UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL A PARTIR DE PROBLEMAS Y CON APOYO COMPUTACIONAL: UNA EXPERIENCIA EDUCATIVA EN EL BACHILLERATO

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

PRESENTA

HIPÓLITO ORDUÑO VEGA

HERMOSILLO, SONORA

MARZO DE 1995

AGRADECIMIENTOS:

A MI ESPOSA E HIJOS POR HABER SOPORTADO PACIENTEMENTE MI FALTA DE TIEMPO HACIA ELLOS DURANTE MIS ESTUDIOS.

AL M.C. JOSÉ LUIS SOTO MUNGUÍA POR EL ESFUERZO REALIZADO EN LA ELABORACIÓN DE ESTE TRABAJO.

A LOS MAESTROS POR SU DEDICACIÓN DURANTE LA CARRERA.

A LOS COMPAÑEROS DE ESTUDIO QUE CON SU APOYO HICIERON MÁS LLEVADERA LA DIFÍCIL TAREA DE SACAR ADELANTE LA MAESTRÍA.

AL JURADO REVISOR QUE CON SUS APORTACIONES DURANTE LA REVISIÓN DEL TRABAJO, CONTRIBUYERON A MEJORARLO.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.

La presente investigación es un modesto esfuerzo en el camino de mejorar la metodología con la que se imparten los cursos de cálculo diferencial. Se formula aquí una propuesta metodológica para enseñar este curso, a partir de problemas y con el auxilio de la computadora, en el nivel bachillerato; se compara experimentalmente con la manera en que usualmente se enseña y se reportan los resultados obtenidos.

El trabajo esta estructurado en seis capítulos, que se resumen enseguida.

En el Capítulo I se da el marco de referencia de la investigación, que tiene como punto de partida las revisiones curriculares que se han llevado a cabo durante la presente década en los distintos niveles educativos de nuestro país, que han repercutido y siguen repercutiendo tanto en los contenidos como en los métodos con los que se enseña la matemática. Desde la revisión general del nivel básico, las más recientes del nivel medio superior, hasta llegar a las revisiones que se han emprendido actualmente en las escuelas de Ingeniería de la Universidad de Sonora. Como parte de este marco, se incluyen también en este capítulo algunas investigaciones realizadas alrededor del uso de la computadora en la enseñanza de la matemática.

En el Capítulo II, se definen los diferentes supuestos teóricos en los que se sustenta este trabajo, se hacen explícitos los sustentos teóricos metodológicos, psicológicos, epistemológicos, etc., en los que descansa este trabajo.

El Capítulo III está dedicado a describir la formulación del proyecto, desde su concepción hasta su culminación. Reseñándose las diferentes etapas planeadas para su realización; la formulación, la elaboración de materiales, la operación y el análisis de los datos y conclusiones.

En el Capítulo IV, se detallan las conclusiones a las que se ha llegado, producto del análisis de los datos recabados con los instrumentos aplicados a lo largo del curso y de las observaciones registradas durante su impartición. También se enlistan algunas recomendaciones que se desprenden de la experiencia obtenida en el transcurso de este estudio y se dejan abiertos algunos problemas que no han podido abordarse aquí.

Considerando que las dos versiones de notas del curso de Cálculo Diferencial, escritas y sometidas a prueba en este trabajo, representan también un aporte del mismo, se ha decidido integrarlas como parte del cuerpo de esta tesis, estas versiones conforman el Capítulo V y VI respectivamente.

Los instrumentos de evaluación utilizados, así como la totalidad de los datos recabados con fines estadísticos se han remitido a los Anexos con el fin de que la lectura del capitulado resulte más fluida.

CAPITULO I.

MARCO DE REFERENCIA

INTRODUCCIÓN.

La investigación que aquí se presenta, parte de una serie de reflexiones acerca de la problemática que los profesores de cálculo diferencial enfrentan en el nivel medio superior, es consecuencia también de la necesidad de vincular los estudios de maestría en matemática educativa que algunos maestros hemos realizado, con el trabajo docente que realizamos. Este trabajo se inscribe en el marco de las revisiones curriculares que se realizan hoy en día en todos los niveles del sistema educativo mexicano y parte de la convicción de que las propuestas metodológicas debieran tener bases experimentales e incluir las herramientas tecnológicas a las que se tiene acceso, concretamente la computadora.

I.1 LAS REVISIONES CURRICULARES ACTUALES.

Es indudable que la sociedad actual ha sufrido, sobre todo durante los últimos años, importantes cambios económicos, políticos y sociales; que a su vez han repercutido en el ámbito laboral, cultural, científico, tecnológico, ambiental, y por supuesto en el educativo. A saber, algunas de las características más importantes que la sociedad actual presenta son:

a) Tendencia globalizadora de la economía, marcada por la conformación de grandes bloques económicos como son; el Europeo, el de América del Norte, el de la Cuenca del Pacífico, etc.

b) Avances vertiginosos de la ciencia y la tecnología, que han originado, por un lado; una acumulación muy grande del conocimiento y por otro la incorporación de recursos tecnológicos (en la industria, servicios, economía, etc.) que se encuentran en constante cambio.

c) Importantes cambios que se han manifestado en la división política del mundo como son; la desintegración del bloque Soviético y de Yugoslavia, etc.

d) El deterioro ambiental que presenta el planeta.

La escuela como institución inmersa en una sociedad cambiante necesita adecuarse a estos cambios, de lo contrario corre el riesgo de quedarse rezagada.

Esto ha provocado que a nivel mundial muchas instituciones educativas se encuentren en proceso de revisión de sus currículas. En particular, en México, nuestro Sistema Educativo vive actualmente un intenso proceso de revisión curricular en todos los niveles.

I.1.1. LA REVISIÓN CURRICULAR DEL NIVEL BÁSICO (1989).

A partir de 1989, el gobierno de la República Mexicana encabezado por el presidente, Lic. Carlos Salinas de Gortari, impulsa una reforma educativa para el nivel primaria y secundaria, y a partir de ese momento estos dos niveles escolares se integran en uno solo, que desde entonces se conoce como nivel básico.

Esta reforma curricular es motivada, según el CONALTE[1], por la problemática educativa que desde la década de los 80's se vive en el país en el nivel primaria y secundaria caracterizada por; i) pobres índices de eficiencia terminal (800 mil alumnos abandonan cada año la escuela primaria, 1 millón 700 mil niños entre 10 y 14 años no se han matriculado en el nivel primario, ii) bajo promedio nacional de escolaridad, iii) alta tasa de reprobación de niños y jóvenes. Entre otros factores.

El Sistema Educativo enfrentaba la problemática anterior, con planes y programas de estudio que habían permanecido prácticamente sin cambios durante aproximadamente dos décadas, por ello la **S.E.P** elaboró un nuevo currículum para el nivel básico; en particular en el área de matemáticas, estos cambios han repercutido en:

a) La reestructuración de los planes y programas que conforman el nivel básico.

---

[1] **cfr. CONALTE., Hacia un Nuevo Modelo Educativo., SEP., México D.F., 1991., pp. 22 - 23.**

b) Una nueva propuesta metodológica de enseñanza, reflejada en los nuevos libros de texto publicados hasta ahora.

c) Una concepción diferente del rol del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir se concibe al alumno como un sujeto activo en este proceso.

d) Incremento en el número de horas del séptimo al noveno grado.

En este momento (1994), la reforma educativa ha empezado a operarse en todas las escuelas primarias y secundarias del país por lo que resultaría prematuro evaluar sus alcances, aunque lo cierto es que enfrenta dificultades muy similares a las que enfrentó la reforma de hace dos décadas.

I.1.2. LA REVISIÓN CURRICULAR EN EL BACHILLERATO.

Hablar de las revisiones curriculares en el bachillerato resulta más complejo que en el nivel básico, ya que el abanico de bachilleratos del país es muy amplio. Pese a esta diversidad se puede decir que de manera general, el bachillerato, desde hace aproximadamente cinco años, se encuentra en un proceso de revisión de sus currículas.

Este replanteamiento de la currícula es motivado por algunos factores, a saber; i) la reforma curricular que se está impulsando en el nivel básico, ii) el rezago del bachillerato con respecto a los avances de la sociedad, iii) los recursos tecnológicos a los que actualmente se tiene acceso, en particular, la computadora. Estas revisiones a la currícula en su mayoría han propuesto modificaciones prácticamente inapreciables y de manera muy poco frecuente, se aprecian propuestas de punta.

De la diversidad del bachillerato[2] podemos distinguir, las escuelas que forman el bachillerato "antiguo" (antes de la década de los 70's) que a la postre sirven de patrón para formar las instituciones del bachillerato "nuevo" (después de la década de los 70's). Dentro de las escuelas del

---

[2] cfr. Soto Munguía, José Luis., Tesis de Maestría "Elementos para el Análisis del Currículum de Matemáticas del Bachillerato"., Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV IPN., México D.F., Capitulo I.

antiguo bachillerato podemos decir que la más representativa es la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) de la Universidad Nacional Autónoma de México, que en enero de 1964 aprobó el nuevo plan de estudios por la iniciativa del entonces rector de la UNAM, Dr. Ignacio Chávez. Currícula que en la actualidad se sigue impartiendo en esta institución sin, prácticamente, ningún cambio formal.

En la década de los 70's, se manifesta un "boom" en las instituciones del nivel medio superior, en esta época surgen tres de los bachilleratos más importantes actualmente:

a) El 26 de Enero de 1971 el Consejo Universitario de la UNAM aprueba la creación de los CCH, a iniciativa del entonces rector Dr. Pablo González Casanova.

b) El Colegio de Bachilleres, creado por decreto presidencial el 26 de Septiembre de 1973.

c) El Bachillerato Tecnológico (constituido actualmente por C.B.T.A., C.B.T.i.s., C.E.T. del Mar), creado por decreto presidencial a principios de los 70's.

La creación de cada una de estas instituciones educativas obedece a formas distintas de pensar el bachillerato y se proponen lograr sus propios propósitos a partir de estructuras curriculares diferentes.

No obstante lo anterior, han mantenido los contenidos y la estructura del plan de estudios prácticamente sin cambios; al menos en lo que se refiere al tronco común[3]. Es hasta principios de los 90's cuando estas instituciones emprenden un proceso de reforma curricular más de fondo, que en algunos casos todavía no concluye.

Existe una permanencia de los planes de estudio en las instituciones del nivel medio, en algunos casos de más de veinte años, ésto combinado con

---

[3] **En este trabajo se entiende por tronco común, a el conjunto de conocimientos y prácticas educativas organizadas por las siguientes áreas del conocimiento; Lenguaje y comunicación, Matemáticas, Metodología, Ciencias naturales, Histórico-Social.**

otros factores las ha obligado a revisar sus currículas, entre los esfuerzos más recientes en esta dirección sobresalen los siguientes: i) desde septiembre de 1993, el Colegio de Bachilleres impulsa un nuevo plan de estudios, donde se destaca la reducción de los cursos de matemáticas, ii) en septiembre de 1992, el Bachillerato tecnológico (C.B.T.i.s.), impulsa un cambio en sus planes de estudio del tronco común, los planes de estudio de matemáticas prácticamente no alteran su contenido, iii) en 1992, impulsado por un equipo de profesores se inicia un proyecto para modificar la currícula de los CCH.

Por considerar que una revisión curricular institucional debe ir más allá del sólo hecho de revisar los contenidos, en este sentido, por la metodología utilizada, la congruencia y sustentación de sus propuestas, lo novedoso de la propuesta, entre otros factores, creemos que el proyecto que se está llevando a cabo en los CCH, es un ejemplo que muestra como debería realizarse una revisión curricular; por esta razón a continuación presentamos una reseña de este trabajo.

LA REVISIÓN CURRICULAR DE LOS CCH, DE LA UNAM (1992).

Esta revisión curricular surge a principios de 1992 por la reflexión que acerca de la problemática en la enseñanza de la matemática llevan a cabo un equipo de profesores del CCH, motivados por una realidad donde se destacan entre otros factores[4]; i) la necesidad de hacer real el carácter polivalente enfatizado en los principios de este colegio, ii) los cambios de toda índole (cultural, laboral, tecnológica, etc.) que se producen a un ritmo vertiginoso en la sociedad actual, iii) la necesidad de realizar los ajustes y renovaciones que mantengan al colegio como alternativa viable y a la vanguardia como la mejor opción de enseñanza en su nivel, iv) la necesidad de traducir los principios del colegio en el área de matemáticas, entre otros.

Los factores anteriormente citados entre otros, sirven actualmente de sustento a un equipo de profesores del CCH, para la elaboración de una propuesta de cambio curricular en el área de matemáticas, cuyas

---

[4] cfr. Comisión del Área de Matemáticas., Segunda Aproximación a la Revisión del Plan de Estudios del Bachillerato del CCH., CCH Cuadernillo Número 14., México D.F., 1993., pp. 5 -7.

características más importantes son[5]:

a) La propuesta de llevar una matemática viva, más dinámica, al salón de clases, es decir una matemática no acabada (contraria a como se muestra en los libros de texto), una ciencia que permita titubeos, donde el tanteo sea parte de la resolución del problema, el ensayo y el error estén siempre presentes entre otros elementos.

b) La propuesta de enseñar la matemática vía resolución de problemas.

c) La formulación de una propuesta metodológica que permita en la práctica docente hacer del estudiante un sujeto activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

d) Concibe al profesor, como un conductor del proceso de enseñanza-aprendizaje.

e) La reestructuración de planes y programas donde se rechaza la idea de la separación de la matemática por áreas, es decir la conformación de planes por bloques donde se incluyan la aritmética, álgebra, geometría y cálculo juntos.

f) La incorporación de la computadora a la enseñanza de la matemática.

Esta revisión curricular actualmente se encuentra en etapa de elaboración de la propuesta.

I.1.3. LAS REVISIONES CURRICULARES EN EL NIVEL SUPERIOR.

El nivel superior como parte del sistema educativo nacional no puede permanecer al margen de los cambios curriculares que se están dando en el nivel básico y el bachillerato y en la actualidad, la mayoría de las universidades del país se encuentran en un proceso de revisión curricular.

En este proceso de revisión, se puede mencionar en particular la propuesta de cambio en la currícula de matemáticas, donde se destacan los

[5] cfr. Comisión del Área de Matemáticas., ibid., pp. 8 - 13.

siguientes: i) replantear la cantidad del número de cursos a impartir, ii) la impartición de una matemática más apegada a la carrera donde se imparte, ii) reestructuración de los contenidos en los planes y programas, iii) la incorporación a la enseñanza de nuevos enfoques metodológicos, iv) la incorporación de la computadora al proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este marco, la UNISON se cuenta entre las instituciones de nivel superior que actualmente se encuentran en un proceso de cambios curriculares en algunos de sus departamentos, por citar algunos casos: Ingeniería Química, Ingeniería Civil, Ingeniería Industrial, donde las propuestas de cambio para el área de matemática son muy similares a las enlistadas en el párrafo anterior.

El panorama anterior refleja el trabajo curricular que actualmente se está desarrollando en todos los niveles educativos en nuestro país, revisiones curriculares que, desde nuestro punto de vista: i) se realizan con lentitud en relación a las exigencias de nuestra sociedad, ii) en su mayoría son de carácter vertical, y no involucran en su elaboración a uno de los actores principales del proceso de enseñanza; el profesor, iii) la mayoría de las propuestas enfatizan cambios en los contenidos de enseñanza, entre otros. Ya que consideramos que las revisiones curriculares institucionales deben ir mas allá de la revisión de los contenidos, tomando en cuenta las características del alumno que se desea formar, el contenido matemático necesario para ello, el tipo de maestro que se requiere para la impartición de los contenidos, etc., y considerar en la revisión a todos los actores que intervienen en el proceso educativo.

I.2 LA PROBLEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

El problema que actualmente se enfrenta a nivel nacional, en la enseñanza de la matemática del nivel medio superior es multifacético y complejo, sus rasgos más visibles son: i) el alto índice de alumnos reprobados que se tiene al final de un curso, ii) las repercusiones que esto tiene en el índice terminal de las instituciones educativas, iii) las condiciones en las que un alumno reprobado aborda cursos posteriores de matemáticas, iv) las repercusiones que se tienen en las materias cuyo estudio requiere el conocimiento y manejo de ciertos contenidos matemáticos tales como física, química, etc., v) los antecedentes académicos con los que el alumno ingresa a un curso de matemáticas, vi) la formación académica de los profesores, vii) las condiciones laborales del docente, viii) la diversidad del bachillerato, y seguramente otros más.

En esta problemática general, se encuentra inmersa la que en particular enfrenta la enseñanza del curso de cálculo diferencial, en el nivel bachillerato.

Esta problemática no es propia de la actualidad, se viene manifestando desde hace varias décadas y ante ella cada institución del nivel medio (COBACH, CBTis, CCH, etc.) ha realizado intentos aislados por abordarla. La metodología empleada para abordar el problema tiene que ver con la manera de como se concibe el problema, por ejemplo los CCH están realizando una revisión global de la currícula matemática, es decir, en la revisión se contempla aspectos como los siguientes; se actualizan los propósitos educativos de los CCH., se plantean metodologías alternativas para la enseñanza de la matemática, se incorpora la computadora a la enseñanza de la matemática, se estructuran los cursos de una forma novedosa, etc. Los COBACH reestructuraron el plan de estudios de matemáticas, esto es, existe una reducción en el número de cursos del tronco común considerando en la revisión sólo los contenidos de la currícula matemática, esto es, existe una reducción en el número de cursos del tronco común (desaparecen los cursos de cálculo diferencial e integral), los CBTis básicamente se ha tratado de abordar la problemática a través de la ACADEMIA local, estatal y nacional; pero sólo se aborda en estos organismos, el problema de los contenidos matemáticos de los cursos, en las propuestas de cambio a la currícula matemática, se observan el mismo número de cursos y el contenido matemático prácticamente no se altera.

Es importante señalar el esfuerzo realizado por la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN (hoy Departamento de Matemática Educativa), para abordar de manera organizada y sistemática, desde la década de los 70's, esta problemática. Sus aportaciones en la dirección de enfrentar este problema han sido:

a) Constituir un equipo de investigadores que se han abocado al estudio del problema.

b) El impulso al Programa Nacional de Formación y Actualización de

Profesores de Matemáticas, a través del cual se ofrecen estudios de licenciatura y posgrado.

c) La promoción de eventos nacionales e internacionales de Matemática Educativa.

La problemática antes señalada no es exclusiva de nuestro país, sino que se manifiesta a nivel mundial, en este contexto existen otros esfuerzos encaminados al estudio del problema, quizás el trabajo más destacado en este momento sea el propuesto en E.U.A. por el "National Council of Teachers of Matemathics" titulado "Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática" y que seguramente repercutirá en la enseñanza de la matemática a nivel mundial. En este trabajo se encuentra explícita una postura ante la problemática y además una propuesta para abordarla que se puede resumir en lo siguiente[5]:

a) Cambiar el énfasis de unos temas a otros en la currícula de matemáticas, algunos de estos cambios propiciados por el uso de la computadora.

b) Modificar el rol que desempeña el estudiante en el proceso de aprendizaje.

c) Cambiar el rol que desempeña el docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

d) Cambiar la metodología para enseñar la matemática, guiada por:
d.1) Las matemáticas como resolución de problemas.
d.2) Las matemáticas como comunicación.
d.3) Las matemáticas como razonamiento.

---

[6] cfr. NCTM., Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática., Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"., España., 1989., pp. 126 -128.

I.3 LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS A LOS QUE ACTUALMENTE SE TIENE ACCESO EN EL PROCESO EDUCATIVO.

Una característica de la sociedad actual es el avance vertiginoso de la tecnología originando con esto, un desarrollo que tiene que ver de manera directa con la aparición de calculadoras, calculadoras gráficas, videos, computadoras, software educativo, etc. La existencia de estos recursos tecnológicos, ha originado que muchos estudiantes interactúen con ellos al margen de que las instituciones educativas o el maestro, contemplen o no su uso en la escuela.

De este panorama tan amplio de recursos tecnológicos, en este trabajo centraremos nuestra atención en la computadora.

El generar una propuesta para la incorporación y el uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje es un problema que en la actualidad esta en discusión, pero existen líneas trazadas por investigadores que han estado trabajando en los últimos años en este sentido, que nos indican los usos que se le pueden dar a la computadora en este proceso, como son:

Según Fernando Hitt:[7]

a) Pizarrón electrónico.
b) Lecciones tutoriales.
c) Simulación.
d) Evaluación.
e) El utilizar un lenguaje para el desarrollo de conceptos.
f) Software diseñado con propósitos no educativos que es útil en Educación matemática.

Según Hatfield[8]:

Como una herramienta de apoyo extraclase del profesor para:

a) Elaboración de exámenes escritos.
b) Producción de material didáctico.

---

[7] **cfr. Avalos Caudillo, Alicia., Tesis de Licenciatura "Análisis de la Educación Matemática y su influencia en el desarrollo científico y tecnológico de México"., México D.F., 1991., pp. 125 -126.**

[8] **cfr. Avalos Caudillo, Alicia., ibid., pp. 132 - 133.**

c) Elaboración de reportes de avance.

Sin duda la descripción anterior de los usos que se le puede dar a la computadora no está acabada y es una muestra de los múltiples empleos que se le puede dar en el proceso de enseñanza.

En particular en la propuesta metodológica se utiliza la computadora con Software Educativo y pizarrón electrónico; básicamente como:

- Graficador.
- Herramienta de cálculo.

Es importante mencionar que dentro de los múltiples usos que se le puede dar a la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje se decidió por el ya citado debido a lo siguiente:

a) El tipo de computadora que se requiere para trabajar la paquetería matemática que se utilizó en la implementación del curso, no es costosa, ni requiere de disco duro, es suficiente con que posea "Drive" para discos flexibles.

b) La paquetería utilizada en el curso, no implica un gasto económico, ya que ésta se puede conseguir fácilmente.

c) El trabajo que el alumno realiza con la computadora no le exige conocimientos elevados de computación.

d) El uso que se le da a la computadora le "evita" al alumno la "pérdida" de tiempo en cálculos laboriosos y utilizar el tiempo invertido en ellos para reflexionar sobre los resultados obtenidos y los conceptos involucrados en los procesos de resolución de problemas.

CAPITULO II.
MARCO TEÓRICO

INTRODUCCIÓN.

Hacer o aceptar una propuesta sobre la manera de implementar la enseñanza de la matemática es resultado de consideraciones de diversa índole; buenos resultados obtenidos, compatibilidad con algunos supuestos aceptados, etc. Y estas consideraciones debieran ser las que acoten la racionalidad de la propuesta y su probable éxito.

La pretensión de este trabajo es llevar a la práctica algunas ideas aceptadas durante los estudios en la maestría en matemática educativa, sobre la problemática que se enfrenta en la enseñanza de la matemática.

II.1 EL TRABAJO.

En este trabajo se presenta, una propuesta metodológica para impartir el curso de Cálculo Diferencial, que forma parte del plan de estudios del sistema del bachillerato tecnológico del país.

Una característica que distingue a esta propuesta es que el estudiante desempeña durante la impartición de este curso un rol fundamentalmente "activo", los alumnos trabajan en equipo sobre la resolución de problemas, discuten en equipo el plan o estrategia a seguir para su solución, confrontan las diferentes respuestas encontradas en el equipo a nivel del grupo (argumentan sus respuestas) y finalmente como producto de este trabajo, los alumnos encuentran la solución de los problemas o el significado de los conceptos matemáticos.

Consideramos que un ambiente de aprendizaje de las matemáticas de este tipo, contribuye a desarrollar habilidades intelectuales, hábitos de trabajo y valores en los estudiantes, que también pueden ser motivadas en la enseñanza de otras materias como; Química, Física y otras. Ejemplos de esto son:

- La habilidad para resolver problemas:
  - Identificando la información importante de un problema.
  - Encontrando las relaciones que se dan en un problema.
  - Operando con números y símbolos.
- El hábito para trabajar en equipo.
- El hábito de la disciplina y la constancia en el trabajo
- Capacidad para formular sus puntos de vista.
- Capacidad para analizar argumentos escritos u orales.
- La capacidad de descubrimiento.
- etc...

Consideramos importante el desarrollo de este tipo de capacidades, dado que la sociedad actual demanda individuos con estas características entre otras.

II.2 CONSIDERACIONES ACERCA DEL CURRÍCULUM.

Algunas concepciones que sobre el currículum manejan los maestros de bachillerato son; "el currículum son los contenidos del programa de estudio de cierta materia" o "el currículum es el plan de estudios del bachillerato".

Por otra parte los estudiosos del currículum lo conciben de manera más amplia, algunas de estas se han venido formulando en Investigación Educativa, un ejemplo de esto es la caracterización que del currículum hace la especialista Alicia de Alba **"este debe considerar todo el conjunto de aspectos que inciden en la vida** escolar, deben tomarse en cuenta como aspectos importantes las necesidades sociales, las necesidades institucionales, los marcos filosóficos-normativos-axiológicos que rigen la vida social, las características de los alumnos y de los maestros, y de modo central el conocimiento que se enseñará y se aprenderá. Todos estos aspectos y aún otros deben estar contenidos en el currículum de un modo u otro, con el fin explícito de asegurar de modo eficiente la transmisión de normas y valores, de conocimientos y pautas conductuales a las jóvenes generaciones de la sociedad, de modo de asegurar la continuidad de ésta o sus paulatinas transformaciones".

Pero el currículum es un producto de la historia humana y, por lo tanto, cambia con el tiempo y las innovaciones que aportan los estudiosos de este campo. Por tanto, pareciera que no se puede definir el currículum sin plantear previamente una visión del mundo que opere como marco de referencia de dicha definición y al mismo tiempo la haga comprensible.

En este trabajo se considera el currículum en la acepción que lo concibe Alicia de Alba; es decir, como la estrategia global a través de la cual se pretende alcanzar los objetivos más generales de la Educación. Concebido así el currículum, es claro que al hablar de cambios curriculares se esta hablando en algún aspecto o aspectos del mismo. En particular, el presente trabajo constituye una propuesta de cambio en la metodología de enseñanza del curso de Cálculo Diferencial que se imparte en el bachillerato tecnológico.

II.3 LA FUNCIÓN DE LA ESCUELA Y LAS TENDENCIAS SOCIALES.

Si el trabajo docente se inscribe dentro de esta definición mas amplia de currículum; su vinculación con los fines más generales que la escuela persigue, en la sociedad en la que está inmersa, resulta inevitable.

La institución educativa, como toda institución social, ha sido creada para cumplir con determinadas funciones y se ha desarrollado influida por los factores y tendencias que condicionan y determinan el desarrollo social en general, a saber: factores económicos, políticos, sociales, culturales, etc.

Su función esencial se puede resumir de la siguiente manera: preparar a las nuevas generaciones para enfrentar con éxito los problemas y retos que plantea la sociedad actual, así como los problemas que muy probablemente aparecerán en el futuro inmediato que seguramente serán esencialmente distintos a los actuales.

Por esta razón, la enseñanza de una materia, en particular del cálculo debe de estar contenida en una propuesta curricular que aspire a contribuir a que la institución educativa cumpla adecuadamente su función, esta propuesta deberá tomar en cuenta las características y tendencias del desarrollo social actual y de los retos que la sociedad presenta, y desprender de ellas las tareas que se imponen a la escuela, ya que de no ser así se corre el riesgo de que la institución quede muy pronto rezagada respecto a las exigencias sociales.

Algunas características y tendencias de la sociedad actual que es necesario tener presentes son:

a) Todas las actividades (industriales, agropecuarias, financieras, comerciales, etc.) se ven influidas por la revolución científico-técnica, esto es, por el desarrollo vertiginoso de la ciencia y la tecnología, produciendo importantes y radicales transformaciones en los procesos productivos y en la forma de organización del trabajo[1].

---

[1] **cfr. Skatkin M. N., Problemas de la didáctica moderna., Editorial Pedagógica., Moscú., 1980., Traducido por el M.C. Jiménez Rodríguez, Ramón., UNISON., 1989., pp. 4-6.**

b) la tendencia globalizadora que agrupa a los países en grandes bloques aglutinados por los problemas ambientales, la economía[2], el comercio, la producción, etc.

c) El cambio de la división política del planeta Tierra, manifestada por; la unión de las dos Alemanias, la caída del bloque soviético (desintegración de la URSS)[3], la desintegración de Yugoslavia, etc.

d) La crisis ambiental, como consecuencia del uso irracional de los avances científicos y tecnológicos, que ha puesto en peligro la existencia misma de la vida en la tierra[4].

e) La existencia de armamento altamente destructivo y su uso para resolver conflictos internos de los países y conflictos internacionales, que va conformando un nuevo orden mundial.

f) La presencia de una enorme cantidad de seres humanos que viven en la pobreza extrema[5], es decir sin los mínimos indispensables para vivir una vida digna y decorosa, esto como consecuencia de las políticas económicas que se han implementado por los grandes centros de poder.

g) La tendencia mundial hacia la democratización[6].

Este entorno social presenta nuevas exigencias a las instituciones educativas, que se traducen en tareas cada vez mas

---

[2] **cfr. Moreno Moreno, Prudenciano., Tesis de doctorado "Crisis y modernización de la educación en Sonora 1980-1990"., UNAM., 1991., pp. 13-14.**

[3] **cfr. De Alba, Alicia., El currículum universitario ante los retos del siglo XXI, la paradoja entre postmodernismo, ausencia de utopía y determinación curricular., México D.F., 1991., pp. 4-5.**

[4] **cfr. De Alba, Alicia., ibid., pp. 5 y 12.**

[5] **cfr. De Alba, Alicia., ibid., pp. 5 y 11.**

[6] **cfr. De Alba, Alicia., ibid., pp. 14-15.**

impostergables, como las siguientes:

a) Conocer con detalle los cambios que se están dando en los procesos productivos y proporcionar a los educandos un alto nivel de conocimientos, los cuales son necesarios para el manejo eficiente de alta tecnología y para la comprensión de los fundamentos científicos de los procesos productivos modernos y de su organización racional; en síntesis, **"se reclama que el alumno domine los métodos para la aplicación de los conocimientos[7]"**.

b) El acelerado desarrollo de la ciencia y la tecnología provoca un rápido "envejecimiento" de las máquinas y de los conocimientos y, en consecuencia, reclama de la escuela desarrollar en los individuos, no sólo capacidad para manejar la tecnología existente, sino para actuar y participar creativamente en el proceso de renovación tecnológica que dé como resultado la invención en un futuro inmediato, de nueva maquinaria y/o nuevas formas de trabajo. Lo anterior, crea la necesidad de desarrollar en el estudiante **"la conciencia de la necesidad de mantenerse en actualización permanente, esto es, dotarlo de los métodos para la obtención del conocimiento[8]"**.

c) El desarrollo tecnológico exige de la escuela el análisis y diseño de estrategias y métodos de enseñanza que contemplen el uso racional de los recursos tecnológicos a los que actualmente se tiene acceso en el proceso de enseñanza-aprendizaje, **que además de pretender mejorar el rendimiento académico de los alumnos, permita a estos el uso y manejo adecuados de los lenguajes que usan estos medios.**

d) La tendencia globalizadora y de interdependencia reclama de la escuela desarrollar y consolidar en los estudiantes **"la**

---

[7] **cfr. CCH, Comisión del Área de Matemáticas., Segunda aproximación a la revisión del Plan de Estudios del Bachillerato del CCH., Cuadernillo No. 14., México D.F., 1993., p. 10.**

[8] **cfr. CCH, Comisión del Área de Matemáticas., ibid., p. 10.**

conciencia de la necesidad de mantener nuestra identidad nacional, nuestros valores y tradiciones[9]", es decir, que si bien es cierto que como nación no debemos aislarnos de este proceso y que lo que decidamos y hagamos localmente tiene repercusiones mas allá de nuestras fronteras, y recíprocamente, se debe fortalecer la convicción de que nuestras decisiones deben tomarse de manera soberana y con absoluta independencia. Esto es, porque la escuela también prepara a los individuos que en determinado momento se desempeñan como dirigentes de la sociedad y tiene la responsabilidad de tomar desiciones importantes en el país.

e) La crisis ambiental exige de la institución educativa, como una tarea urgente, incluir en los contenidos los elementos que contribuyan a formar y desarrollar en el estudiante una cultura y una conciencia ecológica que le permita comprender que no tenemos derecho a destruir el ambiente en el que también vivirán las futuras generaciones y que lo conviertan en un activo ciudadano por la conservación del medio ambiente[10] y, en última instancia, por la conservación de la vida misma en nuestro planeta.

f) La escuela deberá desarrollar en el estudiante el amor por su trabajo[11] y el amor por sus semejantes que lo lleven a oponerse a toda acción destructora y lo conviertan en un firme y decidido militante por la paz mundial y un promotor de los medios pacíficos para resolver los conflictos.

g) La escuela debe sensibilizar al estudiante para que asuma como suyo, como el mayor y como el más apremiante reto que presenta la época actual, el problema de la pobreza extrema, y desarrollar en él un profundo sentimiento de solidaridad con los que menos

---

[9] CONALTE., Hacia un Nuevo Modelo Educativo., SEP., México D.F., 1991., p. 99.

[10] Como lo muestra el contenido de los libros de texto de Ciencias Naturales, del nivel básico.

[11] cfr. CCH, Comisión del Área de Matemáticas., ibid., p. 11.

tienen, sentimientos que lo lleven a asumir compromisos concretos[12].

h) La tendencia mundial a la democratización exige a la escuela convertirse en un modelo de participación democrática, que fortalezca la convicción en el estudiante de que la democratización de las organizaciones sociales, y de la sociedad en general, es una condición previa indispensable para la superación de los graves problemas que aquejan a nuestro país[13].

Estas exigencias reclaman de la escuela desarrollar en el individuo una de las más complejas e importantes capacidades humanas: la capacidad de pensar, pero pensar de manera inédita, osada, crítica, creativa y comprometida.

II.4 EL NIVEL MEDIO SUPERIOR.

II.4.1 GENERALIDADES.

En la actualidad existen en México una multitud de instituciones que ofrecen educación de nivel medio superior, las cuales han sido creadas en diferentes momentos y con diferentes finalidades. Con el fin de tener un panorama general de la situación actual de este nivel educativo, haremos un breve recorrido por los acontecimientos más importantes de los últimos años, que han repercutido en la concepción y organización del Nivel Medio Superior.

En Enero de 1964 se aprobó un nuevo plan de estudios de la Escuela Nacional Preparatoria ENP a iniciativa del entonces rector de la UNAM, Dr. Ignacio Chávez. Esta reforma reviste particular importancia, no sólo porque produjo el plan de estudios vigente

---

[12] **cfr, De Alba, Alicia., El Currículum Universitario ante los retos del Siglo XXI, la paradoja entre postmodernismo, ausencia de utopía y determinación curricular., México D.F., pp.**

[13] **cfr. De Alba, Alicia., ibid., pp. 14-15.**

hasta la fecha en la ENP, sino porque revela el cambio notorio en la manera de concebir el bachillerato.

Esta propuesta concibe al bachillerato como un ciclo esencialmente formativo y propedéutico que tiene finalidades por si mismo, entre las cuales se destaca:i) un desarrollo integral de las facultades del alumno para hacer de él un hombre cultivado, ii) formación de una disciplina intelectual, que lo dote de un espíritu científico, iii) formación de una cultura general que lo dote de una escala de valores.

En la década de los 70's, ante los graves problemas de la educación masiva y popular, y a sus vigorosos empujes y protestas, se contesta con la apertura de la mayoría de las instituciones de educación media superior que actualmente existen en nuestro país, iniciando esto el 26 de Enero de 1971 cuando el Consejo Universitario de la UNAM, aprobó la creación del CCH, a iniciativa del entonces rector, Dr. Pablo González Casanova. Posteriormente, por decreto presidencial publicado el 26 de Septiembre de 1973, fue creado el Colegio de Bachilleres. El 29 de Diciembre de 1978, fue creado el CONALEP, con fines exclusivamente terminales y en la actualidad se encuentra en discusión el proyecto de asignarle el carácter de bivalente.

Conforme se fueron creando las instituciones del nivel Medio Superior, se fue conformando un espectro cada vez mas amplio de opciones para cursar estudios de este nivel, de tal modo que para 1982, según Pantoja Morán:

"...se constata fácilmente una gran diversidad de planes de estudio y de programas de las materias, pues existen aproximadamente 186 planes de estudio diferentes que comprenden 275 materias que presentan diferencias en el nombre, extensión, ubicación, o contenido programático. Se detecta también una dispersión significativa por cuanto a criterios metodológicos y de concepción en el proceso de enseñanza aprendizaje y una indefinición sustantiva respecto a su función"

La descripción de Pantoja refleja la situación que guarda el Bachillerato Mexicano a principios de la década de los 80's. Varios esfuerzos nacionales se hicieron para afrontar esta problemática, el más importante de ellos fue el Congreso Nacional del Bachillerato de Cocoyoc, Morelos, realizado del 10 al 12 de Marzo de 1982. En dicho congreso se obtuvieron una serie de acuerdos de los cuales se destacan los siguientes:

1. Proporcionar al estudiante una cultura general básica que vaya acorde a la época que vive.

2. Proporcionar los instrumentos metodológicos para que pueda manejar la ciencia y desarrollar el autoaprendizaje.

3. Habilitar al alumno para que se incorpore a estudios superiores o en su caso a un trabajo productivo.

4. La conformación de un tronco común dentro del bachillerato en las siguientes áreas; i) Área de Matemáticas, ii) Área de Ciencias Naturales, iii) Área de Lenguaje y Comunicación, iv) Área Histórico Social.

5. Vincular la educación media superior a la producción socialmente necesaria, atendiendo áreas prioritarias para el desarrollo del país.

II.4.2 EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO.

Este tipo de institución educativa es creada por decreto presidencial a principios de la década de los 70's, por el presidente de la república, Lic. Luis Echeverría Alvarez, parte de este bachillerato lo formaban los C.E.C.Y.T. (Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos). Posteriormente estos institutos cambiaron de nombre a CBTis, actualmente el Bachillerato Tecnológico está formado por los CBTis, CBTas y los CET del mar.

Una de las características distintivas de estas instituciones es su carácter bivalente, esto es, en este nivel se prepara al alumno para que se incorpore a estudios superiores (le proporciona el bachillerato), y por otra lo capacita para desarrollar un trabajo productivo, es decir, le da la oportunidad de obtener un Título de Técnico.

Los propósitos de estas instituciones educativas son:

- El desarrollo integral de las facultades del alumno.

- Proporcionar al estudiante una cultura general básica que vaya de acorde a la época que vive.

- Proporcionar los instrumentos metodológicos para que pueda manejar la ciencia y la tecnología, y desarrollar el autoaprendizaje.

- Habilitar al alumno para que se incorpore a estudios superiores o en su caso a un trabajo productivo.

- Vincular la educación media superior a la producción socialmente necesaria, atendiendo áreas prioritarias para el desarrollo del país.

II.4.3 EL PLAN DE ESTUDIOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN EL CBTis.

Se puede decir, que en general, los contenidos del programa de estudios de matemáticas, han permanecido vigentes desde hace más de una década y han estado constituido por temas de:

- Aritmética y Algebra.

- Geometría y Trigonometría.

- Geometría Analítica.

- Cálculo Diferencial e Integral.

En 1984, como se menciona en el manual de programas maestros del tronco común del Bachillerato Tecnológico, los cursos de matemáticas que se impartían en esta institución eran cuatro y los grandes temas incluidos en ellos, eran los siguientes:

Curso I. Aritmética y Algebra.
- Sistemas Numéricos.
- Lenguaje Algebraico.
- Ecuaciones e inecuaciones.

Curso II. Geometría y Trigonometría.
- Recta.
- Ángulos.
- Triángulos.
- Polígonos
- Círculo y Circunferencia.
- Relaciones Trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Relaciones Trigonométricas en otros triángulos.
- Funciones Trigonométricas.
- Funciones: Exponencial y Logarítmicas.

Curso III. Geometría Analítica y Estadísticas.
- Conceptos introductorios.
- Ecuación de la Recta.
- Paralelismo y Perpendicularidad.
- Rectas Notables.
- Circunferencia.
- Parábola.

- Elipse.
- Hipérbola.
- Estadística Descriptiva.
- Medidas de Centralización.
- Desviación Típica y otras medidas de dispersión.
- Probabilidad.
- Inferencia Estadística.

Curso IV. Cálculo Diferencial.
- Funciones.
- Límites y Continuidad.
- Derivación de Funciones.
- Análisis de Funciones.
- Cálculo Integral.

En 1988, conforme el manual de programas maestros del tronco común del Bachillerato Tecnológico, el número de cursos de matemáticas aumenta a cinco, conservando esencialmente los grandes temas, sólo se quita del curso III, el tema "Estadísticas", como se muestra a continuación:

Curso I. Aritmética y Algebra.
- Sistemas Numéricos.
- Lenguaje Algebraico.
- Ecuaciones e inecuaciones.

Curso II. Geometría y Trigonometría.
- Recta.
- Ángulos.
- Triángulos.
- Polígonos
- Círculo y Circunferencia.
- Relaciones Trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Relaciones Trigonométricas en otros triángulos.
- Funciones Trigonométricas.

- Funciones: Exponencial y Logarítmicas.

Curso III. Geometría Analítica.
- Conceptos Introductorios.
- Ecuación de la Recta.
- Paralelismo y Perpendicularidad.
- Rectas Notables.
- Circunferencia.
- Parábola.
- Elipse.
- Hipérbola.

Curso IV. Cálculo Diferencial.
- Funciones.
- Límites y Continuidad.
- Derivación de Funciones.
- Aplicaciones.

Curso V. Cálculo Integral.
- Concepto de diferencial de una función.
- Interpretación Geométrica de la diferencial.
- La notación Sigma.
- Teorema fundamental del cálculo integral.
- Definición de la integral de una función como una suma.

En el año de 1991, en la reunión de academia nacional de matemáticas, en la Cd. de Puerto Vallarta, Jal. se revisaron los contenidos de la currícula de matemáticas con el propósito de elaborar los programas que se impartirán a partir del semestre Septiembre de 1992, como resultado de esta reunión, los cursos fueron nuevamente reestructurados, observándose que con respecto a la propuesta de 1988 no se aprecian cambios en los contenidos matemáticos, quedando como sigue:

Curso I. Aritmética y Algebra.

- Sistemas Numéricos.
- Lenguaje Algebraico.
- Ecuaciones e inecuaciones.

Curso II. Geometría y Trigonometría.

- Recta.
- Ángulos.
- Triángulos.
- Polígonos
- Círculo y Circunferencia.
- Relaciones Trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Relaciones Trigonométricas en otros triángulos.
- Funciones Trigonométricas.
- Funciones; Exponencial y Logarítmicas.

Curso III. Geometría Analítica.

- Conceptos Introductorios.
- Ecuación de la Recta.
- Paralelismo y Perpendicularidad.
- Rectas Notables.
- Circunferencia.
- Parábola.
- Elipse.
- Hipérbola.

Curso IV. Cálculo Diferencial.

- Funciones.
- Límites y Continuidad.
- Derivación de Funciones.
- Aplicaciones.

Curso V. Cálculo Integral.

- Concepto de diferencial de una función.
- Interpretación Geométrica de la diferencial.
- La notación Sigma.
- Teorema fundamental del cálculo integral.

- Definición de la integral de una función como una suma.

Es importante mencionar, que estos programas de estudio, están acompañados de una propuesta de enseñanza, que el manual de programas maestros del tronco común del bachillerato tecnológico de 1984, menciona textualmente (página 70):

"...Así, tenemos que el enfoque propuesto consiste en partir de problemas de la realidad inmediata del alumno para que, a partir de la necesidad de resolverlos, llegue a interiorizarse a través de la óptica de ensayos y errores, apreciando con ello la simplicidad y sencillez del lenguaje matemático existente. Una vez logrado esto y partiendo de reglas propias, tendrá la capacidad de vincular la aplicación de las matemáticas con otras áreas del conocimiento."

Se observa que el curso de Cálculo Diferencial siempre ha estado presente en la currícula de matemática de este nivel educativo, y no se aprecian razones para que este curso sea excluido del plan de estudios.

II.4.4 EL PAPEL DE LA MATEMÁTICA EN EL BACHILLERATO.

Como ya se mencionó, el espectro de instituciones que imparten el nivel bachillerato es muy amplio, a pesar de eso, existen una serie de objetivos comunes que son compartidos por las instituciones. Para poder alcanzar estos propósitos se requiere entre otras cosas que el trabajo docente se encamine en esa dirección.

En la práctica docente, es común que la impartición de un curso de matemáticas se apoye en la exposición del discurso que el maestro prepara para enseñar los contenidos matemáticos.

Esta forma de enseñanza de la matemática, deja al alumno el convencimiento de que las matemáticas se aprenden de manera pasiva, de que los problemas que se plantean en clase se resuelven en pocos minutos, y el estudiante acepta que los contenidos de la matemática no se cuestionan, es decir, el profesor le transmite al alumno la idea de que la matemática es una ciencia acabada cuyos contenidos están escritos en algún libro y que él se los transmitirá.

Pensamos que una matemática donde para resolver un problema, el alumno discuta la manera de abordarlo, elabore conjeturas, ensaye, tantee, tenga libertad de equivocarse y corrija, y con un lenguaje propio elabore las propuestas de solución, pudiera aportar más al logro de los objetivos que las instituciones del nivel medio se plantea.

En esta última visión, el Área de Matemáticas adquiere un importante sentido formativo dentro del plan de estudios, pues contribuye de diversas maneras al desarrollo integral de la personalidad del educando: el estudio de las matemáticas puede proporcionar al bachiller los elementos necesarios para permitirle interpretar los aspectos lógicos y numéricos de sus vivencias intelectuales, que le permitirá adquirir un bagaje de saberes teóricos y práctico-funcionales, necesarios en el desarrollo de su personalidad.

ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LA CONCEPCIÓN Y LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

Las aportaciones que la matemática puede hacer a la formación de los estudiantes depende en gran medida de cómo se concibe tanto esta ciencia como su enseñanza; es decir, la determinación del qué y para qué de la enseñanza debe ir acompañada de una precisión del cómo. En esta parte juegan un papel fundamental la delimitación de los conceptos y procedimientos, también y de manera muy importante, los valores y las actitudes que se fomenten en el estudiante a partir de las orientaciones que se asigne a la enseñanza global en el Área.

Es frecuente que la práctica cotidiana del docente que imparte un curso de matemáticas, se apoye fundamentalmente en la exposición de un discurso matemático dirigido a los alumnos, el cual está compuesto dependiendo del objetivo, de un proceso definido aplicado a la resolución de "algo" que siempre tiene solución y por lo general resulta ser única.

Este trabajo hace que comúnmente a las matemáticas se le asocia con la certeza, se le identifica como la disciplina donde se pueden obtener respuestas correctas rápidamente.

Los efectos que esta práctica tiene sobre las maneras de pensar y estudiar la matemática ha sido objeto de numerosos estudios. Las prácticas presentes en el currículum oculto, más que en los contenidos de los cursos de matemáticas, van formando una serie de ideas en los estudiantes; que Shoenfeld resume del modo siguiente:

"...la práctica de estudiar matemáticas se relaciona muchas veces con el recordar y aplicar la regla correcta a la pregunta de los maestros, y la veracidad de las respuestas se determina con la ratificación por parte de los maestros o el libro de texto. Estas ideas acerca de las matemáticas y el significado de su aprendizaje se adquieren a través de los años al observar, escuchar, y practicar actividades matemáticas[14]".

Esta manera de enseñar la matemática, deja en el alumno la impresión de que los problemas siempre tienen solución y casi siempre es única, de que la resolución del mismo tiene que ver con el tránsito de "un sólo camino" y al final de éste aparece la solución correcta. Lester al respecto considera que:

---

[14] **Santos Trigo, Luz Manuel., La Resolución de Problemas: Elementos para una Propuesta en el Aprendizaje de las Matemáticas., Cuaderno de Investigación No. 25., CINVESTAV., IPN., México D.F., pp. 17-18.**

"...debido a que los maestros muestran a los estudiantes solamente los movimientos correctos al resolver un problema. Es decir, seleccionan el método adecuado, trabajan correctamente las operaciones y obtienen una solución correcta. De esta forma, los estudiantes piensan que resolver problemas es seleccionar una serie de trucos que son solamente accesibles a unos cuantos[15]."

