos ubicaron a la raíz entre un par de coordenadas en las cuales el signo de las ordenadas es diferente.

En el problema de la determinación de los puntos de intersección de dos parábolas (problema 10) se manifestó seguridad por algunos compañeros de que éstos se encontraban igualando las dos funciones. Sin embargo, no pudieron justificar su procedimiento más que en términos algebraicos, lo cual indica que se trata de un proceso de mecanización y que no asocian su procedimiento con la interpretación gráfica correspondiente.

### Análisis del bloque 3

En el problema 1 se comentó que, como el móvil iba a una velocidad de 88 pies por segundo, éste disminuía su velocidad 15 pies cada segundo, así en 2 segundos ya habría disminuido su velocidad en 30 pies por segundo. Solamente dos compañeras pasaron al cuadro gráfico y luego al algebraico.

Se manifestaron dificultades notables para relacionar dos funciones cuando en alguna de ellas se hace o requiere despejar una variable, para posteriormente sustituir en la otra función, de tal manera que ésta última dependa sólo de una variable.

En los problemas del 1 al 3 en general pasaron sin dificultades del cuadro verbal al algebraico, mostrando pequeños conflictos de carácter operativo. En el problema 4, que carece de solución, se generaron inquietudes y reflexiones como las siguientes: ¿no habrá otro método para resolver el problema?, "Profesor, díganos ya cual es la solución", ¿porqué no nos sale? Incluso después de haber obtenido un radical negativo intentaron también factorizar para obtener las raíces de la función cuadrática generada; después de un rato de comentar y discernir a partir del análisis de tabulaciones y gráficas que se les sugirió elaboraran (mostraron resistencia para trabajar en los cuadros numérico y gráfico), llegaron a la conclusión de que el problema no tenía solución, porque la gráfica no cortaba el eje de las abscisas.

Al pasar al problema 5, mostraron incapacidad para formular el modelo, queriéndolo determinar directamente del texto (aquí se exhibieron algunas relaciones algebraicas inconsistentes), a pesar de la sugerencia del profesor para que transitaran de un marco a otro. Se mostraron reticentes a analizar la información en otro marco y finalmente lo hicieron por insistencia del profesor, pero sólo trabajaron en el marco numérico, encontrando la solución mediante tanteos.

Para los estudiantes pareciera muy importante resolver un problema lo más rápido posible, lo cual implica abstenerse de trabajar en cuadros "rudimentarios" (como los nombró uno de los estudiantes para referirse a las tabulaciones y las gráficas).

En este problema 5 uno de los estudiantes más avanzados en cuanto a sus competencias algebraicas, determinó la representación adecuada pero solicitó ayuda para simplificarla, pues la aparición de dos radicales le complicaba el procedimiento correspondiente.

En el problema 7 (del pozo petrolero) se transitó del cuadro verbal al numérico, con la pretensión de manipular en este cuadro. Por su inseguridad los estudiantes transitaron al cuadro gráfico y aquí determinaron que la función ni era lineal ni cuadrática, aunque pretendieron forzar los datos para obtener lo que ellos deseaban. Finalmente prefirieron "linealizar" la función en un intervalo reducido y obtener así una aproximación de la raíz.

En el problema 8 la mayoría graficó y determinó visualmente que no había intersección.

El problema 9 permitió abordarse de diferentes maneras. Algunos hicieron una tabulación buscando encontrar el valor o los valores que cumplieran la igualdad; otros resolvieron en el cuadro algebraico sin notar que el resultado no incluía a las dos raíces de la función cuadrática, pues una de ellas provocaba la indeterminación de la función racional.

**Análisis de la entrevista**

En el problema 1, dos de los 4 estudiantes detectaron que tal problema se podía resolver determinando el modelo algebraico directamente del cuadro verbal, sin requerir transitar a través de los cuadros numérico y gráfico para llegar al modelo algebraico. Este camino les sería obviamente más largo por lo que se puede afirmar que optaron por el camino económico, dejando de lado la inercia que pudiera haber causado la metodología producto de la estrategia didáctica.

En este mismo problema el resto de estudiantes siguió el tránsito de los cuadros numérico y gráfico. Sin embargo, sólo uno de ellos - aunque mostrando serias dificultades en sus competencias algebraicas- arribó al resultado, reflejando una buena asociación de los resultados obtenidos con el contexto. No obstante durante el tránsito de cuadros no mostró interpretación en éstos respecto del concepto de raíz real, quizá por que no tenía necesidad de tal interpretación, ya que su objetivo se centraba en el establecimiento del modelo algebraico a través del tránsito de cuadros, con el cual encontraría la solución exacta. En este caso la representación numérica que generó la usó solamente para identificar el tipo de función y en la gráfica identificó los dos posibles resultados.

Otro estudiante, dado que se requería determinar la representación algebraica a partir de un conjunto de datos que no contenía explícitamente el vértice de una parábola, y partiendo de que el grado de la función era 2, buscó dos puntos cuyas ordenadas fuesen iguales; luego supuso que la abscisa central correspondía al vértice, lo verificó y por último procedió a la determinación de la representación buscada.

En el problema 2, en el cual no era posible determinar directamente del texto el modelo algebraico, los estudiantes transitaron al cuadro gráfico, en virtud de no identificar de manera certera el tipo de función optaron por hacer interpretación en este mismo cuadro, hallando la solución y haciendo interpretaciones correctas. Aquí se dio la necesidad por parte de los estudiantes de interpretar en la representación gráfica, pues parecía estar claro, que no podrían abordar con las herramientas con que contaban al cuadro algebraico para obtener la solución exacta.

En este mismo problema se esperaba que los estudiantes propusieran o sugirieran que ésta fuese de algún grado superior a 2; sólo uno de cuatro estudiantes tuvo tal ocurrencia, determinando la expresión algebraica de la función a partir de conjeturar que el punto más alto proporcionado como información podría ser el punto de inflexión de una cúbica y no necesariamente el vértice de una parábola. Verificó la representación algebraica obtenida mediante la información dispuesta en la tabulación e incluso demostró que el punto de inflexión efectivamente era el supuesto, para lo cual utilizó el criterio de la segunda derivada.

En el caso de los problemas donde se generaban funciones cúbicas (situación nueva para el estudiante) aquellos que no podían establecer la representación algebraica con la información presentada, también generaron su propia herramienta para establecer dicha representación. Un caso notable fue el proceso seguido por un estudiante quien determinó tal representación a partir de generar su propia tabulación, producto de la asociación del contexto con sus competencias algebraicas, realizando operaciones mentales para el cálculo numérico y sin expresar algebraicamente las operaciones realizadas.

Sus razonamientos en el problema de la caja sin tapa, a grandes rasgos, fueron los siguientes: "si $x = 3$ decímetros, el área de la base de la caja es 9 decímetros cuadrados, por lo tanto me restan $16 - 9 = 7$ decímetros cuadrados, los cuales se distribuirán en los cuatro lados, así, dividimos 7/4, obteniendo el área correspondiente a cada lado, mientras que para obtener la altura h ahora dividimos 7/4 entre x. Para encontrar el volumen basta multiplicar el área de la base por la altura obtenida, de esta manera obtengo $V(x) = x^2\left[\left(-x^2 + 16\right)/_{4x}\right]$".

Lo que los alumnos no pudieron hacer fue encontrar la solución de una ecuación cúbica pero señalaron la posibilidad de efectuar aproximaciones por medio de la representación algebraica.

En todos los casos se mostraron resistencias para transitar de información dispuesta en algún cuadro hacia el marco gráfico, incluso un alumno manifestó explícitamente que los cuadros numérico y gráfico mas que ayudarle lo confundían. Esta actitud la entendemos como parte de los efectos de la enseñanza tradicional, que da predominio al ambiente algebraico.

Un estudio más completo de esta situación lo encontramos en el trabajo de Raymond Duval "Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros", en donde se señala que, sin considerar lo que él llama *variables visuales* y su articulación en la representación algebraica con las *unidades significativas*, el tránsito de lo gráfico a lo algebraico presenta obstáculos motivados por la enseñanza tradicional de la graficación de funciones.

Se detectaron deficiencias en la interpretación de gráficas, desde la misma graduación requerida a partir de los datos proporcionados. Esta imprecisión provocó bosquejos gráficos que confundían al estudiante en la identificación de la función a lo cual se suma el proceso tradicional del "punteo" que asigna a cada valor de la abscisa su correspondiente valor de la ordenada trazando líneas paralelas a los ejes; para el caso de nuestros problemas se requería el proceso inverso: conocida una ordenada determinar el valor correspondiente de la abscisa y aquí es donde se presentaron dificultades para proceder a semejanza del caso anterior.

Los términos sustitución y despeje los usan de manera indistinta, pareciera no estar clara la actividad que implica cada uno de ellos, a pesar de eso, los procedimientos utilizados son los correctos.

Se detectaron dificultades para interpretar las representaciones de los signos de los radicales, esto es, la aparición del símbolo $\pm\sqrt{\ }$ se interpretó de la siguiente manera: "como hay un más menos en el resultado del radical entonces una raíz es positiva y la correspondiente al signo negativo es negativa, por lo tanto sólo es necesario calcular la positiva, dado que la negativa no puede ser solución al problema, por ejemplo, no hay tiempos negativos".

Se observó en general que los cambios de marco que más les causó dificultad fue del gráfico al algebraico y del verbal al algebraico e incluso se exhibió las incompetencias en el cuadro algebraico de carácter elemental. Además de deficiencias con relación a la asociación de las variables visuales y las unidades significativas de la expresión algebraica.

### 3.2.5 La validación

Después de confrontar los análisis a priori y a posteriori se decidió que tal acción se explicaría en función de los aspectos que a continuación se detallan. Debe aclararse, sin embargo, que los análisis los hacemos considerando la realización didáctica desde el inicio hasta el final, sin distinguir la primera parte de la que agregamos posteriormente.

**El juego de marcos y la dialéctica herramienta-objeto**

En nuestras consideraciones teóricas establecimos que éstos eran los preceptos teóricos centrales para nuestro diseño didáctico. Asumimos que la dialéctica herramienta-objeto es el apoyo para la creación de significados y el juego de marcos el generador de desequilibrios cognoscitivos.

Por lo tanto primero estableceremos una visión con relación a nuestras consideraciones teóricas y posteriormente otra de carácter general que creemos importantes incorporar.

**La dialéctica herramienta-objeto**

En las situaciones de estudio, los problemas contextualizados, se presentaron avances respecto a las posibilidades para modelar, para asignarle un papel a la búsqueda de raíces de funciones, para interpretar los resultados obtenidos, para diseñar estrategias de solución.

También se notaron avances en la asociación que los alumnos hicieron en cuanto a la identificación de las raíces en los diferentes marcos, esto es, la caracterización de lo que significa la raíz de una función en cada uno de ellos.

Se logró que los estudiantes adquirieran significados del concepto de raíz en los distintos cuadros, además de significados propios a cada uno de los problemas a través de las relaciones que establecían entre la información de los mismos y su disposición en los distintos cuadros. Explícitamente, los alumnos identificaban la necesidad de encontrar una raíz como recurso para resolver un problema y luego procedían a plantear la estrategia de solución resolviendo $F(x)=0$ o bien, $F(x)=c$, donde $c$ es una constante diferente de cero.

También hubo acciones tendientes al cálculo aproximado (en el ambiente gráfico) en la búsqueda de raíces de las diferentes funciones con su sensibilización respectiva para proceder en la búsqueda y confrontación de los resultados exactos a través de representaciones algebraicas.

Consideramos que este aspecto es trascendente pues una de las formas para resolver problemas en ingeniería es a través de la aproximación. Ésta puede ser concebida en función de la obtención del resultado mediante una representación gráfica, mediante métodos numéricos o incluso por efecto de la determinación de modelos algebraicos aproximados.

Durante el proceso de obtención de un resultado con información numérica en forma aproximada, consideraban las restricciones que les imponía el contexto y realizaban asociaciones relativamente adecuadas, pero al obtener la representación algebraica y resolver, se presentaban ciertas dificultades e inconsistencias ante la aparición de dos raíces.

Se avanzó en la interpretación gráfica con las situaciones problemáticas, por ejemplo: en el problema 2, dos alumnos comentaron: si la gráfica hecha en el intervalo corresponde a una función cuadrática, entonces el vértice de la parábola se localiza en $t = 0$, esto implica que la muestra de suelo tendrá en ese momento el contenido de humedad más alto.

Para un estudiante de ingeniería, un concepto matemático al que no se le percibe aplicabilidad o funcionalidad alguna y de manera inmediata, carece de sentido su estudio. En este sentido y dado que utilizamos la dialéctica herramienta-objeto para el diseño, se observó cierta motivación al hacer explícito que el objeto matemático raíz real fue el medio para resolver los problemas, lo que en parte genera sentido al estudio de las raíces reales como objeto.

**El juego de marcos**

En cuanto al juego de marcos se notaron avances para relacionar las situaciones problemáticas con las representaciones en cada marco y para emplear los diferentes marcos en la resolución de problemas. Así por ejemplo se aproximaban raíces en el marco gráfico y posteriormente se encontraban resultados precisos en el marco algebraico, haciendo las comparaciones pertinentes. Lo mismo puede señalarse en el caso del marco numérico.