Una concepción de las matemáticas como ciencia básicamente deductiva y cerrada, con poco espacio para el tanteo y la aproximación, no invita precisamente a que se utilicen en situaciones inciertas o poco definidas, como son las de la vida cotidiana.

Así, por ejemplo, concebir las matemáticas como el instrumento universal de la representación, no sólo confiere a esta ciencia el limitado estatuto de lenguaje y compromete toda una concepción del conocimiento como simple traducción y lectura de lo inscrito en lo real, sino supone también admitir que la formalización de la matemática es punto de partida y su objetivo consiste en ordenar los conocimientos y crear estructuras formales.

Su enseñanza en esta perspectiva, por tanto, se centra en la matematización de los procesos; en la intención de ir creando sistemas formales y definiendo leyes lógicas que luego "facilitarán la creación de automatismos aplicables a una gran diversidad de situaciones".

La matemática formal -pasar de reglas a estructuras y leyes operativas- ha llevado a los alumnos a concebir esta disciplina como algo incomprensible y despegado de la realidad.

Es indudable que los diversos métodos y fundamentaciones teóricas que las matemáticas han utilizado a lo largo de su

[15] **Lester, F. K. Jr., Trends and issues in mathematical problem solving research., In R. Lesh & M. Landau (Eds.)., Acquisition of mathematics concept and Procedures., Orlando, Fl., Academic Press, Inc., pp. 229-261.**

historia, y hasta la fecha, son elementos básicos para decidir en qué medida contribuyen a la educación de los alumnos, e, incluso, para orientar sobre como pueden aprenderse y enseñarse.

Uno de los rasgos esenciales de las matemáticas es que surgen de un proceso de construcción ligado a la resolución de problemas concretos, procedentes con frecuencia de otros campos del conocimiento o de la actividad humana. Y en este proceso el especialista o grupo de especialistas que resuelve el problema, construye sus ideas matemáticas apoyando el trabajo sobre objetos y situaciones concretas, se hacen conjeturas, se tantea, se aproxima a las soluciones y una vez resuelto el problema se formaliza, se abstrae[16].

Este proceso de construcción se ha dado tanto en el desarrollo histórico de las matemáticas, como en el desarrollo de las ideas matemáticas en cada persona. El rigor de la deducción, la abstracción, la formalización y otras características, que tradicionalmente se dan como definitorias de las matemáticas, son más propias de un producto final que de su proceso de construcción.

Una consecuencia didáctica de esta postura epistemológica consiste en favorecer que los alumnos construyan sus ideas matemáticas apoyando el trabajo sobre objetos y situaciones concretas, el uso de lenguajes naturales para expresar sus ideas matemáticas y potenciar la intuición y la adquisición de conceptos y relaciones mediante procesos inductivos, de modo que al final se pudiera alcanzar dominio de lo abstracto, de lo deductivo, y doten de significado al lenguaje formal.

La Comisión encargada de la reforma que se lleva a cabo en estos momentos de los planes y programas de estudios del CCH-UNAM, está intentando incluir algunos de estos planteamientos en la nueva

---

[16] **cfr. Comisión del Área de Matemáticas., Segunda Aproximación a la Revisión del Plan de Estudios del Bachillerato del CCH., CCH., Cuadernillo Número 14., México D.F., 23 de Abril de 1993., pp. 7-9.**

currícula; en la Introducción a uno de sus mas recientes documentos de trabajo, establecen:

"...de esta manera, los estudiantes podrán percibir a la matemática como una ciencia viva, que se inicia a partir de las necesidades del hombre de conocer y descubrir su entorno físico y social, que, además, tiene una evolución y un desarrollo que admite titubeos, conjeturas, aproximaciones, al igual que el rigor, la exactitud y la formalización[17]."

II.5 CONSIDERACIONES ACERCA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Como ya se ha mencionado y pese a los esfuerzos recientes en el terreno curricular, prevalece aún en la práctica docente, como postura metodológica dominante aquella en la que el profesor expone el conocimiento matemático y el estudiante lo aprende. En esta postura la interacción entre estudiante y maestro es mínima pues se parte del supuesto de que el alumno retiene, conforme recibe, una serie de resultados que posteriormente podrá reproducir.

Si aceptamos el hecho de que la génesis y evolución de los conocimientos matemáticos no es ajena a la problemática que se genera, cuando estos conocimientos se trasladan al aula; estamos obligados a revisar la historia de la matemática; ésta nos muestra que el conocimiento matemático surge de un proceso que está ligado a la resolución de problemas concretos, que proceden con frecuencia de otros campos del conocimiento o de la actividad humana. A este respecto, M. Kline nos muestra un excelente panorama en una de sus obras que más recientemente se ha traducido al español, en ella se afirma:

"...Para las generaciones pasadas, las matemáticas eran, en

[17] **Comisión del Área de Matemáticas., ibid p. 7.**

primer lugar y por encima de todo, la creación más refinada del hombre para investigar la naturaleza. Los principales conceptos de las matemáticas, así como sus poderosos métodos y casi todos sus teoremas importantes, se obtuvieron en el curso de esta investigación. La ciencia era la sangre y el alimento de las matemáticas. Los matemáticos eran buenos compañeros de los físicos, astrónomos, químicos e ingenieros en la empresa científica. Y muchos de los principales matemáticos trabajaron mucho más en la astronomía, la mecánica, la hidrodinámica, la electricidad, el magnetismo y la elasticidad que en la matemática propiamente dicha.[18]

En este proceso histórico se ha observado que la matemática ha tenido avances significativos cuando sus creadores, enfrentados a un problema, tienen que **generar nuevas ideas matemáticas para su resolución** y en el transcurso de la misma, se hacen conjeturas, se tantea, se aproxima a la solución y una vez que se resuelve el problema se formaliza y se abstrae. Los responsables de la reforma curricular que se realiza actualmente en el CCH-UNAM, han tomado muy en cuenta estas ideas; como se muestra en uno de sus últimos reportes:

"...Esta estrecha relación entre epistemología y didáctica se manifiesta, al constatar que uno de los rasgos esenciales de las matemáticas es que surgen de un proceso de construcción ligado a la resolución de problemas concretos, procedentes con frecuencia de otros campos del conocimiento o de la actividad humana.

Este proceso de construcción se ha dado tanto en el desarrollo histórico de las matemáticas como **en el desarrollo de las ideas matemáticas en cada persona**[19]."

---

[18] **Kline, Morris., Matemáticas, la pérdida de la certidumbre., México D.F., siglo veintiuno editores, sa., 1985., pp. 336-337.**

[19] **cfr. Comisión del Área de Matemáticas., "Segunda aproximación a la revisión del plan de estudios del bachillerato del CCH"., CCH., Cuadernillo No. 14., México D.F., Abril de 1993., PP. 7-8.**

Atendiendo a estas ideas, pensamos que es posible replantear la metodología de enseñanza que se utiliza cotidianamente, y por fortuna, la posibilidad de llevar al aula una propuesta metodológica que considere este proceso, es un problema que actualmente se está investigando en la comunidad matemática en general. Y pareciera ser que, cada vez más, existe el convencimiento de que la actividad de resolución de problemas pudiera desempeñar un papel fundamental en la enseñanza de esta disciplina[20].

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

El propósito fundamental de la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas[21] es que los estudiantes aprendan, y desarrollen su pensamiento matemático, realizando en clase actividades similares a las que lleva a cabo el matemático cuando resuelve un problema.

Esto plantea al docente la tarea de diseñar y conducir situaciones[22] que planteen al alumno un problema o grupo de

---

[20] Dos trabajos recientes dan cuenta de sendas propuestas metodológicas sobre la enseñanza de la matemática a través de problemas, dada su trascendencia, damos la referencia bibliográfica:

NCTM., Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática., Sociedad Andaluza de Educación Matemática., Thales, España., 1989., PP. 126-128.

Comisión del Área de Matemáticas., Segunda aproximación a la revisión del plan de estudios del bachillerato del CCH., Cuadernillo No. 14., México D.F., Abril de 1993.

[21] En este trabajo el significado de problema es el que establece Polya "Tener un problema significa buscar concientemente con alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar", donde se pueden identificar las siguientes componentes; i) Estar consciente de una dificultad, ii) Tener deseos de resolverla, iii) La no existencia de un camino para resolverla, iv) La atención por parte de una persona o grupo de personas para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa situación.

[22] Como lo señala Mashbits, Y. D., en "Fundamentos Psicológicos de la conducción de la actividad de aprendizaje", se considera al maestro como diseñador y conductor de las actividades a través de las cuales los alumnos van descubriendo los conocimientos matemáticos, el maestro considerará en el diseño de las situaciones

problemas que al ser resueltos; desarrollen conceptos en el estudiante, muestren estrategias para resolver problemas, métodos de solución, etc. Esta estrategia de enseñanza requiere que el maestro modifique el rol que habitualmente tiene en el salón de clases, dedicándose más a coordinar y orientar el trabajo de los estudiantes y menos a exponer los contenidos del curso.

Las estrategias de resolución de problemas consideradas en esta propuesta, son similares a las utilizadas por los matemáticos cuando intentan encontrar la solución de un problema no resuelto, esto significa, dedicar tiempos considerables a la solución de un problema, destacando en este proceso las siguientes actividades; el entendimiento del problema, el planteamiento de conjeturas, el tanteo y la aproximación a la solución; que contrasta con la enseñanza de la matemática tradicional, donde un problema se resuelve por el profesor ante los alumnos en pocos minutos, con una estrategia que siempre lleva a la solución, que generalmente es única.

Estas etapas de exploración y reflexión resultan indispensables al quehacer matemático y forman parte de un proceso de búsqueda de conocimientos, que debiera ser reproducido en el ambiente escolar.

Se pretende de esta manera, convertir el salón de clase en un espacio de actividad dinámica, de trabajo en grupos pequeños, donde se aliente a los estudiantes a discutir, confrontar y expresar sus ideas matemáticas, en primera instancia utilizando su propio lenguaje, hasta el uso de lenguajes matemáticos apropiados.

Específicamente en este trabajo, se sugiere que para que los conceptos y métodos tengan sentido y sean útiles a los alumnos,

---

de aprendizaje el principio de la dialéctica que establece que la contradicción es la base del desarrollo, es decir, la situación problémica deberá ser creada de tal manera que provoque un conflicto en el alumno y que a través de la solución de tal conflicto, este de el salto del conocimiento que posee al conocimiento que se desea enseñar.

deberán ser presentados en relación con una situación concreta, con un problema real que requiera solución, donde lo que interese sea esta última y, sólo en segundo término, la formalización del concepto matemático.

Este enfoque metodológico, que asume la resolución de problemas como eje fundamental para la enseñanza de la matemática, tiene su sustento en una "concepción epistemológica que reconoce una base material a la génesis del conocimiento matemático, confiere un carácter constructivo y recursivo a su desarrollo y asigna a los objetos una naturaleza concreta en el plano simbólico[23]".

Por todo lo anteriormente citado pensamos que esta propuesta metodológica se acerca más a los propósitos que se pretenden alcanzar en el nivel medio superior; a los que ya se ha hecho alusión en la sección II.4.

II.6 LA COMPUTADORA Y LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

Una consecuencia del desarrollo tecnológico es que, en la actualidad resulta cada vez más fácil tener acceso a un equipo de cómputo, debido a que cada vez se construyen equipos de menor volumen y mayor capacidad, pero sobre todo, de menor costo, lo que hace de la computadora un elemento común en las empresas, en las instituciones educativas y aún en muchos hogares.

La presencia de la computadora en las actividades productivas, comerciales, financieras, etc., plantea a la escuela, en primer término, la exigencia de preparar individuos que la operen, lo cual

---

[23] **cfr. Martínez Sánchez, Jorge (compilador)., Lecturas en teorías del aprendizaje., Sección Matemática Educativa., CINVESTAV-IPN., Diciembre-1979., pp. 63-75. o bien:**

Moreno Armenta, Luis y Waldegg, Guillermina., Constructivismo y Educación Matemática., Educación Matemática., Volumen IV., No. 2., México D.F., Agosto-1992., pp. 9-12.

se traduce en la necesidad de incorporar cursos a los planes de estudios de las escuelas cuyo propósito sea la capacitación de el manejo de dicho recurso tecnológico.

Este requerimiento constituye uno de los elementos que propicia que la computadora entre en las instituciones educativas; aunque tal vez la mayor motivación provenga de querer encontrar formas de incorporar la computadora a los procesos de enseñanza y aprendizaje con la pretención de mejorarlos.

En este sentido, buscar opciones que incluyan el uso de la computadora en el terreno educativo, en particular en la enseñanza de la matemática es una tarea de los investigadores y debiera ser una preocupación de las instituciones educativas.

USOS DE LA COMPUTADORA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

Pese a que actualmente la computadora es empleada en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, es importante señalar que ésta fue creada sin pensar que sería utilizada para estos fines y su uso, en la mayoría de las ocasiones, tiene que ver con la adaptación de paquetes y lenguajes que se elaboraron con otros propósitos. Gran parte de los paquetes matemáticos, son versiones computacionales de los libros de texto, con muchas ventajas sobre los textos tradicionales, pero carentes de una propuesta metodológica concreta para ser utilizados en educación matemática. Las hojas electrónicas, diseñadas como potentes herramientas para procesamiento de datos, tampoco incluyen una propuesta metodológica específica de enseñanza. Los lenguajes computacionales, objetos de estudio en algunas escuelas, permiten programar la computadora para que resuelva determinado tipo de problemas matemáticos; pueden usarse para enseñar matemáticas, aunque no han sido estructurados para ello.

Sin embargo, las posibilidades de aprovechar al máximo las potencialidades que la computadora tiene en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, será mayor en la medida en que los lenguajes y la paquetería se elaboren pensando exclusivamente en su uso educativo.

Independientemente de que en la actualidad se trabaje en la dirección anterior o no, lo cierto es que hoy se cuenta con software que puede ser empleado como auxiliar en los cursos de matemáticas, por ejemplo; el Calculus, el Calcula, el Math Cad, el derive, el Graphics Calculus, etc.

Es importante señalar que para decidir la forma de uso que se le dará a la computadora en la enseñanza de la matemática, se deben considerar una serie de factores, a saber; el conocimiento de cómo utilizar la computadora como apoyo en los cursos de matemáticas, el diseño de estrategias de enseñanza que precisen el uso de la computadora para su ejecución, contar con software que puede ser utilizado en el curso, disponer del equipo de cómputo necesario, y seguramente, otros más.

En particular los elementos que se consideran para incluir el uso de la computadora como un auxiliar en la propuesta metodológica elaborada para el desarrollo del curso de cálculo diferencial, fueron:

a) La conveniencia de liberar al alumno de la necesidad de realizar cálculos laborioso, que se requieren en el curso.

Apoyado esto en la opinión que al respecto, es resumida por Boltiánski en los siguientes términos:

"...Los problemas se resuelven de manera más efectiva, la información necesaria se obtiene mas cómodamente, más rápido, con menor gasto de energía, con menor cansancio; como resultado se logra evitar la ejecución de un gran número de operaciones monótonas y extenuantes que producen cansancio, irritación, dispersión de la atención y pérdida de interés[24]."

b) La existencia en el mercado de una gran cantidad de software que puede ser utilizado como apoyo en el curso de cálculo diferencial. De entre estos paquetes se han seleccionado tres: "Calcula", "Graphics Calculus" y "Calculus". Estos se han considerado convenientes pues su manejo no exige al alumno experiencias computacionales previas, son de bajo costo y el alumno puede disponer de una copia de cada paquete con sólo tener un disco flexible.

c) Las características del equipo de cómputo necesario. En este caso se requiere de un centro de cómputo dotado mínimo de computadoras modelo 286 sin disco duro. Estos centros existen en un número cada vez mayor de preparatorias, en particular la escuela donde se ha realizado este trabajo cuenta con uno.

En el diseño del curso propuesto se ha contemplado el uso de la computadora como pizarrón electrónico[25], lo cual ha significado, específicamente en este trabajo:

i) La utilización del software matemático "Calcula", "Calculus" y "Graphics Calculus", con el propósito particular de

---

[24] V. G. Boltiánski y V. V, Rubstóv., Problemas Psicológico-Pedagógicos del diseño de un sistema de juegos computarizados para el desarrollo., Traducido del Ruso por M.C. Luis Nabor Alejo Armenta., UAS., Sinaloa, México., 1990., pp. 2-4.

[25] Por supuesto que existen una gran cantidad de usos que se le pueden dar a la computadora en el campo educativo y en particular en la enseñanza de las matemáticas.

Una clasificación exhaustiva acerca de los diversos usos de la computadora en el campo de la educación, puede verse:

"Análisis de la educación matemática y su influencia en el desarrollo científico y tecnológico de México" tesis de licenciatura en matemáticas aplicadas y computación. Alicia Avalos Caudillo. Capítulo 4, páginas 127-133, México D.F. 1991

O bien para una clasificación sobre los distintos usos de la computadora en educación matemática, puede consultarse:

"Las microcomputadoras en el aula e investigación en educación matemática", Fernando Hitt Espinoza, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN, México, páginas 3-22.

que el alumno pueda escribir, elaborar gráficas, hacer cálculos, etc., tal como se realiza en una clase normal en el aula, pero con las ventajas que brinda la computadora.

ii) El diseño de las actividades que requieren el uso de la computadora para su ejecución. En este diseño se ha integrado a las actividades el uso del software mencionado con la intención de liberar al alumno de cálculos laboriosos y utilizar el tiempo invertido en ellos para reflexionar sobre los resultados obtenidos y los conceptos involucrados en los procesos de resolución de problemas.

CAPITULO III.
EL PROYECTO

III.1 EL PROBLEMA.

El problema que actualmente se enfrenta a nivel nacional, en la enseñanza de la matemática del nivel medio superior es multifacético y complejo, sus rasgos más visibles son: i) el alto índice de alumnos reprobados que se tienen al final de un curso, ii) el bajo índice terminal de las instituciones educativas, iii) las condiciones en las que un alumno reprobado aborda cursos posteriores de matemáticas, iv) las repercusiones que se tienen en las materias cuyo estudio requiere el conocimiento y manejo de ciertos contenidos matemáticos tales como física, química, etc., v) los antecedentes académicos con los que el alumno ingresa a un curso de matemáticas, vi) la formación académica de los profesores, vii) las condiciones laborales del docente, viii) la diversidad del bachillerato, y seguramente otros más.

Las experiencias vividas en el aula como profesor de matemáticas, en particular en la enseñanza del cálculo diferencial en el C.B.T.i.s. No. 206 de Hermosillo, Sonora, así como los resultados obtenidos en los cursos de matemáticas impartidos en los últimos años en dicha institución[1] y los datos recientes publicados por la SEP en sus estadísticas estatales me han permitido observar algunos de los factores de la problemática en la enseñanza de la matemática mencionados en el párrafo anterior, a saber:

Aproximadamente un 50% de los alumnos que participan en un curso de matemáticas lo reprueban, lo cual, por si solo, es un problema grave, que se hace mayor al sumarle las repercusiones que la reprobación tiene sobre las materias vecinas en la retícula (horizontal o verticalmente). Como consecuencia de lo anterior y de la aplicación del reglamento escolar, se tiene que, de 600 alumnos que ingresan en promedio por generación,

---

[1] **Estos datos fueron recabados de las listas "REVA", de Agosto de 1986 a Agosto de 1992. Estas listas las entrega el docente al final del curso a la oficina de Control Escolar del plantel.**

sólo egresan alrededor de 280[2]. El 95% de las bajas tiene como causa la reprobación y como regla general se incluye entre las materias reprobadas cuando menos un curso de matemáticas y de manera frecuente una materia de física o química[3]. Si a esto agregamos que la aprobación no garantiza un buen desempeño en cursos posteriores de matemáticas o materias afines; se tiene entonces un panorama general del rendimiento escolar en matemáticas y las repercusiones que éste tiene en la deserción escolar y en la posibilidad de proseguir estudios superiores.

Como docente, pienso que un factor que influye de manera significativa en el aprendizaje es el método utilizado para enseñar; en este sentido la búsqueda de formas alternativas de enseñanza, que ayuden a mejorar los resultados que se obtienen en los cursos de matemáticas, se convierte en una actividad especialmente importante y en un reto para los profesores.

El problema que se aborda en este trabajo, se refiere a uno de los aspectos de la enseñanza del cálculo en el bachillerato, específicamente a la metodología con la que se enseña.

Se ha partido del supuesto de que el desarrollo de las habilidades para resolver problemas con la herramienta del cálculo es uno de los principales propósitos del curso en el bachillerato.

Se ha considerado además que la metodología con la que se enseña tradicionalmente el cálculo no es la más apropiada para el logro de este propósito; por esta razón se propone una metodología diferente y se pone a prueba en dos grupos de características afines.

Es decir, se tiene como hipótesis de trabajo que la enseñanza a través de problemas del cálculo, apoyado por una serie de experiencias de aprendizaje sistematizados con ayuda de la computadora "nueva propuesta" o "no tradicional" arroja mejores resultados que el método tradicional.

---

[2] Este dato fue recabado al confrontar las listas de los alumnos que ingresan en una generación contra los que egresan. De seis generaciones anteriores a Agosto de 1992.

[3] Este dato se obtuvo al hacer una investigación de las causas que originan las bajas de alumnos, en el plantel.

III.2 DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO.

III.2.1 OBJETIVOS.

Los propósitos del presente trabajo son los siguientes:

1) Diseñar una nueva propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo diferencial en el nivel medio superior, con apoyo de la computadora.

2). Contrastar experimentalmente la forma tradicional de enseñanza con la nueva propuesta.

III.2.2 EL PROYECTO.

El proyecto fue pensado para realizarse en 4 etapas:

1) Formulación.
2) Elaboración de materiales.
3) Operación.
4) Análisis de datos y conclusiones.

1. FORMULACIÓN.

Esta etapa incluyó la elaboración del proyecto, así como la presentación y aprobación del mismo.

En el proyecto se contempló la planeación y realización de las siguientes actividades:

a) Elaboración del examen para diagnosticar el nivel de dominio de los prerrequisitos matemáticos establecidos en el curso de cálculo diferencial y su aplicación.

b) Selección de los grupos en los cuales se impartirían los cursos.

c) Revisión de libros de texto de cálculo diferencial y materiales de apoyo ya existentes.

d) Selección de las notas a utilizarse en el curso tradicional.

e) Revisión del curso de cálculo diferencial realizado bajo la concepción de la enseñanza problémica[4], así como, software sobre cálculo diferencial y material teórico sobre el uso de la computadora en el proceso de enseñanza.

f) Elaboración de los materiales de apoyo para el curso no tradicional.

g) Impartición de ambos cursos.

h) Aplicación de los instrumentos de evaluación.

i) Procesamiento y análisis de los resultados.

j) Escritura de conclusiones.

2. ELABORACIÓN DE MATERIALES.

i) Elaboración de dos exámenes de diagnóstico.

El primero de ellos intenta evaluar los conocimientos matemáticos mínimos de aritmética, álgebra y geometría que se requieren en un curso de cálculo, este instrumento contiene en total 25 reactivos de opción múltiple; ocho son de aritmética, nueve de álgebra y ocho de geometría.

En aritmética se pretende medir el nivel con que realizan operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números enteros y racionales; en álgebra se pretenden evaluar los siguientes temas: suma, producto y factorización de expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita; en geometría se pretende observar el nivel de conocimientos adquiridos en

[4] **cfr. Ávila Godoy, Ramiro, et al., Tesis de Maestría., Sección de Matemática Educativa., CINVESTAV-IPN., México D.F., 1988.**

los temas de áreas, perímetros, volúmenes, teorema de pitágoras y la recta (ver anexo 1).

El segundo examen diagnóstico consta de cuatro problemas sencillos que involucran conocimientos de aritmética y geometría, en cada problema se incluyen una serie de preguntas abiertas (ver anexo 1) que tienen que ver con alguna de las siguientes habilidades necesarias en la resolución de problemas:

- Habilidad para comprender el problema.
- Habilidad para representar la información del problema en un dibujo.
- Habilidad para detectar relaciones entre las cantidades involucradas en el problema.
- Habilidad para encontrar estrategias de resolución del problema.
- Evaluación de los resultados encontrados.

ii) Elaboración de notas para el curso no tradicional[5]. En este curso se respetan los objetivos contemplados en el programa oficial y también los contenidos matemáticos, aunque éstos aparecen en otro orden.

Las notas se organizaron en cuatro módulos, cuyo contenido se puede describir brevemente como sigue:

En el primer módulo se abordan problemas de optimización que se modelan con funciones que pueden analizarse con herramientas aritmética, algebraica y geométrica; tales problemas han sido seleccionados con el propósito de aproximarse a los métodos y los algoritmos del cálculo, a la vez que se intenta mostrar las limitaciones que tiene el precálculo como herramienta para resolver problemas de optimización.

En el segundo módulo se proponen actividades con la finalidad de poder encontrar un método para obtener con exactitud el punto más alto

[5] **En el contexto de este trabajo se entiende por curso "no tradicional", un curso estructurado en base a problemas, donde los conceptos van apareciendo conforme se requieren para resolverlo. Aquí el papel fundamental del maestro es el de conducir el curso a través de situaciones de aprendizaje previamente diseñadas, el alumno desempeña un rol más activo. En cada actividad de aprendizaje hay un primer momento en el que se trabaja en equipo para resolver un problema y posteriormente se discuten en el grupo las diferentes estrategias de solución seguidas por cada equipo; como resultado final se espera obtener la solución o soluciones del problema y se intenta explicitar los conceptos involucrados.**

y más bajo de la gráfica de una función. A partir de calcular la pendiente de ciertas rectas secantes, se intenta obtener la recta tangente a una curva en un punto dado, culminando con el trabajo algebraico realizado por Fermat para calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto de la misma. Por último en este módulo se obtienen seis reglas elementales para obtener la derivada de funciones algebraicas.

En el tercer módulo se plantean problemas de optimización (que se modelan con funciones algebraicas) con la misma dinámica de los módulos uno y dos pero con la finalidad de aplicar la herramienta matemática descubierta por el alumno en el módulo anterior.

En el cuarto módulo se plantean más problemas de optimización con el propósito de propiciar nuevas reglas de derivación y extender así el estudio de la derivada para otro tipo de funciones, en particular de las trigonométricas.

iii) Elaboración de las actividades de enseñanza para el curso no tradicional con la ayuda de la computadora. Estas actividades están diseñadas con las mismas ideas empleadas en los cuatro módulos, tratando de usar el potencial de la computadora como herramienta de cálculo y graficador.

iv) Notas para el curso tradicional[6]. Originalmente se pensó seleccionar estas notas entre las existentes en el plantel donde se realizó este trabajo, pero considerando las deficiencias que presentaban se decidió elaborar una nueva versión de notas para este curso, respetando los propósitos, los contenidos y la secuencia de los temas (funciones, límites, continuidad, concepto de derivada, teoremas y fórmulas de derivación y problemas de aplicación), contemplados en el programa oficial.

v) Elaboración de instrumentos de evaluación para aplicarse al final de los cursos. Se escribieron tres exámenes diferentes:

---

[6] En este trabajo se entiende por "curso tradicional" un curso organizado respetando la secuencia más común de temas (funciones, límites, continuidad, el concepto de derivada, teoremas y fórmulas para derivar, aplicaciones), apoyado fundamentalmente en la exposición y donde la secuencia de enseñanza es conceptos-aplicación.

- Un examen de conocimiento matemático y uno sobre resolución de problemas, de características similares a las descritas en el inciso i (ver anexo 2).

- Un examen para utilizarse como evaluación sumaria de ambos cursos, éste consta de 14 reactivos de opción múltiple y 7 reactivos de respuesta abierta, está diseñado para evaluar los temas principales de los cursos (ver anexo 2).

3. OPERACIÓN.

Los dos grupos participantes en el experimento fueron seleccionados después de aplicar el examen diagnóstico a los cuatro grupos de matemáticas, en los que el profesor a cargo del proyecto impartía la materia de matemáticas IV. La idea aquí fue que los resultados del examen y la historia académica en las materias de matemáticas del bachillerato en los grupos, permitieran seleccionar los dos que resultaran más homogéneos; tratando de disminuir de esta manera la posibilidad de que en la contrastación de los resultados finales, las diferencias posibles se deban a los grupos y no a los cursos.

Para que la variable profesor altere los resultados lo menos posible, se decidió que ambos cursos sean impartidos por el mismo maestro. Los dos cursos iniciaron de manera simultánea, después de haber concluido con el programa de Geometría Analítica, aproximadamente a la mitad del semestre IV (Abril de 1993).

Los cursos se impartieron con metodologías diferentes. En el curso tradicional, como es costumbre, se enfatiza la exposición de los temas por el maestro, la secuencia de enseñanza es conceptos-aplicación, y la discusión con los estudiantes gira en torno a los conceptos y su correcta aplicación; mientras el curso no tradicional enfatiza la participación activa de los estudiantes en clase, la secuencia de enseñanza es problemas-conceptos, y la discusión de los estudiantes gira alrededor de las estrategias de resolución de problemas.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

A partir de la evaluación realizada a lo largo del curso, se pretenden establecer las ventajas y desventajas que ofrece el curso no tradicional sobre el tradicional. Esto significa en la práctica, el procesamiento y la comparación de los datos obtenidos de los instrumentos aplicados al principio y al final del curso, con la intención de establecer:

a) En qué grupo hay mas avances, si los hay, con respecto al conocimiento matemático que se dominaba al inicio del trabajo y el que se tiene al final.

b) Cuáles son las diferencias entre las habilidades matemáticas que muestran los grupos en las evaluaciones finales, cómo pueden interpretarse esas diferencias y que conclusiones pueden obtenerse de esa interpretación.

c) Cuál de los dos grupos tiene un mejor desempeño en el curso de cálculo diferencial, y en qué sentido puede responderse este cuestionamiento.

III.3 EL EXPERIMENTO

El montaje del experimento inicia en el mes de abril de 1993 al inicio del tercer y último período parcial del semestre febrero-junio de 1993 y su operación se lleva a cabo de la manera siguiente:

1. La aplicación del examen diagnóstico. Este se aplicó a los cuatro grupos que en ese momento iniciaban el curso de cálculo diferencial, con la finalidad de reunir más elementos que permitieran seleccionar los dos grupos en los cuales se impartirían los cursos.

2. Selección de los grupos. Después de haber aplicado el diagnóstico a cuatro grupos y de haber analizado su historial académico en los cursos anteriores de matemáticas (matemáticas I, II y III), se seleccionaron los dos grupos considerados más homogéneos según estas dos referencias.

Respetando lo anterior por considerar que los resultados obtenidos fueron muy bajos, se pensó en la selección de los dos grupos que obtuvieron más aciertos en el examen de conocimiento matemático y en el examen de resolución de problemas por ser los que más cerca se encontraban de reunir los prerrequisitos para un curso de cálculo (mismos que están presentes en los diagnósticos). Por otro lado se comparó el comportamiento (mejores calificaciones y mayor índice de aprobados) de los grupos en los cursos matemáticas I, II y III, observando que los propuestos mostraron un mejor comportamiento en este aspecto. Posteriormente se realizó un análisis estadístico por estratos para determinar que tan equivalentes eran los dos grupos seleccionados.

Dada la urgencia de seleccionar los grupos inmediatamente después de aplicados los diagnósticos, se hizo un procesamiento rápido de los datos para tomar la decisión, aunque posteriormente se les dio un tratamiento estadístico más riguroso (los detalles al respecto pueden verse en la sección IV.3).

3. Con los criterios antes mencionados, resultaron seleccionados los grupos C y F; la asignación de los cursos "no tradicional" y "tradicional" a estos grupos se llevo a cabo por azar; obteniéndose que el curso tradicional se impartiría al grupo F, y el no tradicional al grupo C.

4. Una vez revisados los libros de cálculo y los materiales existentes para el curso tradicional se decidió no utilizar tales materiales, lo que implicó la elaboración de notas para este curso, considerando para esto, las ideas expuestas en los libros "Lecciones de Cálculo 1" de Cruse/Lehman y el "Calculus" de Morris Kline, obteniéndose como productos:

a) Un módulo para el tema de funciones.

b) Un módulo para el tema de límites y derivadas.

c) Un módulo para el tema de aplicaciones (Parte I).

d) Un módulo para el tema de aplicaciones (Parte II).

5. Para la impartición del curso propuesta (curso no tradicional), se elaboró material de apoyo producto de la revisión del curso ya existente obteniendo como producto:

a) Módulo I. Un acercamiento a los problemas de máximos y mínimos.

b) Módulo II. Trazo de rectas secantes para obtener la recta tangente.

c) Módulo III. Resolviendo problemas de máximos y mínimos.

d) Módulo IV. Mas problemas de máximos y mínimos.

6. Para el diseño de las actividades de enseñanza con la computadora para el curso no tradicional, una vez que se revisó material teórico sobre el uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje y se revisaron los paquetes matemáticos; Calcula, Calculus, derive, G.C. gráficos, Math Cad, entre otros se obtuvieron los siguientes productos:

a) Actividades de aprendizaje para el módulo I sobre resolución de problemas de máximos y mínimos utilizando el paquete calcula.

b) Actividades de aprendizaje para el módulo II utilizando el paquete g.c. gráficos:

- Sobre graficación de funciones, trazo de secantes y cálculo de la pendiente de la secante a una curva.

- Sobre el proceso Geométrico-Aritmético para determinar la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva.

c) Diseño de actividades de aprendizaje para el módulo III y IV sobre la resolución de problemas de máximos y mínimos por el método gráfico utilizando el paquete Calculus.

7. El montaje del experimento se concluye al término del curso, con la aplicación de los siguientes instrumentos: i) examen de conocimiento matemático, ii) examen sobre resolución de problemas, iii) examen de evaluación para los cursos de cálculo.

CAPÍTULO IV.
ANÁLISIS DE LOS DATOS Y CONCLUSIONES.

IV.1 INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se reportan los resultados obtenidos en el trabajo, se interpretan y se desprenden las conclusiones finales. Así mismo se intenta acotar el carácter de estas conclusiones, las limitaciones presentes en el trabajo y algunas recomendaciones para mejorar la práctica docente y para la realización de otros trabajos que pudieran emprenderse en el futuro sobre el mismo tema.

El capítulo consta de seis secciones incluyendo esta primera que se ha llamado Introducción, cuyo contenido describimos a continuación en forma suscinta:

La segunda está dedicada a describir las condiciones iniciales del montaje, las características de los grupos donde se impartieron los cursos, los criterios con que se seleccionaron dichos grupos. Además se operativizan las hipótesis sometidas a prueba.

La tercera contiene un primer procesamiento de los datos en los que se ha basado la equivalencia de los grupos. Estos datos son las calificaciones obtenidas por los estudiantes en los tres cursos previos de matemáticas y los que provienen de la aplicación de los exámenes diagnósticos.

En la cuarta se lleva a cabo un segundo procesamiento de los datos que se obtuvieron de los exámenes diagnósticos.

En la quinta se exhiben los datos extraídos de los instrumentos de evaluación aplicados al final del curso y se someten a pruebas estadísticas a fin de decidir sobre las hipótesis planteadas.

En la sexta se dan las conclusiones finales del trabajo, que se desprenden del tratamiento estadístico, se comentan los resultados obtenidos, se señalan algunas limitaciones observadas y se hacen una serie de recomendaciones para quien estuviera interesado en continuar con esta línea de trabajo.

IV.2 CONDICIONES INICIALES DE LOS GRUPOS.

Cuando se concluyeron los preparativos para la impartición de los cursos, una consideración fundamental fue aplicar los dos tratamientos en dos grupos de características lo más similares posibles, se intentó a la vez que la impartición de los cursos se hicieran en condiciones equitativas, con la finalidad de que la aparición de diferencias en el desempeño final pudiera atribuirse lo más posible al efecto de las metodologías de enseñanza probadas y no a otros factores.

Los dos grupos escogidos presentan las siguientes características:

a) Ambos pertenecen a la misma especialidad técnica (computación), cursaban las mismas materias en el mismo turno y tenían cargas similares de trabajo, así mismo los espacios físicos que utilizaron a lo largo de la impartición de los cursos fueron similares para ambos.

b) El número de alumnos que aprobaron los cursos de matemáticas I, II y III, así como los promedios de estos cursos son aproximados (ver sección siguiente).

c) Su desempeño en los exámenes diagnósticos fue parecido (ver sección siguiente).

d) Considerando que los diagnósticos definen los prerrequisitos para el cálculo, los grupos seleccionados son los

imparte el curso tradicional.

que en mejor medida los cumplen.

Adicionalmente se tomaron las precauciones siguientes en el transcurso del tratamiento:

e) Como una manera de controlar la variable profesor, ambos cursos quedaron bajo la responsabilidad del mismo maestro.

f) En ambos cursos los estudiantes contaron con notas de clase entregadas con anticipación.

IV.2.1. PLANTEAMIENTO DE LAS HIPÓTESIS.

Aunque la hipótesis general del trabajo es que el curso propuesta mejora el aprendizaje del cálculo, operativamente esto se ha traducido en la formulación de las siguientes hipótesis más específicas:

1) Los alumnos que son sometidos al curso no tradicional, adquieren un mayor dominio de sus conocimientos matemáticos de aritmética, álgebra y geometría que aquellos alumnos que toman el curso llamado tradicional.

2) Los estudiantes que son sometidos al curso no tradicional desarrollan más sus habilidades para resolver problemas que aquellos alumnos a los que se les imparte el curso tradicional.

3) Los alumnos que toman el curso no tradicional muestran un mayor dominio en los temas del cálculo diferencial que aquellos alumnos a los que se les imparte el curso tradicional.

IV.3 LA SELECCIÓN DE LOS GRUPOS.

En este apartado se muestra el procesamiento de los datos tomados al principio de los cursos, en los cuales se basó la selección de los dos grupos de trabajo.

IV.3.1. HISTORIAL ACADÉMICO.

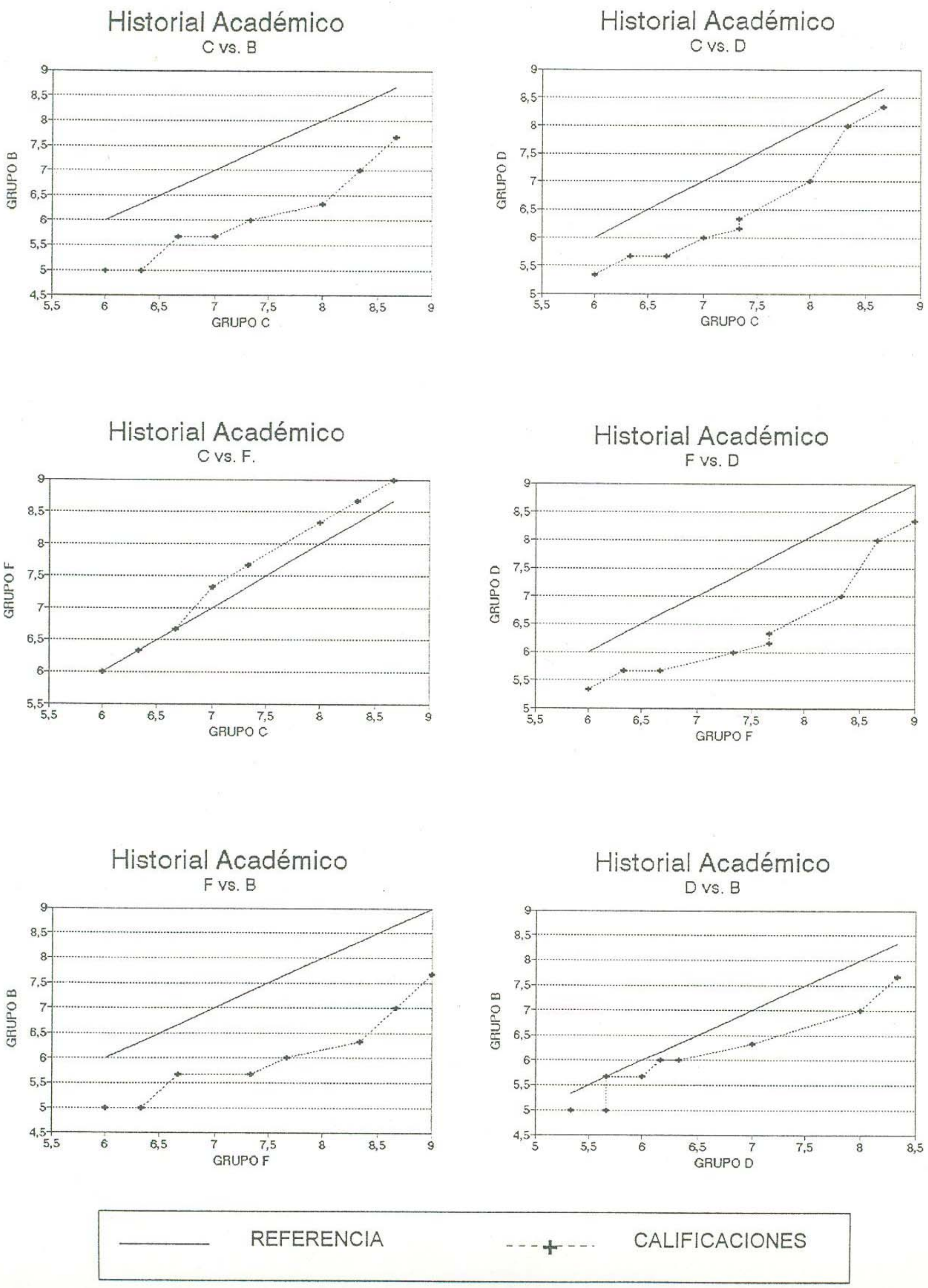
En el presente trabajo, se entiende por historial académico el registro de las calificaciones finales obtenidas por los estudiantes de los cuatro grupos B, C, D y F (en los que el maestro a cargo del experimento impartía clase) en los cursos de Matemáticas I, II y III . Un concentrado de estas calificaciones se muestra en la tabla siguiente:

	APROBADOS						PROMEDIOS Y DESVIACIONES							
GPO	M I		M II		M III		M I		M II		M III		GLOBALES	
	% A	T	% A	T	% A	T	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ_t	σ_t
B	43	49	33	49	69	49	5.88	1.29	5.61	1.02	6.88	1.47	6.12	1.02
C	88	33	94	33	88	33	7.2	1.41	7.1	1.19	7.5	1.46	7.3	1.11
D	59	32	66	32	81	32	6.5	1.46	6.6	1.66	6.8	1.27	6.6	1.28
F	91	34	76	34	82	34	8.3	1.66	6.8	1.39	7.4	1.37	7.5	1.16

% A: Porcentaje de alumnos aprobados.
T: Total de estudiantes por grupo.
μ: Promedio en cada curso
σ: Desviación estandar en cada curso.
μ_t : Promedio de los tres cursos
σ_t : Desviación estandar en los tres cursos.

La tabla anterior muestra que los grupos C y F son los más semejantes en lo que respecta a: porcentaje de alumnos aprobados en el curso M I, promedio de calificaciones del curso M III, promedio de calificaciones en los tres cursos y la desviación estándar global; en los otros posibles indicadores, los resultados obtenidos por el grupo C son los más cercanos al grupo F, que resulta ser el de mejor historial académico, con un promedio global de 7.5. Para complementar lo anterior, se han tomado las calificaciones promedio en los tres cursos de cada alumno y se han clasificado en percentiles para construir gráficas q-q que permitan comparar por parejas los cuatro grupos.

Las seis gráficas resultantes se muestran a continuación.



Estas gráficas muestran claramente que los grupos más parecidos resultan el C y el F; con una ligera ventaja del grupo F en este aspecto.

IV.3.2. EXAMEN DIAGNÓSTICO.

Como ya se mencionó este instrumento consta de dos partes, un examen de conocimiento matemático (que abreviaremos CM 1) de 25 reactivos de opción múltiple y otro sobre resolución de problemas (que abreviaremos RP 1) con 12 preguntas de respuesta abierta. Como un primer acercamiento a los resultados arrojados por el diagnóstico, se procedió a su revisión con el mismo criterio en ambos exámenes; asignando 1 punto si la respuesta fue correcta y 0 si fue incorrecta.

En la siguiente tabla se muestran los promedios obtenidos por los grupos en el examen diagnóstico.

GRUPO	PROMEDIO CM 1	PROMEDIO RP 1
B	8.0	2.1
C	8.2	2.7
D	8.2	2.4
F	8.8	3.6

En la columna CM 1, en principio no se observan grandes diferencias, hay un nivel bajo de respuestas correctas (entre 8 y 9 de un máximo de 25) y el grupo F aparece como el de mejor desempeño. Mientras en la columna RP 1 se presentan diferencias más notorias entre los grupos, aunque se mantiene un bajo nivel de respuestas correctas (entre 2 y 4 de un total de 12); el grupo F sigue siendo el mejor, seguido por el C.

Considerando que este nivel de análisis no aportaba elementos suficientes para diferenciar los grupos, se optó por basarse en la selección que se perfila del historial académico. Un segundo análisis de los datos arrojados por el diagnóstico se hace más adelante, esperando recabar otros elementos que avalen la equivalencia de los grupos.

En este segundo análisis, las puntuaciones obtenidas se clasificaron por estratos y se sometieron a prueba estadística mediante el estadístico de prueba ji cuadrada usado para contrastar la homogeneidad de grupos.

IV.3.3. COMPARACIÓN POR ESTRATOS, DE LOS ACIERTOS EN EL DIAGNÓSTICO DE LOS GRUPOS C Y F.

La prueba estadística se hizo bajo las siguientes consideraciones:

a) El análisis se basó en los supuestos y procedimientos propuestos por Robert V. Hogg y Johannes Ledolter en el libro Applied statistics for engineers and physical scientists, segunda edición, página 248.

b) Se aplicó para aceptar o rechazar la hipótesis siguiente:

"El grupo C es equivalente al grupo F"

Esta hipótesis se traduce en las hipótesis nula y alterna siguientes:

H_o : $p_{i1} = p_{i2}$, donde $i = 1, \ldots, n$

H_a : $p_{i1} \neq p_{i2}$, para algún i.

donde p_{ij} representa la proporción de alumnos del grupo "j" clasificados en el estrato "i".

c) Las pruebas se hicieron con un nivel de significancia $\alpha = 0.1$.

IV.3.3.1 COMPARACIÓN DE LOS GRUPOS EN EL EXAMEN CM 1.

En este examen se consideraron los estratos siguientes: I de 0 a 5 reactivos correctos, II de 6 a 10, III de 11 a 15, IV de 16 a 20, y V de 21 a 25. La tabla de contingencia con el reordenamiento de estratos por necesidades de la prueba es:

	C		F		
ESTRATO	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
A	6	3.9402985	2	4.0597015	8
B	16	18.223881	21	18.776119	37
C	11	10.8358209	11	11.1641791	22
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 2.66134337$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos C y F, pueden considerarse equivalentes.**

IV.3.3.2. COMPARACIÓN DE LOS GRUPOS EN EL EXAMEN RP 1.

En este examen las puntuaciones se clasificaron en los estratos siguientes: I de 0 a 3 reactivos correctos, II de 4 a 6, III de 7 a 9, y IV de 10 a 12. La tabla de contingencia con el reordenamiento de estratos por necesidades de la prueba es:

	C		F		
ESTRATO	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
A	24	22.7	22	23.3	46
B	8	8.87	10	9.13	18
C	1	1.48	2	1.52	3
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 0.63$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos C y F, pueden considerarse equivalentes.**

Los grupos C y F han sido seleccionados a partir de los análisis mostrados hasta aquí, no obstante se ha considerado que la asignación de puntajes en base a "correcto/incorrecto", podría diluir las características de los instrumentos de evaluación; por ello se consideró necesario hacer posteriormente un análisis estadístico más acorde al diseño de los reactivos. Este análisis se reporta en la sección siguiente.

IV.4 LA EQUIVALENCIA DE LOS GRUPOS ATENDIENDO AL TIPO DE REACTIVOS.

En este apartado se pretende apoyar la idea de la equivalencia entre los grupos seleccionados, analizando los resultados de los diagnósticos desde un punto de vista mas detallado al que se utilizó en el apartado anterior.

Con respecto al examen CM 1, se hizo una prueba de proporciones, tanto de los aciertos generales por grupo, como de los aciertos obtenidos por cada grupo en cada una de las áreas contenidas en el examen (aritmética, álgebra y geometría). Mientras que el examen RM 1, dada la naturaleza distinta de las preguntas, se sometió a prueba reactivo por reactivo, considerando los diferentes niveles de respuesta dados por los estudiantes.

IV.4.1 COMPARACIÓN DE LAS PROPORCIONES DE ACIERTOS GLOBALES Y POR AREAS DE LOS GRUPOS C Y F, EN EL EXAMEN CM 1.

Este examen constaba de 25 reactivos, 8 de aritmética, 9 de álgebra y 8 de geometría; fue presentado por 33 estudiantes del grupo C y 34 del F. Las proporciones de aciertos pueden verse en la siguiente tabla:

GRUPO	ARITMÉTICA	ALGEBRA	GEOMETRÍA	GLOBAL
C	77/264=0.29	123/297=0.41	85/264=0.32	285/825=0.35
F	110/272=0.40	121/306=0.40	108/272=0.4	339/850=0.40

Los datos observados en esta tabla fueron contrastados columna por columna, empleando una prueba estadística para comparar proporciones.

La hipótesis sometida a prueba para cada columna fue:
"El grupo C es equivalente al grupo F"

Que se traduce en cada caso en hipótesis nula y alterna con la siguiente forma:

$H_o : p_c = p_f$.
$H_a : p_c \neq p_f$.

Se utilizó el estadístico de prueba

$$z = \frac{(p'_1 - p'_2) - (p_1 - p_2)}{[p^* q^* (1/n_1 + 1/n_2)]^{1/2}}; \text{ con } p^* = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \text{ y } q^* = 1 - p^*$$

con un nivel de significancia de 0.1.(ver libro Applied statistics for engineers and physical scientists, de Robert V. Hogg y Johannes Ledolter, segunda edición, página 242).

Los resultados de las cuatro pruebas se muestran a continuación:

GLOBAL.

Se obtuvo un valor $z_c = -2.2585998$ y el valor de $z_{\alpha/2} = 1.645$.

Como $z_c < -z_{\alpha/2}$, la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que **los grupos C y F no son equivalentes en sus proporciones globales de aciertos.**

ARITMÉTICA.

Se obtuvo un valor $z_c = -2.737997$ y el valor de $z_{\alpha/2} = 1.645$.

Como $z_c < -z_{\alpha/2}$, la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que **los grupos C y F no son equivalentes en sus proporciones de aciertos en aritmética.**

ALGEBRA.

Se obtuvo un valor $z_c = 0.2375678$ y el valor de $z_{\alpha/2} = 1.645$.

Como $z_c < z_{\alpha/2}$, la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que **los grupos C y F puede considerarse equivalentes en sus proporciones de aciertos en álgebra.**

GEOMETRÍA.

Se obtuvo un valor $z_c = -1.8105897$ y el valor de $z_{\alpha/2} = 1.645$.

Como $z_c < -z_{\alpha/2}$, la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que **los grupos C y F no son equivalentes en sus proporciones de aciertos en geometría.**

IV.4.2 EXAMEN SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Este examen constaba de cuatro problemas desglosados en doce preguntas abiertas que tienen que ver con alguna de las habilidades necesarias en la resolución de problemas ya descritas en la sección III.2.2, inciso 2). Debido al tipo de preguntas incluidas en este examen, las respuestas dadas por los estudiantes fueron muy diversas, se elaboró una escala ordinal para medir los distintos niveles de respuesta en cada reactivo, esta escala asigna cero al nivel más bajo (no contestó), 9 al nivel más alto (contestó correctamente) y una serie creciente entre 1 y 8 para los niveles intermedios de respuesta.

Para cada uno de los doce reactivos se elaboró una tabla donde se registraron las frecuencias por nivel de respuesta dadas por los estudiantes de cada grupo, (ver anexo) en algunas de estas tablas los niveles fueron reagrupados por las necesidades estadísticas de la prueba, considerándose en el reordenamiento el nivel cualitativo de las respuestas.

La prueba estadística que se utilizó en el análisis de cada uno de los reactivos fue la Ji cuadrada, ésta se aplicó bajo las mismas consideraciones que en el apartado IV.3.3.

El proceso completo de la prueba estadística, reactivo por reactivo, empleado en este examen, se muestra en el anexo. La tabla siguiente muestra un concentrado de los resultados obtenidos en este análisis:

REACTIVO	X^2_c	X^2_α	GL	CONCLUSIÓN
I.1	0.3587807	2.71	1	EQUIVALENTES
I.2	1.0130781	7.78	4	EQUIVALENTES
I.3	7.9124782	7.78	4	NO EQUIVALENTES
I.4	1.5025719	7.78	4	EQUIVALENTES
II.1	0.4018308	4.61	2	EQUIVALENTES
II.2	3.4832055	4.61	2	EQUIVALENTES
II.3	2.958914	4.61	2	EQUIVALENTES
III.1	0.5987345	4.61	2	EQUIVALENTES
III.2	1.2007267	4.61	2	EQUIVALENTES
III.3	4.9504632	7.78	4	EQUIVALENTES
IV.1	0.3366648	2.71	1	EQUIVALENTES
IV.2	2.879896	6.25	3	EQUIVALENTES

Los resultados de la tabla muestran que el grupo C y F son equivalentes en 11 de 12 reactivos, lo que se puede interpretar como que al principio de los cursos no había diferencias estadísticamente significativa en el comportamiento, ante problemas como los mostrados en el examen de resolución de problemas.

A manera de ejemplo, se muestra el proceso ya descrito en los dos reactivos siguientes:

REACTIVO I.2 (Problema 1, reactivo 2).

En este reactivo los niveles de respuesta dadas por los estudiantes de cada grupo fueron:

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Contestó bien y representó bien
8	Contestó bien y no representó
5	Contestó bien y representó mal
4	Representó bien (sin proc. arit.)
3	Contestó mal y representó bien
2	Contestó mal y representó mal
1	Contestó mal y no representó
0	No contestó

Por necesidades estadísticas de la prueba, se reordenaron los niveles de la siguiente manera:

- Nivel I (NI), constituido por el nivel 9.
- Nivel II (NII), formado por los niveles 8, y 5.
- Nivel III (NIII), lo forman los niveles 4, 3 y 2.
- Nivel IV (NIV), constituido por el nivel 1.
- Nivel V (NV), formado por el nivel 0.

La tabla de contingencia utilizada fue:

	C		F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	7	7.880597	9	8.119403	16
NII	5	5.9104478	7	6.0895522	12
NIII	9	8.8656716	9	9.1343284	18
NIV	7	5.9104478	5	6.0895522	12
NV	5	4.4328358	4	4.5671642	9
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 1.0130781$

- Para GL = 4 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 7.78$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo 2.**

REACTIVO II.1 (Problema 2, reactivo 1).

Los niveles obtenidos en este reactivo fueron:

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Bien
1	Mal
0	No contestó

En este caso no fue necesario un reordenamiento de niveles. La tabla de contingencia utilizada fue:

	C		F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	2	1.4776119	1	1.5223881	3
1	23	23.641791	25	24.358209	48
0	8	7.880597	8	8.119403	16
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia y la fórmula (2), se obtiene que; $X^2_c = 0.4018308$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo 5.**

IV.5 CORROBORACIÓN DE HIPÓTESIS.

Con el propósito de contrastar las hipótesis planteadas en la sección IV.2, al final de los cursos se han aplicado tres tipos de exámenes: uno de conocimiento matemático, con estructura y contenido muy similar al CM 1, denominado CM 2; otro de resolución de problemas, cuyo diseño es análogo al RP 1, denominado RP 2 y un tercero que pretende evaluar contenidos propiamente de cálculo, que incluye preguntas abiertas y de opción múltiple, identificado como EF.

Esta sección está dedicada al análisis estadístico de los datos arrojados por la aplicación de estos tres exámenes.

IV.5.1. COMPARACIÓN POR ESTRATOS, DE LOS ACIERTOS EN EL EXAMEN FINAL CM 2 Y RP 2 DE LOS GRUPOS C Y F.

El propósito de esta prueba es observar el comportamiento de los grupos en el aspecto global de estos dos exámenes, por esa razón en ambos instrumentos se emplea el criterio "correcto/incorrecto" para la revisión de los reactivos.

La prueba estadística es del mismo tipo que la utilizada en el apartado IV.3.3.

IV.5.1.1 COMPARACIÓN DE LOS GRUPOS EN EL EXAMEN CM 2.

En este examen se consideraron los estratos siguientes: I de 0 a 5 reactivos correctos, II de 6 a 10, III de 11 a 15, IV de 16 a 20, y V de 21 a 25. La tabla de contingencia con el reordenamiento de estratos, por necesidades de la prueba es:

	C		F		
ESTRATO	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
A	1	3.0	5	3.0	6
B	12	10.0	9	11.0	21
C	14	15.0	17	16.0	31
D	6	4.0	3	4.6	9
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 4.4$

- Para GL = 3 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 6.3$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos C y F, pueden considerarse equivalentes.**

IV.5.1.2. COMPARACIÓN DE LOS GRUPOS EN EL EXAMEN RP 2.

En este examen las puntuaciones se clasificaron en los estratos siguientes: I de 0 a 2 reactivos correctos, II de 3 a 5, III de 6 a 8, IV de 9 a 11, V de 12 a 14, VI de 15 a 16. La tabla de contingencia utilizada en la prueba es:

	C		F		
ESTRATO	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
A	10	14.0	18	14.0	28
B	11	11.0	11	11.0	22
C	10	6.4	3	6.6	13
D	2	2.0	2	2.0	4
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se

obtiene que; $X^2_c = 6.04$

- Para GL = 3 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 6.3$

- Como $X^2_c \le X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos C y F, pueden considerarse equivalentes.**

Considerado que la asignación de puntajes en base a "correcto/incorrecto", podría diluir las características de los instrumentos de evaluación; por ello se consideró necesario hacer posteriormente un análisis estadístico más acorde al diseño de los reactivos. Este análisis se reporta en la sección siguiente.

IV.5.2 SEGUNDA COMPARACIÓN EN LOS EXÁMENES FINALES CM 2 Y RP 2 DE LOS GRUPOS C Y F.

Con la finalidad de elaborar un análisis estadístico que considere las características de estos exámenes, en esta parte se llevan a cabo las siguientes pruebas:

IV.5.2.1. COMPARACIÓN DE LAS PROPORCIONES DE ACIERTOS GLOBALES Y POR ÁREAS DE LOS GRUPOS C Y F, EN EL EXAMEN CM 2.

Este examen constaba de 25 reactivos, 8 de aritmética, 9 de álgebra y 8 de geometría; fue presentado por 33 estudiantes del grupo C y 34 del F. Las proporciones de aciertos pueden verse en la siguiente tabla:

GRUPO	ARITMÉTICA	ALGEBRA	GEOMETRÍA	GLOBAL
C	110/264=0.42	140/297=0.47	134/264=0.51	384/825=0.47
F	114/272=0.42	142/306=0.46	119/272=0.44	375/850=0.44

Los datos observados en esta tabla fueron contrastados columna por columna, empleando la misma prueba estadística utilizada en el apartado IV.4.1.

Los resultados de las cuatro pruebas se muestran a continuación:

GLOBAL.

Se obtuvo un valor $z_c = 0.9979067$ y el valor de $z_{\alpha/2} = 1.645$.

Como $z_c < z_{\alpha/2}$, la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que **los grupos C y F pueden considerarse equivalentes en sus proporciones globales de aciertos.**

ARITMÉTICA.

Se obtuvo un valor $z_c = -0.0575189$ y el valor de $z_{\alpha/2} = 1.645$.

Como $z_c > -z_{\alpha/2}$, la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que **los grupos C y F pueden considerarse equivalentes en sus proporciones de aciertos en aritmética.**

ALGEBRA.

Se obtuvo un valor $z_c = 0.1803092$ y el valor de $z_{\alpha/2} = 1.645$.

Como $z_c < z_{\alpha/2}$, la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que **los grupos C y F pueden considerarse equivalentes en sus proporciones de aciertos en álgebra.**

GEOMETRÍA.

Se obtuvo un valor $z_c = 1.6247361$ y el valor de $z_{\alpha/2} = 1.645$.

Como $z_c < z_{\alpha/2}$, la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que **los grupos C y F pueden considerarse equivalentes en sus proporciones de aciertos en geometría.**

IV.5.2.2. COMPARACIÓN DE LOS GRUPOS EN EL EXAMEN RP 2.

Este examen constaba de cuatro problemas desglosados en diez y seis preguntas abiertas que tienen que ver con alguna de las habilidades necesarias en la resolución de problemas ya descritas en la sección III.2.2, inciso 2. Debido al tipo de preguntas incluidas en este examen que generaron una gran diversidad de respuestas, se elaboró una escala ordinal para medir los distintos niveles de respuesta en cada reactivo, esta escala asigna cero al nivel más bajo (no contestó), 9 al nivel más alto (contestó correctamente) y una serie creciente entre 1 y 8 para los niveles intermedios de respuesta.

Para cada uno de los diez y seis reactivos se elaboró una tabla donde se registraron las frecuencias por nivel de respuesta dadas por los estudiantes de cada grupo, (ver anexo) en algunas de estas tablas los niveles fueron reagrupados por las necesidades estadísticas de la prueba, considerándose en el reordenamiento el nivel cualitativo de las respuestas.

La prueba estadística que se utilizó en el análisis de cada uno de los reactivos fue la Ji cuadrada, ésta se aplicó de la misma manera que la sección IV.3.3.

El proceso completo de la prueba estadística reactivo por reactivo empleado en este examen, se muestra en el anexo. La tabla siguiente muestra un concentrado de los resultados obtenidos en este análisis:

REACTIVO	X^2_c	X^2_α	GL	CONCLUSIÓN
I.1	0.7516238	2.71	1	EQUIVALENTES
I.2	6.8653924	4.61	2	NO EQUIVALENTES
I.3	14.092975	7.78	4	NO EQUIVALENTES
I.4	16.855496	7.78	4	NO EQUIVALENTES
II.1	5.1330713	4.61	2	NO EQUIVALENTES
II.2	0.5122156	4.61	2	EQUIVALENTES
II.3	0.1633473	2.71	1	EQUIVALENTES
II.4	4.8346072	4.61	2	NO EQUIVALENTES
III.1	0.2100579	4.61	2	EQUIVALENTES
III.2	1.6353807	4.61	2	EQUIVALENTES
III.3	4.9861853	6.25	3	EQUIVALENTES
III.4	9.3191966	6.25	3	NO EQUIVALENTES
III.5	5.9169966	6.25	3	EQUIVALENTES
III.6	7.8138503	4.61	2	NO EQUIVALENTES
IV.1	19.480642	6.25	3	NO EQUIVALENTES
IV.2	3.2524659	6.25	3	EQUIVALENTES

Los resultados de la tabla muestran que existen 8 reactivos en donde el grupo C y F son equivalentes, pero hay otros 8 reactivos donde no lo son. Un análisis del tipo de habilidades que se requerían para resolver los reactivos indica lo siguiente:

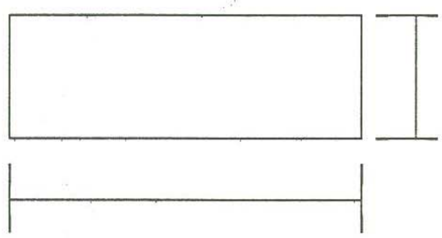
a) La equivalencia se da en aquellos reactivos con menor grado de dificultad, que sólo requieren de la habilidad para comprender un problema sencillo o bien la aplicación directa de algún conocimiento matemático.

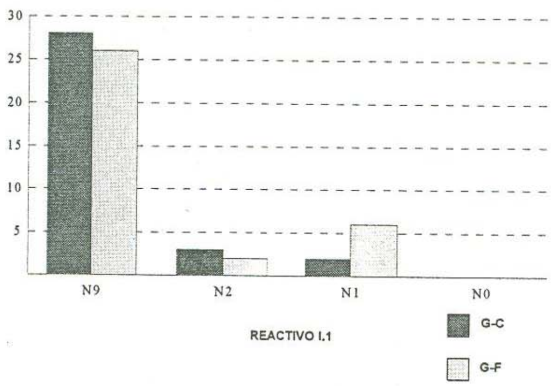
b) Los grupos no tuvieron un comportamiento equivalente en aquellos reactivos cuya resolución requería de habilidades más complejas. En concreto los reactivos donde los grupos no fueron equivalentes exigían la habilidad para desarrollar estrategias de solución del problema y uno en particular exigía no sólo la solución del problema, sino además el análisis cuidadoso de la respuesta a fin de detectar una posible contradicción.

A continuación se ilustra con gráficas de barras el comportamiento de los estudiantes en algunos reactivos con la finalidad de explicar el sentido que tiene la equivalencia o no equivalencia entre los grupos C y F.

El problema 1, sobre el que se hacían 4 preguntas (I.1, I.2, I.3 y I.4), su enunciado era; "En un terreno rectangular de 500 metros por 200 metros se construirá una institución educativa, la tercera parte del terreno se utilizará para el área de edificios, el resto se ocupará como área deportiva".

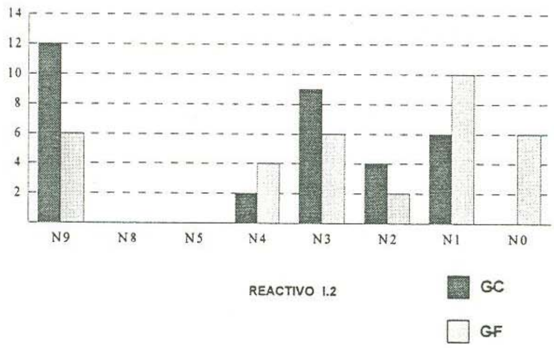
La primera pregunta decía; "Si el rectángulo de la figura representa el terreno indica en él la información que se te proporciona en el problema.





Contestar correctamente esta pregunta requería de la interpretación de los datos y su representación gráfica, el reactivo resultó muy sencillo y la gráfica indica que ambos grupos muestran un comportamiento muy similar.

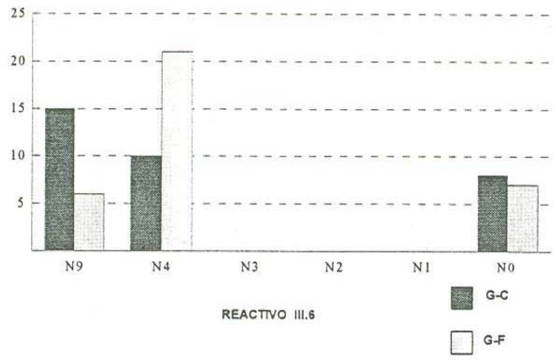
En la pregunta 2 de este mismo problema, que tenía un mayor grado de dificultad, el comportamiento de los grupos contrasta con la anterior. La pregunta 2, decía; "Si la parte del terreno que se utilizará como área deportiva, una cuarta parte será utilizada para la construcción de un estadio de fútbol ¿Qué parte del total del terreno abarcará el estadio de fútbol?



La gráfica muestra que las respuestas del grupo C están corridas hacia los niveles más altos de respuesta; particularmente el grupo C aventaja notoriamente al F en el nivel N9, en el nivel N0 el grupo F aventaja al C y en los niveles intermedios no se distingue una diferencia clara de un grupo sobre el otro. La no equivalencia de los comportamientos se debe a que el grupo C ha logrado en general responder mejor que el grupo F este reactivo.

En el problema 3, donde se hacían 6 preguntas (III.1, III.2, III.3, III.4, III.5 y III.6), su enunciado decía; "El perímetro de un tríangulo rectángulo es de 3.72 metros, sus catetos son iguales y cada uno mide 1.24". La pregunta 6 de este problema (III.6), exigía de un análisis de los resultados encontrados para decidir, si estos no eran contradictorios con la información del problema.

En la gráfica se muestra que el grupo C obtuvo un mejor desempeño en el nivel N9 (mejor nivel de respuesta), en el nivel intermedio existe una ventaja del grupo F, y en el nivel más bajo no se aprecian diferencias entre los grupos.



IV.5.3. COMPARACIÓN DE LOS GRUPOS EN EL EXAMEN EF.

Este examen consta de dos partes; una de 14 reactivos de opción múltiple y otra de 7 reactivos de respuesta abierta, con ellos se evaluó el curso de cálculo diferencial. Se realizará un primer análisis estadístico donde se calificaron los reactivos con el criterio "correcto/incorrecto", para esto se utilizará la misma prueba Ji cuadrada por estratos que se usó en el apartado IV.3.3.

IV.5.3.1 COMPARACIÓN DE LOS GRUPOS EN LA PARTE DE OPCIÓN MÚLTIPLE.

En esta parte del examen se consideraron los estratos siguientes: I de 0 a 2 reactivos correctos, II de 3 a 5, III de 6 a 8, IV de 9 a 11, y V de 12 a 14. La tabla de contingencia utilizada en la prueba es:

	C		F		
ESTRATO	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
A	6	7.7	10	8.3	16
B	14	12.0	11	13.0	25
C	12	11.0	12	13.0	24
D	1	1.0	1	1.0	2
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 1.4$

- Para GL = 3 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 6.3$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos C y F, pueden considerarse equivalentes en la parte del examen final de opción múltiple.**

IV.5.3.1 COMPARACIÓN DE LOS GRUPOS EN LA PARTE DE RESPUESTA ABIERTA.

En este examen las puntuaciones se clasificaron en los estratos siguientes: I de 0 a 1 reactivos correctos, II de 2 a 3, III de 3 a 5, IV de 6 a 7. La tabla de contingencia con el reordenamiento de niveles es:

	C		F		
ESTRATO	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
A	8	11.328358	15	11.671642	23
B	8	10.343284	13	10.656716	21
C	17	11.328358	6	11.671642	23
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 8.568765$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c > X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que; **los grupos C y F, no son equivalentes en la parte de respuesta abierta del examen final.**

Con la finalidad de mostrar en que dirección se da la no equivalencia de los grupos en la parte de respuesta abierta, en la tabla siguiente se incluyen las frecuencias de respuestas correctas por reactivo. Es importante hacer notar que los primeros cuatro reactivos corresponden a ejercicios de derivación de funciones y los tres últimos se refieren al concepto geométrico de la derivada.

	FRECUENCIA DE ACIERTOS						
GRUPO	1	2	3	4	5	6	7
C	15	12	25	16	31	8	8
F	18	6	17	1	26	0	1

IV.6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

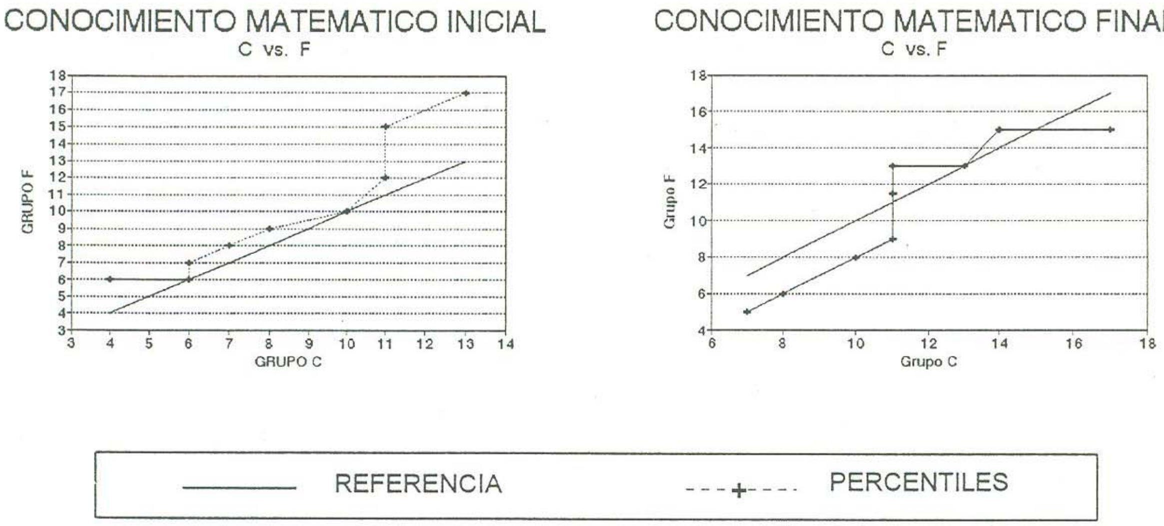
Algunas conclusiones de este trabajo han ido apareciendo gradualmente como resultado del procesamiento de los datos a lo largo del presente capítulo, la intención de este apartado en todo caso es integrar estas conclusiones y presentar otras que provienen de las observaciones registradas durante el desarrollo de los cursos. Se intenta también delimitar los alcances y las limitaciones del trabajo y plantear algunas recomendaciones para trabajos posteriores.

IV.6.1. RESULTADOS OBTENIDOS.

La hipótesis general formulada en este trabajo ha sido confirmada parcialmente, es decir los alumnos que fueron sometidos a la propuesta metodológica mejoran su desempeño en algunos aspectos, tales como la resolución de problemas y la interpretación geométrica de algunos conceptos. Los resultados finales muestran que hay una mejoría en el desarrollo de las habilidades para resolver problemas aún cuando estos problemas no son propiamente de cálculo y esta mejoría es más notoria conforme los problemas son menos rutinarios (ver IV.5.2 y IV.5.3).

En lo que se refiere tanto al conocimiento matemático del precálculo y del cálculo, como a las habilidades para resolver problemas rutinarios; los grupos tienden a emparejarse al final del curso, esto significa que los estudiantes que llevan el curso no tradicional presentan una ligera mejoría con respecto a los que cursan el tradicional.

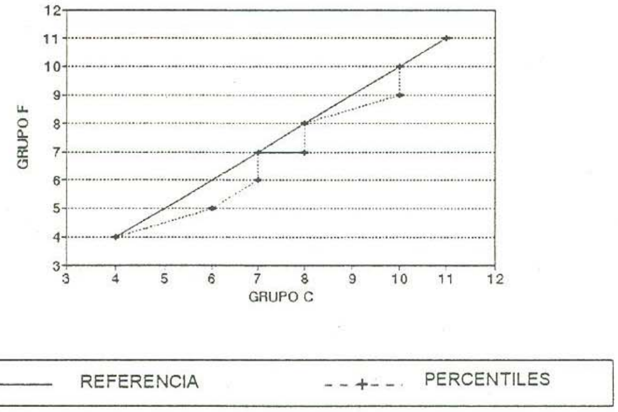
Como se ha visto en la sección IV.4 los grupos no han resultado equivalentes en lo que se refiere a su conocimiento matemático inicial. Las dos gráficas q-q siguientes explican esta falta de equivalencia inicial y a la vez muestran que, aunque no se reunieron elementos estadísticos para asegurar que el grupo C revierte al final su tendencia con respecto al F (ver Sección IV.5.2), su mejoría consiste en alcanzarlo.



En la evaluación final los reactivos de opción múltiple eran problemas rutinarios de cálculo o bien requerían para ser resueltos de recordar algún conocimiento básico del cálculo. Aunque los grupos han resultado estadísticamente equivalentes (ver apartado IV.5.3), en la gráfica q-q siguiente puede observarse que el grupo C se comportó de manera ligeramente mejor que el F en estos aspectos.

EVALUACION FINAL OM

C vs. F



Por otra parte se observó que los alumnos del curso no tradicional mostraron mayor responsabilidad en la entrega de trabajos extraclase y en la asistencia a la clase, lo cual sugiere que los estudiantes podrían haber estado más motivados en este curso que en el tradicional.

A la luz de estos resultados puede decirse que el curso no tradicional es más recomendable para el nivel medio superior que el curso tradicional, como ya se mencionó, la impartición de este curso exigiría contar con las notas de apoyo y con al menos un centro de cómputo modesto. Desde luego la recomendación está dirigida a los profesores de este nivel, en cuyas manos está la decisión de seleccionar la metodología con la que impartirán sus cursos.

Aquellos profesores para los cuales este trabajo resulte convincente podrían usar las notas de clase con las que se impartió el curso no tradicional. Si no fuera así, ya sea porque los argumentos esgrimidos aquí no se consideren sólidos o porque no existieran en su escuela las condiciones propicias, este trabajo incluye las notas empleadas en el curso tradicional, elaboradas con una secuencia de contenidos apegadas al programa oficial. Ambos materiales son también una aportación de este trabajo.

IV.6.2. LIMITACIONES.

Cualquier generalización que se pretenda hacer de los resultados obtenidos, ya sea en la dirección de ampliar el universo de validez de los mismos o en la dirección de aplicar los resultados a otros cursos de matemáticas, debiera tomar en cuenta las limitaciones presentes en este trabajo y en las que se insiste enseguida:

i) Los dos grupos sometidos a estudio eran los que observaban mejor rendimiento académico en matemáticas y por la especialidad técnica que cursaban tenían alguna familiaridad con la computadora.

ii) El estudio está basado, por limitaciones de tiempo y recursos, en la impartición de los cursos durante un semestre, lo que probablemente afecta la contundencia de las conclusiones.

iii) Aunque se ha considerado deseable hacer un seguimiento del desempeño de los estudiantes en los cursos universitarios de matemáticas, no se contempló esa posibilidad.

IV.6.3. COMENTARIOS FINALES Y PROBLEMAS ABIERTOS.

Durante la realización de este trabajo, han ido apareciendo problemas, que no se han abordado por considerarlos fuera del alcance del mismo, pero se ha considerado pertinente plantearlos porque su abordaje podría servir de base a trabajos futuros; a esto está dedicada la presente sección.

Los instrumentos de evaluación que se han usado, han aportado una gran cantidad de datos, cuyo procesamiento y análisis se ha considerado suficiente para los propósitos de este trabajo, pero seguramente que otros diseños estadísticos sobre los mismos datos pudieran enriquecer las conclusiones. Si este tema despertara interés, los datos completos se han incluido en los anexos.

Ha quedado fuera del alcance de este trabajo la posibilidad de hacer un seguimiento de los estudiantes que han participado en este estudio. Observar el desempeño de estos estudiantes en cursos posteriores de matemáticas, resulta costoso en términos tanto de tiempo como de recursos, pero se ha considerado un problema interesante la posibilidad de comparar los efectos que pudiera haber tenido en la formación de los estudiantes el haber tomado el curso de cálculo con una metodología o con otra.

En el diseño del curso no tradicional han quedado temas cuyo tratamiento no involucra la computadora, se tiene la convicción de que el diseño puede enriquecerse incorporando el uso de la computadora en algunos de ellos. Otra posibilidad tampoco explorada sería la incorporación de calculadoras manuales en este curso. Estas dos posibilidades constituirían líneas de trabajo que permitirían buscar el mejoramiento del curso no tradicional.

Recientemente han cobrado importancia en las instituciones los cursos remediales para estudiantes reprobados o de bajo rendimiento; los estudiantes en los que se basa el presente trabajo no responden a este perfil, pero sería interesante poner a prueba la propuesta que se desprende de este trabajo con estudiantes que han registrado fracasos en sus cursos de matemáticas.

Cualquier propuesta curricular que se haga para un curso de la currícula matemática del bachillerato corre el riesgo de quedar aislada si no se aborda la revisión integral de esta currícula. Aunque no se desprende directamente de este trabajo, pareciera factible diseñar cursos como el aquí propuesto en materias distintas del cálculo diferencial.

CAPITULO V.
NOTAS PARA EL CURSO NO TRADICIONAL.

En este capitulo se hace explícita la propuesta metodológica de la enseñanza del cálculo a través de problemas y con apoyo computacional, este material está organizado en cuatro módulos, cuyo contenido puede describirse como sigue:

En el primer módulo se abordan problemas de optimización que se modelan con funciones que pueden analizarse con herramientas aritmética, algebraica y geométrica; tales problemas han sido seleccionados con el propósito de aproximarse a los métodos y los algoritmos del cálculo, a la vez que se intenta mostrar las limitaciones que tiene el precálculo como herramienta para resolver problemas de optimización.

En el segundo módulo se proponen actividades con la finalidad de poder encontrar un método para obtener con exactitud el punto más alto y más bajo de la gráfica de una función. A partir de calcular la pendiente de ciertas rectas secantes, se intenta obtener la recta tangente a una curva en un punto dado, culminando con el trabajo algebraico realizado por Fermat para calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto de la misma. Por último en este módulo se obtienen seis reglas elementales para obtener la derivada de funciones algebraicas.

En el tercer módulo se plantean problemas de optimización (que se modelan con funciones algebraicas) con la misma dinámica de los módulos uno y dos pero con la finalidad de aplicar la herramienta matemática descubierta por el alumno en el módulo anterior.

En el cuarto módulo se plantean más problemas de optimización con el propósito de propiciar nuevas reglas de derivación y extender así el estudio de la derivada a otro tipo de funciones algebraicas y a las funciones trigonométricas y trascendentes.

MODULO I.

UN ACERCAMIENTO A LOS PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS.

P R E S E N T A C I O N.

Es muy común encontrarse en la vida con situaciones en las cuales se hace necesario tomar la mejor decisión posible, o, como es frecuente decirlo,la decisión óptima. En particular, tales problemas abundan en las distintas ramas de la economía, la ingeniería y la técnica.

Así, por ejemplo, en la industria es frecuente enfrentar la exigencia de producir la mayor cantidad posible de dispositivos con las mínimas pérdidas de material, o de fabricar piezas que sean lo más resistente posible y al mismo tiempo lo más ligero, de reducir los gastos de producción economizando no solamente materia prima sino también combustibles, energía eléctrica, tiempo y otros factores. Estos problemas, que se reducen al obtener un efecto máximo (máxima producción, máxima resistencia, etc) o uno mínimo (mínimas pérdidas, mínimo peso, mínimos costos, etc) se conocen con el nombre de problemas de optimización (también se les llama "problema sobre máximos y mínimos" o "problemas sobre extremos").

La experiencia ha mostrado que, al enfrentar situaciones de este tipo, el recurrir a las matemáticas resulta útil y en la mayoría de los casos, imprescindible.

El empleo de las matemáticas en la resolución de problemas de maximización empezó hace mucho tiempo, hace cerca de veinticinco siglos. Por supuesto, al principio no hubo un enfoque único en la solución de problemas de optimización. Fue solo hasta hace cerca de trescientos años cuando se creó un método general que permite resolver problemas de optimización de la más diversa naturaleza, gracias a las aportaciones que durante siglos hicieron ilustres sabios y científicos de todas las épocas como: Euclides, Arquímedes, Apolonio, Herón, Tartaglia, Torricelli, Johnann y Jacob Bernoulli, Fermat, Barrow, Newton Leibintz y muchos otros.

Este método general, complementado con los conceptos que le sirven de sustento, se constituyó en una rama del conocimiento matemático, a la que se le ha dado el nombre ya clásico de Cálculo Diferencial.

El método de Cálculo Diferencial resultó ser una poderosa herramienta para la resolución de problemas de optimización de las más variadas ramas de la ciencia y de la técnica, y también proporcionó una comprensión más profunda de la naturaleza y de las leyes que la rigen. Así por ejemplo, resultó que muchas de las leyes de la naturaleza pueden ser formuladas como problemas de optimización. Los sistemas mecánicos, la luz, la electricidad, los líquidos y los gases, etc., se comportan de un modo tal, que su evolución minimiza o maximiza ciertas cantidades físicas. Fermat encontró que la refracción de la luz se explica por el hecho de que, al propagarse de un punto a otro en un medio heterogéneo, la trayectoria de refracción es precisamente la que requiere el tiempo mínimo.

La evolución paulatina de la ciencia y de la técnica, particularmente vertiginosa en nuestro siglo, plantearon toda una serie de nuevos problemas de optimización que, a pesar de su aparente simplicidad, no fue posible resolverlos con el método de Cálculo Diferencial. La necesidad de dar respuesta a tales problemas condujo a la creación de nuevas ramas de la matemática, como el Cálculo Variacional, la Programación Lineal, el Análisis Convexo y la Teoría de la Dirección Optima.

Como vemos, se pueden distinguir diferentes niveles sobrados de complejidad de los problemas de optimización, a cada uno de los cuales le corresponde un método de solución y su respectiva teoría de la matemática. En nuestro curso sólo analizaremos el método de solución de los problemas elementales de optimización, cuya teoría correspondiente lo es el Cálculo Diferencial.

A pesar de esto, el calificativo de "elementales" no es sinónimo de "fáciles" o de "poco interesantes". Como veremos, entre tales problemas "elementales" habrá no solamente problemas importantes desde el punto de vista de su sentido práctico, sino también problemas de un cierto grado de complejidad.

El propósito esencial de este curso es que te sirva para aprender a resolver problemas elementales de optimización. La asimilación del método de resolución de tales problemas constituye uno de los objetivos fundamentales del curso.

Problema 1. El gallinero.

Doña Josefa, habitante de Ures, ha criado gallinas sin necesidad de tenerlas cautivas, esto le está ocasionando una serie de problemas por lo que decide construir un gallinero en la parte posterior de su casa, sus ahorros sólo le alcanzan para comprar 50 metros lineales de tela para cercarlo. Si el terreno donde desea construir el gallinero es de 20 metros por 40 metros ¿Qué dimensiones deberá de tener un gallinero de forma rectangular para que este abarque la mayor área posible, y así encerrar la mayor cantidad de gallinas?

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Anota lo que se te pide encontrar en este problema.

2. Haz un dibujo donde representes el gallinero, con la información que se te proporciona en el problema.

3. A continuación dibuja dos rectángulos distintos (que simulen el gallinero) donde la longitud de la cerca sea de 50 metros.

4. De estas opciones ¿Cuál es la mejor? ¿Por qué?

5. ¿Son las únicas opciones posibles? ¿Cuantas mas existen?

6. Como ya te diste cuenta, existen "muchos" posibles gallineros, trataremos de pasar la información de los rectángulos a una tabla como la que se muestra a continuación para organizar la información.

T A B L A 1.

base	altura	Longitud del cerco	Area cercada
5			
8			
10			
14			
15			
18			
20			
25			
30			
b			

7. De los valores que se representan en la tabla ¿Cuál representa la mejor opción?

8. De todos los posibles gallineros que existen ¿Esas dimensiones son las que abarcan la mayor área posible?

9. Si la respuesta a la pregunta anterior es negativa ¿Entre que valores de la base crees que está la mejor opción?

10. Tomando en cuenta los valores propuestos en la pregunta anterior intenta encontrar mejores aproximaciones en la tabla siguiente.

T A B L A 2.

base	altura	Longitud del cerco	Area cercada

11. De los valores enlistados en la tabla 2 ¿Cuál es la mejor opción?. De todos los posibles gallineros que existen ¿Esta es la mejor?

Problema 2. El corral.

Un ranchero necesita hacer un corral para encerrar el ganado, dispone para ello de material suficiente para construir 171 metros lineales de cerco. ¿Cuanto deberán medir los lados del corral rectangular que contenga la mayor superficie posible con objeto de poder encerrar la mayor cantidad de ganado?

ACTIVIDADES A REALIZAR.

<u>1. Realiza las mismas actividades del problema 1.</u>

Nota! Para el llenado de la tabla uno utiliza los siguientes valores para la base: 0, 5, 12, 15, 20, 30, 35, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 150, b.

2. Construye una gráfica en el plano cartesiano, con los datos de la tabla 1, representando en el eje x, la base del rectángulo y en el eje y, su área.

3. En la misma gráfica incluye los valores de la tabla 2.

4. ¿Son todos los puntos que se pueden graficar? ¿Por qué?

5. ¿Qué forma tiene la gráfica?

6. ¿Qué representa de nuestro problema, cada punto de la gráfica?

7. ¿Qué punto de la gráfica representa la solución de nuestro problema?

8. Utilizando la gráfica, estima las coordenadas de ese punto.

9. Anota las dimensiones del terreno rectangular que encerraría la mayor cantidad de ganado.

Problema 3. La llantera.

En un lote baldío de 50 metros por 100 metros, una compañía llantera requiere bardear un terreno rectangular de 600 metros cuadrados de superficie, dejando sin bardear el lado que da al norte porque será utilizado como entrada al negocio, ¿Qué dimensiones deberá de tener el terreno para que la suma de la longitud bardeada sea la mínima?

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Haz un croquis donde representes la información de este problema.

2. Escribe lo que se te pide encontrar.

3. ¿Cuántos rectángulos de 600 metros cuadrados como los del croquis se pueden obtener?

4. Enlista algunas de esas opciones en la siguiente tabla.

base	altura	Area cercada	Longitud bardeada
5			
10			
15			
20			
25			
30			
40			
50			
60			
b			

5. Escribe la fórmula que utilizaste para calcular la altura.

6. Escribe la fórmula con la que calculaste la longitud de la barda expresada en términos de la base y la altura.

7. Ahora, escribe la fórmula para calcular la longitud bardeada usando sólo la base del rectángulo.

8. ¿Qué valores puede tomar la base en este problema? De estos ¿Cuál es el valor menor? ¿Cuál es el valor mayor?

9. Construye una gráfica en el plano cartesiano utilizando la fórmula de la pregunta 7, representando en el eje "x", la base del terreno a bardear, y en el eje "y" la longitud bardeada.

10. En la gráfica ¿Qué representa cada punto?

11. ¿En qué punto de la gráfica se encuentra la solución de este problema?

12. Utilizando la gráfica, estima las coordenadas de ese punto.

12. ¿Cómo quedaría trazada una tangente a la curva en ese punto?

13. Escribe la solución del problema.

COMENTARIO.
COMO PUDISTE OBSERVAR EN LOS PROBLEMAS ANTERIORES, REALIZAR UN DIBUJO CON TODA LA INFORMACION DEL PROBLEMA RESULTA MUY UTIL, PORQUE NOS AYUDA A TENER UNA MEJOR COMPRENSION DEL MISMO. PERO EXISTEN OTROS PROBLEMAS COMO EL SIGUIENTE DONDE ADEMAS DEL DIBUJO SE PUEDE FABRICAR EL "MODELO FISICO" DEL OBJETO DE ESTUDIO CON; PAPEL, CARTON, CARTULINA, ETC.

SIEMPRE QUE EL PROBLEMA LO PERMITA, SE TE SUGIERE QUE ELABORES UN MODELO FISICO Y ANOTES EN EL TODA LA INFORMACION QUE SE TE PROPORCIONA EN EL ENUNCIADO.

Problema 4. La caja.

Un empresario desea hacer cajas sin tapa para envasar su producto, para esto hará uso de piezas rectangulares de cartón de 50 centímetros por 30 centímetros, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas, y doblando como lo ilustra el profesor al construir el modelo físico del problema. Encuentra la longitud del lado del cuadrado que será cortado en cada esquina, si se quiere obtener una caja que encierre el mayor volumen posible.
Nota! Se sugiere que siguiendo las indicaciones del maestro elabores un modelo físico del problema.

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Escribe lo que vas a buscar en este problema.

2. Encuentra la fórmula para calcular el volumen de una caja como la del problema.

3. Si le llamamos "x" a la longitud del lado del cuadrado que se va a cortar. Escribe las dimensiones de la caja, es decir el largo, ancho y altura, expresada en términos de "x".

4. Escribe la fórmula para calcular el volumen de la caja expresada en términos de "x".

5. Grafica en el plano cartesiano la relación anterior, representando en el eje "x", la longitud "x", y en el eje "y", el volumen de la caja.

6. Localiza el punto de la gráfica donde se encuentra representada "la caja de mayor volumen".

7. Traza una recta tangente a la curva en el punto anterior.

8. Escribe la solución de este problema.

9. Encuentra las dimensiones de la caja de máximo volumen.

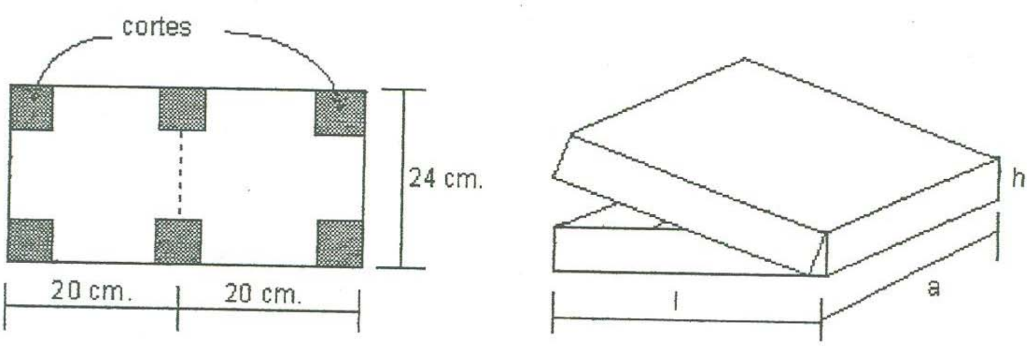
ACTIVIDAD IMPORTANTE. discute en tu equipo el proceso que se siguió para resolver los problemas anteriores con la finalidad de que puedan observar el plan o estrategia de solución para estos problemas. Una vez hecho esto, escribe en tu cuaderno, los pasos que pudiste apreciar en esta discusión.

Con los resultados de la discusión anterior trata de abordar los siguientes problemas.

Problema 5. La caja para empacar harina.

Se pretende empacar harina en cajas con tapadera, contando para su manufactura con láminas de cartón rectangulares de 40 cm. de largo por 24 cm. de ancho, cortando cuadrados iguales y doblando como se muestra en la figura.

Nota! Se sugiere que elabores un modelo físico del problema y que anotes en el, la información que se te proporciona.



a) ¿Cuánto mide el lado de los cuadrados que se cortan que hacen que el volumen de la caja sea el máximo?

b) ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen?

c) ¿Cuál es el volumen de dicha caja?

d) Trázale una tangente a la gráfica del problema, en el punto donde está representada la solución.

Problema 6. La barra de margarina.

Un tamaño de la margarina primavera se vende en barras que tienen forma de un prisma de base cuadrada, el volumen de las barritas es de 108 centímetros cúbicos. Determinar las dimensiones de la barra que minimizan la cantidad de envoltura. Además trázale la recta tangente a la gráfica del problema donde encuentres el punto más bajo de la curva.
Nota! Se sugiere que elabores un modelo físico del problema y que anotes en el, la información que se te proporciona.

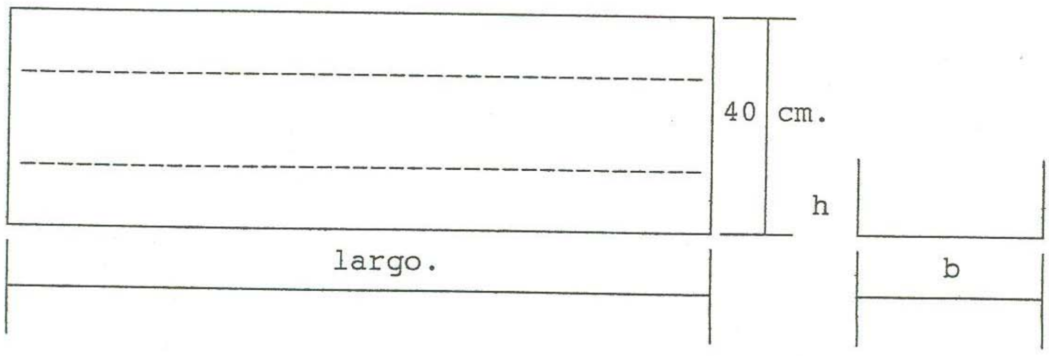
Problema 7. La lata para envasar chocolate.

La compañía nestlé usa latas de hojalata de forma cilíndrica para envasar chocolate en polvo marca "Quik" en su presentación de 400 gr. Hallar las dimensiones mas económicas (es decir, área mínima de hojalata empleada en cada bote), sabiendo que el volumen de cada bote es de 909.2 centímetros cúbicos. Además trázale la recta tangente a la curva del problema en el punto que representa la solución.
Nota! Se sugiere que elabores un modelo físico del problema y que anotes en el, la información que se te proporciona.

TAREA INDIVIDUAL.

Problema 8. El canalón.

De una larga pieza de lámina galvanizada de 40 cm. de ancho se va a hacer un canalón para que conduzca agua, doblando hacia arriba las orillas del largo formando ángulos rectos (ver la figura) para formar el canalón. Encontrar las medidas del ancho y la altura del canalón que permita que fluya el mayor volumen de agua por el mismo.