Una herramienta con la cual contaron los estudiantes fue el establecimiento del grado de la función a partir de las diferencias de las ordenadas, siempre y cuando el paso fuese constante, sin embargo, a partir de proporcionar la información de los problemas de manera numérica y con distinto paso, generaron un mecanismo alterno para identificar el tipo de función. Éste consistió en generar a partir del texto del problema su propia tabulación con el mismo paso, incluso con el propósito de validar la información tabular proporcionada.

Cabe señalar que a pesar de haber trabajado con los estudiantes la determinación de la representación algebraica de la función a partir de información tabular mediante el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones cuya dimensión dependía del grado de la función, tal mecanismo no fue utilizado por ninguno. Los estudiantes emplearon la estrategia prevista que implica el tránsito de los cuadros hasta finalmente pasar del cuadro gráfico al algebraico, salvo en algunos que mostraron serias dificultades.

**En general**

En otros casos donde se generaba una función cúbica (problema 2), se esperaba que los estudiantes propusieran o sugirieran que ésta fuese de algún grado superior a 2; sólo uno de cuatro estudiantes tuvo tal ocurrencia, determinando la expresión algebraica de la función a partir de conjeturar que el punto más alto proporcionado como información podría ser el punto de inflexión de una cúbica y no necesariamente el vértice de una parábola. Verificó la representación algebraica obtenida mediante la información dispuesta en la tabulación e incluso demostró que el punto de inflexión efectivamente era el supuesto, para lo cual utilizó el criterio de la segunda derivada.

Se mostró que los estudiantes avanzaron en varios sentidos de los cuales rescatamos como más trascendentes los relativos a sus actitudes para enfrentar los problemas, para proponer alternativas de solución, para validarlas, para tomar opciones diferentes cuando un camino no resultaba, etc., y también en sus competencias para desenvolverse en los diferentes marcos.

También se mostró la inercia que provocó la estrategia didáctica para la resolución de problemas, pues a pesar de que algunos problemas de la entrevista podían resolverse directamente por la formulación del modelo algebraico a partir del texto, 2 de los 4 alumnos utilizaron el camino mediante el tránsito de cuadros, del numérico al gráfico y luego al algebraico, lo que exhibe independientemente de la inercia, la deficiencia para decidir cual es el camino más económico en la resolución del problema.

O bien, también nos hace pensar que la metodología producto de la estrategia didáctica diseñada pudiera ser un obstáculo inclusive para la resolución de situaciones problemáticas mediante la formulación directa del modelo algebraico a partir del texto, en los casos en que esto sea posible.

Durante el proceso de solución de las situaciones problemáticas se mostraron en general propuestas y argumentos por parte de los estudiantes, y particularmente por los líderes de los equipos conformados.

El hecho de haber enfrentado y resuelto situaciones nuevas en contextos distintos a los incorporados en la estrategia didáctica y con un aumento en su complejidad, interpretamos que en parte se deben a la diversidad de significados adquiridos mediante la citada estrategia y por otra a sus competencias adquiridas en relación con el tránsito de cuadros.

# Capítulo 4. Las conclusiones

Tal y como se señaló al inicio, este trabajo reporta la investigación realizada al poner en práctica una secuencia de actividades didácticas distinta a la tradicional para abordar el concepto matemático de raíz real, con un enfoque que va más allá de lo operativo y de la simple manipulación algorítmica. Nuestra propuesta busca que el estudiante construya el concepto matemático como producto de su interacción con él, desarrollando colateralmente actitudes y competencias para estudiar situaciones problemáticas de la ingeniería.

Las experiencias vividas durante la investigación fueron enriquecedoras. El enfrentamiento a múltiples dificultades nos dejó valiosas aportaciones sobre las actividades de enseñanza y aprendizaje, sensibilizándonos respecto a los procesos de los alumnos en su desempeño en el aula. Tales experiencias se refieren tanto a los momentos de elaboración como de realización del trabajo y originaron una serie de reflexiones que en calidad de conclusiones se exponen a continuación.

Durante la realización didáctica los estudiantes participaron activamente y con buena disposición pero no todos asistieron en un 100 por ciento al aula (por razones laborales), es decir, nos enfrentamos a la situación de que algunos estudiantes asistieron de manera interrumpida, lo cual genera situaciones de sesgo en la investigación.

Se detectó que la mayoría de los estudiantes no están acostumbrados a trabajar en sus clases habituales con situaciones problemáticas, sino simplemente con ejercicios mas o menos rutinarios con dependencia del profesor como producto de la enseñanza tradicional.

Un problema bien planeado da la oportunidad de navegar y explotar los distintos cuadros, promoviendo que el estudiante genere herramientas propias para salvar los obstáculos que se presentan en el proceso de resolución.

La realización didáctica tenía el propósito de enfrentar a los alumnos a situaciones problemáticas y de alguna manera logramos prever algunas de sus actitudes y propuestas de solución. Pero la experiencia actual permite afirmar que el profesor también se ve enfrentado a nuevas situaciones, no esperadas: por ejemplo a dejar a los estudiantes en libertad para planear sus propias estrategias, a validar sus resultados, a proponer alternativas de solución y poco a poco me condujeron a intervenir de otra manera, con pequeñas ayudas pero sin la actitud de decir la última palabra y de apresurar los tiempos.

Esta misma actitud de no desesperarse ante los procesos de los alumnos permitió observar de mejor manera lo que ellos decían y hacían pues nos colocaba ya no tanto en el papel de jueces de sus actividades sino en observadores más sensibles y comprensivos de sus procesos.

También esa dualidad (investigador-profesor) en la que estamos inmersos nos hizo reflexionar en torno a que en ciertos momentos el papel de investigador es inhibido por el papel del profesor, por ejemplo, la estrategia didáctica diseñada en la mayor parte del tiempo de su realización versaba su interés en el mejoramiento de las competencias y actitudes de los estudiantes para el enfrentamiento y resolución de situaciones problemáticas, menospreciando en momentos que tal estrategia era el mecanismo o herramienta del investigador para la observancia de los procesos y estrategias que los estudiantes utilizaban en la resolución de las situaciones.

De alguna manera esta competencia intema natural puede interferir el proceso de la investigación.

La resistencia del estudiante a trabajar en cuadros distintos al algebraico fue grande, debido a la forma tradicional en que la enseñanza se ha dado a través de los años, incluso se refleja en la catalogación que algunos hicieron de los mismos como el de llamarlos “rudimentarios”. Para los estudiantes pareciera muy importante resolver un problema sin utilizar ambientes diferentes al algebraico pues los profesores y los textos lo señalan como el único recurso matemáticamente riguroso y formal para demostrar o validar afirmaciones y problemas matemáticos.