Problema 9. El tambo de 200 litros.

Investiga si las dimensiones del tambo de 200 litros que se utiliza en nuestro medio son las que minimizan la cantidad de lámina utilizada para su construcción.

PROBLEMAS DE PROFUNDIZACION.

* Problema 10. La lata para envasar aceite.

Una compañía fabricante de aceites desea construir latas cilíndricas de un litro de capacidad para envasar el producto. Encuentra las dimensiones que debe tener la lata que requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

Problema 11. El corral.

López y Pérez poseen lotes vecinos de 25 metros por 50 metros, López ha construido una barda alrededor de su terreno. Pérez quiere construir un corral rectangular para encerrar su perro, de área tan grande como sea posible, para esto dispone de 38 metros lineales de material para cercar. Por supuesto Pérez puede utilizar una pared de las que ya tiene bardeada el señor López:

a) Si "x" representa la longitud del lado del corral que quedará en la barda de López, encuentra la formula para calcular el área expresada en términos de "x" que encierra el corral que construirá Pérez para su perro.

b) En este problema que valores puede tomar la "x".

c) Encuentra las dimensiones del corral que abarca la mayor área posible.

* Problema 12. Los postes.

Dos postes de longitudes de 15 y 10 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 20 metros. Calcula la longitud mínima de un cable que vaya desde la punta de uno de los postes hasta el suelo y luego vuelva subir hasta la punta del otro poste.

* Problema 13. La ventana.

Un arquitecto desea diseñar cierto tipo de ventana de tal manera que la parte inferior sea rectangular y la superior sea un triángulo equilátero. Si cada ventana tiene una área de 3 metros cuadrados ¿Cuáles son las dimensiones de la ventana para que su perímetro sea el menor posible?

Problema 14. La alberca.

Una persona tiene un patio rectangular en su casa que mide 20 x 30 metros, y desea construir una alberca con fondo rectangular cuya área sea de 40 metros cuadrados. Determina las dimensiones del fondo para que la cantidad de material que se usará en las paredes sea el mínimo.

Nota! Los problemas marcados con * son de mayor grado de dificultad. No es obligatorio que los resuelvas, pero si los haces o al menos lo intentas ¡F E L I C I D A D E S!

SOLUCIONANDO PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS

CON AYUDA DE LA COMPUTADORA.

Problema 1. La siembra de hortalizas.

Un granjero proyecta sembrar hortalizas en un terreno rectangular que tiene detrás de su casa, para proteger el sembrado lo cercará disponiendo para ello de 21 metros lineales de material para la cerca ¿Cuánto deberá medir los lados del terreno que contengan la mayor área posible, para sembrar la mayor cantidad de hortalizas?

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Anota qué es lo que vas a buscar en este problema.

2. Este problema de optimización ¿Es de máximos o de mínimos?

3. De acuerdo a la respuesta anterior ¿Cómo será la gráfica en este problema?

4. Escribe la relación que utilizas para calcular el área que encierra el cerco que construirá el granjero (exprésala en términos de la base y la altura).

5. Escribe la relación anterior utilizando únicamente la base del rectángulo.

6. ¿Qué valores puede tomar en este problema la base del rectángulo?

7. A partir de este momento utilizarás la computadora para auxiliarte en la solución del problema.

7.1 Enciende la computadora hasta colocarla en A>.

7.2 Introdúcete al paquete CALCULA.

7.3 Define el intervalo de valores que puede tomar la base, de la siguiente manera:
Presiona ALT - x , te pide el valor inicial, dáselo y teclea ENTER. Ahora te pide el valor final, dáselo y teclea ENTER.

7.4 Introduce la ecuación a la computadora de la siguiente manera; presiona f o y, enseguida escribe la ecuación, al terminar teclea ENTER.

7.5 Presiona la barra espaciadora para que aparezca la gráfica de este problema. ¿Se parece al bosquejo que hiciste en la actividad tres?

8. ¿Qué representa cada punto de la gráfica?

10. ¿En qué punto de la gráfica está la solución? !LOCALIZALO!

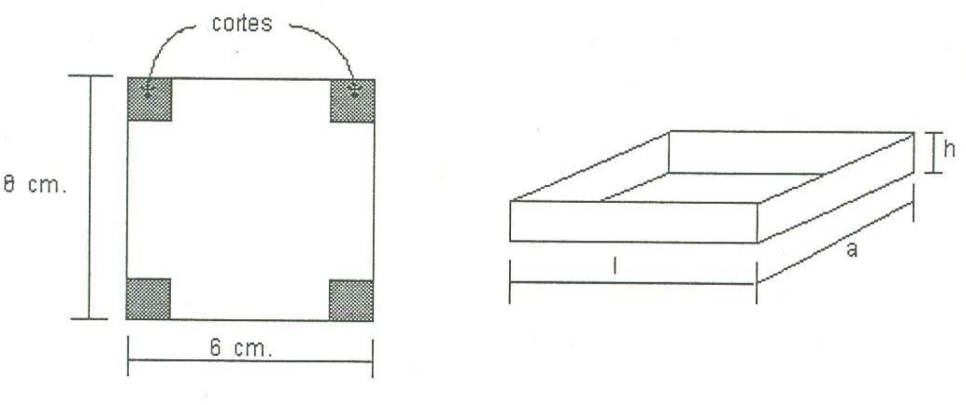
11. ¿Cómo es la tangente a la curva en ese punto?

!Obsérvalo tecleando F4!

12. ¿Cuál es la solución de tu problema?

Problema 2. La caja para cerillos.

Una industria cartonera planea construir una cajita sin tapa para empacar cerillos, para esto utilizará láminas de cartón de 6 centímetros por 8 centímetros, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados como lo muestra la figura. Encuentra las dimensiones de la cajita de mayor volumen.



ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Una vez que leíste el problema identifica que es lo que se te pide optimizar.

2. Anota lo que vas a buscar en este problema.

3. Si le llamamos "x" al lado del cuadrado cortado en cada esquina. Escribe el largo, ancho y altura de la caja en términos de "x".

4. Escribe la fórmula para calcular el volumen de la caja en términos de "x".

5. Determina los valores que puede tomar la x (lado del cuadrado cortado en las esquinas) en este problema.

6. A partir de este momento utilizarás la computadora para graficar la relación de este problema.

6.1 Enciende la computadora hasta colocarla en A>.

6.2 Entra al paquete CALCULA.

6.3 Introduce el intervalo de valores que puede tomar x, de la siguiente manera:
Presiona ALT - x , te pide el valor inicial, dáselo y teclea ENTER. Ahora te pide el valor final, dáselo y teclea ENTER.

6.4 Para graficar introduce la ecuación de la manera siguiente, primero presiona f o y, enseguida escribe la ecuación al terminar teclea ENTER.

6.5 ¿Cómo esperas que sea la gráfica de este problema?

6.6 Presiona la barra espaciadora para que aparezca la gráfica.

7. ¿Qué significa cada uno de los puntos de la gráfica?

8. ¿En qué punto de la gráfica está la solución? !LOCALIZALO!

9. ¿Cómo es la tangente a la curva en ese punto?

!Verifícalo tecleando F4!

10. ¿Cuál es la solución de tu problema?

Problema 3. La lata sin tapa.

¿Cuál es la menor cantidad posible de material que se debe utilizar para construir una lata sin tapa, de base cuadrada, de 20 litros de capacidad?
NOTA! Un litro equivale a un decímetro cúbico.

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Una vez que leíste el problema identifica que es lo que se te pide optimizar.

2. Haz un croquis del problema y llámale "b" al lado de la base, y "h" a la altura de la lata.

3. Encuentra la fórmula para calcular la cantidad de material de la lata expresada en términos de "b" y "h".

4. Escribe la fórmula para calcular la cantidad de material de la lata en términos de "b".

5. Determina los valores que puede tomar la "b" en este problema.

6. Como ya lo apreciaste este problema es de mínimos, ¿Cómo esperas que sea la gráfica de este problema?

7. A partir de este momento utilizaras la computadora para auxiliarte en la solución del problema.

7.1 Posesiónate en A>. y entra al paquete CALCULA.

7.2 Define el intervalo de valores de "b", de la siguiente manera; presiona <u>ALT</u> - <u>x</u> , te pide el valor inicial, dáselo y teclea <u>ENTER</u>. Ahora te pide el valor final, dáselo y teclea <u>ENTER</u>.

7.3 Introduce la ecuación a la computadora.

7.4 Presiona la barra espaciadora para que aparezca la gráfica.

8. ¿Qué significa en tu problema cada punto de la gráfica?

9. ¿En qué punto de la gráfica está la solución? !LOCALIZALO!

10. ¿Cómo es la tangente a la curva en ese punto?

!Verifícalo tecleando F4!

11. ¿Cuál es la solución de tu problema?

Pts 5 53

En el presente módulo nos enfocaremos al análisis detallado del método de Fermat aplicándolo para encontrar tangentes a diferentes curvas. Recordemos una vez más que resolver el problema de las tangentes nos permitirá retornar a la solución de los problemas de optimización.

PROBLEMA 1.
Traza las rectas que pasan por las parejas de puntos dados. Determina el valor de su pendiente, señala las rectas que tengan pendiente positiva, negativa y cero.

a) (-3, -5); (2, 5)
b) (-1, 4); (2, -3)
c) (-5, -2); (1, -2)
d) (2, 7); (2, -3)
e) (-0.5, -0.38); (3.2, -2.43).
f) (2/3, 3/2); (-2, -6).
g) ($\sqrt{5}$, 8); (5, -2 $\sqrt{3}$).
h) (-3/7, 2/9); (4/5, 2/9).

PROBLEMA 1.1 Con la información que se te proporciona en cada inciso dibuja la recta.

a) pasa por (1, 2) y (-1, -4).
b) pasa por (-2, 4) y m = 2.
c) pasa por (1, 1) y tiene m = 5.
d) pasa por (3, -1) y m = -4.
d) pasa por (2, -3) y m = -1/2.

PROBLEMA 2.
A continuación aparecen algunas funciones. En cada caso traza la gráfica y la recta secante a la curva que pasa por los puntos cuyas abscisas se dan. Una vez trazada la secante calcula su pendiente.

a) $y = 2 - x^2$
$x = -3$ y $x = 1$

b) $y = x^2 - 3$
$x = -4$ y $x = -1/2$

c) $y = 3/x$
$x = 1$ y $x = 3$

d) $y = 3 - (1/2)\,x^3$
$x = 0$ y $x = 3$

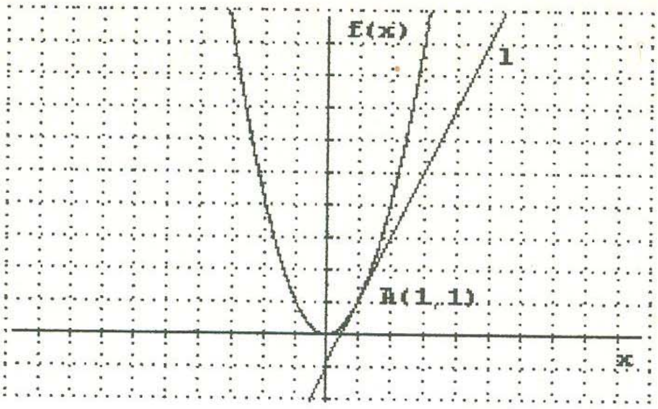
e) $y = 3(x - 2)^2 - 3$
$x = 1.5$ y $x = 3.5$

f) $y = 4x - x^3$
$x = -1/2$ y $x = 3/2$

En el problema anterior se muestra la recta secante a la gráfica de una función y como se determina su pendiente; en los problemas siguientes vamos a ver como podemos utilizar la recta secante para que a través de ella lleguemos a encontrar la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado.

PROBLEMA 3.

La gráfica que aparece a continuación corresponde a la función $f(x) = x^2$ y la recta "l" es su tangente en el punto A(1, 1).



a) Ahora traza una recta secante a la función que pasa por el punto A, y por el punto B de abscisa x = 3; calcula la pendiente de esta secante.

m =

b) Traza dos rectas secantes mas que pasen por el punto A y su segundo punto corte a la curva entre A y B, calcula sus pendientes.

c) ¿Cuántas rectas secantes más a la función $f(x) = x^2$ puedes trazar por el punto A?

PROBLEMA 4.

Tomemos la gráfica de la función anterior y localicemos el punto B (-1, 1), llámale $(x_1, f(x_1))$. Completa la tabla que se te proporciona y traza las rectas secantes que en ella se indican en la gráfica de la función.

x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	m_s
-1	3	1		
-1	2	1		
-1	1	1		
-1	0	1		
-1	-0.5	1		
-1	-0.9	1		

a) ¿Cuántas rectas secantes a la gráfica de la función se pueden trazar por el punto B?

b) ¿Qué pasa con la recta secante en relación con la recta tangente a medida que el valor de x_2 se acerca al valor de x_1?

c) De la tabla ¿Cuál recta secante se parece mas a la recta tangente a la curva en el punto B? ¿Cuál es el valor de su pendiente?

d) Determina otra recta secante que se encuentre mas cerca a la recta tangente y calcula su pendiente.

e) ¿Cuál consideras que sea el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto B?

f) Traza la recta tangente a la curva en el punto B.

g) Escribe la fórmula que utilizaste para calcular la pendiente de cada recta secante a la curva en este problema.

PROBLEMA 5.
Dada la función $f(x) = (1/2)x^2$, grafícala y localiza el punto (1, 1/2) llámale a este punto $(x_0, f(x_0))$. Llena la siguiente tabla y traza las rectas secantes que en ella se indican a la gráfica de la función.

x_0	$f(x_0)$	x	$f(x)$	$x - x_0$	$f(x)-f(x_0)$	m_s
1	1/2	4				
1	1/2	3				
1	1/2	2				
1	1/2	1.5				
1	1/2	1.2				
1	1/2	1.1				

a). En esta tabla ¿Qué representan los valores de la quinta columna?

b). ¿Qué pasa con dichos valores a medida que el valor de la x se acerca al valor de la x_0?

c). ¿Qué va pasando con las rectas secantes a la curva, con respecto a la recta tangente, a medida que los valores de x se aproximan a los valores de x_0?

d). ¿Qué sucede con los valores de las pendientes de las rectas secantes en relación con los valores de la pendiente de la recta tangente, a medida que los valores de x se acercan a los valores de x_0?

e). ¿Cuál de todas las rectas secantes anteriores tiene una pendiente más cercana a al pendiente de la recta tangente?

f). Determina dos rectas secantes, que estén más cercanas que las anteriores a la recta tangente y determina su pendiente.

g) ¿Cuál piensas que sea el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto B?

h) Con el valor encontrado en la respuesta anterior traza la recta tangente a la gráfica de la función.

i) Escribe la fórmula que utilizaste para determinar el valor de la pendiente de las rectas secantes en este problema.

COMENTARIO.

COMO YA TE DISTE CUENTA EN LOS PROBLEMAS ANTERIORES SE PUEDEN DISTINGUIR DOS PUNTOS DE LA GRAFICA QUE SON MUY IMPORTANTES, UN PUNTO QUE ES DONDE SE DESEA TRAZAR LA RECTA TANGENTE A LA CURVA POR DONDE PASA UNA INFINIDAD DE RECTAS SECANTES (PUNTO FIJO), Y OTRO PUNTO QUE SE MUEVE A LO LARGO DE LA CURVA (PUNTO MOVIL).

PROBLEMA 6.
Para la función del problema tres dibuja su gráfica y localiza el punto fijo (1,1), por ese punto traza las rectas secantes necesarias para obtener la recta tangente. Escribe la fórmula "para calcular la pendiente de cualquiera de estas rectas secante" a la gráfica de la función, utilizando los valores del punto fijo y de la abscisa (x) del punto que se mueve.

PROBLEMA 7.

Para cada inciso y tomando la función del problema tres, escribe la fórmula para calcular la pendiente de cualquier recta secante que pase por el punto fijo, en términos de los valores de ese punto y la abscisa del punto que se mueve. Se sugiere trazar la gráfica de la función, localizar el punto fijo y trazar las rectas secantes necesarias para obtener la recta tangente a la curva.

a) (0, 0). b) (-2, 4) c) (2, 4) d) (3, 9)

e) (-3, 9). f) (1/2, 1/4) g) (-1/2, 1/4) h) (-1, 1)

PROBLEMA 8.

De los problemas anteriores se desprende que el punto fijo de la curva puede ser cualquiera (con la condición de estar precisamente fijo). Si la abscisa de un punto fijo de la curva $f(x) = x^2$ es x_0, obtén una formula para calcular la pendiente de cualquier recta secante a la curva, en términos de las abscisas del punto fijo y del punto móvil.

PROBLEMA 9.

Para cada una de las funciones que se te dan a continuación, considera que el punto fijo tiene coordenadas $(x_0, f(x_0))$, obtén una formula para calcular la pendiente de cualquier recta secante que pase por el punto fijo expresada en términos de x y x_0. Grafica la función y localiza un punto fijo cualquiera, por él traza las rectas secantes necesarias para obtener la recta tangente.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 1/x$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = 2x^2 + 4$ e) $f(x) = x + 1/x$ f) $f(x) = x^3 + 5x$

COMENTARIO.

1. EN LOS PROBLEMAS ANTERIORES SE HA MANEJADO LA DIFERENCIA ($X - X_0$) PARA CALCULAR LA PENDIENTE DE LA RECTA SECANTE. DE AQUI EN ADELANTE A ESTA DIFERENCIA LE LLAMAREMOS "INCREMENTO DE X" Y LA REPRESENTAREMOS CON LA LETRA "h" ($h = X - X_0$).

2. PARA LA RESOLUCION DE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS TE AUXILIARAS DE LA COMPUTADORA UTILIZANDO EL PAQUETE G.C. GRAFICOS.

EL PAQUETE G.C. GRAFICOS SE PUEDE UTILIZAR EN CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, ECUACIONES DIFERENCIALES, SOLUCION DE ECUACIONES NUMERICAS. PARA REALIZAR TAREAS LABORIOSAS DONDE SE INVIERTE MUCHO TIEMPO Y ESFUERZO,A CONTINUACION SE TE PROPORCIONA INFORMACION ELEMENTAL DEL PAQUETE CON LA FINALIDAD DE QUE ADQUIERAS LOS ELEMENTOS MINIMOS PARA EL MANEJO DE ESTE:

* PARA ENTRAR AL PAQUETE TECLEA GRAFICOS Y ACTIVA ENTER.
* LA INFORMACION QUE APARECE EN LA PRIMERA PANTALLA ES LA PRESENTACION DEL PAQUETE. PARA CONTINUAR PRESIONA ENTER.
* AHORA APARECERA EL MENU PRINCIPAL QUE CONSTA DE 18 TEMAS MATEMATICOS DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, ECUACIONES DIFERENCIALES, Y OTRAS AREAS DE LA MATEMATICA, PARA INTRODUCIRTE EN ALGUNO DE ELLOS SOLO TECLEA EL NUMERO O LA LETRA INDICADAS; EL MENU PRINCIPAL ES EL SIGUIENTE:

1. BUSCA INSTRUCCIONES DE FUNCIONES.
2. DIBUJAR GRAFICOS.
3. AMPLIAR.
4. DERIVADAS.
5. INTEGRAR.
6. SOLUCIONAR ECUACIONES NUMERICAS.
7. POLINOMIOS DE TAYLOR.
8. FUNCION "COPO DE NIEVE".
9. DEFINIR FUNCIONES PROPIAS.

0. ALTO

A. REPRESENTACION PARAMETRO DE LA CURVA.
B. REPRESENTACION PARAMETRO EN EL ESPACIO.
C. FUNCIONES COMPLEJAS.
D. ECUACIONES DIFERENCIALES.
E. ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º GRADO.
F. ECUACIONES DIFERENCIALES SIMULTANEAS.
G. FUNCIONES DE DOS VARIABLES.
H. OPCIONES

* EN ESTE MODULO SOLO UTILIZAREMOS LA OPCION 4.DEL MENU PRINCIPAL QUE CORRESPONDE AL TEMA DIFERENCIAR. SE SUGIERE QUE EXPLORES EL PAQUETE PARA QUE CONOSCAS LAS DEMAS OPCIONES, SI CONSIDERAS QUE ALGUNA DE ELLAS LA PUEDES UTILIZAR EN ESTE O EN OTRO MOMENTO DE ESTE CURSO O DE OTROS POSTERIORES ¡ADELANTE!.

PROBLEMA 10.
En cada uno de los incisos siguientes se te proporciona la función, un punto fijo y el incremento de x. Utilizando la computadora dibuja una gráfica de la función con la recta secante que se indica, para ello realiza las siguientes actividades.

a) $f(x) = x^2$	t (-2, 4)	h = 1.
b) $f(x) = x^3$	T (-1, -1)	h = 0.5
c) $f(x) = x^4$	S (-1, 1)	h = 3.
d) $f(x) = 1/x$; $x \neq 0$.	Q (1, 1/3)	h = 2.
e) $f(x) = x + 1/x$; $x \neq 0$.	r (1, 2)	h = 3/2.
f) $f(x) = 4x - x^3$	O (-2, 0)	h = 5.
g) $f(x) = 1/x^2$; $x \neq 0$.	P (-3, 1/9)	h = 2.5
h) $f(x) = x^2 - 2/x$; $x \neq 0$.	u (-4, 16.5)	h = 8.
i) $f(x) = (40 - 2x)(30 - 2x)\,x$;	l (1, 1064)	h= 6.
j) $f(x) = \sqrt{x}$; $x \geq 0$.	T (1, 1)	h = 4.

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Introdúcete al paquete "G.C. GRAFICOS".

2. Para resolver los problemas elige la opción 4 del menú.

3. Introduce a la computadora los elementos que se te dan en el problema; la función, el punto fijo, y el incremento de x. Del menú que aparece en pantalla en este momento, elige la opción ESPERE y finalmente para la resolución del problema activa APUNTE. (copia de la pantalla un bosquejo en tu cuaderno indicando los puntos de la curva por donde pasa la recta secante, además anota sobre ella su pendiente).

4. ¿Cuántas rectas secantes a la curva pueden pasar por el punto fijo?

5. Escribe la fórmula para calcular la pendiente de cualquier recta secante que pase por el punto fijo en términos de los valores del punto fijo y la "h".

PROBLEMA 11.
En los ejercicios del problema 10, entre otras cosas obtuviste una fórmula para calcular la pendiente de cualquier recta secante a una curva que pasa por el punto fijo en términos de los valores de este y la "h", eso mismo puede hacerse para cualquier punto de la curva. Para las funciones del problema 10, llama $(x_0, f(x_0))$ a las coordenadas de un punto fijo "cualquiera" y obtén en cada caso, una fórmula para calcular la pendiente de cualquier recta secante que pasa por el punto fijo, expresada en términos de la abscisa del punto fijo y la "h".

PROBLEMA 12.
En cada uno de los incisos siguientes se te proporciona la función y un punto fijo. Realiza las actividades que se te indican.

a) $f(x) = x^2$	t (-2, 4)
b) $f(x) = x^3$	T (-1, -1)
c) $f(x) = x^4$	S (-1, 1)
d) $f(x) = 1/x$; $x \neq 0$.	Q (1, 1/3)
e) $f(x) = \sqrt{x}$; $x \geq 0$.	T (1, 1)
f) $f(x) = x + 1/x$; $x \neq 0$.	r (1, 2)
g) $f(x) = 4x - x^3$	O (-2, 0)
h) $f(x) = 1/x^2$; $x \neq 0$.	P (-3, 1/9)
i) $f(x) = x^2 - 2/x$; $x \neq 0$.	u (-4, 16.5)
j) $f(x) = (40 - 2x)(30 - 2x)x$; $x > 0$.	l (1, 1064)

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Introdúcete al paquete "G.C. GRAFICOS".

2. Elige la opción 4 del menú.

3. Introduce a la computadora los elementos que se te dan en el problema; la función, el punto fijo y un valor para "h". Del menú que aparece en pantalla en este momento, elige la opción NORMAL y finalmente para la resolución del problema activa APUNTE. Con los resultados que aparecen en pantalla llena la siguiente tabla.

x_0	h	m_s

a) ¿Qué pasa con la recta secante a la curva en relación a la recta tangente cuando los valores de "h" se acercan al cero?

b) ¿Qué sucede con los valores de la pendiente de la recta secante en relación a los valores de la pendiente de la recta tangente, a medida que los valores de "h" se acercan al cero?

c) ¿Cuál piensas que sea el valor de la pendiente de la recta tangente?

d) Escribe la fórmula para calcular la pendiente de cualquier recta secante a la curva que pasa por el punto fijo, en términos de la abscisa del punto fijo (x_0) y "h".

e) Utilizando papel milimétrico traza la recta tangente a la curva en el punto fijo.

EN EL PROBLEMA ANTERIOR ENCONTRASTE LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA GRAFICA DE LA FUNCION EN EL PUNTO FIJO DADO.

EN REALIDAD EN CUALQUIER PUNTO DE LA CURVA SE PUEDEN TRAZAR TANGENTES Y POR LO TANTO ES UTIL OBTENER UNA FORMULA PARA CALCULAR LA PENDIENTE DE CUALQUIER RECTA TANGENTE A LA CURVA.

EL PROCESO HASTA AQUI UTILIZADO PARA OBTENER LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA EN UN PUNTO FIJO DADO FUE ARITMETICO Y GEOMETRICO.

A CONTINUACION TRATAREMOS DE UTILIZAR EL TRABAJO REALIZADO EN LOS PROBLEMAS ANTERIORES PARA ENCONTRAR UN METODO ALGEBRAICO (MAS EFECTIVO) QUE NOS PERMITA ENCONTRAR LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO DADO.

PROBLEMA 13.
Determina el valor de la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en el punto (1, 1).

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Gráfica la función y señala el punto (1, 1). Utiliza la notación $(x_0 , f(x_0))$ para el punto fijo. (puedes utilizar el paquete g.c gráficos para realizar esta actividad y determinar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva).

2. Para la función dada, escribe la fórmula para determinar la pendiente de cualquier recta secante que pasa por el punto fijo, en términos de la abscisa del punto fijo y el incremento de x.

3. ¿Cuál debe ser el valor de "h" para que la fórmula anterior nos determine el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto fijo?

4. Sustituye ese valor en la fórmula que determina la pendiente de cualquier recta secante que pase por el punto fijo. ¿Qué sucede en la fórmula al sustituir el valor de "h"?

5. Desarrolla el numerador de la fórmula para las secantes y elimina los términos semejantes, con el resultado obtenido escribe la nueva fórmula de las secantes.

6. Si se puede realizar alguna simplificación algebraica en la fórmula obtenida en el paso 5, realízala.

7. Realiza en la fórmula obtenida en el paso 6. la actividad 4. y escribe el resultado obtenido.

"ESTA FORMULA NOS DETERMINA LA PENDIENTE DE CUALQUIER RECTA TANGENTE A LA GRAFICA DE LA FUNCION $F(X) = X^2$ "

8. Utiliza la fórmula para determinar la pendiente de cualquier recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ para resolver este problema.

9. En papel milimétrico traza la recta tangente a la curva en el punto (1, 1).

PROBLEMA 14.
Realiza las actividades del problema anterior para las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2$ en; (-2, 4), (-4, 16), (3, 9).

b) $f(x) = x^3$ en; (-1, -1), (2, 8).

c) $f(x) = x^4$ en; (-1, 1), (2, 16).

d) $f(x) = 1/x$; $x \neq 0$. en; (1, 1), (-2, -1/2).

e) $f(x) = 1/x^2$; $x \neq 0$. en; (-3, 1/9), (1, 1).

f) $f(x) = 1/x^3$; $x \neq 0$. en; (-2, -1/8).

g) $f(x) = x + 1/x$; $x \neq 0$. en; (1, 2).

h) $f(x) = 4x - x^3$ en; (-2, 0).

i) $f(x) = x^2 - 2/x$; $x \neq 0$. en; (-4, 16.5).

j) $f(x) = (40 - 2x)(30 - 2x)x$; $x > 0$. en; (1, 1064).

k) $f(x) = \sqrt{x}$; $x \geq 0$. en; (1, 1), (4, 2).

l) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $x \geq 0$. en; (1, 1), (8, 2).

m) $f(x) = \sqrt[4]{x}$; $x \geq 0$. en; (1, 1), (16, 2).

RESUMEN.

En la presentación de este módulo hacíamos ver que el propósito del mismo es ayudar a que podamos trazar la recta tangente a una curva en un punto dado (para ello necesitamos conocer su pendiente y por que punto pasa). Con el trabajo hasta aquí realizado hemos alcanzado ese objetivo.

Un resumen de lo que hemos hecho es el siguiente:

1). Dada una curva cualquiera $y = f(x)$ y un punto cualquiera de la misma, de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ que se considera fijo, tomamos otro punto de la curva diferente del primero y cuyas coordenadas representamos con $(x_0 + h, (f(x_0 + h))$ donde $h \neq 0$ (para que el segundo punto sea diferente del primero).

2). Estos dos puntos que pertenecen a la curva, determinan una recta secante a la misma, cuya pendiente se calcula:

$$m_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3). Cuando h es muy pequeña (cuando su valor es casi cero) la recta secante esta muy cercana a la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$ y por tanto la pendiente de la recta secante es casi igual a la pendiente de la recta tangente.

4). De lo anterior se estableció que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es el valor al que se aproxima la sucesión de pendientes de secantes a la curva que pasan por el punto fijo cuando el valor de h se acerca al cero. Ese valor se denomina valor límite y los matemáticos lo escriben de la siguiente manera:

$$m_{tg} = \lim_{h \to 0.} m_s$$

y lo leen "la pendiente de la recta tangente a la curva es el límite de la pendiente de la recta secante cuando "h" tiende a cero"

y como $m_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ finalmente

El valor de la pendiente de la recta tangente se escribe:

$$\boxed{m_{tg} = \lim_{h \to 0.} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

A esta expresión le llamaremos FORMULA GENERAL para la m_{tg}

PROBLEMA 15.
Utilizando la fórmula general, obtén en cada caso, la fórmula para determinar la pendiente de cualquier recta tangente a las siguientes curvas. Utiliza el paquete DERIVE para corroborar el resultado.

a) $f(x) = 3x + 5x^2$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

c) $f(x) = 4x^2$

d) $f(x) = 2/(3x)$

e) $f(x) = -5x^3$

f) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

g) $f(x) = x^2 + 1/x$

h) $f(x) = 3\sqrt{x} + 2$

i) $f(x) = (2x^2 - 5x)/3$

j) $f(x) = (-1/2)(1/x^3)$

COMENTARIO.
A los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores:

- Si $f(x) = x^2$, entonces $m_{tg} = 2x_0$,
- Si $f(x) = 1/x$, entonces $m_{tg} = -1/x_0^2$.

Los matemáticos le llaman a la fórmula de la pendiente de las rectas tangentes a la curva (m_{tg}), "LA DERIVADA DE LA FUNCION" y la denotan como $f'(x)$, es decir:

- Si $f(x) = x^2$, entonces $m_{tg} = f'(x) = 2x_0$,
- Si $f(x) = 1/x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = -1/x_0^2$.

Además como x_0 es cualquier abscisa, es decir puede tomar cualquier valor permitido, los matemáticos la llaman "x".

PROBLEMA 16.
En los problemas anteriores (14 y 15) obtuviste una fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a las curvas:

$f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 2x$

$f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 3x^2$

$f(x) = x^4$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 4x^3$

- Considerando los resultados anteriores ¿puedes predecir para las siguientes funciones la fórmula para las pendientes de las tangentes?

$f(x) = x^{13}$ $\quad f'(x) = m_{tg} =$?

$f(x) = x^7$ $\quad f'(x) = m_{tg} =$?

$f(x) = x^9$ $\quad f'(x) = m_{tg} =$?

¿Cuál será la fórmula para calcular la pendiente de las rectas tangentes (LA DERIVADA) a la función $f(x) = x^n$, donde n es entero positivo? ¿Si la función es de la forma $f(x) = C\cdot x^n$, donde n es entero positivo y C es un número real ? (REGLA 1).

PROBLEMA 17.

En los problemas anteriores encontraste que la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a las curvas:

$f(x) = 1/x$ $\qquad f'(x) = m_{tg} = -1/x^2$

$f(x) = 1/x^2$ $\qquad f'(x) = m_{tg} = -2/x^3$

$f(x) = 1/x^3$ $\qquad f'(x) = m_{tg} = -3/x^4$

- Considerando los resultados anteriores ¿puedes predecir para las siguientes funciones la fórmula para las pendientes de las tangentes?

$f(x) = 1/x^{11}$ $\qquad f'(x) = m_{tg} =$?

$f(x) = 1/x^8$ $\qquad f'(x) = m_{tg} =$?

$f(x) = 1/x^{17}$ $\qquad f'(x) = m_{tg} =$?

¿Cuál será la fórmula para calcular la pendiente de las tangentes (LA DERIVADA) a la función $f(x) = 1/x^n$, donde n es un entero positivo? ¿Si la función es de la forma $f(x) = C\cdot(1/x^n)$, donde n es un entero positivo y C es un número real? (REGLA 2).

PROBLEMA 18.

En los problemas anteriores encontraste que las fórmulas para calcular las pendientes de las rectas tangentes a las curvas:

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = m_{tg} = 1/2\sqrt{x}$.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad f'(x) = m_{tg} = 1/3(\sqrt[3]{x})^2$.

$f(x) = \sqrt[4]{x}$ $\qquad f'(x) = m_{tg} = 1/4(\sqrt[4]{x})^3$.

- Considerando los resultados anteriores ¿puedes predecir para las siguientes funciones la fórmula para las pendientes de las tangentes?

$f(x) = 1/\sqrt[9]{x}$ $\qquad f'(x) = m_{tg} =$?

$f(x) = 1/\sqrt[11]{x}$ $\qquad f'(x) = m_{tg} =$?

$f(x) = 1/\sqrt[17]{x}$ $\qquad f'(x) = m_{tg} =$?

¿Cuál será la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la función (LA DERIVADA) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un número entero? ¿Si la función es de la forma $f(x) = C(\sqrt[n]{x})$, donde n es un entero positivo y C es un número real? (REGLA 3).

PROBLEMA 19.
Utilizando las fórmulas encontradas en los problemas 16, 17 y 18 encuentra la fórmula para calcular la pendiente de cualquier recta tangente a la función (LA DERIVADA). Verifica el resultado encontrado con el paquete DERIVE.

a) $y = 4x^3$ b) $y = 2/x$ c) $y = 3\sqrt{x}$

d) $y = -2x^2$ d) $y = -1/(2x^2)$ e) $y = -2(\sqrt[7]{x})$

f) $y = x^2/3$ g) $y = (3/4)x^2$ f) $y = \sqrt[12]{x}/3$

PROBLEMA 20.
En los problemas anteriores encontraste que las fórmulas para calcular las pendientes de las rectas tangentes a las curvas:

a) $f(x) = 3x + 5x^2$ $f'(x) = m_{tg} = 3 + 10x$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ $f'(x) = m_{tg} = 3x^2 + 4x$

c) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ $f'(x) = m_{tg} = 2x + 2$

d) $f(x) = x^2 + 1/x$ $f'(x) = m_{tg} = 2x - 1/x^2$

e) $f(x) = 3\sqrt{x} + 2$ $f'(x) = m_{tg} = 3/2\sqrt{x}$

- Considerando los resultados anteriores ¿puedes predecir para las siguientes funciones la fórmula para las pendientes de las tangentes?

a) $f(x) = 10x - 3x^2 + 5$ $f'(x) = m_{tg} =$?

b) $f(x) = (-1/2)x^3 + 14x^2 - 1;$ $f'(x) = m_{tg} =$?

c) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + 3/x$ $f'(x) = m_{tg} =$?

d) $f(x) = -10x^2 + 1/x^2$ $f'(x) = m_{tg} =$?

¿Cuál será la fórmula para determinar las pendientes de las tangentes a la gráfica de la función $f(x) = u(x) + v(x)$, donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones? (REGLA 4).

REGLA 5. Si $f(x) = u(x)\cdot v(x)$ donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones entonces $f'(x) = m_{Tf} = u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x) = u(x)\cdot m_{Tv} + v(x)\cdot m_{Tu}$ donde m_{Tv} y m_{Tu} son las fórmulas para determinar las pendientes de las rectas tangentes a las curvas $u(x)$ y $v(x)$.

PROBLEMA 21.
Utilizando las fórmulas de los problemas anteriores, obtén en cada caso, la fórmula para calcular las pendientes de las tangentes a la siguientes curvas. Puedes utilizar el paquete DERIVE para verificar los resultados.

a) $f(x) = 5x^3 + 3x + 6$

b) $f(x) = x + \sqrt{x}$

c) $f(x) = 4x^5 + 3x^3 - 2x$

d) $f(x) = 3/(2X) - \sqrt[7]{x}$

e) $f(x) = 7x^5 - 5x^3 + 3$

f) $f(x) = x^5 + 2/(5x^3) - 1/x$

g) $f(x) = x + 1/x$

h) $f(x) = (4x + x\sqrt{x})/3$

i) $f(x) = 5x^2 - 4/x^2$

j) $f(x) = (4 + 3x - x^2)/(3x)$

PROBLEMA 22.
Trazarle en cada caso, la tangente a la curva en el punto donde se indica:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ en $x = -2$ y en $x = 3/2$

b) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 29x + 20$ en $x = -1$ y en $x = 3$

c) $f(x) = 3x^2 - 1/x$ en $x = 1$

d) $f(x) = (42 - 2x)(20 - 2x)x$ en $x = 5$

e) $f(x) = x + 4x(10000/x^2)$ en $x = 20$.

f) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$ en $x = -1$ y en $x = 1$

g) $f(x) = (3x^2 + 6x - 15)/5x$ en $x = 0$ y en $x = 5$

h) $f(x) = (4x^3 + x\sqrt{x})/5x$ en $x = 0$ y en $x = 10$

PROBLEMA 23.
Determina el punto o los puntos donde las curvas dadas tienen las pendientes indicadas:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ $m = -4$, $m = 0$, $m = 5$

b) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 29x + 20$ $m = -7$, $m = 0$, $m = 11$

c) $f(x) = (42 - 2x)(20 - 2x)x$ $m = 0$

d) $f(x) = x + 4x(10000/x^2)$ $m = 0$, $m = 20$

e) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$ $m = 0$, $m = 1/2$

f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ $m = -5/4$

g) $f(x) = x^3$ $m = 0$

MODULO III.

RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS.

PRESENTACION.

Como se mencionó en el módulo I, el propósito fundamental de este curso es que aprendas a resolver problemas elementales de optimización, así como asimilar el método de resolución de los mismos. Para lograr ese objetivo tuviste un primer contacto con los problemas donde los enfrentaste con herramienta matemática básica de aritmética, algebra y geometría; concluyéndose al final del módulo que resultaba necesario la búsqueda de una herramienta mas efectiva para la resolución de problemas de optimización, debido entre otras cosas al trabajo aritmético y geométrico tan laborioso que se requería en ese momento para "aproximarse" a la solución.

En el módulo II, realizaste un trabajo cuya finalidad era proporcionarte una herramienta necesaria y mas efectiva para la resolución de los problemas de máximos y mínimos, esa herramienta la obtuvimos del estudio del "cálculo diferencial", donde a través de "manipular" a la recta secante, se resolvió el problema de trazarle la recta tangente a una curva en un punto dado.

En este módulo se te plantean una serie de problemas de optimización con los siguientes propósitos:

* Que resuelvas los problemas que se plantearon en el primer módulo.

* Se enlistan problemas de optimización para motivar el estudio de otras fórmulas para obtener las pendientes de las rectas tangentes a otro tipo de curva y extender así el estudio de la DERIVADA.

Problema 1. El gallinero.

Doña Josefa, habitante de Ures, ha criado gallinas sin necesidad de tenerlas cautivas, esto le está ocasionando una serie de problemas por lo que decide construir un gallinero en la parte posterior de su casa, sus ahorros sólo le alcanzan para comprar 50 metros lineales de tela para cercarlo. Si el terreno donde desea construir el gallinero es de 20 metros por 40 metros ¿Qué dimensiones deberá de tener un gallinero de forma rectangular para que este abarque la mayor área posible, y así encerrar la mayor cantidad de gallinas?

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Haz un dibujo donde representes el gallinero, con la información que se te proporciona en el problema.

2. Escribe lo que se te pide encontrar en este problema.

3. Anota la fórmula para calcular el área del gallinero.

4. Como puedes apreciar, la fórmula anterior expresa el área del gallinero en términos de la base y la altura. Ahora expresa la relación para calcular el área del gallinero solo en términos de la base.

A ESTA FUNCION LOS MATEMATICOS lLAMA "MODELO MATEMATICO DEL PROBLEMA".

5. ¿Cuáles son los valores que en este problema puede tomar la base del gallinero?

UNA VEZ MODELADO UN PROBLEMA, ESTE SE PUEDE RESOLVER DE DOS MANERAS DIFERENTES, UNA, ES OBTENER LA SOLUCION DEL PROBLEMA A TRAVES DE UN METODO GRAFICO, LA OTRA FORMA ES ENCONTRAR LA SOLUCION A TRAVES DE UN PROCESO ALGEBRAICO.

EN ESTE MODULO SE PRESENTARAN LAS DOS MANERAS DE RESOLUCION, CON LA SUGERENCIA DE QUE CUANDO EMPLEES EL METODO GRAFICO UTILICES LA COMPUTADORA CON EL PAQUETE; CALCULUS.

COMENTARIO.

A. PARA LA RESOLUCION GRAFICA DE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS TE AUXILIARAS DE LA COMPUTADORA UTILIZANDO EL PAQUETE CALCULUS.

EL PAQUETE CALCULUS SE PUEDE UTILIZAR EN CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, PARA REALIZAR TAREAS LABORIOSAS DONDE SE INVIERTE MUCHO TIEMPO Y ESFUERZO. A CONTINUACION SE TE PROPORCIONA INFORMACION ELEMENTAL DEL PAQUETE CON LA FINALIDAD DE QUE ADQUIERAS LOS ELEMENTOS MINIMOS PARA EL MANEJO DE ESTE:

* PARA ENTRAR AL PAQUETE TECLEA CALCULUS Y ACTIVA ENTER.
* LA INFORMACION QUE APARECE EN LA PRIMERA PANTALLA ES LA PRESENTACION DEL PAQUETE. A CONTINUACION APARECERA EL MENU PRINCIPAL QUE CONSTA DE 10 TEMAS MATEMATICOS DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL Y OTRAS AREAS DE LA MATEMATICA, PARA INTRODUCIRTE EN ALGUNO DE ELLOS SOLO PRESIONA LAS TECLAS DEL F1 AL F10 SEGUN EL NUMERO QUE INDICA EL MENU.

EL MENU PRINCIPAL ES EL SIGUIENTE:

1. GENERAL.
2. LIMITES.
3. MAXIMOS Y MINIMOS.
4. CALCULO DE AREAS.
5. L' HOPITAL.
6. CONICAS.
7. GRAFICACION POR PARAMETROS.
8. SERIES DE TAYLOR.
9. DIFERENCIALES.
10. ALTO

B. EN LA RESOLUCION GRAFICA DE LOS PROBLEMAS SOLO UTILIZARAS LA OPCION 1 Y 3. SE TE SUGIERE QUE CUANDO DISPONGAS DE TIEMPO LIBRE EXPLORES LAS DEMAS OPCIONES PARA QUE LAS CONOSCAS Y LAS PUEDAS UTILIZAR EN ESTE CURSO DE MATEMATICAS O EN OTROS POSTERIORES.

6. Para la resolución gráfica del problema, utiliza la opción 3 del menú principal, copia un bosquejo de la gráfica, localiza el punto que representa la solución del problema y trázale una recta tangente a la curva en ese punto.

7. Encuentra la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

8. ¿Qué punto de la gráfica representa la solución del problema? ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto?

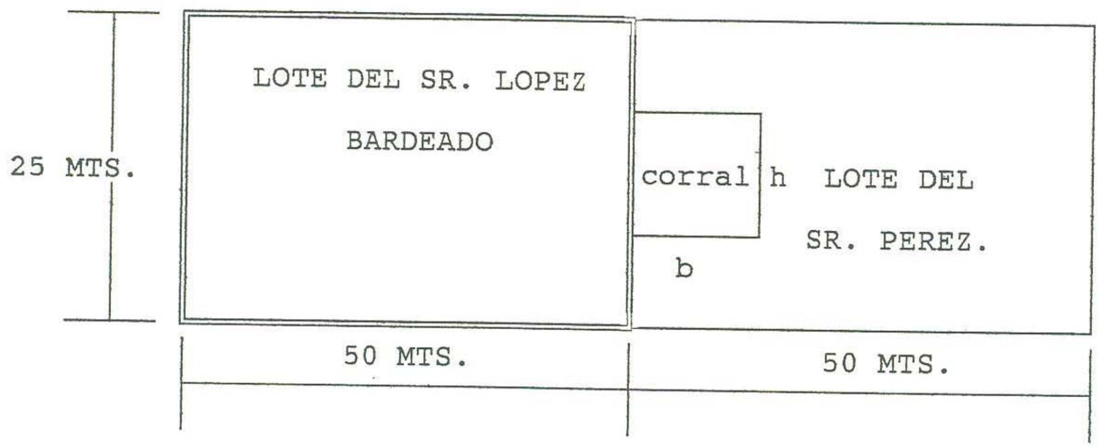
9. Utilizando la fórmula obtenida en la actividad 7, sustituye la condición geométrica que cumple la recta tangente de la actividad 8, encuentra el punto de la gráfica que representa la solución de este problema.

10. Escribe la solución del problema:

Problema 2. El corral.

López y Pérez poseen lotes vecinos de 25 metros por 50 metros(ver figura), López ha construido una barda alrededor de su terreno. Pérez quiere construir un corral rectangular para encerrar su perro, de área tan grande como sea posible, para esto dispone de 38 metros lineales de material para cercar. Por supuesto Pérez puede utilizar una pared de las que ya tiene bardeada el señor López.

figura.



ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Escribe lo que se te pide encontrar en este problema.

2. Expresa la fórmula para el área del corral como una función de su base.

"ESTA ES LA FUNCION QUE MODELA EL PROBLEMA"

3. Determina los valores que puede tomar la base del corral.

4. Para la resolución gráfica del problema, utiliza la computadora con el paquete "calculus" en la opción 3 del menú principal, copia un bosquejo de la gráfica, localiza el punto que representa la solución del problema y trázale una recta tangente a la curva en ese punto.

5. Encuentra la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

6. ¿Qué punto de la gráfica representa la solución del problema? ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto?

7. Utilizando la fórmula obtenida en la actividad 5, sustituye la condición geométrica que cumple la recta tangente en la actividad 6 y encuentra el punto de la gráfica que representa la solución de este problema.

8. Escribe la solución del problema:

Problema 3. La llantera.

En un lote baldío de 50 metros por 100 metros, una compañía llantera requiere bardear un terreno rectangular de 600 metros cuadrados de superficie, dejando sin bardear el lado que da al norte porque será utilizado como entrada al negocio, ¿Qué dimensiones deberá de tener el terreno para que la suma de la longitud bardeada sea la mínima?

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Haz un croquis donde representes la información que se te proporciona en este problema.

2. Escribe lo que se te pide encontrar.

3. Encuentra la función que modela el problema.

4. Encuentra los valores que puede tomar variable con la expresaste la función de este problema.

5. Utiliza la computadora para encontrar la solución del problema.

6. Utilizando la fórmula de las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función, encuentra el punto de la curva que representa la solución del problema.

7. Escribe la solución del problema.

Problema 4. La caja.

Un empresario desea hacer cajas sin tapa para envasar su producto, para esto hará uso de piezas rectangulares de cartón de 50 centímetros por 30 centímetros, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas, y doblando como lo ilustra el profesor en la construcción del modelo. Encuentra la longitud del lado del cuadrado que será cortado en cada esquina si se quiere obtener una caja que encierre el mayor volumen posible.
Nota! Se te sugiere que construyas un modelo físico del problema siguiendo las indicaciones del profesor, y anotes en el, la información que se te proporciona en el enunciado.

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Si "x" representa la longitud del lado del cuadrado que se cortará en las cuatro esquinas. Escribe la función que modela el problema.

2. Encuentra los valores que puede tomar la variable "x".

3. Resuelve el problema gráficamente utilizando la computadora.

4. Resuelve el problema utilizando el método algebraico.

5. Escribe la solución del problema.

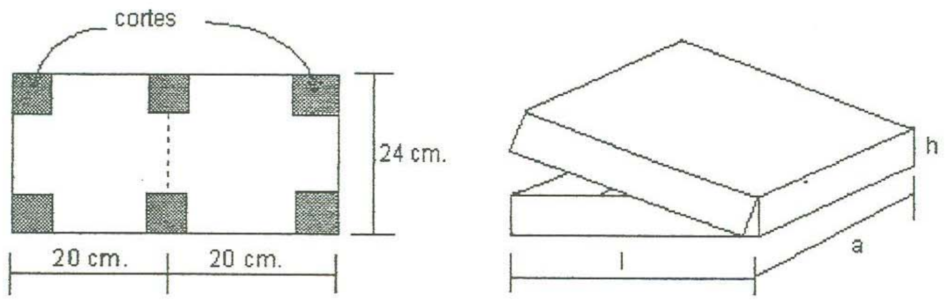
<u>ACTIVIDAD IMPORTANTE.</u> Discute en tu equipo el proceso que se siguió para resolver los problemas anteriores con la finalidad de que puedan observar el plan o estrategia de solución para estos problemas. Una vez hecho esto, escribe en tu cuaderno, los pasos que pudiste apreciar en esta discusión.

Con los resultados de la discusión anterior trata de abordar los siguientes problemas.

COMENTARIO. Se te sugiere que elabores un modelo físico del problema y anotes en el, la información que se te proporciona en aquellos problemas donde sea posible.

Problema 5. La caja para empacar harina.

Se pretende empacar harina en cajas con tapadera, contando para su manufactura con láminas de cartón rectangulares de 40 cm. de largo por 24 cm. de ancho, cortando cuadrados iguales y doblando como se muestra en la figura.



a) ¿Cuánto mide el lado de los cuadrados que se cortan que hacen que el volumen de la caja sea el máximo?

b) ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen?

c) ¿Cuál es el volumen de dicha caja?

Problema 6. La barra de margarina.

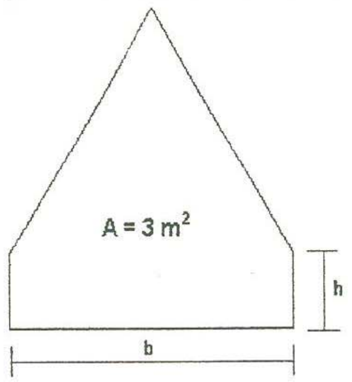
Un tamaño de la margarina primavera se vende en barras que tienen forma de un prisma de base cuadrada, el volumen de las barritas es de 108 centímetros cúbicos. Determinar las dimensiones de la barra que minimizan la cantidad de envoltura.

Problema 7. La lata para envasar chocolate.

La compañía nestlé usa latas de hojalata de forma cilíndrica para envasar chocolate en polvo marca "Quik" en su presentación de 400 gr. Hallar las dimensiones mas económicas (es decir, área mínima de hojalata empleada en cada bote), sabiendo que el volumen de cada bote es de 909.2 centímetros cúbicos.

Problema 8. La ventana.

Un arquitecto desea diseñar cierto tipo de ventana de tal manera que la parte inferior sea rectangular y la superior sea un triángulo equilátero como se ilustra en la figura. Si cada ventana tiene una área de 3 metros cuadrados ¿Cuáles son las dimensiones de la ventana para que su perímetro sea el menor posible?



Problema 9. La alberca.

Una persona tiene un patio rectangular en su casa que mide 20 metros por 30 metros, y desea construir una alberca con fondo rectangular cuya área sea de 40 metros cuadrados. Determina las dimensiones del fondo para que la cantidad de material que se usará en las paredes sea el mínimo.

Problema 10. La lata para envasar aceite.

Una compañía fabricante de aceites desea construir latas cilíndricas de un litro de capacidad para envasar el producto. Encuentra las dimensiones que debe tener la lata que requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

Problema 11. El cartel.

Un impresor recibe un pedido para producir un cartel rectangular que contiene 25 pulgadas cuadradas de impresión rodeadas por márgenes de 2 pulgadas a cada lado y 4 pulgadas en la parte superior e inferior. ¿cuáles son las dimensiones del papel mas pequeño que puede usarse para hacer el cartel?

Problema 12. Los postes.

Dos postes de longitudes de 15 y 10 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 20 metros. Calcula la longitud mínima de un cable que vaya desde la punta de uno de los postes hasta el suelo y luego vuelva subir hasta la punta del otro poste.

Problema 13. El triángulo rectángulo.

Si **a** y **b** son los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa **100** , encuentra el triángulo que posea el valor mayor de 2a + b.

Problema 14. El nadador.

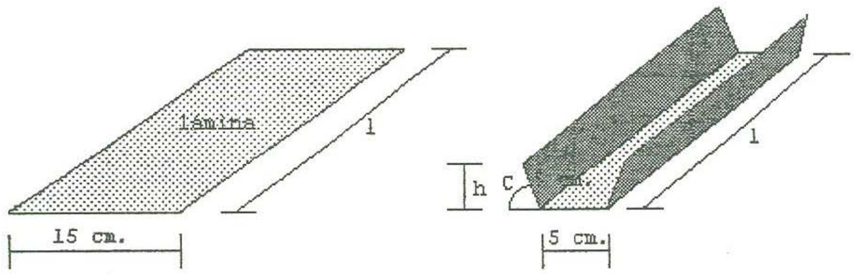
Un nadador está situado en un punto A de un lado de un río recto de 200 metros de ancho y quiere desplazarse a un punto B situado al otro lado del río 700 metros aguas abajo. Si nada del punto A a un punto P al otro lado del río a razón de 30 metros por minuto y camina del punto P al B a razón 80 metros por minuto. Encuentra la ruta que el nadador debe de cubrir para llegar de A a B en el menor tiempo posible.

Problema 15. La escalera.

Una cerca tiene 8 pies de altura con respecto al piso y corre paralela a un edificio. La cerca se encuentra a un pie del edificio. Encuentra la longitud de la escalera mas corta que pueda colocarse en el suelo y recargarse en el edificio por encima de la cerca.

Problema 16. El canalón.

Supóngase que le ha sido asignado el trabajo de construir un canalón para transportar agua de lluvia de una hoja de metal de 15 centímetros de ancho. A un tercio del ancho de la hoja se dobla esta hacia arriba un ángulo C, tal y como se muestra en la figura, para formar los lados del canalón. ¿Qué tan grande debe hacerse el ángulo C para maximizar el área de la sección transversal del canalón y por lo tanto su capacidad de acarreo?



Problema 17. El bloque.

Un hombre está jalando un bloque de 50 kg. con velocidad constante, por medio de una cuerda sobre un piso horizontal, si el coeficiente de fricción es de 0.6 ¿Cuál es el ángulo con el que el hombre debe tirar la cuerda para hacer el mínimo esfuerzo para jalar el bloque?

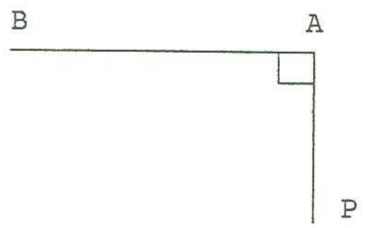
Problema 18. EL cartel.

Sobre una torre se levanta un cartel. El cartel tiene 10 metros de alto y su orilla inferior esta a 91.5 metros sobre el nivel de la calle. Un hombre cuyos ojos se encuentran a 1.5 metros sobre el nivel de la calle alza la vista para leer el cartel ¿Qué tan lejos se debe colocar de la base de la torre si se quiere ver el cartel lo mas claramente posible, es decir, a qué distancia se hace máximo el ángulo formado por los ojos del hombre y las orillas inferior y superior del cartel? Sugerencia: Maximizar la tangente del ángulo.

PROBLEMAS DE REPASO

Problema 19. El lanchero.

Un hombre está en un bote en el punto P a un kilómetro del punto A que está en la playa (ver figura). Desea ir al punto B que esta a un kilómetro de A perpendicularmente a PA. Si puede remar a 3 km/hr. y caminar a 5 km/hr. Determina hacia que punto C entre A y B, debe remar para llegar a B en el menor tiempo posible.



Problema 20. La ventana.

Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado con un semicírculo. Encuentra las dimensiones de la ventana que deja pasar mas luz, si su perímetro mide 5 metros.

Problema 21. El libro.

Las páginas de un libro deben tener cada una 600 centímetros cuadrados de área con márgenes de 2 centímetros a los lados y 3 centímetros arriba y abajo. Encuentra las dimensiones de la página que permitan la mayor área impresa posible.

Problema 22. El canalón (2º problema).

Una pieza larga rectangular de lámina de 50 centímetros de ancho va a convertirse en un canal para agua doblando hacia arriba dos de sus lados hasta formar ángulos de 120º con la base. ¿Cuál debe ser la dimensión de las partes dobladas para que el canal tenga capacidad máxima?

Problema 23. La viga.

Encuentra las dimensiones de la viga rectangular de mayor sección transversal, que puede cortarse de un tronco cilíndrico de 80 centímetros de radio.

Problema 24. El paquete de correo.

Un paquete puede enviarse por correo si la suma de su altura y el perímetro de su base es menor que dos metros y medio. Encuentra las dimensiones de la caja de volumen máximo que puede enviarse por correo si la base del paquete es cuadrada.

Problema 25. El triángulo isósceles.

Si el ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles se incrementa a razón de 2 rad./min. y si los lados adyacentes del triángulo conservan su longitud de 10 centímetros ¿Qué tanto estará creciendo la base del triángulo en el instante que el ángulo mencionado se convierte en ángulo recto?

MODULO IV.

MAS PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS.

PRESENTACION.

Hasta este momento del curso has resuelto cierto tipo de problemas de optimización utilizando la herramienta que se presentó en el módulo II. En este módulo te darás cuenta que existen mas problemas de máximos y mínimos que no podrías resolver por las limitaciones de la herramienta que posees.

El propósito de este material es de analizar algunos de esos problemas para buscar la herramienta necesaria para su solución, finalmente se te proporcionaran una seria de reglas (las mas conocidas) para derivar funciones que seguramente aparecerán al momento de que pretendas resolver problemas en el nivel superior.

Problema 1. Los postes.

Dos postes de longitudes de 15 y 10 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 20 metros. Calcula la longitud mínima de un cable que vaya desde la punta de uno de los postes hasta el suelo y luego vuelva subir hasta la punta del otro poste.

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Haz un dibujo donde representes la información que se te proporciona en el problema.

2. Escribe lo que se te pide encontrar en este problema.

3. Anota la fórmula para calcular la longitud del cable.

4. Ahora expresa la relación anterior en función de una variable.

A ESTA FUNCION LOS MATEMATICOS LLAMA "MODELO MATEMATICO DEL PROBLEMA".

5. ¿Cuáles son los valores que en este problema puede tomar la variable independiente?

METODO GRAFICO.

Utiliza la computadora con el paquete de tu preferencia (calcula, calculus, g.c. gráficos, etc). para encontrar la solución gráfica del problema.

METODO "ALGEBRAICO".

6. Encuentra la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

COMENTARIO.

COMO PUEDES OBSERVAR EN LA ACTIVIDAD ANTERIOR, NO CONOCES UNA REGLA PARA OBTENER LA FORMULA DE LAS PENDIENTES DE LAS RECTAS TANGENTES (LA DERIVADA) A LA GRAFICA DE LA FUNCION.

ES IMPORTANTE HACER LA ACLARACION QUE ESTE Y CUALQUIER TIPO DE REGLAS DE DERIVACION SE OBTIENEN CON UN PROCESO SEMEJANTE A LOS UTILIZADOS PARA OBTENER LAS PRIMERAS REGLAS QUE CONOCISTE EN ESTE CURSO, ES DECIR NECESARIAMENTE TENDRIAMOS QUE RESOLVER "UN LIMITE".

NO ESTA CONTEMPLADO DENTRO DE LOS PROPOSITOS DE ESTE CURSO LA DISCUSION SOBRE LA OBTENCION DE ESTAS REGLAS, POR LO QUE DE AQUI EN DELANTE SOLO SE TE PROPORCIONARA LA REGLA DE MANERA DIRECTA.

REGLA. Si $f(x) = \sqrt{g(x)}$; donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones, entonces;

$m_{tg} = f'(x) = g'(x)/2 \sqrt{g(x)}$

- Ahora, resuelve la actividad anterior.

7. Utilizando la fórmula de las tangentes (la derivada) encuentra el punto de la gráfica que representa la solución del problema.

8. La solución del problema es:

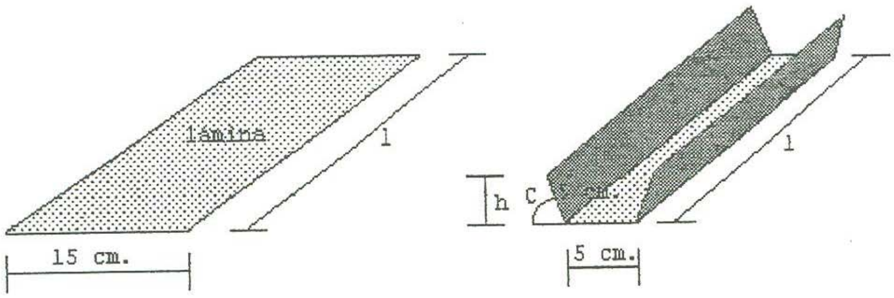
localiza el punto que representa la solución del problema y escribe sus coordenadas. Con la información obtenida de la gráfica escribe la solución del problema.

METODO "ALGEBRAICO".

7. Encuentra la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

Problema 2. El canalón.

Supóngase que le ha sido asignado el trabajo de construir un canalón para transportar agua de lluvia de una hoja de metal de 15 centímetros de ancho. A un tercio del ancho de la hoja se dobla esta hacia arriba un ángulo B, tal y como se muestra en la figura, para formar los lados del canalón. ¿Qué tan grande debe hacerse el ángulo B para maximizar el área de la sección transversal del canalón y por lo tanto su capacidad de acarreo?



ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Escribe lo que se te pide encontrar en este problema.

2. Anota la fórmula para calcular el área de la sección transversal del canalón.

3. Ahora expresa la relación anterior en términos de "x".

"MODELO DEL PROBLEMA"

5. ¿Cuáles son los valores que en este problema puede tomar la variable independiente?

METODO GRAFICO.

6. Elabora una gráfica del problema en el plano cartesiano, en ella localiza el punto que representa la solución del problema y escribe sus coordenadas. Con la información obtenida de la gráfica escribe la solución del problema.

METODO "ALGEBRAICO".

7. Encuentra la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

COMENTARIO.

COMO PUEDES OBSERVAR EN LA ACTIVIDAD ANTERIOR, NO CONOCES UNA REGLA PARA OBTENER LA FORMULA DE LAS PENDIENTES DE LAS RECTAS TANGENTES (LA DERIVADA) A LA GRAFICA DE LA FUNCION.

A CONTINUACION SE TE PROPORCIONA LA REGLA PARA DERIVAR ESTA FUNCION.

REGLA. Si $f(x) = \text{sen } x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = \cos x$

REGLA. Si $f(x) = \cos x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = -\text{sen } x$

-Ahora resuelve la actividad anterior.

7. Utilizando la fórmula de las tangentes (la derivada) encuentra el punto de la gráfica que representa la solución del problema.

8. La solución del problema es:

COMENTARIO.

DENTRO DE LOS PROPOSITOS DE ESTE CURSO SE CONTEMPLA QUE RESUELVAS EL TIPO DE PROBLEMAS PRESENTADO EN EL MODULO III, ES IMPORTANTE DESTACAR QUE NO SON LOS UNICOS PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS QUE EXISTEN, ES DECIR EXISTEN PROBLEMAS DE OPTIMIZACION QUE DAN ORIGEN A OTRO TIPO DE FUNCIONES Y SEGURAMENTE CUANDO INGRESES AL NIVEL SUPERIOR, ESTOS PROBLEMAS SE TE PRESENTARAN EN LOS CURSOS DE MATEMATICAS.

A CONTINUACION SE TE PROPORCIONAN UN SERIE DE REGLAS DE DERIVACION (LAS MAS CONOCIDAS) QUE CONTEMPLAN ALGUNAS DE ESAS FUNCIONES CON EL PROPOSITO QUE LAS UTILICES Y ADQUIERAS HABILIDAD PARA ENCONTRAR SU DERIVADA.

las reglas que hasta el momento has utilizado son:

Regla 1. Si $f(x) = C \cdot x^n$; $C \in R$ y $n \in N$; entonces;

$m_{tg} = f'(x) = C \cdot n\ x^{n-1}$

Regla 2. Si $f(x) = C(1/x^n)$; $C \in R$ y $n \in N$; entonces;

$m_{tg} = f'(x) = C(-n/x^{n+1})$

Regla 3. Si $f(x) = C \sqrt[n]{x}$; $C \in R$ y $n \in N$; entonces;

$m_{tg} = f'(x) = C(1/n \sqrt[n]{x^{n-1}})$

Regla 4 (Suma de funciones). Si $f(x) = u(x) + v(x) + w(x) + \ldots$

entonces; $m_{tg} = f'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) + \ldots$

Regla 5. Si $f(x) = C$; $C \in R$; entonces;

$m_{tg} = f'(x) = 0$

Regla 6 (Producto de dos funciones). Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$;

entonces; $m_{tg} = f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$

Regla 7. Si $f(x) = \sqrt{g(x)}$; donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones,

entonces; $m_{tg} = f'(x) = g'(x)/2 \sqrt{g(x)}$

Regla 8. Si $f(x) = \text{sen } x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = \cos x$

Regla 9. Si $f(x) = \cos x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = -\text{sen } x$

Las reglas adicionales son:

Regla 10 (Cociente de dos funciones). Si $f(x) = g(x)/h(x)$,

entonces; $m_{tg} = f'(x) = [\, h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)] / [\, h(x)]^2$

Regla 11. Si $f(x) = \tan x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = \sec^2 x$

Regla 12. Si $f(x) = \text{ctg } x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = -\csc^2 x$

Regla 13. Si $f(x) = \sec x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = \sec x \cdot \tan x$

Regla 14. Si $f(x) = \csc x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = -\csc x \cdot \text{ctg } x$

Regla 15. Si $f(x) = \text{Ln } x$, entonces; $m_{tg} = f'(x) = 1/x$

Regla 16. Si $f(x) = e^x$, entonces; $m_{tg} = f'(x) = e^x$

Problema 3. Utilizando las reglas anteriores encuentra la fórmula para determinar las pendientes de las rectas tangentes (la derivada) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{(3x^2 + 5x - 1)^3}$ b) $f(x) = \sqrt{(4x + 6)/(x^2 + 3x + 4)}$

c) $S(t) = \sqrt{100t^2 + 16}$ d) $f(x) = \sqrt{25 - x2}$

e) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ f) $f(x) = \sqrt{x(x^2 - 8x + 9)}$

"h" tiende a cero) para las siguientes funciones, se sugiere que grafiques la función, selecciones un punto fijo cualquiera y traces las secantes necesarias para obtener la recta tangente.

a) $f(x) = \text{sen } x$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \tan x$

g) $S(t) = \sqrt{10t^3 + 16t^2 - 10}$ h) $f(x) = \sqrt{(25 - x^2)(x^2 + 2x)}$

i) $f(x) = (3x^2 + 5x - 1)/(x^2 + 3x + 4)$

j) $S(t) = (100t^2 + 16t)/ (10t^3 + 16t^2 - 10)$

k) $f(x) = (x\cdot \sqrt{x})/ x^3$

l) $f(x) = (-2x^3 + 4x^2 + 10x - 1)/ x^3$

m) $f(x) = (x^2 - 8x + 9) / (4x + 6)$

n) $f(x) = (25 - x^2)(x^2 + 2x) / (-8x^3 + 7x^2 + 10x - 1)$

ñ) Verifica que si $f(x) = [g(x)]^2$, entonces;

$m_{tg} = f'(x) = 2g(x)\cdot g'(x)$

o) Encuentra la regla para derivar $f(x) = u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$

p) Encuentra la regla para derivar $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$

Problema 4. Encuentra la fórmula general ($m_{tg} = \lim m_s$; cuando la "h" tiende a cero) para las siguientes funciones, se sugiere que grafiques la función, selecciones un punto fijo cualquiera y traces las secantes necesarias para obtener la recta tangente.

a) $f(x) = \text{sen } x$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \tan x$

Problema 5. Utilizando las reglas de derivación anteriores encuentra la fórmula para determinar la pendiente de cualquier tangente (la derivada) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2 \text{ sen } x\cdot\cos x$ b) $f(x) = \cos x$
c) $f(x) = 2 \text{ sen}^2 x$ d) $f(x) = \cos 2x$

e) $S(t) = \text{sen } t + \sqrt{16 - \cos^2 t}$

f) $f(x) = x/\tan x$ g) $f(x) = \sec x\cdot\tan x$

h) $f(x) = (x + \text{ctg } x)^2$ i) $f(x) = x(\tan x - \cot x)$

j) $h(t) = 6 - 3 \text{ sen } t$

k) $v(t) = \cos t + \dfrac{\cos t \text{ sen } t}{\sqrt{16 - \cos^2 t}}$

l) $h(t) = (10 \sqrt{\cos^2 t})/(1 + t)$

m) Utilizando la regla 8 y 9 comprueba que:

m.1) Si $f(x) = \cot x$, entonces; $m_{tg} = f'(x) = -\csc^2 x$

m.2) Si $f(x) = \tan x$, entonces; $m_{tg} = f'(x) = \sec^2 x$

Problema 6. Encuentra la fórmula general para las pendientes de las tangentes ($m_{tg} = \lim m_s$; cuando la "h" tiende a cero) de las siguientes funciones, se sugiere que grafiques la función, selecciones un punto fijo cualquiera y traces las secantes necesarias para obtener la recta tangente.

a) $f(x) = \text{Ln } x$

b) $f(x) = e^x$

Problema 7. Utilizando las reglas anteriores encuentra la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4\ln x$

b) $f(x) = -2e^x$

c) $f(x) = (e^x)(\ln x)$

d) $f(x) = 12\ln x + 5\cos x - 3e^x$

e) $f(x) = \sqrt{\ln x + e^x}$

f) $f(x) = 5\ (\ln x)^2$

g) $f(x) = \ln x/e^x$

h) $f(x) = \text{sen}^2 x + 3\sec x + 6e^x$

i) $f(x) = \sqrt{(e^x)(\ln x)}$

CAPITULO VI

NOTAS PARA EL CURSO TRADICIONAL.

Las notas de apoyo para este curso fueron elaboradas considerando las ideas expuestas en los libros "lecciones de calculo 1" de Cruse/Lehman y el "Calculus" de Morris Kline. El orden de los contenidos se apega al establecido en el programa de estudios para el curso de cálculo diferencial del nivel medio superior, su contenido se resume brevemente a continuación:

En el tema I, funciones; se aborda el estudio de las funciones, a partir de problemas físicos y geométricos se trata de estudiar el concepto de función, así como su representación gráfica, el dominio y el rango de una función.

El tema II, Limites y Derivadas; a partir de tres problemas de máximos y mínimos se pretende propiciar el estudio de un método para trazar rectas tangentes a una curva, considerando en este método la presentación del concepto de la derivada, las primeras reglas para derivar, así como la idea de límite y la resolución de límites.

El tema III, Aplicaciones (Parte I); Se utiliza la herramienta matemática discutida en los temas anteriores para resolver problemas de máximos y mínimos.

El tema IV, Aplicaciones (Parte II); Se Aborda el estudio de mas problemas de máximos y mínimos para propiciar el estudio de nuevas reglas para derivar como son; la regla de la cadena, reglas para derivar funciones trigonométricas, etc.

I. FUNCIONES.

INTRODUCCION.

Iniciaremos el curso de cálculo diferencial con el estudio de las funciones, este se llevará a cabo con la presentación de una serie de problemas geométricos y físicos con el propósito de presentar en algunos casos la idea y en otros el concepto de lo que es una función, qué es el dominio y el rango de una función, cómo se elabora la gráfica de una función.

Problema 1. La fórmula $A = l^2$, se utiliza para calcular el área de un cuadrado, donde "A" representa el área del cuadrado y "l" la medida de su lado. Con esta relación calcularemos el área de "algunos" cuadrados y pasaremos la información a la siguiente tabla:

l	1	1.5	2	4	9	20	100
A	1	2.25	4	16	81	400	10000

Pregunta. En este problema ¿Pueden colocarse en la tabla valores negativos de l? ¿Por qué?

En la fórmula anterior, al momento de calcular el área del cuadrado puede observarse como depende el valor de la variable A del valor de la variable l.

Esta dependencia en muchas ocasiones se comprende mejor representando la relación por medio de una gráfica, cuando la relación a graficar es entre dos variables se puede utilizar el plano cartesiano para ello.

Para la relación anterior representemos en el eje "X" los valores de "l" y en el eje "Y" los valores de A.

Para que se vea mas claro la forma de la gráfica calculemos más valores y representémoslos en el plano (ver figura a).

l	0.5	1.25	2.25	2.5	3.5	
A	0.25	1.5625	5.0625	6.25	12.25	

En la gráfica "para cada valor que toma la variable l, ¿Cuantos valores de A le corresponden?".

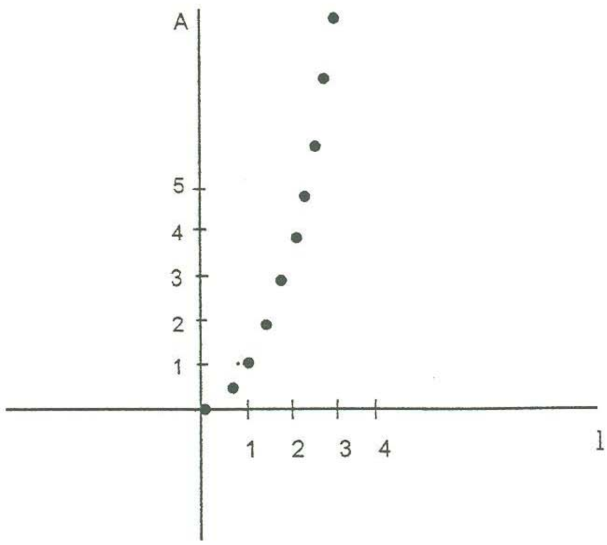
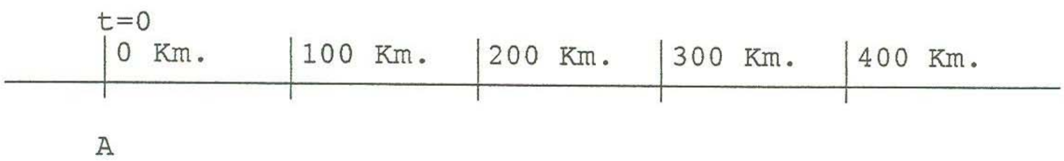


figura a.

Problema 2. Un cuerpo se mueve en línea recta con una velocidad de 80 Km/hr. iniciando el movimiento desde el punto A y moviéndose hacia la derecha (ver figura).



Representamos con la letra "d" la posición del cuerpo después de transcurrido un tiempo "t" expresado en horas.

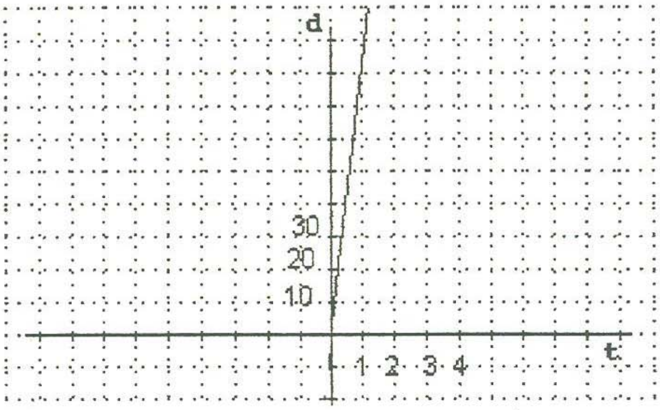
En la siguiente tabla se muestran "algunas" posiciones para algunos tiempos.

t	1	1.5	2	3	4	5	
d	80	120	160	240	320	400	

Pregunta. En este problema ¿Se puede obtener una posición del cuerpo cuando los valores de t < 0 ?

Para calcular "d" es evidente que se multiplicó 80 por"t", es decir, la fórmula para calcular la posición del cuerpo dado el tiempo en horas es d = 80 t, como en el ejemplo anterior, nuevamente se vuelve a manifestar una dependencia entre "d" y "t", específicamente cuando se calculó "d", el valor de esta dependía del valor que tomaba "t".

Si en el eje "X" representamos el tiempo en horas y en el eje "Y" la posición "d", la gráfica de la relación d = 80 t; es la que se muestra a continuación:



Observa la gráfica y responde, para cada valor que toma la variable t, ¿Cuántas posiciones tiene el cuerpo?

Problema 3. Cuando un cuerpo cae libremente sobre la superficie de la tierra, la posición (d) en metros de este, a partir del punto de caída esta dada por $d = 4.905\ t^2$, donde el tiempo "t" está dado en segundos.

La discusión de este problema, se hará de manera similar a la presentada en los problemas 1 y 2.

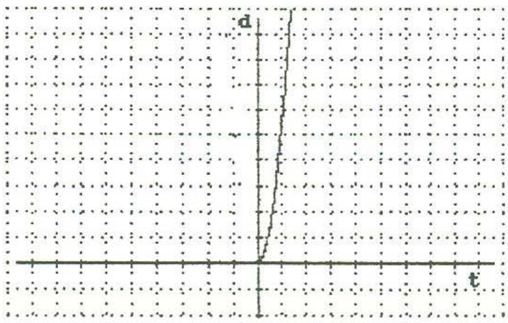
Primeramente, vamos a calcular algunas posiciones del cuerpo para ciertos tiempos, y para ordenar los resultados, los colocaremos en la siguiente tabla:

t	1	2	3	6.5	10
d	4.905	19.62	44.145	207.236	490.5

Nuevamente se puede apreciar, observando los cálculos, que el poder calcular el valor de "d" depende del valor que le asignemos a "t".

En este problema ¿Se podrán asignar valores negativos a la variable t?

Si representamos en el eje "X" al tiempo y en el eje "Y" a la posición del cuerpo, una gráfica de la relación del problema sería como la que se muestra a continuación:



En este problema para cada valor de "t" ¿Cuántas posiciones tiene el cuerpo?

RELACIONES COMO LAS EJEMPLIFICADAS ANTERIORMENTE, ES DECIR AQUELLAS DONDE "SI A LA VARIABLE INDEPENDIENTE SE LE ASIGNA UN VALOR, ENCONTRAMOS UN VALOR DE LA VARIABLE DEPENDIENTE" SON LAS QUE SE ESTUDIAN EN EL CALCULO DIFERENCIAL, Y LOS MATEMATICOS LE LLAMAN A ESTAS FUNCIONES.

ESTAS RELACIONES SE ESTUDIAN EN EL CALCULO DIFERENCIAL POR QUE SON LAS QUE MODELAN PROBLEMAS DE "NUESTRO MUNDO".

lAS FUNCIONES SE DISTINGUEN POR SER RELACIONES DONDE SE OBSERVA LA SIGUIENTE PARTICULARIDAD "**PARA CADA VALOR QUE SE LE ASIGNE A LA VARIABLE INDEPENDIENTE, SE OBTIENE UNO Y SOLO UN VALOR DE LA VARIABLE DEPENDIENTE**".

COMO SE OBSERVO EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES, A LA VARIABLE CUYO VALOR DEPENDE DEL VALOR DE OTRA VARIABLE, LE LLAMAREMOS **VARIABLE DEPENDIENTE** Y A LA SEGUNDA VARIABLE QUE INTERVIENE EN LA RELACION LE LLAMAREMOS **VARIABLE INDEPENDIENTE**.

Es común que una función se exprese por medio de una fórmula que explícita cómo calcular los valores de la variable dependiente a partir de los valores de la variable independiente.

LA GRAFICA DE UNA FUNCION.

Como ya se vio en los ejemplos iniciales una función puede ser representada con una gráfica en el plano cartesiano. Es importante que entiendas que no todas las gráficas representadas en el plano cartesiano son gráficas de una función.

Ejemplos de gráficas de una función son las mostradas en los ejemplos 1,2 y 3, y cualquier gráfica que tenga ese comportamiento.

A continuación se presenta el ejemplo de una gráfica que no es la gráfica de una función.

De la Geometría Analítica sabemos que la gráfica de la expresión $X^2 + Y^2 = 16$ en el plano cartesiano, nos representa una circunferencia con centro en el origen y radio 4. (ver figura a). Obsérvese que en la gráfica a cada valor de"X", le corresponden dos valores de "Y". Es decir el valor de "Y" no depende en forma única en el sentido visto en los ejemplos anteriores.

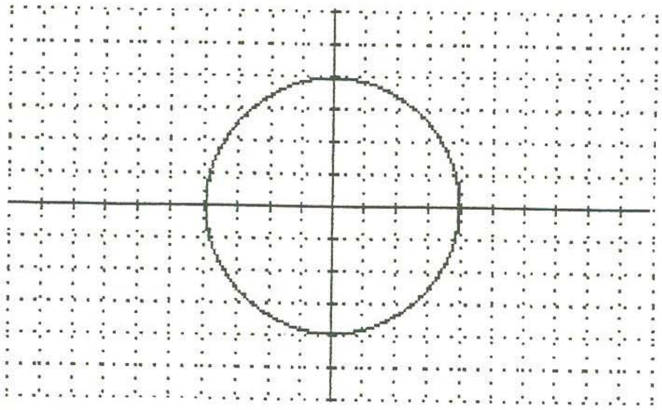


figura a.

PROBLEMAS PROPUESTOS I.

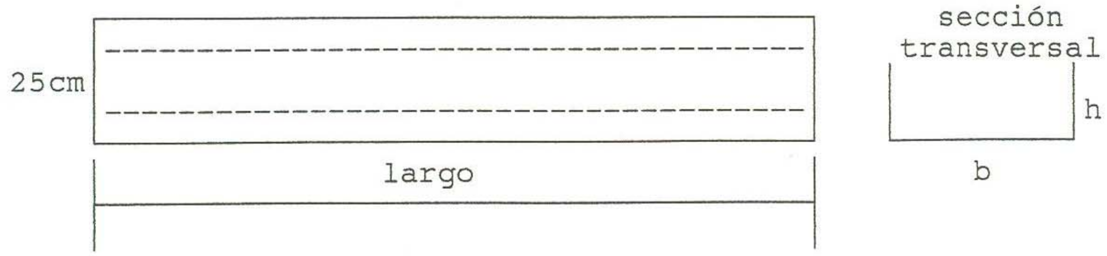
1. La fórmula para calcular el volumen de un cubo es $V = a^3$, donde **a** es el lado o arista del cubo. Calcula el volumen para 10 cubos con aristas distintas:
a) La relación $V = a^3$ ¿Es una función? ¿Por qué?
b) Señala en la relación la variable dependiente y la variable independiente.
c) Construye una gráfica de la relación en el plano cartesiano.

2. Un cuerpo se mueve en línea recta, a la derecha del punto A partiendo del reposo, con una aceleración uniforme de 4 m/s^2. La posición (d) del cuerpo para un tiempo (t) esta dada por la relación $\mathbf{d = 2 \cdot t^2}$, donde el tiempo esta dado en segundos. A continuación llena la siguiente tabla:

t	0.5	1	2	3	4	5	10	20	50	
d										

a) La relación $\mathbf{d = 2 \cdot t^2}$ ¿Es una función? ¿Por qué?
b) Señala en la relación cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente.
c) Dibuja una gráfica en el plano cartesiano de la relación.

3. De una larga pieza de hoja de lámina de 25 centímetros de ancho se va hacer un canalón para lluvia doblando hacia arriba sus orillas para formar sus lados (ver fugura). Expresa el área de la sección transversal del canalón para lluvia como una función de su altura. Además señala en la función cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente.



4. El área de un parque municipal de forma rectangular será de 1000 metros cuadrados. Expresa el perímetro del parque como una función de su base. Señala además en la función encontrada cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente.

5. Un campesino desea sembrar un terreno rectangular con hortalizas, para que no se las coma los animales lo cercará con 20 metros lineales de malla.
Expresa el área del terreno sembrado como una función de la base y en la función encontrada indica cuál es la variable independiente y cuál la variable dependiente.

6. Expresa el perímetro de un triángulo equilátero de lado "l" y altura "h" como una función de su altura. En la función encontrada indica cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente.

7. Gráfica las siguientes relaciones, identifica cuales son gráficas de una función y cuales no.

1) $X-Y = 0$ 2) $Y = 2X+1$ 3) $Y = -X+4$ 4) $Y = 5X+2$

5) $Y = X^2$ 6) $Y = -X^2$ 7) $Y = X^2$ 8) $Y = 3X^2-6$

9) $Y^2 = X$ 10) $X^2+Y^2 = -25$ 11) $X^2+Y^2 = 49$ 12) $4X^2+9Y^2 = 36$

13) $Y = X^3$ 14) $Y = -2X^3$ 15) $Y = -X^3+4$ 16) $Y = -2X^3+2$

17) $XY = 1$ 18) $Y = 1/X^2$ 19) $Y = X + 1/X$ 20) $Y = +\sqrt{X}$

21) $Y = +\sqrt{X-5}$ 22) $Y = 2-\sqrt{X-3}$ 23) $Y = 1/(X-2)$ 24) $Y = 1/(X-4)$

8. En las siguientes relaciones señala cual es la variable dependiente y cual la variable independiente.

1) $A = r^2$ 2) $V = a^3$ 3) $P = 100T$ 4) $xy = 1$

5) $wv^2 = 8$ 6) $p^2 = q^3$ 7) $t/s = 100$ 8) $P = 4l$

DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCION.

Cuando se tiene una función al conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente se le conoce como DOMINIO y al conjunto de los valores que puede tomar la variable dependiente se le conoce como RECORRIDO o IMAGEN. (Obtener el DOMINIO y LA IMAGEN de las funciones de los ejemplos 1,2 y 3 presentados al inicio del tema).

NOTACION DE UNA FUNCION.

Cuando los matemáticos quieren destacar una relación que es función, utilizan una simbolización muy particular, por ejemplo, la relación que se mencionó en el ejemplo 1, $A = l^2$ donde "A es una función de l", esto lo escriben de la siguiente manera:

$$A(l) = l^2 \quad \text{o} \quad F(l) = l^2$$

En el ejemplo 2. $d = 80\ t$, se observó que "d es una función de t", en notación funcional esto quedaría escrito:

$$d(t) = 80\ t \quad \text{o} \quad F(t) = 80\ t.$$

Es importante entender que lo anterior es una manera de escribir que una cantidad es función de otra y en este curso solo significará eso, es decir la manera anterior de expresar una función no significa que:

A deba ser multiplicada por l, ni F por l.

PROBLEMAS PROPUESTOS II.

1. Para los problemas del 1 al 6 de los problemas propuestos I. Utiliza la notación de función para escribir la relación encontrada y en cada caso diga cuál es su DOMINIO y RECORRIDO o IMAGEN.

2. Para los incisos del problema 7 de los problemas propuestos I. Encuentra el DOMINIO y RECORRIDO de las relaciones que sean funciones.

TEMA II. LIMITES Y DERIVADAS.

Introducción.

Hasta el momento eres poseedor de una herramienta matemática que te permite solucionar ciertos problemas (algebra, geometría y trigonometría). En este curso resolverás un tipo de problemas que se denominan "problemas de máximos y mínimos". Estos problemas se presentan en las distintas ramas de la economía, la ingeniería y la técnica, por ejemplo; en la industria es frecuente enfrentar la exigencia de producir la mayor cantidad posible de dispositivos con las mínimas pérdidas de material, o de fabricar piezas que sean lo más resistente posible y al mismo tiempo lo más ligero, de reducir los gastos de producción economizando no solamente materia prima sino también combustibles, energía eléctrica, tiempo y otros.

Los procesos de solución de estos problemas son relativamente nuevos (tendrán alrededor de 300 o 400 años) y tales procesos están ligados históricamente al descubrimiento del "Cálculo Diferencial".

Nuestro trabajo del tema II inicia con la discusión de algunos aspectos de los problemas de máximos y mínimos, trabajo que se realizará considerando tres problemas.

TRES PROBLEMAS ELEMENTALES DE OPTIMIZACION.

Problema 1. El gallinero.

Doña Josefa, habitante de Ures, ha criado gallinas sin necesidad de tenerlas cautivas, esto le está ocasionando una serie de problemas por lo que decide construir un gallinero en la parte posterior de su casa, sus ahorros sólo le alcanzan para comprar 50 metros lineales de tela para cercarlo. Si el terreno donde desea construir el gallinero es de 20 metros por 40 metros ¿Qué dimensiones deberá de tener un gallinero de forma rectangular para que este abarque la mayor área posible, y así encerrar la mayor cantidad de gallinas?

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Haz un dibujo donde representes el gallinero, con la información que se te proporciona en el problema.

2. Escribe lo que se te pide encontrar en este problema.

3. Anota la fórmula para calcular el área del gallinero.

4. Como puedes apreciar, la fórmula anterior expresa el área del gallinero en términos de la base y la altura. Ahora expresa la relación para calcular el área del gallinero solo en términos de la base.

A ESTA FUNCION LOS MATEMATICOS LE LLAMAN "MODELO MATEMATICO" DEL PROBLEMA.

5. Utilizando el plano cartesiano graficaremos la función; representando en el eje **x** la variable independiente y en el eje **y** la variable dependiente.

Sugerencia: Para graficar la función primeramente obtén su Dominio.

6. ¿Qué representa cada punto de la gráfica?

7. Localiza el punto de la gráfica donde esta representada la solución y trázale en ese punto una recta tangente a la curva.

Problema 2. La llantera.

En un lote baldío de 50 metros por 100 metros, una compañía llantera requiere bardear un terreno rectangular de 600 metros cuadrados de superficie, dejando sin bardear el lado que da al norte porque será utilizado como entrada al negocio, ¿Qué dimensiones deberá de tener el terreno para que la suma de la longitud bardeada sea la mínima?

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Haz un croquis donde representes la información que se te proporciona en este problema.

2. Escribe lo que se te pide encontrar.

3. Escribe la fórmula para calcular la longitud bardeada, utilizando la base y la altura del terreno.

4. Escribe la fórmula anterior en función de la base.

5. Gráfica la función que modela al problema.

6. ¿Qué representa cada punto de la gráfica?

7. Localiza el punto de la gráfica donde está representada la solución del problema y trázale en ese punto una recta tangente a la curva.

Problema 3. La caja.

Un empresario desea hacer cajas sin tapa para envasar su producto, para esto hará uso de piezas rectangulares de cartón de 50 centímetros por 30 centímetros, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas, y doblando como se ilustra en la figura que se muestra en el pizarrón. Encuentra la longitud del lado del cuadrado que será cortado si se quiere obtener una caja que encierre el mayor volumen posible.

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Si "x" representa la longitud del lado del cuadrado que se cortará en las cuatro esquinas. Escribe la función que modela el problema.

2. Encuentra los valores que puede tomar la variable "x".

3. Gráfica la función que modela el problema.

4. ¿Qué representa cada punto de la gráfica?

5. Localiza el punto de la gráfica donde está representada la solución del problema y trázale en ese punto una recta tangente a la curva.

CONCLUSIONES.

* Cuando se obtiene la gráfica de la función que modela el problema de máximos y mínimos, la solución se encuentra representada en el **punto mas alto** (si es de máximos) o **mas bajo** (si es de mínimos).

** En los puntos de la gráfica de la función donde está representada la solución, la recta tangente a la curva en ese punto es **horizontal**.

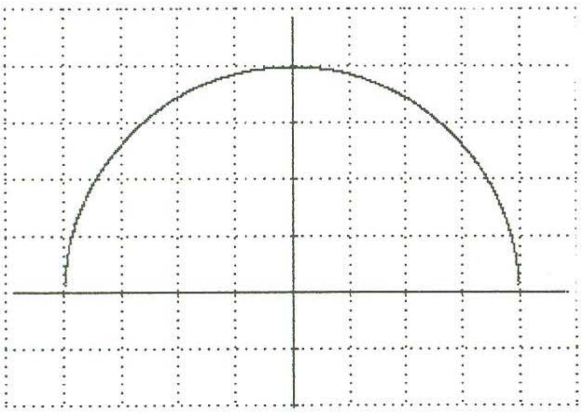
*** La segunda conclusión implica que el proceso de solución de los problemas de máximos y mínimos esta relacionado con el problema "de trazar rectas tangentes a una curva".

Es importante mencionar, que a pesar de que la solución a este tipo de problemas se dio hace alrededor de 300 años, el problema de trazar rectas tangentes a una curva fue abordado por los griegos hace alrededor de XXIII siglos, encontrando sólo la solución a algunos tipos de curvas llamadas cónicas utilizando métodos geométricos. La solución al problema de trazar rectas tangentes a "cualquier" tipo de curva fue dada en el siglo XVII por el distinguido matemático Fermat.

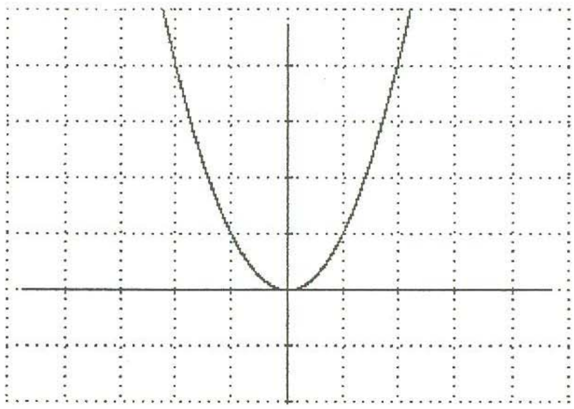
A continuación trabajaremos en la búsqueda de un método que nos ayude a trazar rectas tangentes a una curva.

EJERCICIO 1. Para las siguientes gráficas, trázale al menos cinco rectas secantes a cada una.

a)



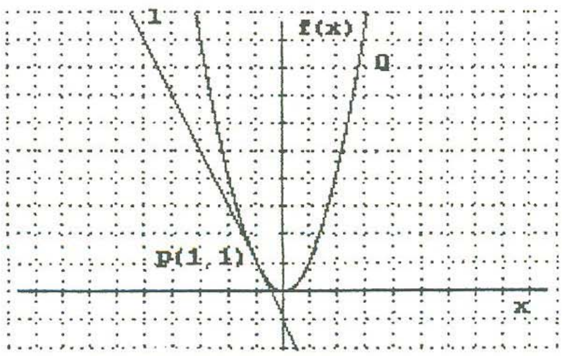
b)



EJERCICIO 2. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 4x - x^3$, traza la recta secante a la curva que pasa por los puntos $(-1/2, -15/8)$ y $(3/2, 21/8)$.

<u>CONCLUSIONES DE LOS EJERCICIOS 1 Y 2.</u>

EJERCICIO 3. En el dibujo se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2$, la recta tangente "l" a la curva en el punto P de coordenadas $(-1, 1)$; y el punto Q de coordenadas $(3, 9)$.



ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Traza las siguientes rectas secantes a la curva y calcula su pendiente.

a) Pasa por los puntos (-1, 1) y (3, 9); m =

b) Pasa por los puntos (-1, 1) y (2, 4); m =

c) Pasa por los puntos (-1, 1) y (1, 1); m =

d) Pasa por los puntos (-1, 1) y (0, 0); m =

e) Pasa por los puntos (-1, 1) y (-0.5, 0.25); m =

f) Pasa por los puntos (-1, 1) y (-0.8, 0.64); m =

g) Pasa por los puntos (-1, 1) y (-0.9, 0.81); m =

h) Pasa por los puntos (-1, 1) y (-0.99, 0.9801); m =

2. ¿Qué le sucede a la recta secante a medida que el valor de la abscisa del segundo punto se acerca a -1?

3. ¿Qué le sucede a la recta secante a medida que el punto Q se aproxima al punto P?

4. ¿Cuál es el valor aproximado de la pendiente de la recta tangente?