A través del desarrollo de la realización didáctica se exhibieron las deficiencias en algunas partes del diseño de ingeniería elaborado. Las razones son muchas y entre ellas se encuentran las siguientes: el desconocimiento de las capacidades y potencialidades de los alumnos para enfrentar situaciones problemáticas, la falta de experiencia para diseñar estrategias didácticas como las de esta investigación, y la inexperiencia en la realización misma de proyectos de investigación.

Pero también aquí hemos quedado satisfechos con el trabajo realizado, pues precisamente esa es una de las ventajas de la ingeniería didáctica como metodología de investigación. Nos referimos a que en un proyecto de ingeniería didáctica el profesor y el investigador (que en este caso eran el mismo), ajustan el proyecto en respuesta a los resultados y observaciones que se van presentando en la marcha.

Ejemplos al respecto se encuentran en problemas donde la información estaba dispuesta en el cuadro numérico, se esperaba que los alumnos transitaran al cuadro gráfico y después al algebraico. Sin embargo, por la forma en que se dispuso tal información, algunos estudiantes no requirieron pasar al cuadro gráfico, esto es, identificaron el vértice de la parábola que se originaba graficando los datos presentados. Esto nos condujo por una parte a apreciar la forma en que los alumnos resolvían y por otra a presentar los datos numéricos de manera diferente para forzar la búsqueda empleando un cambio de marco.

Haciendo una recapitulación global de la experiencia vivida, analizando los objetivos de la investigación y los resultados obtenidos, puede decirse que nuestro principal logro es la consecución de más dudas y la detección de posibles problemas de investigación alrededor de las competencias algebraicas y de la utilización de los cuadros gráfico y numérico. También de la necesidad de refinar las consideraciones teóricas establecidas y la inclusión de otras como las relativas a las teorías de la representación.

Entre las dudas o interrogantes a las que hacemos referencia en el párrafo anterior están las siguientes:

¿De qué manera una estrategia didáctica que incorpore sólo al juego de marcos incide en el mejoramiento de las competencias para resolver situaciones problemáticas?

¿En qué forma una enseñanza de graficación por parámetros ayuda a la interpretación gráfica de situaciones problemáticas?

¿De qué manera un adecuado tránsito del marco gráfico al algebraico incide en la resolución de situaciones problemáticas?

¿De qué manera la manipulación del tránsito de cuadros incide en las economías para la resolución de situaciones problemáticas?

¿En qué forma un concepto rico en significados matemáticos incide en el enfrentamiento y resolución de situaciones problemáticas con contexto extramatemático?

¿De qué manera una manipulación adecuada de las representaciones gráficas incide en la conceptualización de objetos matemáticos como la derivada?

¿De qué manera una manipulación adecuada de las representaciones gráficas ayuda en la comprensión y resolución de situaciones problemáticas cuyo contexto sea extramatemático y que involucren al concepto de la derivada?

¿De qué manera el cuadro gráfico como intermediario incide en la modelación algebraica de situaciones problemáticas?

# APÉNDICE

# PRIMER EXAMEN EXPLORATORIO

Instrucciones: lee con cuidado y responde a cada uno de los apartados sin borrar ni tirar nada de lo que escribiste.

1.Dada la función $p(x) = x^2 + 4x - 12$ , ¿cuáles de los siguientes valores son raíces de p(x)?. Argumenta tu respuesta.

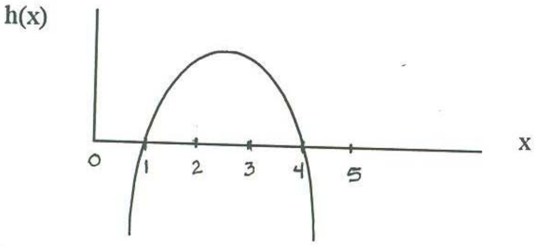
$x_1 = -2$ $x_2 = -6$ $x_3 = 2$ $x_4 = 6$ $x_5 = 4$ $x_6 = -4$

2.La gráfica que se presenta corresponde a la función $h(x) = -x^2 + 5x - 4$, en base a la información que se te dá, responde:

a)¿Existen raíces reales?, ¿cuántas?

b)¿Cuáles son?

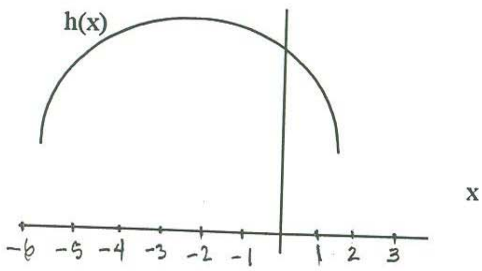
Argumenta tu respuesta




3.La gráfica que se presenta corresponde a la función $h(x) = -( x + 2 )^2 + 12$, en base a la información que se te dá, responde:

a)¿Existen raíces reales?, ¿cuántas?, ¿cuáles son?

Argumenta tus respuestas

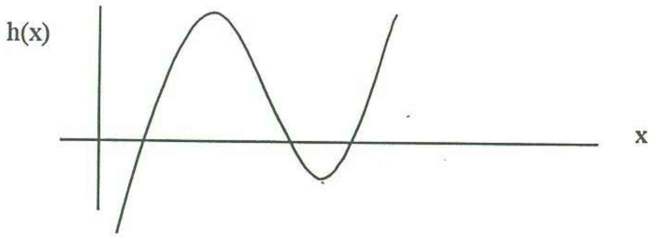



4.Dada $f(x) = ( x - 5 ) ( x + ½ )$ , ¿cuáles son sus raíces reales?, argumenta tu respuesta

5.La siguiente tabla muestra algunos valores de la función f(x), suponiendo que f(x) es continua. ¿Cuántas raíces reales tiene?,¿cuáles son?, justifica tu respuesta.

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 4.125 | 0.875 | -0.375 | 0.375 | 3.125 |

6.¿Cuántas raíces reales tiene la siguiente función h(x)?, justifica la respuesta



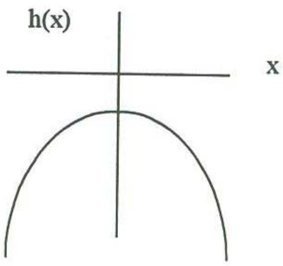

7.Dadas las funciones $h_1(x) = x + ¼$ y $h_2(x) = x^2 - x - 2$, encuentra los puntos de intersección de sus gráficas.