EJERCICIO 4. Estima el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto (-2, 4).

TAREA. Utilizando el proceso visto en los problemas anteriores estima el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto (3, 9) y (1.5, 2.25), con los valores encontrados dibuja la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

COMENTARIO.

EN LOS PROBLEMAS ANTERIORES SE MUESTRAN ALGUNAS IDEAS QUE UTILIZAN LOS MATEMATICOS PARA DETERMINAR LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA EN UN PUNTO DADO. CON ESTAS IDEAS SE OBTIENEN APROXIMACIONES BASTANTE ACEPTABLES DE LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE; SI SE PUDIERA OBTENER ESTE VALOR DE UNA MANERA MAS PRECISA Y CONOCIENDO EL PUNTO DE TANGENCIA CON LA CURVA UTILIZANDO CONOCIMIENTOS DE GEOMETRIA ANALITICA ($M = (Y_2 - Y_1)/(X_2 - X_1)$) SE PUEDE HACER EL TRAZO DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA.

AHORA TRABAJAREMOS EN LA BUSQUEDA DE UN METODO PARA DETERMINAR LA PENDIENTE DE UNA MANERA EXACTA.

EJERCICIO 5. Estima la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto (1, 1). Utilizando el valor encontrado de la pendiente de la recta tangente, trázala.

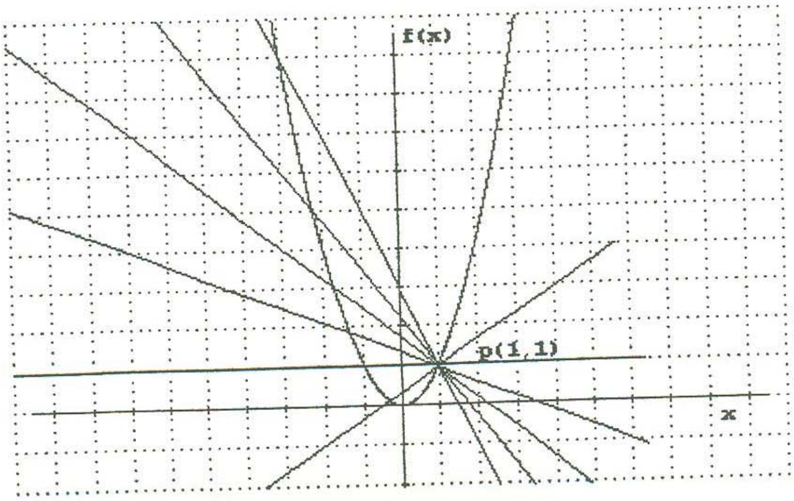
ACTIVIDADES A REALIZAR POR LOS ALUMNOS.

1. Estimar el valor de la pendiente de la recta tangente.

2. Trazar la recta tangente.

Considerando el trabajo realizado en las actividades anteriores para estimar la pendiente de la recta tangente, reflexionemos alrededor de las fórmulas utilizadas para calcular las pendientes de las rectas secantes.

La figura siguiente muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2$, así como las rectas secantes que pasan por el punto fijo.



a) Si llamamos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) a los puntos por donde pasa la recta, de la geometría analítica se tiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

b) Como se vio en el tema I, en este curso denotaremos las funciones utilizando f(x) por "y". Por lo que la fórmula utilizada para calcular las pendientes de la recta secante que pasa por los puntos de coordenadas $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ será:

$$m_s = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

c) En el proceso de estimar la pendiente de la recta tangente, se pueden distinguir dos puntos en cada recta secante; uno de ellos que permanece fijo y otro que se mueve a lo largo de la curva. Llamemos $(x_0, f(x_0))$ a las coordenadas del punto fijo y $(x, f(x))$ a las coordenadas del punto que se mueve entonces:

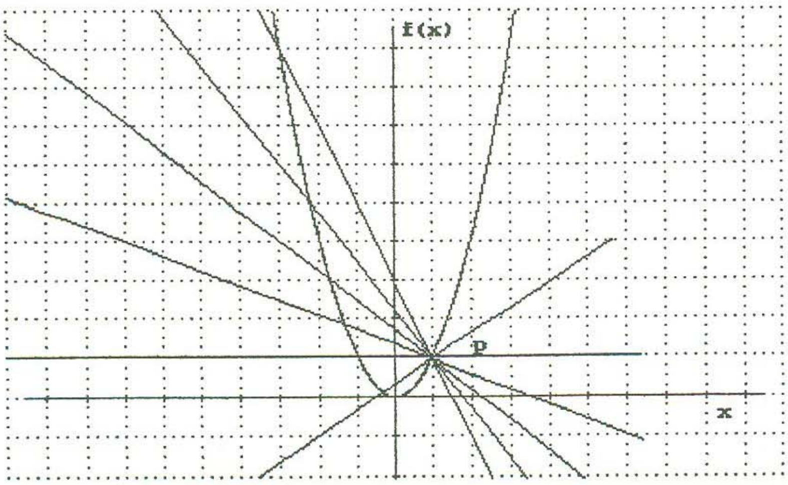
$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

d) Ahora le llamaremos "incremento de x" a $x-x_0$ y lo denotaremos por "h", entonces $h = x - x_0$; de donde la fórmula ahora es:

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{h}$$

EL METODO.

Ejercicio 6. Considerando la función del ejercicio 5 determinaremos la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (1, 1), de una manera mas precisa. Para auxiliarnos en el proceso, utilizaremos la gráfica siguiente:



1. Primeramente construiremos una fórmula para determinar la pendiente de las rectas secantes que pasan por el punto fijo en términos de x_0 y "h".

*) De la fórmula $m_s = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{h}$; y la gráfica se tiene que:

las coordenadas del punto fijo $(x_0, f(x_0))$ para este problema son (x_0, x_0^2) y las coordenadas del punto móvil $(x, f(x))$ son (x, x^2), entonces, la fórmula para la pendiente de las rectas secantes es:

$$m_s = \frac{x^2 - x_0^2}{h}$$

*) De la relación $h = x - x_0$, se obtiene $x = x_0 + h$, entonces $x^2 = (x_0 + h)^2$. Ahora la fórmula para determinar la pendiente de las rectas secantes que pasan por el punto fijo expresadas en términos de x_0 y h es:

$$m_s = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$

*) Pero si el valor de "h" se acerca a 0, entonces la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente.

*) Los matemáticos precisan la condición anterior escribiéndola de la siguiente manera:

$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} m_s$$

y la leen: "la pendiente de la recta tangente es el límite de la pendiente de la recta secante cuando la "h" tiende a cero"

- para nuestro problema entonces se tiene que :

$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$

El resultado anterior nos plantea dos problemas en este curso; uno de ellos consiste en saber el significado de la palabra "Límite" en el contexto del cálculo diferencial, el otro saber como se resuelve la expresión matemática para determinar la pendiente de la recta tangente. Antes de abordar el trabajo en las direcciones mencionadas anteriormente resolveremos algunos ejercicios para encontrar la fórmula de la pendiente de la recta tangente expresada como un límite.

EJERCICIO 7. En cada inciso se te proporciona una función y un punto fijo. Dibuja una gráfica de la función y localiza el punto fijo que se te indica; En ese punto realiza el trazo de las rectas secantes que utilizarías para encontrar la recta tangente. Encuentra la fórmula para determinar la pendiente de cualquier recta secante trazada, en términos de x_0 y "h", concluye tu problema cuando encuentres la fórmula para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto fijo expresada como un límite.

a) $f(x) = x^3$; (1,1) b) $f(x) = \sqrt{x}$; (1,1).

c) $f(x) = x^2 - 2$; (-1,-1) d) $f(x) = 1/x$; (2,1/2).

e) $f(x) = (1/2)x^2$; (-1,1/2) f) $f(x) = \sqrt{x} + 1$; (4,3).

g) $f(x) = x^4$; (-1,1) h) $f(x) = 1/x^2$; (-1,1).

RESUMEN:

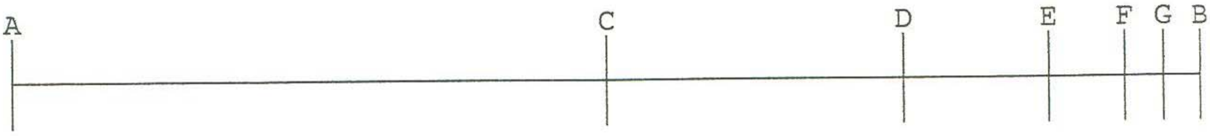
Un resumen del trabajo realizado durante este tema es el siguiente; iniciamos el trabajo analizando una serie de actividades de tres problemas de optimización, de ahí se concluye que para la resolución de estos problemas es necesario antes resolver el problema de trazarle rectas tangentes a una curva, pero al tratar de resolver este problema llegamos a resultados como los siguientes:

$$m_{tg} = \operatorname*{Lim}_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \qquad m_{tg} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h}$$

$$m_{tg} = \operatorname*{Lim}_{h \to 0.} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$$ etc....................

Ahora trabajaremos en dos direcciones, la primera será para estudiar la idea de "Límite" en el contexto del cálculo diferencial, y posteriormente resolver las expresiones obtenidas en los ejercicios anteriores.

Ejercicio 8. Dado el segmento AB (ver figura), nos acercaremos del punto A al punto B de la siguiente manera:



* Se dará un primer salto de A a C donde C es el punto medio del segmento AB.

* Enseguida daremos otro salto de C a D donde D es el punto medio del segmento CB.

* Después daremos otro salto de D a E donde E es el punto medio del segmento DB.

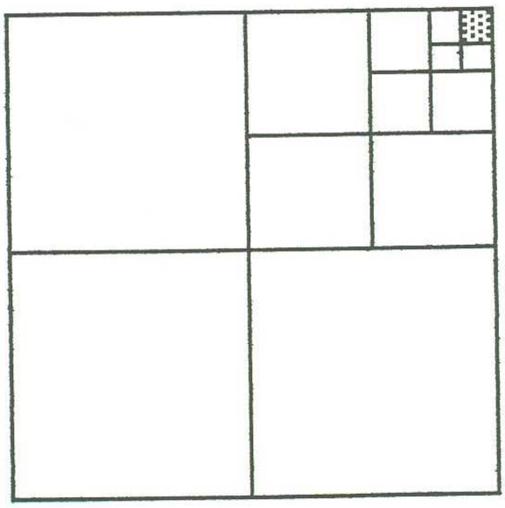
* Y así sucesivamente...

PREGUNTAS.

1. ¿Qué tanto nos podemos acercar al punto B?

2. ¿Cuando se podrá llegar al punto B?

Ejercicio 9. Dado el siguiente cuadrado de lado 2; realiza lo siguiente:



... de 64 y así sucesivamente:

PREGUNTAS.

1. A medida de que aumenta el número de lados del polígono inscrito, ¿Su área crecerá o decrecerá?

2. ¿Se podrá obtener mediante este proceso un polígono inscrito de área mayor que la de la circunferencia?

3. ¿Hacia qué valor tiende el área del polígono inscrito a medida que el numero de sus lados crece?

* El cuadrado de lado 2 tiene una área de 4 unidades cuadradas.

* Ahora dividamos el cuadrado en cuatro cuadrados iguales para obtener cuadrados de lado 1, este cuadrado tiene área de 1 unidad cuadrada.

* Volvemos a dividir el cuadrado de lado 1 en cuatro cuadrados iguales y obtenemos cuadrados de lado 1/2, este cuadrado tiene una área de 1/4 unidades cuadradas.

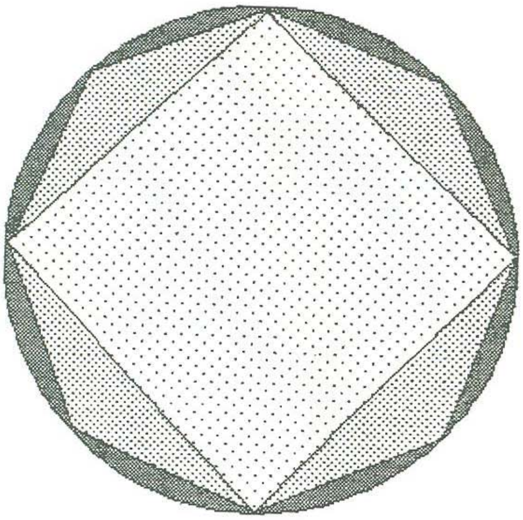
* Y así sucesivamente...

PREGUNTAS.

1. ¿Hacia que valor se acerca el área del cuadrado mas pequeño si hacemos un número cada vez mas grande de divisiones?

2. ¿Qué tanto nos podemos acercar a ese valor?

Ejercicio 10. El dibujo siguiente muestra una circunferencia con un cuadrado y un octágono inscritos.



En la figura se observa que el área del cuadrado es menor que la de la circunferencia.

Ahora inscribiremos un octágono ¿Cómo es su área con respecto al área del cuadrado y la circunferencia?

Si continuamos duplicando el número de lados del polígono inscrito, es decir, inscribimos un polígono de 16 lados, luego uno de 32 lados, posteriormente uno de 64 y así sucesivamente:

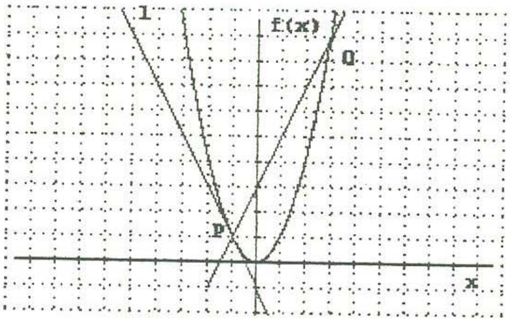
PREGUNTAS.

1. A medida de que aumenta el número de lados del polígono inscrito, ¿Su área crecerá o decrecerá?

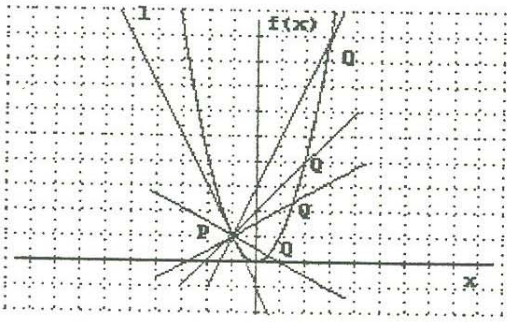
2. ¿Se podrá obtener mediante este proceso un polígono inscrito de área mayor que la de la circunferencia?

3. ¿Hacia qué valor tiende el área del polígono inscrito a medida que el numero de sus lados crece?

Ejercicio 11. La figura siguiente muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2$, la recta secante que pasa por los puntos "P" y "Q" y la recta tangente a la gráfica de la función en el punto "P".



* Ahora moveremos la recta secante moviendo el punto "Q" hacia "P" como lo indica la figura.



PREGUNTAS.

1. ¿Qué tanto se puede acercar el punto "Q" hacia "P"?

2. ¿Puede llegar el punto "Q" hacia el punto "P" sin afectar a la recta secante?

3. ¿Qué le sucede a la recta secante a medida que el punto "Q" se acerca al punto "P"? ¿La recta secante puede llegar a ser recta tangente en este proceso?

COMENTARIO.

EN LOS EJERCICIOS ANTERIORES SE MUESTRA QUE EXISTEN CIERTO TIPO DE SITUACIONES EN MATEMATICAS DONDE NOS PODEMOS ACERCAR A UN PUNTO, AREA, ETC. TANTO COMO NOSOTROS QUERAMOS. A ESTE TIPO DE SITUACIONES LOS MATEMATICOS LE LLAMAN "PROCESO AL LIMITE".

Ejercicio 12. Resuelve la expresión $\lim_{x \to 3} x^2$

- Empezaremos diciendo, que siempre que la expresión que se quiera resolver lo "permita" podemos "estimar" con una buena aproximación el resultado de la resolución del límite utilizando un proceso aritmético. se te sugiere que siempre que vayas a resolver un límite utilices este proceso para tener una idea de la respuesta que se desea encontrar.

- Proceso aritmético.

x	lím.
2	4
2.5	6.25
2.8	7.84
2.9	8.41
2.99	8.9401
2.999	8.994001

Método.

La solución de este límite puede encontrarse mediante una simple sustitución.

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$$

el resultado se lee "el valor límite de x^2 cuando x tiende a 3 es igual a 9" como lo muestran ambos procesos.

Existen límites como el anterior cuyo resultado se obtiene de manera directa, pero no todas las expresiones de limites son de ese tipo por ejemplo; las expresiones que se obtuvieron en los ejercicios anteriores son mas complicadas y su resolución será mas compleja como se muestra a continuación:

Ejercicio 13.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$

- Vamos a estimar el resultado utilizando el proceso aritmético:

h	3	2	1	0.5	0.1	0.01	0.001
lim	$2x_0 +3$	$2x_0 +2$	$2x_0 +1$	$2x_0 +0.5$	$2x_0 +0.1$	$2x_0 +0.01$	$2x_0 +0.001$

Observa que el resultado "tiende" a $2x_0$

RESOLUCION:

- Como ya lo observaste la expresión no acepta la sustitución de que la "h por el cero", el proceso entonces consistirá en obtener expresiones que sean equivalentes y que alguna de ellas acepte la sustitución anterior.

- Si elevamos el binomio al cuadrado se obtiene:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} \quad ; \text{ para } h \neq 0$$

- Si sumamos términos semejantes en el numerador:

$$\lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h}; \text{ Si se divide entre h } (h \neq 0) \text{ se tiene:}$$

$$\lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0 + 0 = 2x_0$$

Entonces; $$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0}$$

Ejercicio 14.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

- Como se puede apreciar nuevamente se observa que la expresión no acepta la sustitución de "h por cero", por lo que una vez mas trataremos de obtener expresiones equivalentes, con el propósito de que en algunas de ellas se pueda introducir la condición antes mencionada.

- Multipliquemos el numerador por su conjugado para eliminar los radicales, y por supuesto para no alterar la fracción también multiplicaremos el denominador por ese conjugado:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}$$

$h \to 0$

Entonces; $$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}}$$

- Para que adquieras la habilidad en la resolución

- Realizando el producto en el numerador se obtiene:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} =$$

- Sumando términos semejantes en el numerador:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}$$; Simplificando:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + 0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Entonces; $$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}}$$

- Para que adquieras la habilidad en la resolución de límites se te proporciona un listado de ejercicios, donde algunos de ellos se discutirán en la clase y otros se dejarán como trabajo extraclase.

Ejercicio 15. Para los límites que se dan a continuación, en aquellos donde la expresión lo "permita" utiliza el proceso aritmético para "estimar" el resultado, posteriormente resuélvelo:

a) $\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h}$ b) $\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^4 - x_0^4}{h}$

c) $\lim_{h \to 0} \frac{5(x_0 + h)^2 - 5x_0^2}{h}$ d) $\lim_{h \to 0} \frac{8(x_0 + h)^3 - 8x_0^3}{h}$

$$e)\ \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x_0 + h} - \dfrac{1}{x_0}}{h} \qquad f)\ \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{(x_0 + h)^2} - \dfrac{1}{x_0^2}}{h}$$

$$g)\ \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{5}{x_0 + h} - \dfrac{5}{x_0}}{h} \qquad h)\ \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{3(x_0 + h)^3} - \dfrac{1}{3x_0^3}}{h}$$

$$i)\ \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0 + h} - \sqrt[3]{x_0}}{h} \qquad j)\ \lim_{h \to 0} \frac{2\sqrt{x_0 + h} - 2\sqrt{x_0}}{h}$$

$$k)\ \lim_{w \to x} \frac{w^3 - x^3}{w - x} \qquad l)\ \lim_{y \to -2} \frac{y^3 + 8}{y + 2}$$

$$m)\ \lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12} \qquad n)\ \lim_{x \to 0} \frac{x}{x + 10}$$

LA DERIVADA.

Una vez expuesta la manera de como resolver límites, a continuación se muestra el proceso para resolver el problema de trazarle rectas tangentes a una curva.

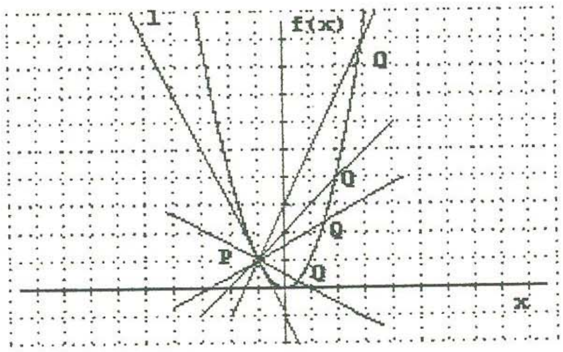
EJERCICIO 1. Trázale la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$, en el punto $(-1, 1)$.

RESOLUCION.

1. Como ya se mencionó en el capitulo anterior, para la resolución de este problema es necesario primeramente determinar el valor de la pendiente de la recta tangente y posteriormente con el valor de la pendiente y conociendo el punto de tangencia se procederá a graficarla.

2. Cálculo de la pendiente de la recta tangente:

a) Primeramente dibujaremos la gráfica de la función, localizaremos el punto fijo y por él, trazaremos las rectas secantes necesarias para obtener la recta tangente.



b) Enseguida obtendremos la fórmula para determinar la pendiente de cualquier recta secante que pasa por el punto fijo en términos de x_0 y h.

- Se sabe que si el punto fijo tiene coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y el punto móvil $(x, f(x))$, entonces la pendiente de la recta secante se determina de la siguiente manera:

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{h}$$

- En la gráfica se observa que; $(x_0 , f(x_0))$ para este problema es (x_0, x_0^2) y las coordenadas del punto móvil $(x,f(x))$ son (x, x^2), entonces la fórmula para las pendientes de las rectas secante será:

$$m_s = \frac{x^2 - x_0^2}{h}$$

- Como $x = x_0 + h$, entonces $x^2 = (x_0 + h)^2$. Ahora la fórmula para determinar la pendiente de las rectas secantes que pasan por el punto fijo expresadas en términos de x_0 y h es:

$$m_s = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$

- Pero como; $m_{tg} = \lim_{h \to 0} m_s$

- La fórmula de la pendiente de la recta tangente es:

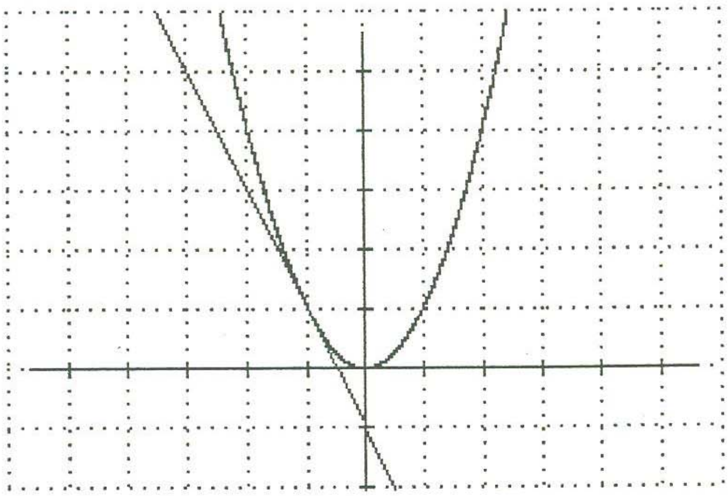
$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$

- Como; $\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0$

- Entonces la $m_{tg} = 2x_0$ y en nuestro problema $x_0 = -1$, finalmente se tiene que;

$$m_{tg} = 2(-1) = -2.$$

- La gráfica de la función con la recta tangente queda:



COMENTARIO.
ES IMPORTANTE SEÑALAR QUE UTILIZANDO EL PROCESO ANTERIOR SE RESUELVE EL PROBLEMA DE TRAZARLE RECTAS TANGENTES A UNA CURVA PERO ADEMAS, SE OBTIENE UN RESULTADO MATEMATICO MUY PODEROSO QUE NOS DETERMINA LA PENDIENTE DE CUALQUIER RECTA TANGENTE A LA CURVA, SOLAMENTE NECESITAMOS CONOCER EL VALOR DE LA ABSCISA (X_0) DEL PUNTO DONDE QUEREMOS TRAZAR LA RECTA TANGENTE.

Por ejemplo: Si queremos trazar la recta tangente a la gráfica de la función en:

a) (-3, 9), la pendiente de la recta tangente es; 2(-3) = 6,

b) (-2, 4), la pendiente de la recta tangente es; 2(-2) = 4,

c) (0, 0), la pendiente de la recta tangente es; 2(0) = 0,

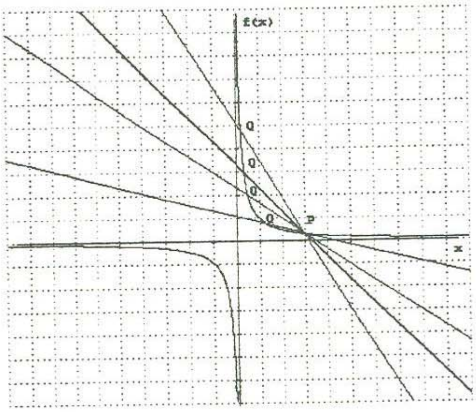
d) (1.5, 2.25), la pendiente de la recta tangente es; 2(1.5) = 3, etc.............

EJERCICIO 2. Trázale la recta tangente a la gráfica de la función f(x) = 1/x, en el punto (3, 1/3).

RESOLUCION.

1. Cálculo de la pendiente de la recta tangente:

a) Dibujaremos la gráfica de la función, localizaremos el punto fijo y por él, trazaremos las rectas secantes necesarias para obtener la recta tangente.



b) Enseguida obtendremos la fórmula para determinar la pendiente de cualquier recta secante que pasa por el punto fijo en términos de x_0 y h.

- Se sabe que si el punto fijo tiene coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y el punto móvil (x, f(x)), entonces la pendiente de la recta secante se determina de la siguiente manera:

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{h}$$

- En la gráfica se observa que; $(x_0, f(x_0))$ para este problema es $(x_0, 1/x_0)$ y las coordenadas del punto móvil (x, f(x)) son (x, 1/x), entonces la fórmula para la pendiente de las rectas secante será:

$$m_s = \frac{1/x - 1/x_0}{h}$$

- Como $x = x_0 + h$, entonces $1/x = 1/(x_0 + h)$. Ahora la fórmula para determinar la pendiente de las rectas secantes que pasan por el punto fijo expresadas en términos de x_0 y h es:

$$m_s = \frac{1/(x_0 + h) - 1/x_0}{h}$$

- Pero como; $$m_{tg} = \lim_{h \to 0} m_s$$

- La fórmula de la pendiente de la recta tangente es:

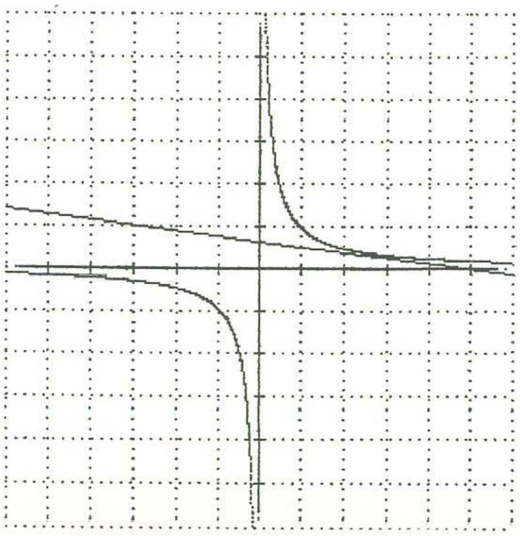
$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} \frac{1/(x_0 + h) - 1/x_0}{h}$$

- Como; $$\lim_{h \to 0} \frac{1/(x_0 + h) - 1/x_0}{h} = -1/x_{02}$$

- Entonces la $m_{tg} = -1/x_{02}$ y en nuestro problema $x_0 = 3$, de donde se obtiene finalmente que;

$$m_{tg} = -1/(3)^2 = -1/9.$$

- La gráfica de la función con la recta tangente queda:



COMENTARIO.
A los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores:

- Si $f(x) = x^2$, entonces $m_{tg} = 2x_0$,
- Si $f(x) = 1/x$, entonces $m_{tg} = -1/x_0^2$.

Los matemáticos le llaman a la fórmula de la pendiente de las rectas tangentes a la curva (m_{tg}) , "LA DERIVADA DE LA FUNCION" y la denotan como $f'(x)$, es decir:

- Si $f(x) = x^2$, entonces $m_{tg} = f'(x) = 2x_0$,
- Si $f(x) = 1/x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = -1/x_0^2$.

Además como x_0 es cualquier abscisa, es decir puede tomar cualquier valor permitido, los matemáticos la llaman "x".

COMENTARIO.

POR CLARO Y SENCILLO QUE PUDIERA PARECER EL PROCESO UTILIZADO PARA TRAZAR RECTAS TANGENTES A UNA CURVA, ESTE SE COMPLICA CONFORME LA EXPRESION DE LA FUNCION SE COMPLICA,POR EL LIMITE QUE TENEMOS QUE RESOLVER, PERO ESTE PROBLEMA SE PUEDE SALVAR, UTILIZANDO OTRO RECURSO PARA OBTENER LA FORMULA DE LAS PENDIENTES DE LAS RECTAS TANGENTES A LA GRAFICA DE LA FUNCION (DERIVADA), COMO SE VERA EN LOS PROXIMOS EJERCICIOS.

EJERCICIO 3.
Para cada una de las siguientes funciones, encuentra la fórmula para determinar la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función (LA DERIVADA DE LA FUNCION).

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^4$

c) $f(x) = 1/x^3$

d) $f(x) = 1/x^4$

e) $f(x) = 3x + 5x^2$

f) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

g) $f(x) = 4x^2$

h) $f(x) = 2/(3x)$

i) $f(x) = -5x^3$

j) $f(x) = 1/x^2$

k) $f(x) = \sqrt{x}$

l) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

m) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

n) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

ñ) $f(x) = x^2 + 1/x$

o) $f(x) = 3\sqrt{x} + 2$

p) $f(x) = (2x^2 - 5x)/3$

q) $f(x) = (-1/2)(1/x^3)$

COMENTARIO. REGLA 1.

En los ejercicios anteriores obtuviste una fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a las curvas:

$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = m_{tg} = 2x$

$f(x) = x^3 \qquad f'(x) = m_{tg} = 3x^2$

$f(x) = x^4 \qquad f'(x) = m_{tg} = 4x^3$

- Considerando los resultados anteriores ¿puedes predecir para las siguientes funciones la fórmula para las pendientes de las tangentes?

$f(x) = x^{13} \qquad f'(x) = m_{tg} = \quad ?$

$f(x) = x^7 \qquad f'(x) = m_{tg} = \quad ?$

$f(x) = x^9 \qquad f'(x) = m_{tg} = \quad ?$

¿Cuál será la fórmula para calcular la pendiente de las rectas tangentes (LA DERIVADA) a la función $f(x) = x^n$, donde n es entero positivo? ¿Si la función es de la forma $f(x) = C\cdot x^n$, donde n es entero positivo y C es un número real ?.

COMENTARIO. REGLA 2.

En los ejercicios anteriores encontraste que la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a las curvas:

$f(x) = 1/x \qquad f'(x) = m_{tg} = -1/x^2$

$f(x) = 1/x^2 \qquad f'(x) = m_{tg} = -2/x^3$

$f(x) = 1/x^3 \qquad f'(x) = m_{tg} = -3/x^4$

- Considerando los resultados anteriores ¿puedes predecir para las siguientes funciones la fórmula para las pendientes de las tangentes?

$f(x) = 1/x^{11} \qquad f'(x) = m_{tg} = \quad ?$

$f(x) = 1/x^8 \qquad f'(x) = m_{tg} = \quad ?$

$f(x) = 1/x^{17} \qquad f'(x) = m_{tg} = \quad ?$

¿Cuál será la fórmula para calcular la pendiente de las tangentes (LA DERIVADA) a la función $f(x) = 1/x^n$, donde n es un entero positivo? ¿Si la función es de la forma $f(x) = C\cdot(1/x^n)$, donde n es un entero positivo y C es un número real?.

COMENTARIO. REGLA 3.
En los ejercicios anteriores encontraste que las fórmulas para calcular las pendientes de las rectas tangentes a las curvas:

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 1/2 \sqrt{x}$.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 1/3(\sqrt[3]{x})^2$.

$f(x) = \sqrt[4]{x}$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 1/4(\sqrt[4]{x})^3$.

- Considerando los resultados anteriores ¿puedes predecir para las siguientes funciones la fórmula para las pendientes de las tangentes?

$f(x) = 1/\sqrt[9]{x}$ $\quad f'/x) = m_{tg} =$?

$f(x) = 1/\sqrt[11]{x}$ $\quad f'(x) = m_{tg} =$?

$f(x) = 1/\sqrt[17]{x}$ $\quad f'(x) = m_{tg} =$?

¿Cuál será la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la función (LA DERIVADA) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un número entero? ¿Si la función es de la forma $f(x) = C(\sqrt[n]{x})$, donde n es un entero positivo y C es un número real?.

Ejercicio 4. Utilizando las fórmulas encontradas (1,2 y 3) en los ejercicios anteriores, encuentra la fórmula para calcular la pendiente de cualquier recta tangente a la función (LA DERIVADA).

a) $y = 4x^3$ $\quad$ b) $y = 2/x$ $\quad$ c) $y = 3\sqrt{x}$

d) $y = -2x^2$ $\quad$ d) $y = -1/(2x^2)$ $\quad$ e) $y = -2\sqrt[7]{x}$

f) $y = x^2/3$ $\quad$ g) $y = (3/4)x^2$ $\quad$ f) $y = \sqrt[12]{x}/3$

COMENTARIO. REGLA 4.
En los problemas anteriores encontraste que las fórmulas para calcular las pendientes de las rectas tangentes a las curvas:

a) $f(x) = 3x + 5x^2$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 3 + 10x$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 3x^2 + 4x$

c) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 2x + 2$

d) $f(x) = x^2 + 1/x$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 2x - 1/x^2$

e) $f(x) = 3\sqrt{x} + 2$ $\quad f'(x) = m_{tg} = 3/2\sqrt{x}$

- Considerando los resultados anteriores ¿puedes predecir para las siguientes funciones la fórmula para las pendientes de las tangentes?

a) $f(x) = 10x - 3x^2 + 5$ $\quad f'(x) = m_{tg} =$?

b) $f(x) = (-1/2)x^3 + 14x^2 - 1$; $f'(x) = m_{tg} =$?

c) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + 3/x$ $\quad f'(x) = m_{tg} =$?

d) $f(x) = -10x^2 + 1/x^2$ $\quad f'(x) = m_{tg} =$?

¿Cuál será la fórmula para determinar las pendientes de las tangentes a la gráfica de la función $f(x) = u(x) + v(x)$, donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones?.

REGLA 5. Si $f(x) = u(x)\cdot v(x)$ donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones entonces $f'(x) = m_{Tf} = u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x) = u(x)\cdot m_{Tv} + v(x)\cdot m_{Tu}$ donde m_{Tv} y m_{Tu} son las fórmulas para determinar las pendientes de las rectas tangentes a las curvas $u(x)$ y $v(x)$.

Ejercicio 5. Utilizando las fórmulas anteriores, obtén en cada caso, la fórmula para calcular las pendientes de las tangentes a la siguientes curvas.

a) $f(x) = 5x^3 + 3x + 6$ $\quad$ b) $f(x) = x + \sqrt{x}$

c) $f(x) = 4x^5 + 3x^3 - 2\cdot x$ $\quad$ d) $f(x) = 3/(2X) - \sqrt[7]{x}$

e) $f(x) = 7x^5 - 5x^3 + 3$ $\quad$ f) $f(x) = x^5 + 2/(5x^3) - 1/x$

g) $f(x) = x + 1/x$ $\quad$ h) $f(x) = (4x + x\sqrt{x})/3$

i) $f(x) = 5x^2 - 4/x^2$ $\quad$ j) $f(x) = (4 + 3x - x^2)/(3x)$

Ejercicio 6. Trazarle en cada caso, la tangente a la curva en el punto donde se indica:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ en $x = -2$ y en $x = 3/2$

b) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 29x + 20$ en $x = -1$ y en $x = 3$

c) $f(x) = 3x^2 - 1/x$ en $x = 1$

d) $f(x) = (42 - 2x)(20 - 2x)x$ en $x = 5$

e) $f(x) = x + 4x(10000/x^2)$ en $x = 20$.

f) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$ en $x = -1$ y en $x = 1$

g) $f(x) = (3x^2 + 6x - 15)/5x$ en $x = 0$ y en $x = 5$

h) $f(x) = (4x^3 + x\cdot\sqrt{x})/5x$ en $x = 0$ y en $x = 10$

Ejercicio 7. Determina el punto o los puntos donde las curvas dadas tienen las pendientes indicadas:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ $\quad m = -4,\ m = 0,\ m = 5$

b) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 29x + 20$ $\quad m = -7,\ m = 0,\ m = 11$

c) $f(x) = (42 - 2x)(20 - 2x)x$ $\quad m = 0$

d) $f(x) = x + 4x\ (10000/x^2)$ $\quad m = 0,\ m = 20$

e) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$ $\quad m = 0,\ m = 1/2$

f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ $\quad m = -5/4$

g) $f(x) = x^3$ $\quad m = 0$

TEMA III. APLICACIONES.

RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS (PARTE I).

INTRODUCCION.

Como se mencionó en la presentación del curso uno de los propósitos del mismo es resolver cierto tipo de problemas de optimización, para tal propósito se estudiaron; el temas I (funciones) donde se hace un estudio breve de las funciones, el tema II (Límites y Derivadas) donde se expone la herramienta necesaria que se utiliza en la resolución de problemas elementales de máximos y mínimos.

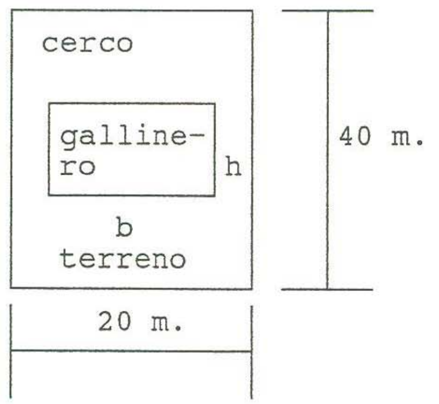
En este tema se plantean una serie de problemas, en los primeros cuatro se muestra el proceso de resolución de tales problemas con la finalidad de que a través de ellos logres entender la manera de resolverlos. Después se te proporcionan algunos problemas para que tu los resuelvas.

Problema 1. El gallinero.

Doña Josefa, habitante de Ures, ha criado gallinas sin necesidad de tenerlas cautivas, esto le está ocasionando una serie de problemas por lo que decide construir un gallinero en la parte posterior de su casa, sus ahorros sólo le alcanzan para comprar 50 metros lineales de tela para cercarlo. Si el terreno donde desea construir el gallinero es de 20 metros por 40 metros ¿Qué dimensiones deberá de tener un gallinero de forma rectangular para que este abarque la mayor área posible, y así encerrar la mayor cantidad de gallinas?

RESOLUCION.

1. Para entender de una mejor manera el problema vamos a hacer un croquis del mismo.



2. Ahora vamos a escribir lo que se pide encontrar en este problema.

"Las dimensiones que debe tener el terreno de forma rectangular para que abarque la mayor área posible"

3. De la geometría elemental sabemos que la fórmula para calcular el área del gallinero es:

$$A = b \cdot h$$

4. Como puedes observar, la fórmula anterior expresa el área del gallinero en términos de la base y la altura. Ahora expresaremos la relación para calcular el área del gallinero como una función de la base.

- Sabemos que; $A = b \cdot h$ ----- (1)
- y además que; $50 = 2 \cdot b + 2 \cdot h$ ---(2),
- Despejando "h" de la segunda relación se tiene que;

$$h = 25 - b \text{ ---(3)}$$

- Sustituyendo (3) en (1) tenemos que:

$$\boxed{A(b) = b(25 - b)}$$

"A ESTA FUNCION LOS MATEMATICOS LE LLAMAN MODELO MATEMATICO DEL PROBLEMA"

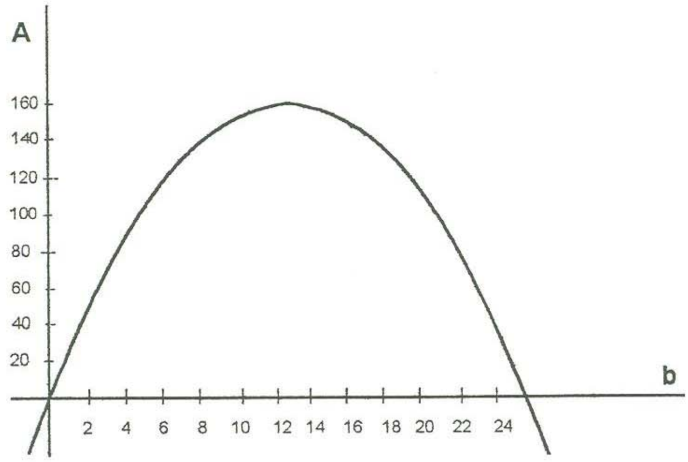
5. ¿Cuáles son los valores que en este problema puede tomar la base del gallinero?

UNA VEZ MODELADO UN PROBLEMA, ESTE SE PUEDE RESOLVER DE DOS MANERAS DIFERENTES, UNA, ES OBTENER LA SOLUCION DEL PROBLEMA A TRAVES DE UN METODO GRAFICO, LA OTRA FORMA ES ENCONTRAR LA SOLUCION A TRAVES DE UN PROCESO ALGEBRAICO.

EN ESTE MODULO SE PRESENTARAN LAS DOS MANERAS DE RESOLUCION.

METODO GRAFICO.

6. Dibujaremos una gráfica de la función que modela el problema y localizaremos el punto que representa la solución.



- Nota! Como la solución gráfica, depende de los valores de las coordenadas del punto mas alto que encuentres en la gráfica, esta la daremos en el pizarrón una vez que obtengas esos valores.

¿Cómo es la recta tangente a la gráfica de la función en el punto donde está representada la solución?

METODO ALGEBRAICO.

7. Encontremos la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

$$A(b) = b(25 - b) \text{ es:}$$

$$A'(b) = b(-1) + (25 - b)\,1 = 25 - 2b.$$

- Otra manera de encontrar la fórmula de la pendientes de las rectas tangentes a la curva es expresando la función como una suma de funciones:

$$A(b) = 25b - b^2, \text{ de donde se obtiene que:}$$

$$A'(b) = 25 - 2b$$

- Entonces la fórmula para determinar la pendiente de las rectas tangentes a la curva es:

$$\boxed{A'(b) = m_{tg} = 25 - 2b}$$

8. Como ya se observó la pendiente de la recta tangente en el punto que representa la solución es "cero" entonces;

$$25 - 2b = 0, \text{ de donde;}$$

$$b = 25/2.$$

9. La solución del problema es:

-Como queremos encontrar las dimensiones del gallinero, necesitamos encontrar el valor de la base y la altura, en la actividad anterior se obtuvo que la base es 25/2, para determinar la altura sustituiremos el valor de "b" en la relación (3) de donde obtenemos que;

$$h = 25 - 25/2 = 25/2.$$

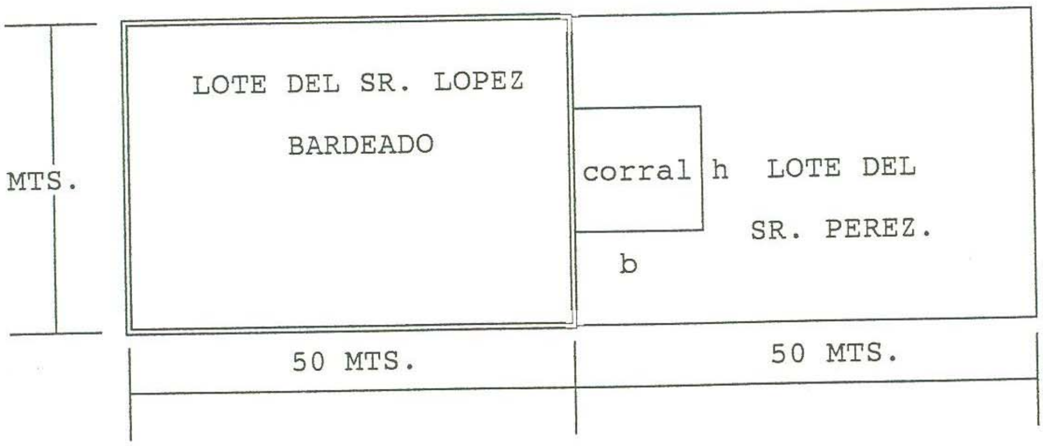
- Entonces "Las dimensiones del gallinero de mayor área posible son:

$$\mathbf{b = 25/2 \text{ m. y } h = 25/2 \text{ m.}}$$

Problema 2. El corral.

López y Pérez poseen lotes vecinos de 25 metros por 50 metros (ver figura), López ha construido una barda alrededor de su terreno. Pérez quiere construir un corral rectangular para encerrar su perro, de área tan grande como sea posible, para esto dispone de 38 metros lineales de material para cercar. Por supuesto Pérez puede utilizar una pared de las que ya tiene bardeada el señor López.

figura.



RESOLUCION.

1. Escribiremos lo que se pide encontrar en este problema.

"Las dimensiones que debe tener el corral de forma rectangular para que abarque la mayor área posible"

2. De la geometría elemental sabemos que la fórmula para calcular el área del gallinero es:

$$A = b \cdot h$$

3. Como puedes observar, la fórmula anterior expresa el área del gallinero en términos de la base y la altura. Ahora expresaremos la relación para calcular el área del gallinero como una función de la base.

- Sabemos que; $A = b \cdot h$ ---(1)

- y además que; $38 = 2 \cdot b + h$ ---(2)

- Despejando "h" de la segunda relación se tiene;

$$h = 38 - 2b \text{ ---(3)}$$

- Sustituyendo (3) en (1) tenemos que:

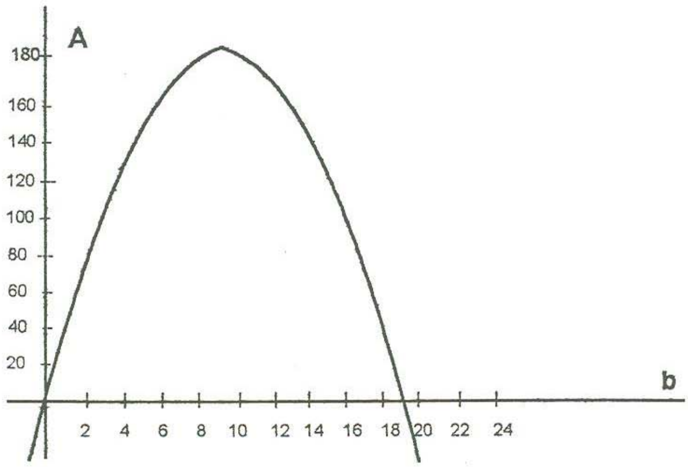
$$\boxed{A(b) = b(38 - 2b)}$$

"A ESTA FUNCION LOS MATEMATICOS LE LLAMAN MODELO MATEMATICO DEL PROBLEMA"

4. ¿Cuáles son los valores que en este problema puede tomar la base del corral?

METODO GRAFICO.

5. Dibujaremos una gráfica de la función que modela el problema y localizaremos el punto que representa la solución.



- Nota! (mismo comentario del problema anterior)

¿Cómo es la recta tangente a la gráfica de la función en el punto donde está representada la solución?

METODO ALGEBRAICO.