8.La siguiente tabla muestra algunos valores de la función f(x). Suponiendo que f(x) es continua. ¿Cuántas raíces reales tiene?, justifica tu respuesta

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 | 5.5 |

9.Determina las raíces reales de $f(x) = x^2 + 4x + 8$ .

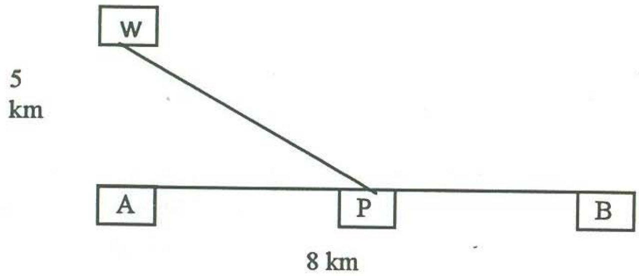
10.La gráfica mostrada corresponde a la expresión $h(x) = -x^2 - 2$. En base a la información que se te da, responde:
a)¿Existen raíces reales?
b)¿Cuántas?, ¿cuáles son?
Argumenta tus respuestas



# SEGUNDO EXAMEN EXPLORATORIO

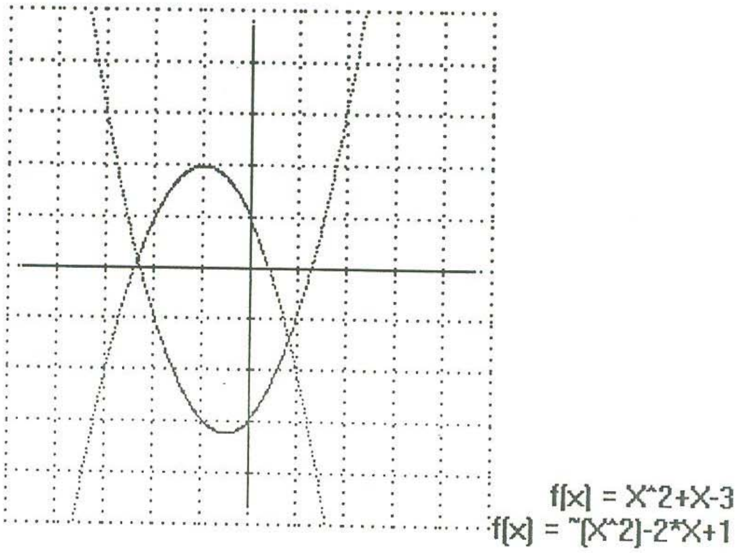
Instrucciones: lee con cuidado y responde a cada uno de los apartados sin borrar ni tirar nada de lo que escribiste, argumenta tu respuesta.

1.Un pozo petrolero se localiza en el océano en un punto W, que esta a 5 km del punto de playa más cercano A, sobre un litoral recto. El petróleo debe ser entubado hasta un punto en la costa B, que esta a 8 km de A, entubándolo en línea recta bajo el agua de W a algún punto P de la costa, entre A y B y después hasta B por medio de un oleoducto sobre el litoral, si el contrato que se va a realizar contempla 10 km de entubado (por agua y tierra) ¿a qué distancia de A debe ubicarse el punto P?




2.Un jardín de 20 metros de largo por 12 metros de ancho, tiene una acera de ancho uniforme que la circunda. Si el área de esta acera es 124 metros cuadrados, encuentra el ancho de tal acera.

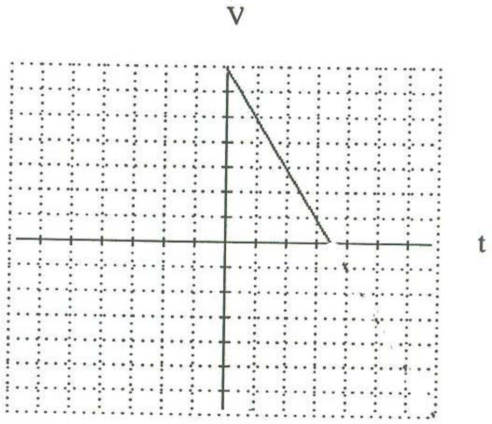
3.Determina los puntos de intersección de las gráficas



# BLOQUE 1

Problema 1

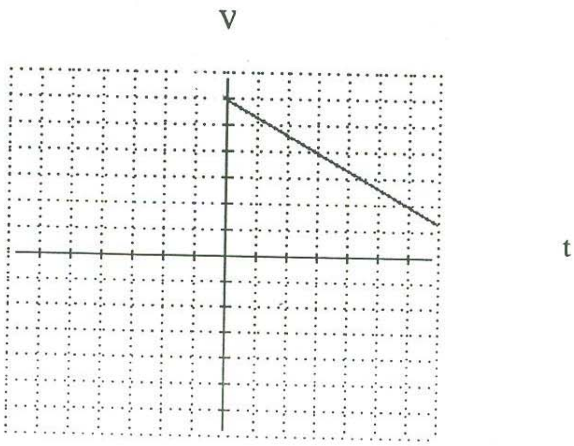
A un tanque de agua se le extrae líquido y la gráfica siguiente muestra el volumen (en galones) contenido en el tanque conforme transcurre el tiempo (en minutos), tomando como t = 0 el instante en que el agua comenzó a ser extraída




¿Cuál es el volumen inicial del agua contenida en el tanque?
¿A qué razón se extrae el agua del tanque?
¿En que instante el tanque habrá concluido de vaciarse?

Problema 2

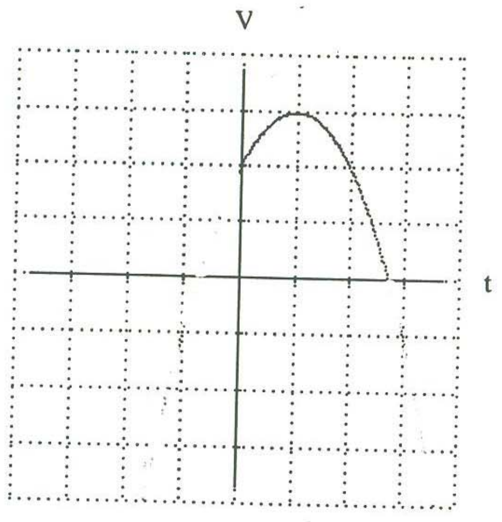
El valor V (en miles de pesos) de un equipo industrial, disminuye conforme pasa el tiempo t (en años) esto se debe entre otras cosas al desgaste que sufre con el uso continuo, esta variación se indica en la gráfica siguiente.




¿Cuál será el valor del equipo a los 8 años?
¿En qué instante el equipo industrial deja de tener valor?