6. Encontremos la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función:

$$A(b) = b(38 - 2b), \text{ derivando se tiene que:}$$

$$A'(b) = b(-2) + (38 - 2b)\,1 = 38 - 4b.$$

-Otra manera de encontrar la fórmula de la pendientes de las rectas tangentes a la curva es expresar la función como una suma de funciones:

$$A(b) = 38b - 2b^2, \text{ derivando tenemos que:}$$

$$A'(b) = 38 - 4b$$

- Entonces la fórmula para determinar la pendiente de las rectas tangentes a la curva es:

$$\boxed{A'(b) = m_{tg} = 38 - 4b}$$

7. Como ya se observó la resolución gráfica del problema, la pendiente de la recta tangente en el punto que representa la solución es "cero", entonces;

$$38 - 4b = 0, \text{ de donde;}$$

$$b = 38/4 = 19/2.$$

8. La solución del problema es:

-Como queremos encontrar las dimensiones del corral, necesitamos encontrar el valor de la base y la altura, en la actividad anterior se obtuvo que la base es 19/2, para determinar la altura sustituiremos el valor de "b" en la relación (3) con lo que obtenemos que;

$$h = 38 - 2(19/2) = 19.$$

- Entonces; "las dimensiones del corral de mayor área posible son:

$$\mathbf{b = 19/2 \text{ m. y } h = 19 \text{ m.}}$$

- Y además que; $A = 600 = b \cdot h$ ---(2)

- Despejando "h" de la segunda relación se tiene que:

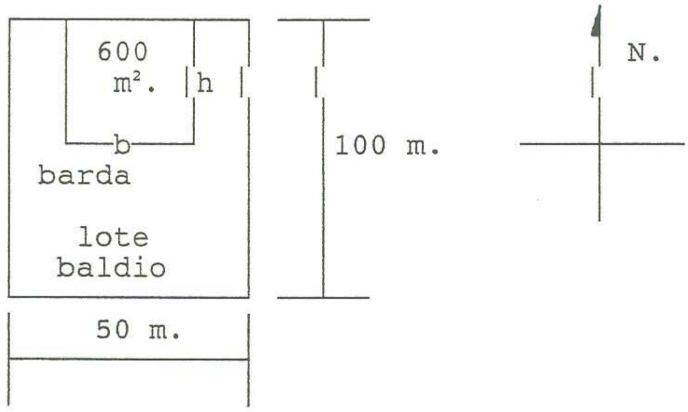
$$h = 600/b \text{ ---(3)}$$

Problema 3. La llantera.

En un lote baldío de 50 metros por 100 metros, una compañía llantera requiere bardear un terreno rectangular de 600 metros cuadrados de superficie, dejando sin bardear el lado que da al norte porque será utilizado como entrada al negocio, ¿Qué dimensiones deberá de tener el terreno para que la suma de la longitud bardeada sea la mínima?

RESOLUCION.

1. Para entender de una mejor manera el problema vamos a hacer un croquis del mismo.



2. Ahora vamos a escribir lo que se pide encontrar en este problema.

"Las dimensiones que debe tener el terreno de la llantera de menor longitud bardeada"

3. La fórmula para calcular la longitud bardeada (L) de la llantera es:

$$L = b + 2h$$

4. Como puedes observar, la fórmula anterior expresa la longitud bardeada de la llantera en términos de su base y su altura. Ahora expresaremos la relación para calcular la longitud bardeada como una función de la base.

- Sabemos que; $L = b + 2h$ ---(1)

- Y además que; $A = 600 = b \cdot h$ ---(2)

- Despejando "h" de la segunda relación se tiene que:

$$h = 600/b \text{ ---(3)}$$

- Sustituyendo (3) en (1) tenemos que:

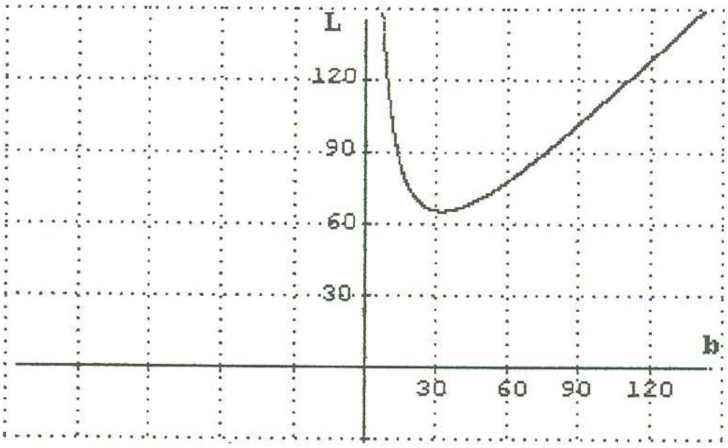
$$\boxed{L(b) = b + 1200/b}$$

"A ESTA FUNCION LOS MATEMATICOS LE LLAMAN MODELO MATEMATICO DEL PROBLEMA"

5. ¿Cuáles son los valores que en este problema puede tomar la base de la llantera?

METODO GRAFICO.

6. Dibujaremos una gráfica de la función que modela el problema y localizaremos el punto que representa la solución.



- Nota! (mismo comentario del problema anterior)

¿Cómo es la recta tangente a la gráfica de la función en el punto donde está representada la solución?

METODO ALGEBRAICO.

7. Encontremos la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

$L(b) = b + 1200/b$, derivando se obtiene que:

$$L'(b) = 1 - 1200/b^2.$$

- Entonces la fórmula para determinar la pendiente de las rectas tangentes a la curva es:

$$\boxed{L'(b) = m_{tg} = 1 - 1200/b^2}$$

8. Como ya se observó la pendiente de la recta tangente en el punto que representa la solución es "cero" entonces;

$$1 - 1200/b^2 = 0, \text{ de donde;}$$

$$b = \pm\sqrt{1200}$$

- Como los valores que puede tomar la b en este problema son: $0 < b \leq 50$; entonces la respuesta es: $\mathbf{b = \sqrt{1200}}$.

9. La solución del problema es:

- Como ya se mencionó al inicio del problema lo que queremos encontrar es la medida de la base y la altura de la llantera de menor longitud bardeada, ya obtuvimos que $\mathbf{b = \sqrt{1200}}$, ahora para determinar el valor de la altura sustituimos el valor de la base en la relación (3), obteniendo que:

$$h = 600/\sqrt{1200}$$

- Entonces "Las dimensiones de la llantera de menor longitud bardeada son:

$$\mathbf{b = \sqrt{1200}\ m.\ y\ h = 600/\sqrt{1200}\ m.}$$

Problema 4. La caja.

Un empresario desea hacer cajas sin tapa para envasar su producto, para esto hará uso de piezas rectangulares de cartón de 50 centímetros por 30 centímetros, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas, y doblando como se ilustra en la figura que se muestra en el pizarrón. Encuentra la longitud del lado del cuadrado que será cortado en las esquinas y las dimensiones de la caja, si se quiere obtener una caja que encierre el mayor volumen posible.

RESOLUCION.

1. Escribiremos lo que se pide encontrar en este problema.

"Las dimensiones del cuadrado que se cortará en cada esquina, así como las dimensiones de la caja de mayor volumen"

2. La fórmula para calcular el volumen de la caja es:

$$V = l \cdot a \cdot h$$

3. Como puedes observar, la fórmula anterior expresa el volumen de la caja en términos del largo, ancho y altura. Ahora expresaremos la relación para calcular el volumen de la caja en términos de una sola variable.

- Sabemos que; $V = l \cdot a \cdot h$ ---(1)

- Y además que; $l = 50 - 2x$ ---(2)
  $a = 30 - 2x$ ---(3)
  $h = x$ ---------(4)

- Sustituyendo las relaciones (2), (3) y (4) en la primera relación tenemos que:

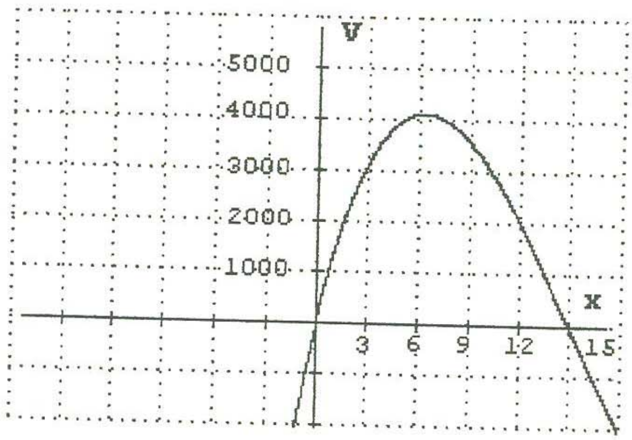
$$\boxed{V(x) = (50-2x)(30-2x)x}$$

"A ESTA FUNCION LOS MATEMATICOS LE LLAMAN MODELO MATEMATICO DEL PROBLEMA"

5. ¿Cuáles son los valores que en este problema puede tomar la x?

METODO GRAFICO.

6. Dibujaremos una gráfica de la función que modela el problema y localizaremos el punto que representa la solución.



¿Cómo es la recta tangente a la gráfica de la función en el punto donde está representada la solución?

METODO ALGEBRAICO.

7. Encontremos la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

$$V(x) = (50-2x)(30-2x)x = 4x^3 - 160x^2 + 1500x.$$

- Derivando se obtiene:

$$V'(x) = 12x^2 - 320x + 1500.$$

-Otra manera de encontrar la fórmula de la pendientes de las rectas tangentes a la curva es utilizando la regla para los productos (este trabajo se deja como ejercicio al alumno).

- Entonces la fórmula para determinar la pendiente de las rectas tangentes a la curva es:

$$\boxed{V'(x) = m_{tg} = 12x^2 - 320x + 1500}$$

8. Como ya se observó la pendiente de la recta tangente en el punto que representa la solución es "cero" entonces;

$$12x^2 - 320x + 1500 = 0, \text{ de donde;}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-320) \pm \sqrt{(-320)^2 - 4(12)(1500)}}{2(12)}$$

$$x_{1,2} = \frac{320 \pm \sqrt{30400}}{24}$$

- De donde se obtiene que:

$$x_1 = \frac{320 + \sqrt{30400}}{24} = \frac{320 + 40\sqrt{19}}{24}$$

$$x_2 = \frac{320 - \sqrt{30400}}{24} = \frac{320 - 40\sqrt{19}}{24}$$

- Como los valores que puede tomar la "x" en este problema son:

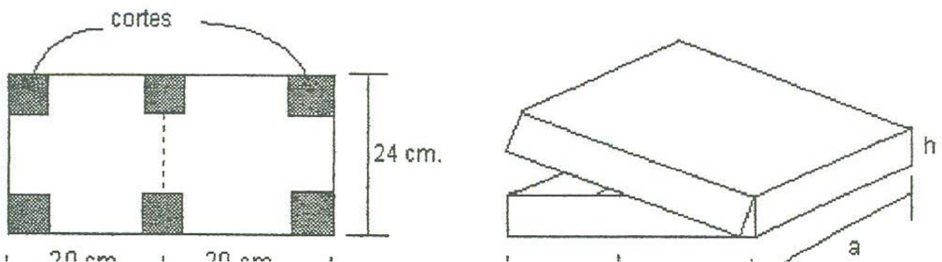
$$0 < x < 15$$

- Entonces la "x" que representa la solución es:

$$x_2 = (320 - 40\sqrt{19}) / 24$$

9. La solución del problema es:

como se muestra en la figura.



- Derivando se obtiene:

$$V'(x) = 12x^2 - 320x + 1500.$$

-Otra manera de encontrar la fórmula de la pendientes de las rectas tangentes a la curva es utilizando la regla para los productos (este trabajo se deja como ejercicio al alumno).

- Entonces la fórmula para determinar la pendiente de las rectas tangentes a la curva es:

$$\boxed{V'(x) = m_{tg} = 12x^2 - 320x + 1500}$$

8. Como ya se observó la pendiente de la recta tangente en el punto que representa la solución es "cero" entonces;

$$12x^2 - 320x + 1500 = 0, \text{ de donde;}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-320) \pm \sqrt{(-320)^2 - 4(12)(1500)}}{2(12)}$$

$$x_{1,2} = \frac{320 \pm \sqrt{30400}}{24}$$

- De donde se obtiene que:

$$x_1 = \frac{320 + \sqrt{30400}}{24} = \frac{320 + 40\sqrt{19}}{24}$$

$$x_2 = \frac{320 - \sqrt{30400}}{24} = \frac{320 - 40\sqrt{19}}{24}$$

- Como los valores que puede tomar la "x" en este problema son:

$$0 < x < 15$$

- Entonces la "x" que representa la solución es:

$$x_2 = (320 - 40\sqrt{19}) / 24$$

9. La solución del problema es:

- Considerando el valor de "x" encontrado en la actividad anterior se obtiene que la dimensión del cuadrado que se cortará en las esquinas es:

$$x = (320 - 40 \sqrt{19})/ 24.$$

- Sustituyendo este valor en las relaciones (2), (3) y (4) se tiene que las dimensiones de la caja de mayor volumen son:

$$l = 50 - (320 - 40 \sqrt{19})/12.$$

$$a = 30 - (320 - 40 \sqrt{19})/12.$$

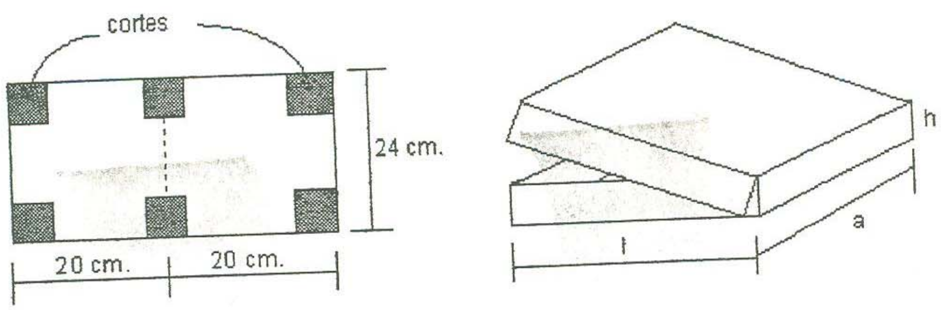
$$h = (320 - 40 \sqrt{19})/24.$$

<u>ACTIVIDAD IMPORTANTE.</u> analiza el proceso que se siguió para resolver los problemas anteriores con la finalidad de que puedas observar el plan o estrategia de solución para estos problemas. Una vez hecho esto, escribe en tu cuaderno, los pasos que pudiste apreciar en esta discusión.

Con los resultados de la discusión anterior trata de abordar los siguientes problemas.

Problema 5. La caja para empacar harina.

Se pretende empacar harina en cajas con tapadera, contando para su manufactura con láminas de cartón rectangulares de 40 cm. de largo por 24 cm. de ancho, cortando cuadrados iguales y doblando como se muestra en la figura.



a) ¿Cuánto mide el lado de los cuadrados que se cortan que hacen que el volumen de la caja sea el máximo?

b) ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen?

c) ¿Cuál es el volumen de dicha caja?

Problema 6. La barra de margarina.

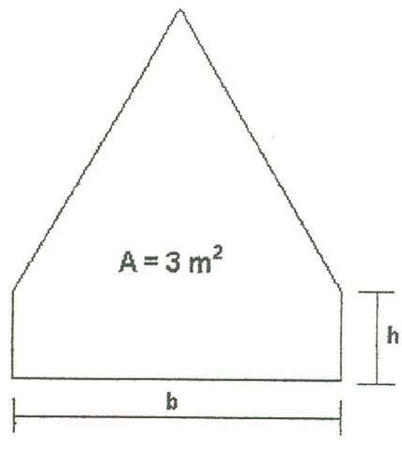
Un tamaño de la margarina primavera se vende en barras que tienen forma de un prisma de base cuadrada, el volumen de las barritas es de 108 centímetros cúbicos. Determinar las dimensiones de la barra que minimizan la cantidad de envoltura.

Problema 7. La lata para envasar chocolate.

La compañía nestlé usa latas de hojalata de forma cilíndrica para envasar chocolate en polvo marca "Quik" en su presentación de 400 gr. Hallar las dimensiones mas económicas (es decir, área mínima de hojalata empleada en cada bote), sabiendo que el volumen de cada bote es de 909.2 centímetros cúbicos.

Problema 8. La ventana.

Un arquitecto desea diseñar cierto tipo de ventana de tal manera que la parte inferior sea rectangular y la superior sea un triángulo equilátero como se ilustra en la figura. Si cada ventana tiene una área de 3 metros cuadrados ¿Cuáles son las dimensiones de la ventana para que su perímetro sea el menor posible?



Problema 9. La alberca.

Una persona tiene un patio rectangular en su casa que mide 20 x 30 metros, y desea construir una alberca con fondo rectangular cuya área sea de 40 metros cuadrados. Determina las dimensiones del fondo para que la cantidad de material que se usará en las paredes sea el mínimo.

Problema 10. La lata para envasar aceite.

Una compañía fabricante de aceites desea construir latas cilíndricas de un litro de capacidad para envasar el producto. Encuentra las dimensiones que debe tener la lata que requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

Problema 11. El cartel.

Un impresor recibe un pedido para producir un cartel rectangular que contiene 25 pulgadas cuadradas de impresión rodeadas por márgenes de 2 pulgadas a cada lado y 4 pulgadas en la parte superior e inferior. ¿cuáles son las dimensiones del papel mas pequeño que puede usarse para hacer el cartel?

Problema 12. Los postes.

Dos postes de longitudes de 15 y 10 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 20 metros. Calcula la longitud mínima de un cable que vaya desde la punta de uno de los postes hasta el suelo y luego vuelva subir hasta la punta del otro poste.

Problema 13. El triángulo rectángulo.

Si **a** y **b** son los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa 100, hallar el triángulo rectángulo que posea el valor mayor de $\underline{2a + b}$.

Problema 14. El nadador.

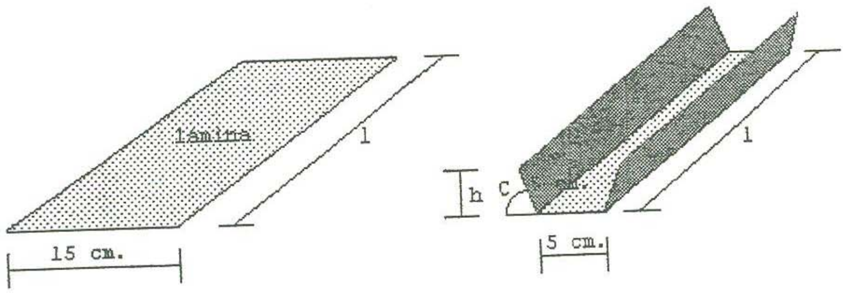
Un nadador está situado en un punto A del lado de un río recto de 200 metros de ancho y quiere desplazarse a un punto B situado al otro lado del río 700 metros aguas abajo. Si nada del punto A a un punto P al otro lado del río a razón de 30 metros por minuto y camina del punto P al B a razón 80 metros por minuto. Encuentra la ruta que el nadador debe de cubrir para llegar de A a B en el menor tiempo posible.

Problema 15. La escalera.

Una cerca tiene 8 pies de altura con respecto al piso y corre paralela a un edificio. La cerca se encuentra a un pie del edificio. Encuentra la longitud de la escalera mas corta que pueda colocarse en el suelo y recargarse en el edificio por encima de la cerca.

Problema 16. El canalón.

Supóngase que le ha sido asignado el trabajo de construir un canalón para transportar agua de lluvia de una hoja de metal de 15 centímetros de ancho. A un tercio del ancho de la hoja se dobla esta hacia arriba un ángulo C, tal y como se muestra en la figura, para formar los lados del canalón. ¿Qué tan grande debe hacerse el ángulo C para maximizar el área de la sección transversal del canalón y por lo tanto su capacidad de acarreo?



Problema 17. El bloque.

Un hombre está jalando un bloque de 50 kg. con velocidad constante, por medio de una cuerda sobre un piso horizontal, si el coeficiente de fricción es de 0.6 ¿Cuál es el ángulo con el que el hombre debe tirar la cuerda para hacer el mínimo esfuerzo para jalar el bloque?

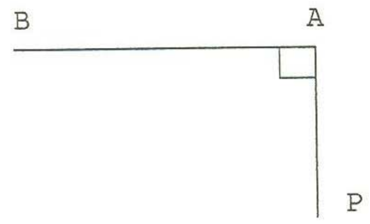
Problema 18. EL cartel.

Sobre una torre se levanta un cartel. El cartel tiene 10 metros de alto y su orilla inferior esta a 91.5 metros sobre el nivel de la calle. Un hombre cuyos ojos se encuentran a 1.5 metros sobre el nivel de la calle alza la vista para leer el cartel ¿Qué tan lejos se debe colocar de la base de la torre si se quiere ver el cartel lo mas claramente posible, es decir, a qué distancia se hace máximo el ángulo formado por los ojos del hombre y las orillas inferior y superior del cartel? Sugerencia: Maximizar la tangente del ángulo.

PROBLEMAS DE REPASO

Problema 19. El lanchero.

Un hombre está en un bote en el punto P a un kilómetro del punto A que está en la playa (ver figura). Desea ir al punto B que esta a un kilómetro de A perpendicularmente a PA. Si puede remar a 3 km/hr. y caminar a 5 km/hr. Determina hacia que punto C entre A y B, debe remar el lanchero para llegar a B en el menor tiempo posible.



Problema 20. La ventana.

Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado con un semicírculo. Encuentra las dimensiones de la ventana que deja pasar mas luz, si su perímetro mide 5 metros.

Problema 21. El libro.

Las páginas de un libro deben tener cada una 600 centímetros cuadrados de área con márgenes de 2 centímetros a los lados y 3 centímetros arriba y abajo. Encuentra las dimensiones de la página que permitan la mayor área impresa posible.

Problema 22. El canalón.

Una pieza larga rectangular de lámina de 50 centímetros de ancho va a convertirse en un canal para agua doblando hacia arriba dos de sus lados hasta formar ángulos de 120º con la base. ¿Cuál debe ser la dimensión de las partes dobladas para que el canal tenga capacidad máxima?

Problema 23. La viga.

Encuentra las dimensiones de la viga rectangular de mayor sección transversal, que puede cortarse de un tronco cilíndrico de 80 centímetros de radio.

Problema 24. El paquete de correo.

Un paquete puede enviarse por correo si la suma de su altura y el perímetro de su base es menor que dos metros y medio. Encuentra las dimensiones de la caja de volumen máximo que puede enviarse por correo si la base del paquete es cuadrada.

Problema 25. El triángulo isósceles.

Si el ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles se incrementa a razón de 2 rad./min. y si los lados adyacentes del triángulo conservan su longitud de 10 centímetros ¿Qué tanto estará creciendo la base del triángulo en el instante que el ángulo mencionado se convierte en ángulo recto?

TEMA IV.

RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS (PARTE II).

PRESENTACION.

Hasta este momento del curso has resuelto cierto tipo de problemas de optimización utilizando la herramienta que se presentó en el tema II. En este módulo te darás cuenta que existen mas problemas de máximos y mínimos que no podrías resolver por las limitaciones de la herramienta que posees.

El propósito de este material es de analizar algunos de esos problemas para buscar la herramienta necesaria para su solución, finalmente se te proporcionaran una seria de reglas (las mas conocidas) para derivar funciones que seguramente aparecerán al momento de que pretendas resolver problemas de máximos y mínimos en el nivel superior.

Problema 1. Los postes.

Dos postes de longitudes de 15 y 10 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 20 metros. Calcula la longitud mínima de un cable que vaya desde la punta de uno de los postes hasta el suelo y luego vuelva subir hasta la punta del otro poste.

Nota! Como ya adquiriste experiencia en la resolución de problemas de máximos y mínimos, en este módulo se te presentan una serie de actividades a resolver en cada problema propuesto, una vez que sea resuelto en el equipo, su solución se discutirá en el grupo.

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Haz un dibujo donde represente la información que se te proporciona en el problema.

2. Escribe lo que se te pide encontrar en este problema.

3. Anota la fórmula para calcular la longitud del cable.

4. Ahora expresa la relación anterior en función de una variable.

A ESTA FUNCION LOS MATEMATICOS LLAMA "MODELO MATEMATICO DEL PROBLEMA".

5. ¿Cuáles son los valores que en este problema puede tomar la variable independiente?

METODO GRAFICO.

6. Elabora una gráfica del problema en el plano cartesiano, en ella localiza el punto que representa la solución del problema y escribe sus coordenadas. Con la información obtenida de la gráfica escribe la solución del problema.

METODO "ALGEBRAICO".

7. Encuentra la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

> COMENTARIO.
>
> COMO PUEDES OBSERVAR EN LA ACTIVIDAD ANTERIOR, NO CONOCES UNA REGLA PARA OBTENER LA FORMULA DE LAS PENDIENTES DE LAS RECTAS TANGENTES (LA DERIVADA) A LA GRAFICA DE LA FUNCION.
>
> ES IMPORTANTE HACER LA ACLARACION QUE ESTE Y CUALQUIER TIPO DE REGLAS DE DERIVACION SE OBTIENEN CON UN PROCESO SEMEJANTE A LOS UTILIZADOS PARA OBTENER LAS PRIMERAS REGLAS QUE CONOCISTE EN ESTE CURSO, ES DECIR NECESARIAMENTE TENDRIAMOS QUE RESOLVER "UN LIMITE".
>
> NO ESTA CONTEMPLADO DENTRO DE LOS PROPOSITOS DE ESTE CURSO LA DISCUSION SOBRE LA OBTENCION DE ESTAS REGLAS, POR LO QUE DE AQUI EN DELANTE SOLO SE TE PROPORCIONARA LA REGLA DE MANERA DIRECTA.

REGLA. Si $f(x) = \sqrt{g(x)}$; donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones, entonces;

$m_{tg} = f'(x) = g'(x)/2\sqrt{g(x)}$

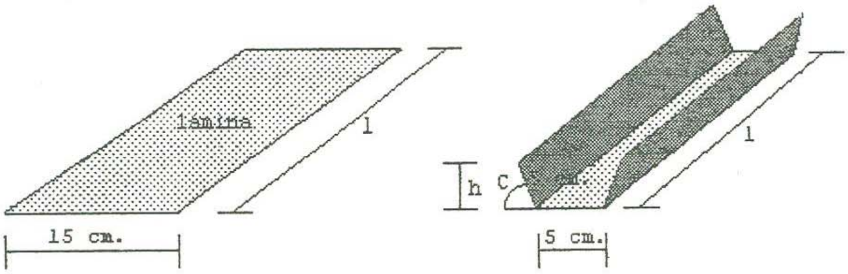
- Ahora, resuelve la actividad anterior.

8. Utilizando la fórmula de las tangentes (la derivada) encuentra el punto de la gráfica que representa la solución del problema.

9. La solución del problema es:

Problema 2. El canalón.

Supóngase que le ha sido asignado el trabajo de construir un canalón para transportar agua de lluvia de una hoja de metal de 15 centímetros de ancho. A un tercio del ancho de la hoja se dobla esta hacia arriba un ángulo B, tal y como se muestra en la figura, para formar los lados del canalón. ¿Qué tan grande debe hacerse el ángulo B para maximizar el área de la sección transversal del canalón y por lo tanto su capacidad de acarreo?



ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Escribe lo que se te pide encontrar en este problema.

2. Anota la fórmula para calcular el área de la sección transversal del canalón.

3. Ahora expresa la relación anterior en términos de "x".

"MODELO DEL PROBLEMA"

5. ¿Cuáles son los valores que en este problema puede tomar la variable independiente?

METODO GRAFICO.

6. Elabora una gráfica del problema en el plano cartesiano, en ella localiza el punto que representa la solución del problema y escribe sus coordenadas. Con la información obtenida de la gráfica escribe la solución del problema.

METODO "ALGEBRAICO".

7. Encuentra la fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

COMENTARIO.

COMO PUEDES OBSERVAR EN LA ACTIVIDAD ANTERIOR, NO CONOCES UNA REGLA PARA OBTENER LA FORMULA DE LAS PENDIENTES DE LAS RECTAS TANGENTES (LA DERIVADA) A LA GRAFICA DE LA FUNCION.

A CONTINUACION SE TE PROPORCIONA LA REGLA PARA DERIVAR ESTA FUNCION.

REGLA. Si $f(x) = \text{sen } x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = \cos x$

REGLA. Si $f(x) = \cos x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = -\text{sen } x$

-Ahora resuelve la actividad anterior.

8. Utilizando la fórmula de las tangentes (la derivada) encuentra el punto de la gráfica que representa la solución del problema.

9. La solución del problema es:

COMENTARIO.

DENTRO DE LOS PROPOSITOS DE ESTE CURSO SE CONTEMPLA QUE RESUELVAS EL TIPO DE PROBLEMAS PRESENTADO EN EL MODULO III, ES IMPORTANTE DESTACAR QUE NO SON LOS UNICOS PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS QUE EXISTEN, ES DECIR EXISTEN PROBLEMAS DE OPTIMIZACION QUE DAN ORIGEN A OTRO TIPO DE FUNCIONES Y SEGURAMENTE CUANDO INGRESES AL NIVEL SUPERIOR, ESTOS PROBLEMAS SE TE PRESENTARAN EN LOS CURSOS DE MATEMATICAS.

A CONTINUACION SE TE PROPORCIONAN UN SERIE DE REGLAS DE DERIVACION (LAS MAS CONOCIDAS) QUE CONTEMPLAN ALGUNAS DE ESAS FUNCIONES CON EL PROPOSITO QUE LAS UTILICES Y ADQUIERAS HABILIDAD PARA ENCONTRAR SU DERIVADA.

las reglas que hasta el momento has utilizado son:

Regla 1. Si $f(x) = C \cdot x^n$; $C \in R$ y $n \in N$; entonces;

$m_{tg} = f'(x) = C \cdot n\ x^{n-1}$

Regla 2. Si $f(x) = C(1/x^n)$; $C \in R$ y $n \in N$; entonces;

$m_{tg} = f'(x) = C(-n/x^{n+1})$

Regla 3. Si $f(x) = C\sqrt[n]{x}$; $C \in R$ y $n \in N$; entonces;

$m_{tg} = f'(x) = C(1/n\sqrt[n]{x^{n-1}})$

Regla 4 (Suma de funciones). Si $f(x) = u(x) + v(x) + w(x) + \ldots$

entonces; $m_{tg} = f'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) + \ldots$

Regla 5. Si $f(x) = C$; $C \in R$; entonces;

$m_{tg} = f'(x) = 0$

Regla 6 (Producto de dos funciones). Si $f(x) = u(x)\cdot v(x)$;

entonces; $m_{tg} = f'(x) = u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x)$

Regla 7. Si $f(x) = \sqrt{g(x)}$; donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones,

entonces; $m_{tg} = f'(x) = g'(x)/2\sqrt{g(x)}$

Regla 8. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = \cos x$

Regla 9. Si $f(x) = \cos x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = -\operatorname{sen} x$

Las reglas adicionales son:

Regla 10 (Cociente de dos funciones). Si $f(x) = g(x)/h(x)$,

entonces; $m_{tg} = f'(x) = [\, h(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot h'(x)] /[\, h(x)]^2$

Regla 11. Si $f(x) = \tan x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = \sec^2 x$

Regla 12. Si $f(x) = \operatorname{ctg} x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = -\csc^2 x$

Regla 13. Si $f(x) = \sec x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = \sec x\cdot\tan x$

Regla 14. Si $f(x) = \csc x$, entonces $m_{tg} = f'(x) = -\csc x\cdot\operatorname{ctg} x$

Regla 15. Si $f(x) = \operatorname{Ln} x$, entonces; $m_{tg} = f'(x) = 1/x$

Regla 16. Si $f(x) = e^x$, entonces; $m_{tg} = f'(x) = e^x$

Problema 3. Utilizando las reglas anteriores encuentra la fórmula para determinar las pendientes de las rectas tangentes (la derivada) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{(3x^2 + 5x - 1)^3}$ b) $f(x) = \sqrt{(4x + 6)/(x^2 + 3x + 4)}$

c) $S(t) = \sqrt{100t^2 + 16}$ d) $f(x) = \sqrt{25 - x2}$

e) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ f) $f(x) = \sqrt{x(x^2 - 8x + 9)}$

g) $S(t) = \sqrt{10t^3 + 16t^2 - 10}$ h) $f(x) = \sqrt{(25 - x^2)(x^2 + 2x)}$

i) $f(x) = (3x^2 + 5x - 1)/(x^2 + 3x + 4)$

j) $S(t) = (100t^2 + 16t)/ (10t^3 + 16t^2 - 10)$

k) $f(x) = (x\cdot \sqrt{x})/ x^3$

l) $f(x) = (-2x^3 + 4x^2 + 10x - 1)/ x^3$

m) $f(x) = (x^2 - 8x + 9) / (4 x + 6)$

n) $f(x) = (25 - x^2)(x^2 + 2x) / (-8x^3 + 7x^2 + 10x - 1)$

ñ) Verifica que si $f(x) = [g(x)]^2$, entonces;

$m_{tg} = f'(x) = 2g(x)\cdot g'(x)$

o) Encuentra la regla para derivar $f(x) = u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$

p) Encuentra la regla para derivar $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$

Problema 4. Encuentra la fórmula para las tangentes expresada como un límite ($m_{tg} = \lim m_s$; cuando la "h" tiende a cero) para las siguientes funciones:
Se sugiere que grafiques la función, selecciones un punto fijo cualquiera y traces las secantes necesarias para obtener la recta tangente.

a) $f(x) = \text{sen } x$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \tan x$

Problema 5. Utilizando las reglas de derivación anteriores encuentra la fórmula para determinar la pendiente de cualquier tangente (la derivada) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2 \text{ sen } x\cdot\cos x$ b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = 2 \text{ sen}^2 x$ d) $f(x) = \cos 2x$

e) $S(t) = \text{sen } t + \sqrt{16 - \cos^2 t}$

f) $f(x) = x/\tan x$ g) $f(x) = \sec x\cdot\tan x$

h) $f(x) = (x + \text{ctg } x)^2$ i) $f(x) = x(\tan x - \cot x)$

j) $h(t) = 6 - 3 \text{ sen } t$

k) $v(t) = \cos t + \dfrac{\cos t \operatorname{sen} t}{\sqrt{16 - \cos^2 t}}$

l) $h(t) = (10 \sqrt{\cos^2 t})/(1 + t)$

m) Utilizando la regla 8 y 9 comprueba que:

m.1) Si $f(x) = \cot x$, entonces; $m_{tg} = f'(x) = -\csc^2 x$

m.2) Si $f(x) = \tan x$, entonces; $m_{tg} = f'(x) = \sec^2 x$

Problema 6. Encuentra la fórmula para las tangentes expresada como un límite ($m_{tg} = \lim m_s$; cuando la "h" tiende a cero) para las siguientes funciones:
Se sugiere que grafiques la función, selecciones un punto fijo cualquiera y traces las secantes necesarias para obtener la recta tangente.

a) $f(x) = \operatorname{Ln} x$

b) $f(x) = e^x$

Problema 7. Utilizando las reglas anteriores encuentra la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4\ln x$

b) $f(x) = -2e^x$

c) $f(x) = (e^x)(\ln x)$

d) $f(x) = 12\ln x + 5\cos x - 3e^x$

e) $f(x) = \sqrt{\ln x + e^x}$

f) $f(x) = 5\ (\ln x)^2$

g) $f(x) = \ln x/e^x$

h) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + 3\sec x + 6e^x$

i) $f(x) = \sqrt{(e^x)(\ln x)}$

BIBLIOGRAFÍA GENERAL.

Alba, Alicia de, "Evaluación Curricular/Conformación Conceptual del Campo", México, UNAM, 1991.

Alba, Alicia de, "El currículum universitario ante los retos del siglo XXI, la paradoja entre el postmodernismo, ausencia de utopía y determinación curricular, México, 1991.

Avalos Caudillo, Alicia, Tesis de licenciatura "Análisis de la educación matemática y su influencia en el desarrollo científico y tecnológico de México", México, 1991.

Ávila Godoy, Ramiro, et al, Tesis de maestría, Sección Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México, 1988.

Comisión del Área de Matemáticas, "Segunda aproximación a la revisión del plan de estudios del bachillerato del CCH-UNAM", CCH cuadernillo No. 14, México, 1993.

CONALTE, Hacia un nuevo modelo educativo, SEP, México, 1991.

CRUSE/LEHMAN, Lecciones de cálculo 1, Fondo Educativo Interamericano, México, 1982.

G. Polya, Como plantear y resolver problemas, Editorial Trillas, México, 1975.

Hitt Espinoza, Fernando, "Las microcomputadoras en el aula e investigación en educación matemática", Sección Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Kline, Morris, CALCULUS: An Intuitive and Physical Approach, Wiley, USA, 1967.

Kline, Morris, Matemáticas; La pérdida de la certidumbre, Siglo Veintiuno Editores, S.A., México, 1985.

Lester, F.K. Jr., Trends and issues in mathematical problem solving research; In R. Lesh & Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concept and procedure, Orlando Fl., Academic Press, Inc.

Martínez Sánchez, Jorge (Compilador), Lecturas en teorías del Aprendizaje, Sección Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, 1979.

Mashbits Y.D., Fundamentos psicológicos de la conducción de la actividad de aprendizaje, Editorial pedagógica Moscú, Traducido por M.C. José Ramón Jiménez Rodríguez, UNISON.

Moreno Armenta, Luis y Waldegg, Guillermina, Constructivismo y Educación Matemática, Educación Matemática, Volumen IV No. 2, México, 1992.

Moreno Moreno, Prudenciano, Tesis de doctorado "Crisis y modernización de la educación en Sonora 1980-1990", UNAM, 1991.

NCTM, Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática, Sociedad andaluza de educación matemática, Thales, España, 1989.

Pantoja Morán, David, Notas y reflexiones acerca de la historia del bachillerato, UNAM, México, 1983.

Robert V. Hogg y Johannes Ledolter, Applied Statistics for engineers and physical scientists, segunda edición, editorial Maxwell Macmillan International Edition, Singapur, 1992.

Santos Trigo, Luz Manuel, La resolución de problemas; elementos para una propuesta en el aprendizaje de las matemáticas, cuaderno de investigación No. 25, CINVESTAV-IPN, México.

SEP/COSNET, Programas maestros del tronco común del bachillerato tecnológico 1984, SEIT, México, 1985.

Skatkin M.N., Problemas de la didáctica moderna, Editorial pedagógica Moscú, 1980, Traducido por el M.C. Jiménez Rodríguez Ramón, UNISON, 1989.

Soto Munguía, José Luis, Tesis de maestría "Elementos para el análisis del currículum de matemáticas del bachillerato", Depertamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

V.G., Boltiánski y V.V. Rubstov, Problemas Psicológicos-Pedagógicos del diseño de un sistema de juegos computarizados para el desarrollo, traducido por el M.C. Luis Nabor Alejo Armenta, UAS, México, 1990.

A N E X O S

A N E X O 1

E X A M E N D I A G N Ó S T I C O

- CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A N E X O 1

E X A M E N D I A G N Ó S T I C O

- CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

EXAMEN DIAGNÓSTICO.

DE

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO.

LA PRESENTE EVALUACIÓN TIENE LA FINALIDAD DE DIAGNOSTICAR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO QUE HASTA EL MOMENTO POSEES EN ARITMÉTICA, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA, CONOCIMIENTO CON LOS QUE ABORDARÁS EL CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL.

POR LA RAZÓN ANTERIOR ESTE EXAMEN NO INFLUIRÁ EN TU EVA-- LUACIÓN EN EL PRESENTE CURSO DE MATEMÁTICAS.

TUS RESPUESTAS PERMITIRÁN TENER INFORMACIÓN PRECISA SOBRE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS QUE DOMINAS Y EN BASE A ELLO ORGANIZAR E IMPARTIR EL CURSO DE MATEMÁTICAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL.

INSTRUCCIONES.

- ESTE EXAMEN CONSTA DE DOS PARTES, UN CUADERNILLO DE PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE (ESTE EJEMPLAR) Y UNA HOJA DE RESPUESTAS.

- EN ESTE CUADERNILLO CADA REACTIVO APARECE CON CINCO OPCIONES, UNA DE ELLAS ES LA CORRECTA. ANOTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA LETRA QUE CORRESPONDA A LA SOLUCIÓN.

- NO RAYES ESTE CUADERNILLO DE PREGUNTAS, SI NECESITAS HACER OPERACIONES UTILIZA HOJAS EN BLANCO Y ANÉXALAS.

- NO UTILICES CALCULADORA.

- HAZ TU MEJOR ESFUERZO PARA CONTESTAR COMPLETAMENTE ESTE EXAMEN Y GRACIAS POR TU COLABORACIÓN.

CUADERNILLO DE PREGUNTAS.

A R I T M E T I C A.

1. Al sumar 393, 4658, 3790 y 67 el resultado es:

a) 7908   b) 8608   c) 8898   d) 9808   e) ninguna de las anteriores.

2. El resultado de la suma (19) + (-41) es:

a) 22   b) 60   c) -22   d) -60   e) ninguna de las anteriores.

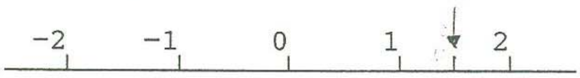
3. Al efectuar la operación (2/7) x (3/7) se obtiene:

a) 6/7   b) 6/49   c) 14/21   d) 21/14   e) ninguna de las anteriores.

4. El resultado de (3/8) + (5/2) es:

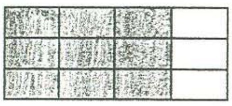
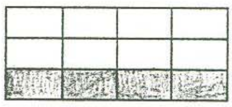
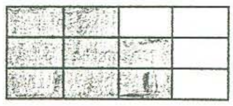
a) 23/8   b) 8/10   c) 16/4   d) 17/2   e) ninguna de las anteriores.

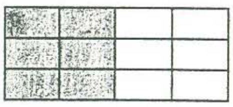
5. El número señalado en la recta numérica por la flecha es:



a) 3/4   b) -3/2   c) 6/4   d) 5/4   e) ninguna de las anteriores.

6. De los siguientes dibujos, aquel donde la parte sombreada corresponde a 2/3 es:

a)    b)    c) 

d)    e) ninguna de las anteriores.

7. La expresión decimal de 1/3 es:

a) 0.3   b) 0.33   c) 0.333   d) 0.3333   e) ninguna de las anteriores.

8. Si sumamos $1/8 + 1/6 + 1/4$ el resultado es:

a) $3/18$ b) $1/192$ c) $13/24$ d) $3/192$ e) ninguna de las anteriores.

A L G E B R A.

9. Al efectuar la operación de $a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - ab$ el resultado que se obtiene es:

a) $ab + b^2$ b) $-ab + b^2$ c) $-2a^2 - 3ab + b^2$

d) $-a^4 - 2a^2b^2 + b^2$ e) ninguna de las anteriores.

10. Al efectuar la operación $-2X\ (X - 1)$ obtenemos:

a) $-2X^2 - 1$ b) $2X^2 + 2X$ c) $-2X^2 + 2X$

d) $-2X^2 + 2$ e) ninguna de las anteriores.

11. El resultado de $(a - 2b)^2$ es:

a) $a^2 - 4b^2$ b) $a^2 + 4b^2$ c) $a^2 + 4ab + 4b^2$

d) $a^2 - 4ab + 4b^2$ e) ninguna de las anteriores.

12. La expresión $\dfrac{A}{A + B}$ es igual a:

a) $1/B$ b) B c) $(A/A) + (A/B)$ d) $\dfrac{A + B}{B}$

e) ninguna de las anteriores.

13. El resultado de factorizar $2Xh + h^2$ es:

a) $h^2(2X + 1)$ b) $h(2X + h)$ c) $2X(h + h^2)$

d) $h(2X + h^2)$ e) ninguna de las anteriores.

14. El producto de $(2X + 3Y)\ (2X + 3Y)$ es igual a:

a) $4X^2 - 6XY + 9Y^2$ b) $4X^2 + 6XY + 9Y^2$

c) $4X^2 + 9Y^2$ d) $4X^2 - 9Y^2$ e) ninguna de las anteriores.

15. El resultado de la operación $(3Xh^2 + 3X^2h + h^3) / h$ es:

a) $3Xh + 3X^2 + h^3$ b) $3X + 3X^2$ c) $3Xh + 3X + h^2$

d) $3Xh + 3X^2 + h^2$ e) ninguna de las anteriores.

16. En la ecuación $5X + 26 = 3X + 32$, el valor de la incógnita X es:

a) 12 b) 58/2 c) 6/8 d) 58/8 e) ninguna de las anteriores.

17. Las soluciones de la ecuación $2X^2 + 4X - 6 = 0$ son:

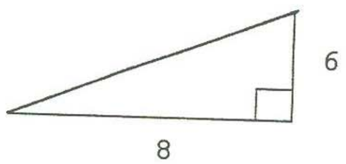
a) 4 y -6 b) 1 y 3 c) 1 y -3 d) -4 y 6 e) ninguna de las anteriores.

GEOMETRIA.

18. En el siguiente triángulo rectángulo el valor de la hipotenusa es:

a) 7 b) 10 c) 14

d) 4 e) ninguna de las anteriores.



19. Si se tiene un rectángulo de 50 metros de perímetro y su altura mide 10 metros entonces la base del rectángulo mide:

a) 5 metros b) 40 metros c) 30 metros

d) 25 metros e) ninguna de las anteriores.

20. Un circulo tiene dos metros de radio, si duplicamos el valor del radio el área del circulo:

a) se duplica b) se triplica c) se cuadruplica

d) se sextuplica e) ninguna de las anteriores.

21. Se tiene una recámara cuyo piso tiene una área de 24 metros cuadrados, si la altura del cuarto es de 2.5 metros el volumen de la recámara es:

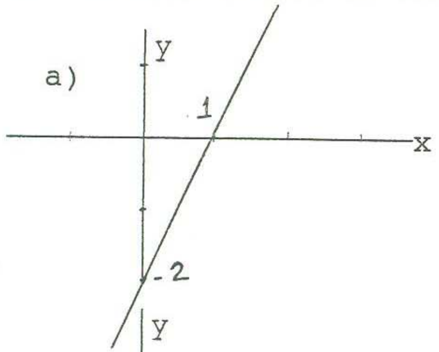
a) 24 b) 48 c) 60 d) 26.5 e) ninguna de las anteriores.

22. Un rectángulo tiene una área de 60 metros cuadrados, si la base mide 12 metros su altura expresada en metros será:

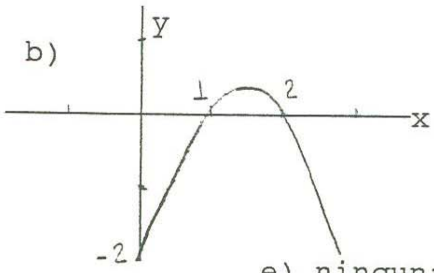
a) 5 b) 60 c) 12 d) 36 e) ninguna de las anteriores.