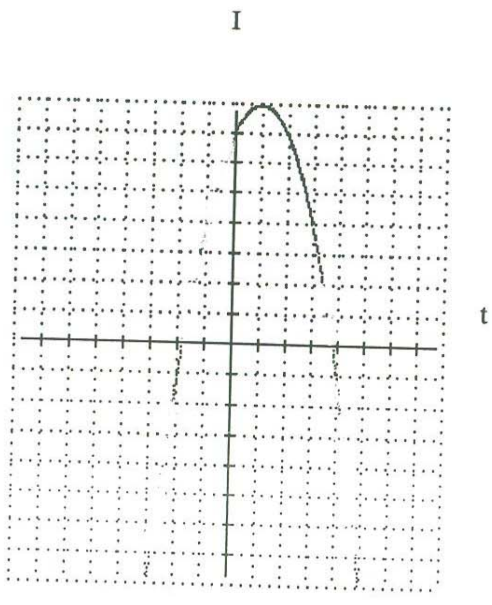
## Problema 3

Un cuerpo se mueve en línea recta hasta detenerse, de tal manera que su velocidad (en metros por minuto) en términos del tiempo t (en minutos) es la que se determina en la siguiente gráfica. En base a ella encuentra el instante en el cual su velocidad es cero.

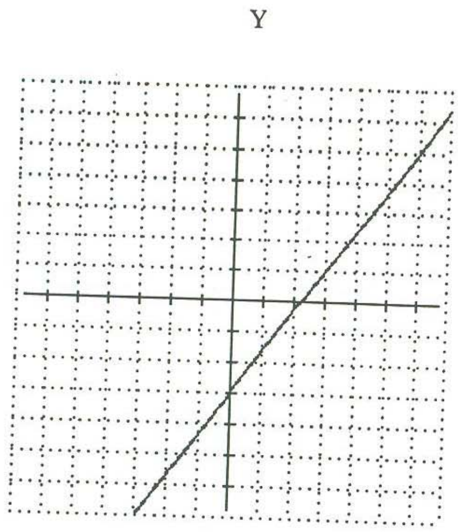



## Problema 4

La gráfica siguiente muestra los ingresos de los primeros meses del año por concepto de ventas (en miles de pesos) de artículos deportivos de una marca determinada. Iniciando con t = 0 -que corresponde al mes de enero-, y de seguir esa tendencia, ¿en qué momento deja de haber ingresos por concepto de ventas de artículos deportivos?

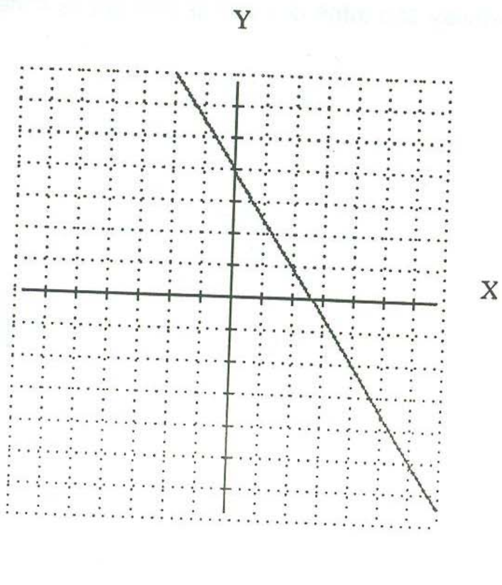


Problema 5
Dos cantidades x e y están relacionadas por medio de la gráfica siguiente:




¿Cuál es la raíz real?

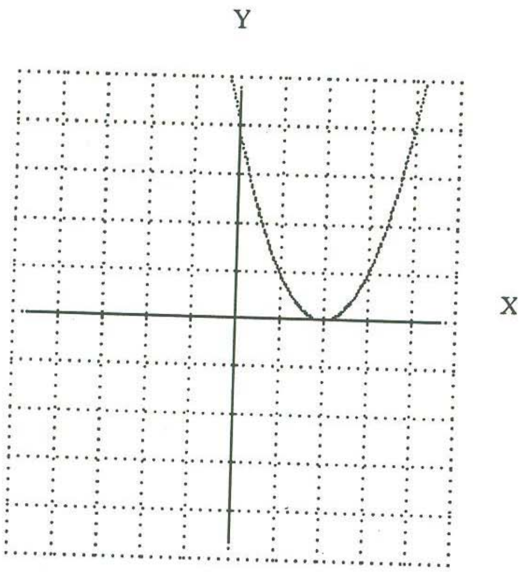
Problema 6
En la siguiente gráfica se expresa la relación entre dos variables x e y. Analiza la gráfica y contesta lo que se solicita.




¿Cuál es la raíz real?

Problema 7

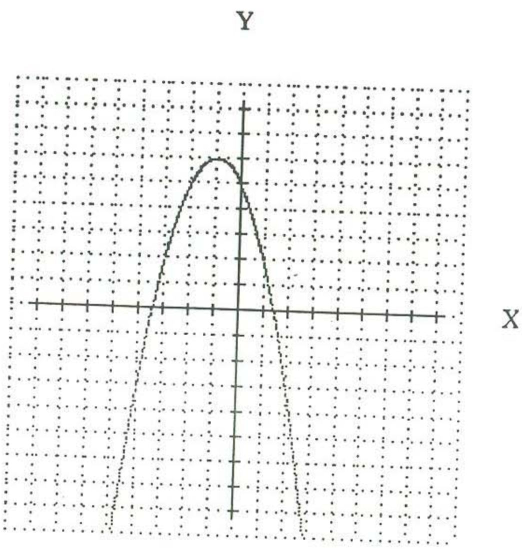
Dos cantidades x e y están relacionadas por medio de la gráfica siguiente:




¿Cuántas y cuáles son las raíces reales?

Problema 8

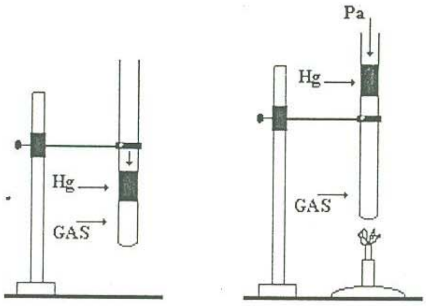
En la siguiente gráfica se expresa la relación entre dos variables x e y. Analiza la gráfica y contesta lo que se solicita




¿Cuántas y cuáles son las raíces reales?

# BLOQUE 2

Problema 1
En un experimento se midió el comportamiento de un gas a presión constante. Se hizo un montaje como el de la siguiente figura.




Los datos de temperatura (medida en grados centígrados) y volumen (medido en centímetros cúbicos) se registraron en la siguiente tabla:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Temperatura | -73 | 127 | 327 | 527 |
| Volumen | 150 | 300 | 450 | 600 |

**¿Qué sucede con el volumen conforme disminuye la temperatura?**
**De acuerdo con eso, ¿el volumen de un gas puede ser cero?**
**¿A qué temperatura sucedería –en caso de ser posible- que el volumen fuera cero? A esta temperatura se le denomina cero absoluto y se considera el origen de la escala Kelvin para medir temperaturas.**

Problema 2
La relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit está dada por la siguiente tabla

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura (grados Fahrenheit) | 0 | 15 | 40 | 60 | 70 |
| Temperatura (grados Celsius) | -160/9 | -85/9 | 40/9 | 140/9 | 190/9 |

Observa y analiza los datos presentados para contestar las siguientes preguntas:

¿Qué sucede con los valores de (grados Celsius) C conforme los valores de (grados Fahrenheit ) F aumentan?
¿Cuántas veces cambia el signo de los valores de C?
¿Cuál es la temperatura en grados Fahrenheit para cuando el agua se congela? (El punto de congelamiento se presenta a la temperatura de 0 grados Celsius).

Problema 3

Un pequeño comercio adquiere un equipo de cómputo con un costo inicial de 880 dólares, con el paso del tiempo se ha depreciado su valor, de tal forma que su precio disminuye, durante los primeros tres años un evaluador determinó su precio, y tal información se registró en la siguiente tabla:

| Tiempo (en años) | 0 | 0.5 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Precio (en dólares) | 880 | 811.25 | 605 | 467.5 |

Observa y analiza la información presentada para responder las siguientes preguntas.
¿El precio del equipo de cómputo puede ser cero?
¿En qué momento sucedería –de ser posible- que el valor de dicho equipo fuera cero?

Problema 4

Miguel arroja una pelota hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 160 pies de altura, con una velocidad inicial de 48 pies por segundo. Sus compañeros registraron la posición de la pelota en distintos momentos y la anotaron en la siguiente tabla:

| Tiempo ( en seg) | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Posición (en pies) | 160 | 180 | 192 | 196 | 192 | 180 | 160 |

Determina el tiempo que transcurre para que la pelota llegue al suelo.

Problema 5

Un campo petrolero con 20 pozos ha estado produciendo 4000 barriles diarios (cada pozo produce 200 barriles). Por cada nuevo pozo que se perfore, la producción diaria de cada pozo decrece en 5 barriles, se perforaron nuevos pozos y se registró la información en la siguiente tabulación.

| Número de pozos nuevos perforados. | 00 | 05 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Producción de barri-les por pozo diario | 200 | 175 | 150 | 125 | 100 |
| Producción total de barriles diario | 4000 | 4375 | 4500 | 4375 | 4000 |

Observa y analiza la información numérica para contestar las siguientes preguntas:
¿Si se perforan mas de 10 nuevos pozos qué sucede con la producción total diaria de barriles?
¿Cuántos nuevos pozos habrá que perforar para obtener una producción total diaria de 4455 barriles?

Problema 6
Dos cantidades x e y están relacionadas por medio de la siguiente tabla:

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | 11 | 8 | 5 | 2 | -1 |

Observa y analiza la información que se te da para responder las preguntas que a continuación se presentan.

¿Qué significa el cambio de signo en el valor de Y?
¿Cuántas raíces reales hay? ¿Entre qué valores de X se localiza (n) la (s) raíz (ces)?
Determina las raíces reales.

Problema 7
En la siguiente tabulación se expresa la relación entre dos variables x e y. Analiza la tabulación y contesta lo que se solicita.

| X | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | 26 | 60 | 94 | 128 | 162 |

¿Cuál es la raíz real?

Problema 8
Dos cantidades x e y están relacionadas por medio de la siguiente tabulación

| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | -10 | -16 | -18 | -16 | -10 |

¿Cuántas y cuáles son las raíces reales?

Problema 9

En la siguiente tabulación se expresa la relación entre dos variables x e y, analiza la tabulación y contesta lo que se solicita.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Y | 7 | 4 | 3 | 4 | 7 |

¿Tiene raíces reales?, ¿Cuántas? ¿Cuáles son? Justifica la respuesta.

Problema 10

A continuación se presentan en forma tabular dos relaciones de x e y, (valores correspondientes a funciones continuas) hallar los puntos de intersección entre sus gráficas.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| Y | 3 | 0 | -1 | 0 | 3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -2 | 1 | 2 | 1 | -2 |

# BLOQUE 3

Problema 1

Los frenos de un automóvil se accionan cuando éste se mueve a 88 pies por segundo, a partir de ese momento el automóvil disminuye su velocidad a razón constante de 15 pies por segundo,

Determina en qué instante se detendrá el automóvil.

Problema 2

Si en una empresa el costo total Yc de producción excede al de los ingresos Yi obtenidos por las ventas, entonces el negocio sufre una pérdida. Por otra parte, si los ingresos sobrepasan a los costos, existe una utilidad. Si el costo de producción es igual al de los ingresos obtenidos por concepto de ventas, no hay utilidad ni pérdida, de modo que el negocio está en el punto de equilibrio. El número de unidades producidas y vendidas en este caso se denomina punto de equilibrio.
Suponiendo que el costo total diario de producir x sillas está dado por Yc = 25x + 300,

Si cada silla se vende a $40.00, ¿cuál es el punto de equilibrio?

Si el precio se incrementa en $5.00 por silla, ¿cuál es el nuevo punto de equilibrio?

Si se sabe que al menos 150 sillas pueden venderse al día, ¿qué precio deberá fijarse con el objeto de garantizar que no haya pérdida?

Problema 3

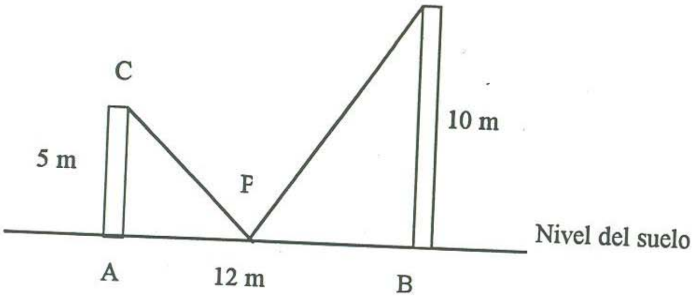
Un granjero dispone de 200 metros de valla para delimitar dos corrales adyacentes rectangulares, ¿qué dimensiones debe elegir para que el área sea de 1580 metros cuadrados?

Problema 4

Dos productos A y B, se fabrican en determinada empresa, Si C dólares es el costo total de producción en un día de 8 horas de trabajo entonces $C = 3x^2 + 42y$, donde x = máquinas que se utilizan para producir el producto A y y = máquinas que se emplean para producir el producto B. Si durante un día de 8 horas hay 15 máquinas trabajando, determinar cuántas máquinas deberán emplearse para producir A y cuántas para producir B a fin de que el costo total sea $450.

Problema 5

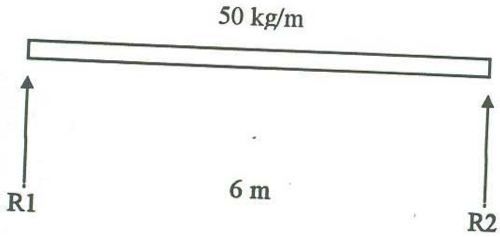
Dos postes de 5 y 10 metros altura respectivamente distan 12 metros entre sí; desea tenderse un cable para rigidizar, fijado en un único punto del suelo, entre las puntas de ambos postes como se observa en la figura.




Dado que se cuenta con 19.21 metros de cable, ¿en qué punto del suelo habrá que fijar el cable?

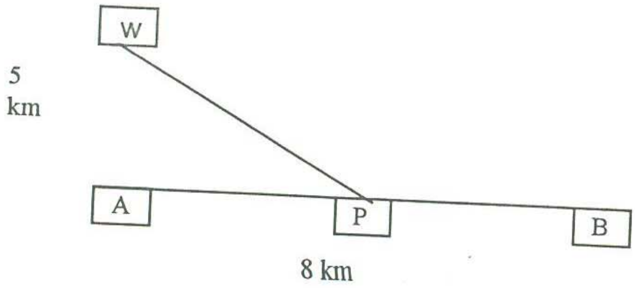
Problema 6

Una viga libremente apoyada soporta un muro cuya carga es de tipo uniforme, como lo muestra el esquema, determina el punto de momento flexionante máximo o cortante cero.




Problema 7

Un pozo petrolero se localiza en el océano en un punto W, que está a 5 km del punto A, (A es el punto de playa más cercano a W), sobre el litoral.
El petróleo debe ser entubado hasta un punto B, en la costa, que esta a 8 km de A. El petróleo se entubará en línea recta bajo el agua de W a algún punto P de la costa, entre A y B, y después hasta B por medio de un oleoducto sobre el litoral, si el contrato que se va a realizar contempla 10 km de entubado (por agua y tierra) ¿A qué distancia de A debe ubicarse el punto P?



Problema 8
Encuentra los puntos de intersección de las parábolas $f(x) = x^2 + 3$ y $f(x) = -(x-2)^2 + 2$

Problema 9
¿Para qué valores de x la suma de las fracciones ( x ./ (x – 3 ) ) y 6 / (x + 3 ) es igual al producto de las mismas?

Problema 10
Calcular las raíces o ceros de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 2$
b) $f(x) = 3x - ½$

# GUIÓN PARA LA ENTREVISTA

Instrucciones: Lee con cuidado y determina lo que se te pide

1.Una pieza larga y rectangular de lámina de 23 centímetros de ancho va a convertirse en canal para agúa doblando hacia arriba dos de sus lados hasta formar ángulos rectos con la base. Después de hacer varios ensayos se obtuvo la información que se muestra en la siguiente tabla (en donde x es la medida de los lados doblados en centímetros y A el área generada en centímetros cuadrados):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 6 | 6.5 | 8.5 | 7 | 5.75 |
| A(x) | 66 | 65 | 51 | 63 | 66.125 |

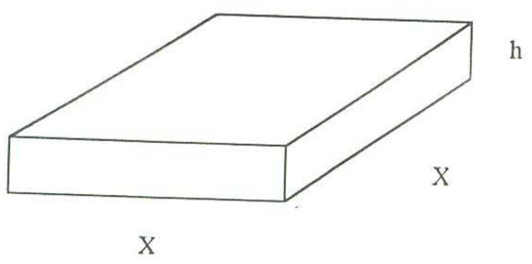
Determina la medida del doblez de tal manera que el área sea de 41.625 centímetros cuadrados, considerando que por cuestiones de estabilidad la medida del doblez no deberá ser mayor que la medida de la base.

2.Una muestra de suelo húmedo es encapsulada y sometida a secado a temperatura constante, de tal manera que con el paso del tiempo el contenido de humedad designado como w disminuye. En la siguiente tabla se registró el contenido de humedad (en miligramos) en términos del tiempo t transcurrido (en días).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| t | 1.5 | 2 | 2.5 | 3.1 | 3.6 |
| W(t) | 18 | 17.875 | 17 | 13.904 | 8.739 |

Determina el instante en el cual la muestra de suelo está completamente seca.

3.Se requiere construir una caja abierta con base cuadrada, como la que se muestra en la figura, empleando 16 decímetros cuadrados de material sin considerar pérdidas por recortes. ¿Qué dimensiones debe tener para que su volumen sea de 5 decímetros cúbicos?



## Bibliografía


Artigue Michéle, Douady Régine, Moreno Luis, Gómez Pedro (editor) . *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. 1995.

Brousseau Guy. Fundamentos y Métodos de la didáctica de las matemáticas. *Lecturas en didáctica de las matemáticas*. Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN. 1986.

Cantoral Uriza Ricardo, Matemática Educativa. Revista Educación Matemática no. .Grupo Editorial Iberoamérica. 19

Charnay Roland, Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Club de matemáticas del Cecyt Wilfrido Massieu, tomado de <<Didáctica de matemáticas, aportes y reflexiones>>, compilado por Cecilia Parra e Irma Saiz Paidos, 1994.

Duval Raymond. Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. *Antología en Educación matemática*, Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN. 1992.

Duval Raymond. *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*.

Farfán Márquez Rosa María. *Ingeniería didáctica. Un estudio de la variación y el cambio. Grupo Editorial Iberoamérica*. 1997.

Grijalva Monteverde Agustín. *La problemática de la modificación de la currícula de matemáticas en las ingenierías, el caso de la enseñanza del cálculo en la carrera de ingeniero químico en la Universidad de Sonora*. Tesis de grado. 1995.

Hitt Espinoza Fernando. *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum*. En imprenta. 1997.

Ibarra Olmos Silvia E. *La problemática de la modificación de la currícula de matemáticas en las ingenierías. El caso de la enseñanza del álgebra en la carrera de ingeniero químico en la Universidad de Sonora*. Tesis de grado. 1995.

Wenzelburger Guttenberger Elfriede. Cálculo diferencial, una guía para maestros y alumnos. Grupo Editorial Iberoamérica. 1986.

Zill Dennis G. / Dewar Jacqueline M.. *Álgebra y trigonometría*, segunda edición. Editorial Mc Graw Hill. 1992.