23. La gráfica de la ecuación $Y= -X^2 + 3X - 2$ es:

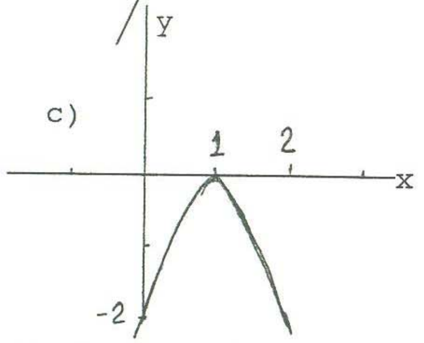
a)



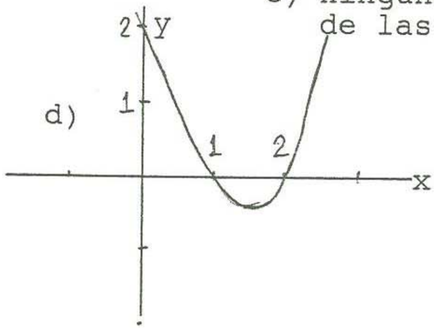
b)



c)



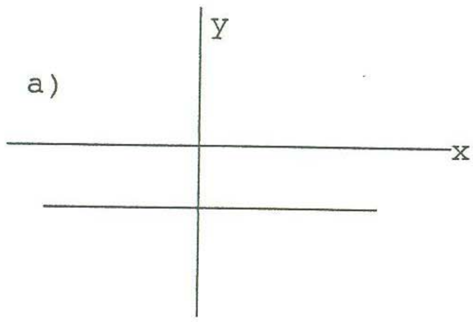
d)



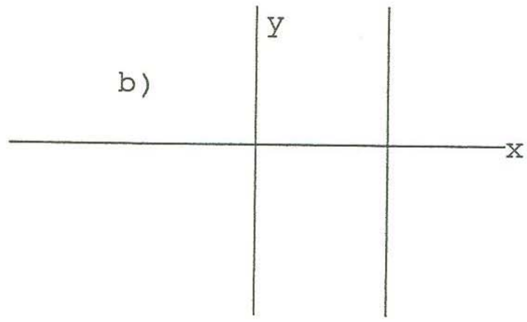
e) ninguna de
de las anteriores

24. De las siguientes rectas ¿cuál tiene pendiente cero?

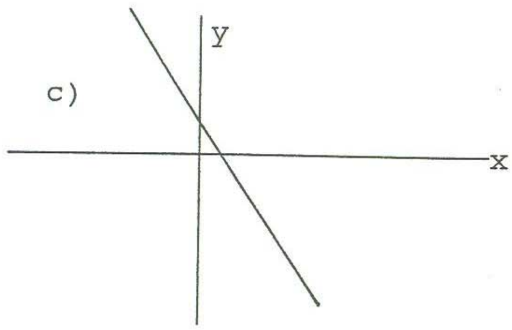
a)



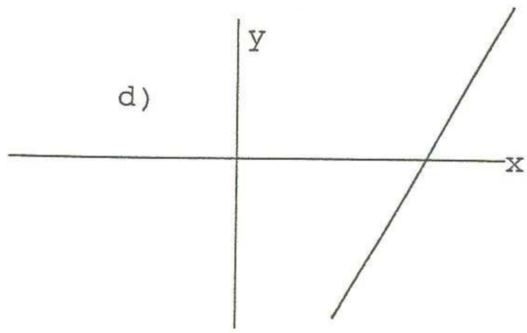
b)



c)

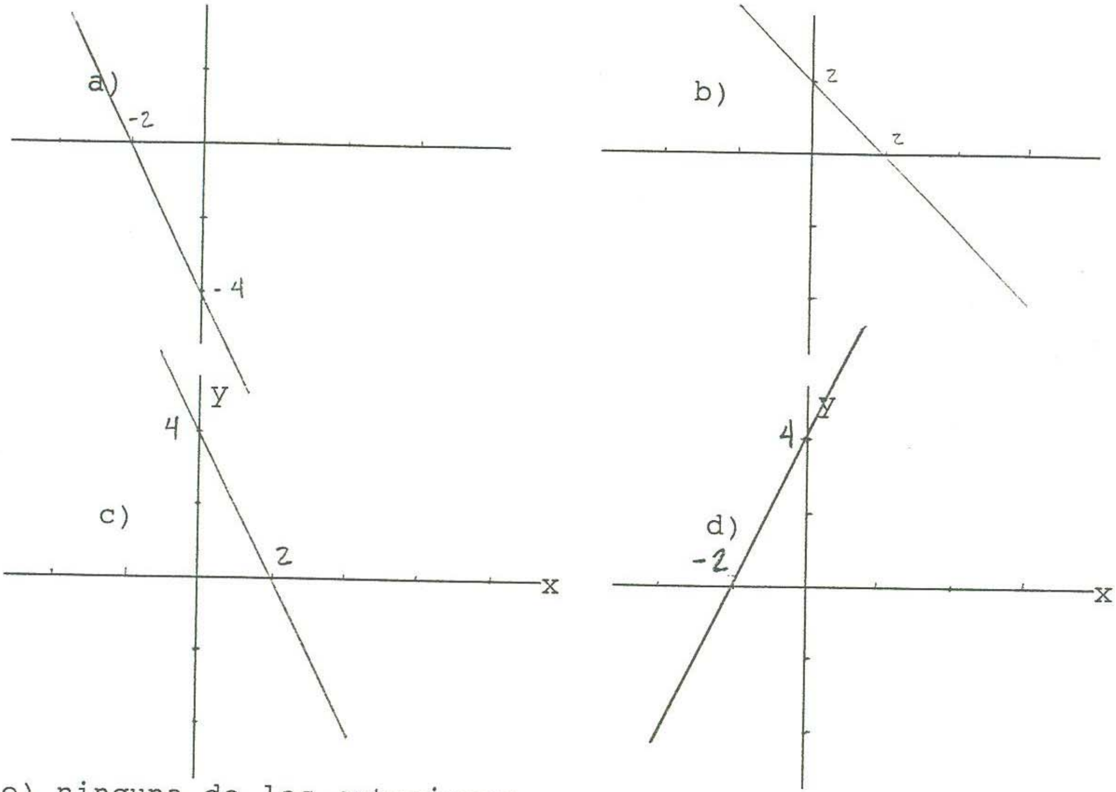


d)



e) ninguna de las anteriores.

25. la gráfica en el plano cartesiano de $Y = -2X + 4$ es:



e) ninguna de las anteriores.

HOJA DE RESPUESTAS.

DATOS GENERALES.
NOMBRE DEL ALUMNO ____________________

HOJA DE RESPUESTAS.

DATOS GENERALES.

NOMBRE DEL ALUMNO ______________________________

FECHA DE APLICACIÓN ____________________ GRUPO ______________

ESPECIALIDAD ____________________ TURNO ______________

R E S P U E S T A S.

1.( )	16.( )
2.( )	17.( )
3.( )	18.( )
4.( )	19.( )
5.( )	20.( )
6.( )	21.( )
7.( )	22.( )
8.( )	23.( )
9.( )	24.( )
10.( )	25.( )
11.( )	26.( )
12.( )	27.( )
13.( )	28.( )
14.( )	29.( )
15.( )	30.( )

EXAMEN DIAGNÓSTICO.

SOBRE

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

LA PRESENTE EVALUACIÓN TIENE LA FINALIDAD DE INVESTIGAR TUS HABILIDADES PARA RESOLVER PROBLEMAS.

ESTE EXAMEN NO INFLUIRÁ EN TU EVALUACIÓN EN EL PRESENTE CURSO DE MATEMÁTICAS.

INSTRUCCIONES.

- ESTE EXAMEN CONSTA DE UNA SERIE DE PROBLEMAS DONDE EN CADA UNO DE ELLOS SE TE PLANTEAN VARIAS PREGUNTAS LÉELAS CON ATENCIÓN Y CONTÉSTALAS CORRECTAMENTE.
- PARA RESOLVER LAS PREGUNTAS UTILIZA EL ESPACIO QUE SE DEJA EN CADA UNA DE ELLAS.
- PARA RESOLVER ESTE EXAMEN UTILIZA PLUMA.
- NO UTILICES CALCULADORA.
- HAZ TU MEJOR ESFUERZO PARA CONTESTAR COMPLETAMENTE ESTE EXAMEN Y GRACIAS POR TU COLABORACIÓN.

DATOS GENERALES.

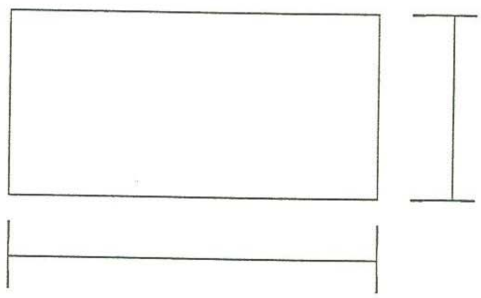
NOMBRE DEL ALUMNO ____

FECHA DE APLICACIÓN ________________________ GRUPO ____________

ESPECIALIDAD ____________________________ TURNO ____________

Problema 1. Un campesino posee un terreno rectangular de 200 metros de largo por 100 metros de ancho. En la mitad del terreno siembra maíz, en una cuarta parte siembra hortalizas y el resto del terreno se queda sin sembrar.

Pregunta 1. Si el rectángulo de la figura representa el terreno del campesino indica en el la información que se te proporciona en el problema.



Pregunta 2. Si de la parte del terreno que se siembra de hortalizas una tercera parte la siembra de lechugas ¿Qué parte del total del terreno se siembra de lechugas?

Pregunta 3. ¿Cuál es el área de la parte que se siembra de hortalizas?

Pregunta 4. ¿Cuál es el perímetro de la parte de terreno que se sembró de maíz?

Problema 2. Se tiene una caja de base cuadrada sin tapa, donde el área de la base y sus cuatro caras laterales juntas es de 2800 centímetros cuadrados.

Pregunta 1. Si le llamamos "b" al lado de la base y "h" a la altura de la caja, escribe la fórmula para calcular el volumen de la caja:

________________________.

Pregunta 2. Escribe la fórmula para calcular el área de una cara lateral de la caja:

________________________.

Pregunta 3. Si el lado de la base mide 20 centímetros ¿Cuál es el área de una cara lateral?

Problema 3. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 3.72 metros, sus catetos son iguales y cada uno mide 1.24 metros.

Pregunta 1. Escribe la fórmula para calcular el perímetro del triángulo

________________________.

Pregunta 2. Encuentra el valor del lado desconocido del triángulo.

Pregunta 3. Haz un dibujo del triángulo donde indiques los valores de sus lados.

Problema 4. Un ranchero y su caballo se encuentran a 4 kilómetros al sur de un río cuya agua fluye de oeste a este y a 7 kilómetros al norte de una iglesia, la iglesia se encuentra a 8 kilómetros al oeste de la casa del ranchero.

Pregunta 1. Haz un dibujo donde represente la información que se te proporciona en el problema.

Pregunta 2. Sobre el dibujo traza una ruta por donde el ranchero pueda ir desde donde se encuentra, a darle de beber agua a su caballo en el río y después regresar a su casa. Intenta que la ruta trazada sea la más corta.

ANEXO 2

EXÁMENES FINALES

- CONOCIMIENTO MATEMÁTICO
- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
- EVALUACIÓN

EXAMEN FINAL.

DE

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO.

LA PRESENTE EVALUACIÓN TIENE LA FINALIDAD DE DIAGNOSTICAR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO QUE HASTA EL MOMENTO POSEES EN ARITMÉTICA, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA.

POR LA RAZÓN ANTERIOR ESTE EXAMEN NO INFLUIRÁ EN TU EVALUACIÓN EN EL PRESENTE CURSO DE MATEMÁTICAS.

TUS RESPUESTAS PERMITIRÁN TENER INFORMACIÓN PRECISA SOBRE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS QUE DOMINAS AL TÉRMINO DEL CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL.

INSTRUCCIONES.

- ESTE EXAMEN CONSTA DE DOS PARTES, UN CUADERNILLO DE PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE (ESTE EJEMPLAR) Y UNA HOJA DE RESPUESTAS.
- EN ESTE CUADERNILLO CADA REACTIVO APARECE CON CINCO OPCIONES, UNA DE ELLAS ES LA CORRECTA. ANOTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA LETRA QUE CORRESPONDA A LA SOLUCIÓN.
- NO RAYES ESTE CUADERNILLO DE PREGUNTAS, SI NECESITAS HACER OPERACIONES UTILIZA HOJAS EN BLANCO Y ANÉXALAS.
- NO UTILICES CALCULADORA.
- HAZ TU MEJOR ESFUERZO PARA CONTESTAR COMPLETAMENTE ESTE EXAMEN Y GRACIAS POR TU COLABORACIÓN.

CUADERNILLO DE PREGUNTAS.

A R I T M E T I C A.

1. Al sumar 693, 5798, 890 y 7 el resultado es:

a) 5388 b) 7188 c) 7378 d) 6388 e) ninguna de las anteriores.

2. El resultado de la suma (23) + (-38) es:

a) 15 b) 61 c) -15 d) -61 e) ninguna de las anteriores.

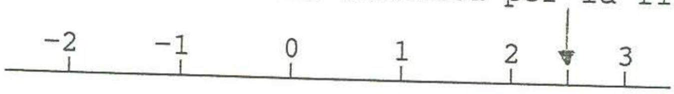
3. Al efectuar la operación (5/9) x (2/9) se obtiene:

a) 10/9 b) 10/81 c) 45/18 d) 18/41 e) ninguna de las anteriores.

4. El resultado de (2/3) + (8/12) es:

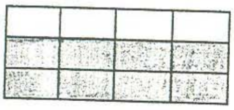
a) 16/12 b) 10/15 c) 10/36 d) 34/3 e) ninguna de las anteriores.

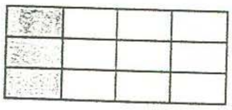
5. El número señalado en la recta numérica por la flecha es:

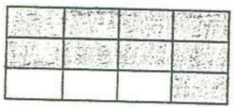


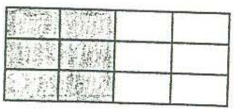
a) 5/4 b) -5/2 c) 10/4 d) 9/4 e) ninguna de las anteriores.

6. De los siguientes dibujos, aquel donde la parte sombreada corresponde a 3/4 es:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) ninguna de las anteriores.

7. La expresión decimal de 2/3 es:

a) 0.6 b) 0.66 c) 0.666 d) 0.6666 e) ninguna de las anteriores.

8. Si sumamos $1/2 + 1/5 + 1/8$ el resultado es:

a) 3/15 b) 1/80 c) 33/40 d) 3/80 e) ninguna de las anteriores.

A L G E B R A.

9. Al efectuar la operación de $x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1$; el resultado que se obtiene es:

a) $2xh + h^2$ b) $2xh + h^2 + 2$ c) $-2x^2 + 2xh + h^2$

d) $-x^4 + 2xh + h^2$ e) ninguna de las anteriores.

10. Al efectuar la operación $-3a\ (a^2 - 1)$ obtenemos:

a) $-3a^3 - 1$ b) $3a^3 + 3a$ c) $-3a^3 + 3a$

d) $-3a^3 + 3$ e) ninguna de las anteriores.

11. El resultado de $(x - 3h)^2$ es:

a) $x^2 - 9h^2$ b) $x^2 + 9h^2$ c) $x^2 + 6xh + h^2$

d) $x^2 - 6xh + h^2$ e) ninguna de las anteriores.

12. La expresión $\dfrac{A}{A + B}$ es igual a:

a) $1/B$ b) B c) $(A/A) + (A/B)$ d) $\dfrac{A + B}{B}$

e) ninguna de las anteriores.

13. El resultado de factorizar $3x^2h + 3xh^2 + h^3$ es:

a) $h^3(3x^2 + 3x + 1)$ b) $h(3x^2 + 3xh + h^2)$ c) $3x(xh + h^2 + h^3)$

d) $h(3x^2 + 3xh + h^3)$ e) ninguna de las anteriores.

14. El producto de $(2x + 8)\ (2x - 8)$ es igual a:

a) $4x^2 + 64$ b) $4x^2 + 32x + 64$ c) $4x^2 - 32x + 64$

d) $4x^2 - 16x + 64$ e) ninguna de las anteriores.

15. El resultado de la operación $(3xh^2 + 3x^2h + h^3) / h$ es:

a) $3xh + 3x^2 + h^3$ b) $3x + 3x^2$ c) $3xh + 3x + h^2$

d) $3xh + 3x^2 + h^2$ e) ninguna de las anteriores.

16. En la ecuación $6x + 14 = 8x + 20$, el valor de la incógnita X es:

a) -12 b) 34/2 c) -6/14 d) 34/14 e) ninguna de las anteriores.

17. Las soluciones de la ecuación $2x^2 + 6x - 8 = 0$ son:

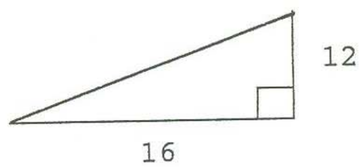
a) 4 y -4 b) 1 y 4 c) 1 y -4 d) -1 y 4 e) ninguna de las anteriores.

G E O M E T R I A.

18. En el siguiente triángulo rectángulo el valor de la hipotenusa es:

a) 14 b) 20 c) 28

d) 400 e) ninguna de las anteriores.



19. El señor Rodríguez cercó los cuatro lados de un lote rectangular de su propiedad y para ello utilizó 100 metros lineales de malla. Si la base del terreno es de 20 metros su altura es:

a) 5 metros b) 80 metros c) 60 metros

d) 10 metros e) ninguna de las anteriores.

20. Un circulo tiene un metro de radio, si duplicamos el valor del radio el área del circulo:

a) se duplica b) se triplica c) se cuadruplica

d) se sextuplica e) ninguna de las anteriores.

21. Se tiene una alberca de fondo rectangular, donde el área del piso es 48 metros cuadrados, si la profundidad de la alberca es de 3.5 metros su volumen es:

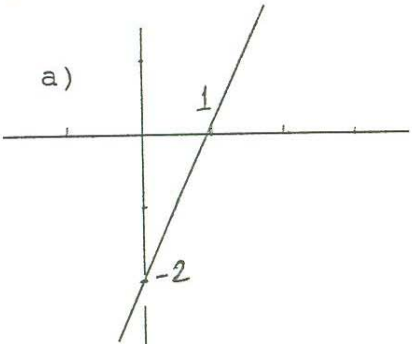
a) 48 b) 144 c) 168 d) 51.5 e) ninguna de las anteriores.

22. Un rectángulo tiene una área de 30 metros cuadrados, si la base mide 5 metros su altura expresada en metros será:

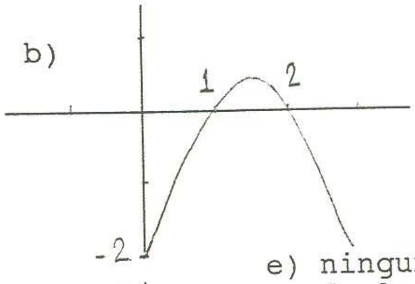
a) 6 b) 9 c) 12 d) 18 e) ninguna de las anteriores.

23. La gráfica de la ecuación $Y= -X^2 + 3X - 2$ es:

a)

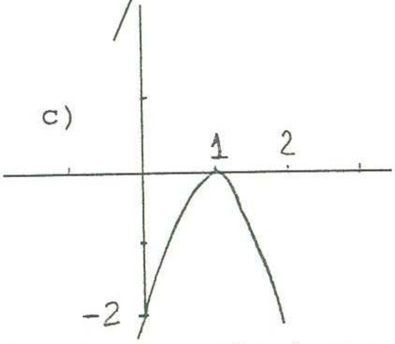


b)

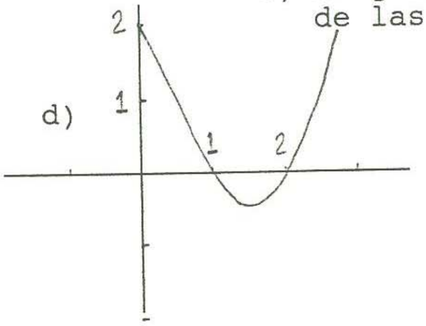


e) ninguna de de las anteriores

c)

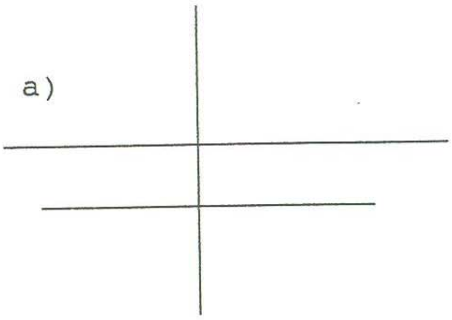


d)

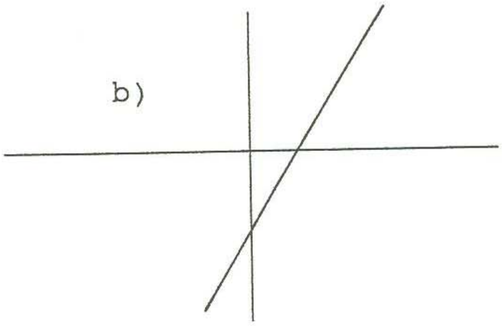


24. De las siguientes rectas ¿cuál tiene pendiente cero?

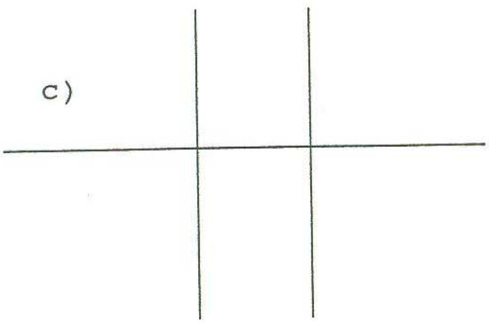
a)



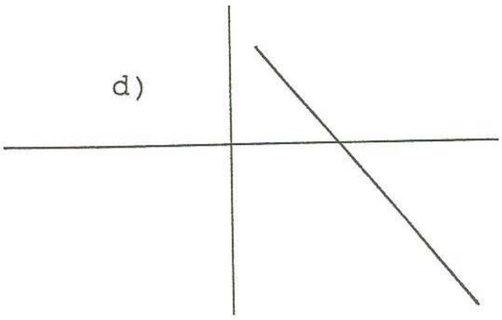
b)



c)



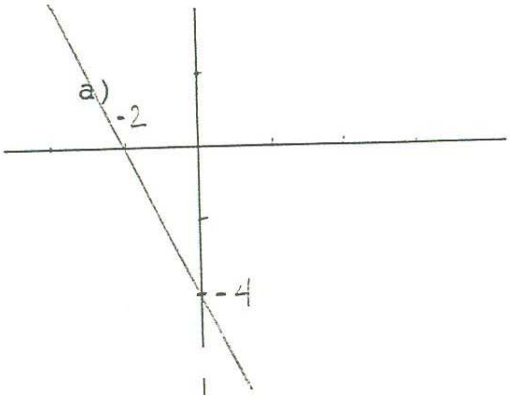
d)



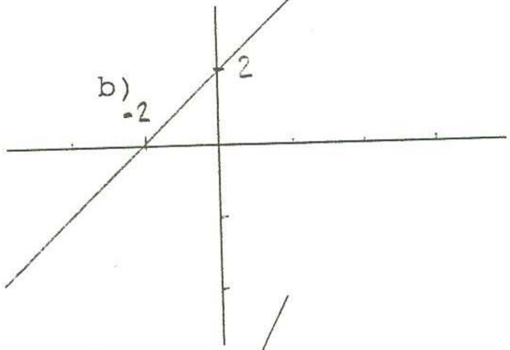
e) ninguna de las anteriores.

25. la gráfica en el plano cartesiano de $Y = +2X - 4$ es:

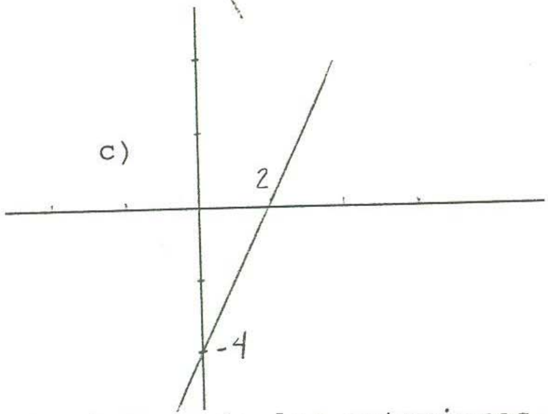
a)



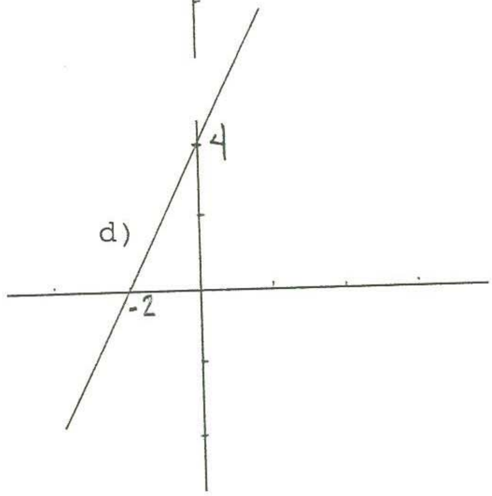
b)



c)



d)



e) ninguna de las anteriores.

HOJA DE RESPUESTAS.

DATOS GENERALES.

NOMBRE DEL ALUMNO ______________________________

FECHA DE APLICACIÓN ____________________ GRUPO ____________

ESPECIALIDAD ____________________ TURNO ____________

R E S P U E S T A S.

1.( )	16.( )
2.( )	17.( )
3.( )	18.( )
4.( )	19.( )
5.( )	20.( )
6.( )	21.( )
7.( )	22.( )
8.( )	23.( )
9.( )	24.( )
10.( )	25.( )
11.( )	26.( )
12.( )	27.( )
13.( )	28.( )
14.( )	29.( )
15.( )	30.( )

- PARA RESOLVER ESTE EXAMEN UTILIZA PLUMA.
- NO UTILICES CALCULADORA.
- HAZ TU MEJOR ESFUERZO PARA CONTESTAR COMPLETAMENTE ESTE EXAMEN Y GRACIAS POR TU COLABORACIÓN.

EXAMEN FINAL

SOBRE

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

LA PRESENTE AVALUACIÓN TIENE LA FINALIDAD DE INVESTIGAR TUS HABILIDADES PARA RESOLVER PROBLEMAS.

ESTE EXAMEN NO INFLUIRÁ EN TU EVALUACIÓN EN EL PRESENTE CURSO DE MATEMÁTICAS.

INSTRUCCIONES.

- ESTE EXAMEN CONSTA DE UN LISTADO DE PROBLEMAS DONDE EN CADA UNO DE ELLOS SE TE PLANTEAN UNA SERIE DE PREGUNTAS LÉELAS CON ATENCIÓN Y CONTÉSTALAS CORRECTAMENTE.
- PARA RESOLVER LAS PREGUNTAS UTILIZA EL ESPACIO QUE SE DEJA EN CADA UNA DE ELLAS.
- PARA RESOLVER ESTE EXAMEN UTILIZA PLUMA.
- NO UTILICES CALCULADORA.
- HAZ TU MEJOR ESFUERZO PARA CONTESTAR COMPLETAMENTE ESTE EXAMEN Y GRACIAS POR TU COLABORACIÓN.

DATOS GENERALES.

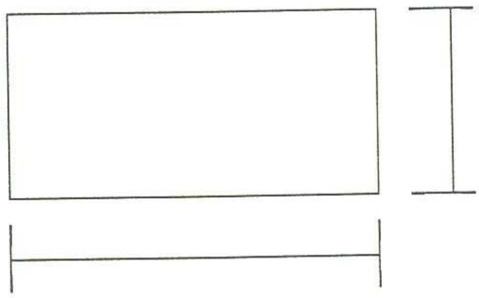
NOMBRE DEL ALUMNO ______________________________

FECHA DE APLICACIÓN ________________ GRUPO __________

ESPECIALIDAD ______________________ TURNO __________

Problema 1. En un terreno rectangular de 500 metros por 200 metros se construirá una institución educativa, la tercera parte del terreno se utilizará para el área de edificios, el resto se ocupará como área deportiva.

Pregunta 1. Si el rectángulo de la figura representa el terreno indica en el la información que se te proporciona en el problema.



Pregunta 2. Si de la parte del terreno que se utilizará como área deportiva, una cuarta parte será utilizada para la construcción de un estadio de fútbol ¿Qué parte del total del terreno abarcará el estadio de fútbol?

Pregunta 3. ¿Cuál es el área de la parte que ocupará la sección de edificios?

Pregunta 4. ¿Cuál es el perímetro de la parte de terreno que comprende el área deportiva, excluyendo el estadio de fútbol?

Problema 2. Se tiene una caja de base cuadrada con tapa, donde el área de sus seis caras juntas es de 4000 centímetros cuadrados.

Pregunta 1. Haz un dibujo de la caja en tres dimensiones, señalando en ella los lados de su base y su altura.

Pregunta 2. Si le llamamos "b" al lado de la base y "h" a la altura de la caja, escribe la fórmula para calcular el volumen de la caja.

________________________.

Pregunta 3. Escribe la fórmula para calcular el área de una cara lateral de la caja

________________________.

Pregunta 4. Si el lado de la base mide 20 centímetros ¿Cuál es el área de una cara lateral?

Problema 3. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 3.72 metros, sus catetos son iguales y cada uno mide 1.24 metros.

Pregunta 1. Escribe la fórmula para calcular el perímetro del triángulo

________________________.

Pregunta 2. Encuentra el valor del lado desconocido del triángulo.

Pregunta 3. Haz un dibujo del triángulo donde indiques los valores de sus tres lados.

Pregunta 4. Utiliza el dibujo anterior para calcular el perímetro del triángulo.

Pregunta 5. Escoge tres segmentos de 1.24 centímetros y trata de construir un triángulo rectángulo.

Pregunta 6. ¿Consideras que la respuesta que encontraste en este problema es correcta?

Problema 4. Un lanchero se encuentra a 4 kilómetros al sur de una playa que va de oeste a este y a 7 kilómetros al norte de una isla A, la isla A se encuentra a 8 kilómetros al oeste de una isla B.

Pregunta 1. Haz un dibujo donde representes la información que se te proporciona en el problema.

Pregunta 2. Sobre el dibujo traza una ruta por donde el lanchero pueda ir a la playa y posteriormente a la isla B. Intenta que la ruta trazada sea la más corta.

EVALUACION.

LA PRESENTE EVALUACION TIENE LA FINALIDAD DE INVESTIGAR EL CONOCIMIENTO MATEMATICO QUE ADQUIRISTE EN EL CURSO DE CALCULO DIFERENCIAL.

POR LA RAZON ANTERIOR ESTE EXAMEN NO INFLUIRA EN TU EVALUACION EN EL PRESENTE CURSO DE MATEMATICAS.

INSTRUCCIONES.

- ESTE EXAMEN CONSTA DE DOS PARTES, UN CUADERNILLO DE PREGUNTAS DE OPCION MULTIPLE Y ABIERTAS (ESTE EJEMPLAR) Y UNA HOJA DE RESPUESTAS.
- EN ESTE CUADERNILLO CADA REACTIVO DE OPCION MULTIPLE APARECE CON CINCO OPCIONES,UNA DE ELLAS ES LA CORRECTA. ANOTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA LETRA QUE CORRESPONDA A LA SOLUCION.
- PARA LAS PREGUNTAS ABIERTAS TAMBIEN EXISTE UN ESPACIO EN LA HOJA DE RESPUESTAS, PARA QUE EN EL, ESCRIBAS LAS SOLUCIONES QUE ENCONTRASTE.
- NO RAYES ESTE CUADERNILLO DE PREGUNTAS, SI NECESITAS HACER OPERACIONES UTILIZA HOJAS EN BLANCO Y ANEXALAS.
- HAZ TU MEJOR ESFUERZO PARA CONTESTAR COMPLETAMENTE ESTE EXAMEN Y GRACIAS POR TU COLABORACION.

Problema I. Se desea construir una ventana rectangular de 4 metros cuadrados de área. La ventana se colocará en una pared de 6 metros de base por 3 metros de altura ¿Cuáles son las dimensiones de la ventana de menor perímetro?
Nota. Considerando el problema anterior resuelve los siguientes 5 reactivos.

1. En el problema lo que se desea es:

a) minimizar el perímetro b) maximizar el área

c) maximizar el perímetro d) minimizar el área

e) ninguna de las anteriores.

2. Si "A" representa el área de la ventana "P" el perímetro y "b" la base de la ventana; la función que modela el problema en términos de la base es:

a) $A(b) = b(P - 2b)/2$ b) $P(b) = 2b + (2/b)$

c) $P(b) = 2b + (8/b)$ d) $A(b) = b(P - 2b)$

e) ninguna de las anteriores.

3. Los valores que puede tomar la variable independiente (b) son:

a) $0 < b < 6$ b) $4/3 \leq b \leq 6$ c) $b \geq 4/3$

d) $0 \leq b \leq 6$ e) ninguna de las anteriores.

4. La fórmula de las pendientes de las tangentes (la derivada) es:

a) $m_{tg} = (P/2) - 2b$ b) $m_{tg} = P - 4b$ c) $m_{tg} = 2 - (2/b^2)$

d) $m_{tg} = 2 - (8/b^2)$ e) ninguna de las anteriores.

5. La solución del problema es:

a) $b = 4$ y $h = 1$ b) $b = 2$ y $h = 2$ c) $b = 4/3$ y $h = 3$

d) $b = 5$ y $h = 4/5$ e) ninguna de las anteriores.

Problema II. La figura A muestra; la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$, el punto fijo de coordenadas $(x_o, f(x_o))$, y las rectas secantes necesarias para obtener la recta tangente.
Nota. Considerando este problema resuelve los siguientes 2 reactivos

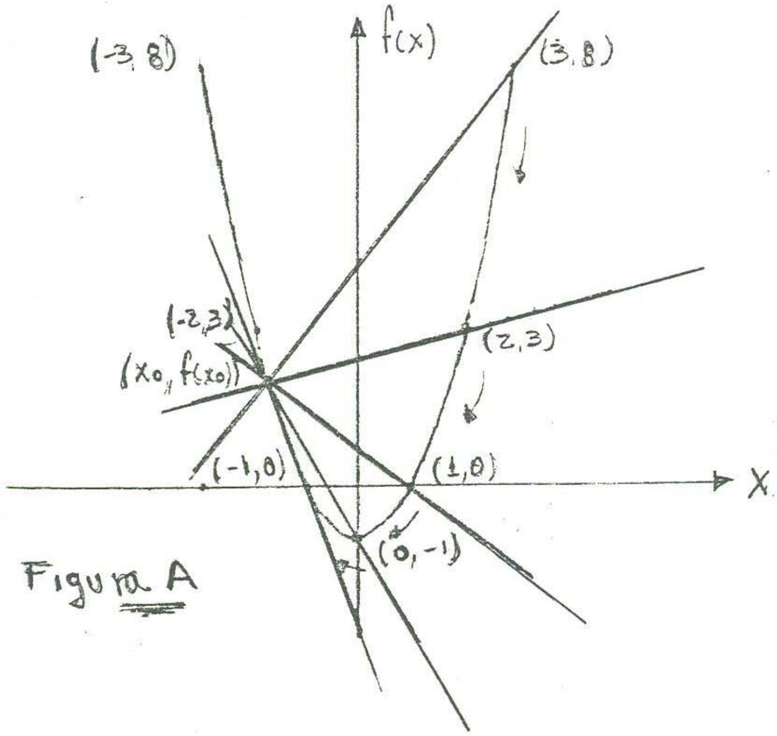


Figura A

6. La fórmula para determinar la pendiente de las rectas secantes en términos de x_o y h es:

a) $m_s = \dfrac{((x_o + h)^2 - 1) - (x_o^2 - 1)}{h}$

b) $m_s = \dfrac{((x_o + h)^2 - 1) - x_o^2 - 1}{h}$

c) $m_s = \dfrac{(x^2 - 1) - (x_o^2 - 1)}{h}$

d) $m_s = \dfrac{((x_o + h)^2 - 1) - x_o^2}{h}$

e) ninguna de las anteriores.

7. La fórmula para las pendientes de las tangentes expresada como un límite es:

a) $m_{tg} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{((x_o + h)^2 - 1) - (x_o^2 - 1)}{h}$

b) $mtg = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{((x_o + h)^2 - 1) - x_o^2 - 1}{h}$

c) $mtg = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x^2 - 1) - (x_o^2 - 1)}{h}$

d) $m_{tg} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{((x_o + h)^2 - 1) - x_o^2}{h}$

e) ninguna de las anteriores.

Problema III. Para la función $f(x) = 2x + 50/x$;
Nota. Considerando este problema resuelve los siguientes 2 reactivos.

8. La fórmula para las pendientes de las tangentes (la derivada) es:

a) $m_{tg} = 2x + 50/x^2$ b) $m_{tg} = 2 + 50/x^2$ c) $m_{tg} = 2 - 50/x^2$

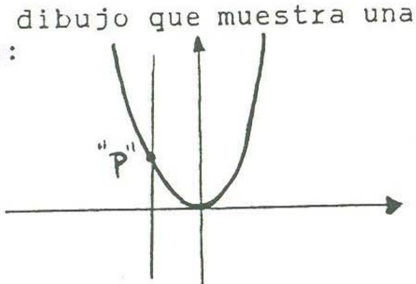
d) $m_{tg} = 2 - 50/x$ e) ninguna de las anteriores.

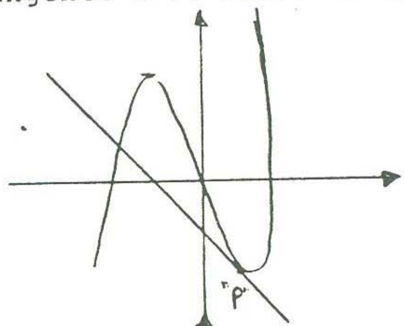
9. La pendiente de la recta tangente en los puntos (-5,-20), (1,52), (10,25) son:

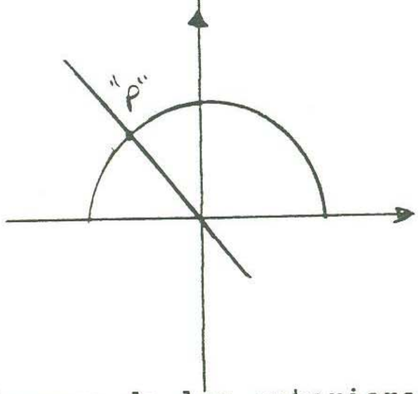
a) -8, 52, 41/2   b) 4, 52, 5/2   c) 0, -48, 3/2

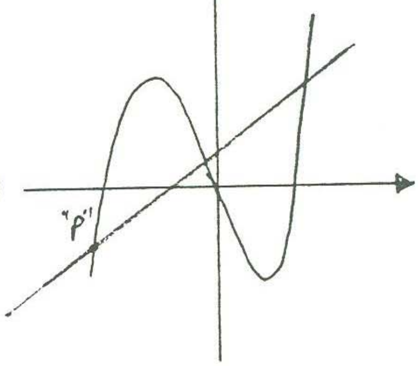
d) 12, -48, -3   e) ninguna de las anteriores.

10. El dibujo que muestra una recta tangente a la curva en el punto "p" es:

a) 

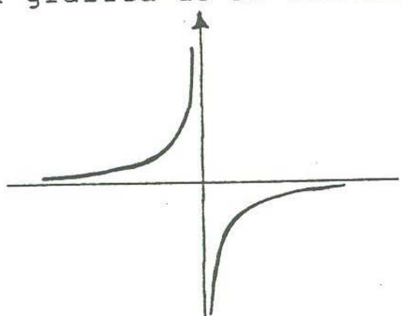
b) 

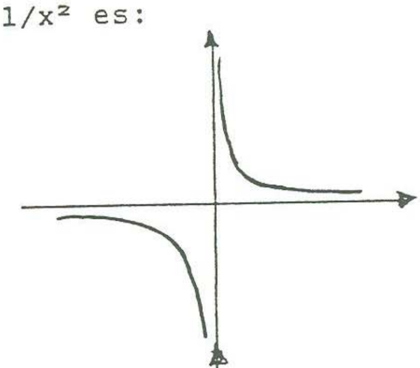
c) 

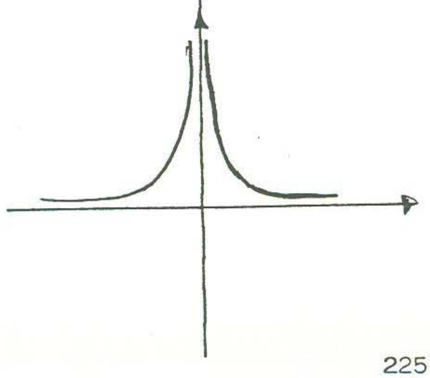
d) 

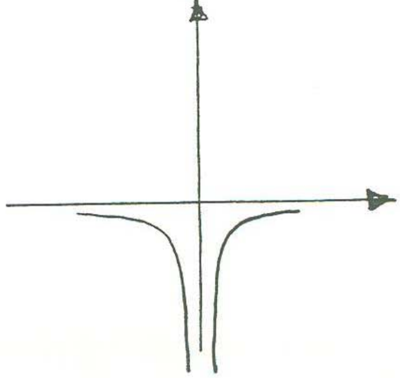
e) ninguna de las anteriores.

11. La gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ es:

a) 

b) 

c) 

d) 

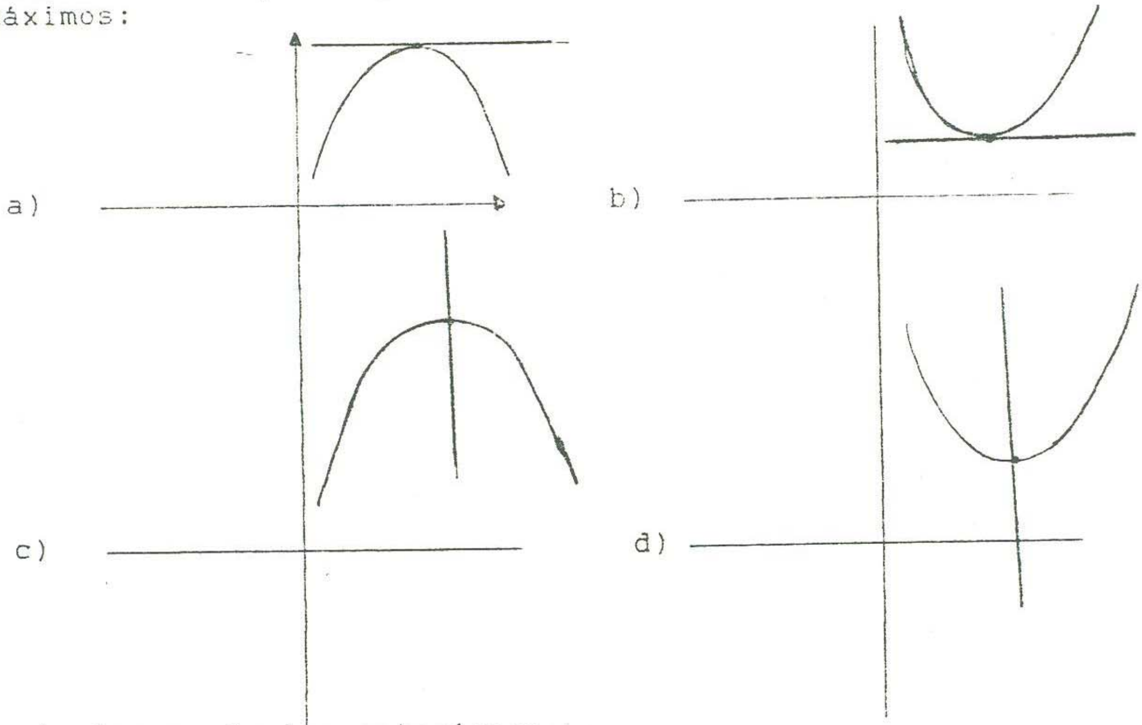
e) ninguna de las anteriores.

12. La función $f(x) = 1/x$; los valores que puede tomar la variable "x" (dominio de la función) son:

a) $x \leq 0$ b) $x \geq 0$ c) $0 > x \geq 0$ d) $x > 0$

e) ninguna de las anteriores.

13. La figura que muestra la recta tangente a la gráfica de la función en el punto que representa la solución de un problema de máximos:



e) ninguna de las anteriores.

14. La solución de $\lim_{h \to 0} \dfrac{1/(x_0 + h) - 1/x_0}{h}$ es:

a) $-1/x_0^2$ b) $1/x_0^2$ c) $1/2x_0$ d) $-x_0^2$

e) ninguna de las anteriores.

> Encuentra la fórmula de las tangentes (la derivada) de las siguientes funciones:

15. $f(x) = -10\,x^7 + 1/x^9 - 5\cos x$

16. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

17. $f(x) = \sqrt{x^3 + 10x^2 - 20x + 40}$

18. $f(x) = \text{Ln } x/e^x$

Problema IV. Si la función $f(x) = x^2 + 3$, resuelve las siguientes actividades:

1. Dibuja la gráfica de la función y localiza el punto fijo (-1,4).

2. Traza las rectas secantes que se indican en la siguiente tabla y determina su pendiente.

x_0	h	m_{s}
-1	4	
-1	3	
-1	2	
-1	1	
-1	0.5	
-1	0.1	

3. Con los valores obtenidos en la tabla estima el valor de la pendiente de la recta tangente.

A N E X O 3

ANÁLISIS ESTADÍSTICO REACTIVO POR REACTIVO

DEL EXAMEN DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS INICIAL.

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS DATOS OBTENIDOS

EN EL EXAMEN DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS INICIAL.

El análisis estadístico de los datos de este diagnóstico se realiza reactivo por reactivo, utilizando para esto la ji cuadrada, bajo las consideraciones y procesos descritos en el libro "Applied Statistics for engineers and physical scientists" de Robert V. Hogg y Johannes Ledolter, segunda edición. Esta prueba se aplicó para aceptar o rechazar la hipótesis siguiente: "El grupo C es equivalente al grupo F", las pruebas se hicieron con un nivel de significancia de 0.1.

Este examen consta de cuatro problemas de aritmética y geometría, en cada uno de ellos se incluyeron preguntas abiertas con el fin de medir alguna habilidad para resolver problemas. Por el tipo de reactivos, las respuesta dadas por los alumnos en cada pregunta es muy variada. Para distinguir entre las respuestas obtenidas se elaboró una escala ordinal donde se destaca solamente que una respuesta es mejor o peor que otra, esto, sin ánimo de asignar una calificación numérica.

A continuación se presenta la diversidad de respuesta encontradas en cada reactivo:

Reactivo I.1, IV.1 y IV.2

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Representó bien
2	Representó incompleto bien
1	Representó mal
0	No contestó

1	[illegible]
0	No contestó

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS DATOS OBTENIDOS EN EL EXAMEN DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS INICIAL.

El análisis estadístico de los datos de este diagnóstico se realiza reactivo por reactivo, utilizando para esto la ji cuadrada, bajo las consideraciones y procesos descritos en el libro "Applied Statistics for engineers and physical scientists" de Robert V. Hogg y Johannes Ledolter, segunda edición. Esta prueba se aplicó para aceptar o rechazar la hipótesis siguiente: "El grupo C es equivalente al grupo F", las pruebas se hicieron con un nivel de significancia de 0.1.

Este examen consta de cuatro problemas de aritmética y geometría, en cada uno de ellos se incluyeron preguntas abiertas con el fin de medir alguna habilidad para resolver problemas. Por el tipo de reactivos, las respuesta dadas por los alumnos en cada pregunta es muy variada. Para distinguir entre las respuestas obtenidas se elaboró una escala ordinal donde se destaca solamente que una respuesta es mejor o peor que otra, esto, sin ánimo de asignar una calificación numérica.

A continuación se presenta la diversidad de respuesta encontradas en cada reactivo:

Reactivo I.1, IV.1 y IV.2

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Representó bien
2	Representó incompleto bien
1	Representó mal
0	No contestó

Reactivo I.2, I.3 y I.4

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Contestó bien y representó bien
8	Contestó bien y no representó
5	Contestó bien y representó mal
4	Representó bien (sin proc. arit.)
3	Contestó mal y representó bien
2	Contestó mal y representó mal
1	Contestó mal y no representó
0	No contestó

Reactivo II.1, II.2 y III.1

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Bien
1	Mal
0	No contestó

Reactivo II.3

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Contestó bien, completo
8	Contestó bien (expresando fórmula)
2	Contestó incompleto bien
1	Contestó mal
0	No contestó

Reactivo III.2

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Cálculos correctos
2	Cálculos incorrectos
1	Cálculos incoherentes
0	No contestó

Reactivo III.3

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Bien y detectó inconsistencia
4	Bien de acuerdo a la información
3	Bien inconsistente (no detectó incons.)

Reactivo III.3

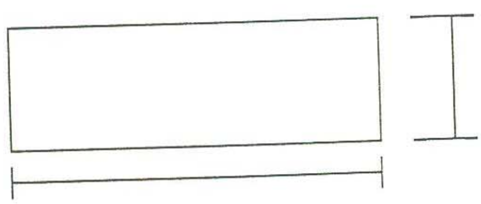
NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Bien y detectó inconsistencia
4	Bien de acuerdo a la información
3	Bien inconsistente (no detectó incons.)
2	Mal coherente
1	Mal incoherente
0	No contestó

El tipo de habilidades que se evaluaron en cada pregunta se describen a continuación:

El primer problema que se presenta en el examen inicia con la siguiente información: Un campesino posee un terreno rectangular de 200 metros de largo por 100 metros de ancho. En la mitad del terreno siembra maíz, en una cuarta parte siembra hortalizas y el resto del terreno se queda sin sembrar.

Con esta información se plantean las siguientes preguntas:

Pregunta I.1 (reactivo 1). Si el rectángulo de la figura representa el terreno del campesino indica en el la información que se te proporciona en el problema.



En este reactivo se pretende obtener información acerca de: i) la habilidad para comprender el problema, ii) la habilidad para representar información a un dibujo.

Pregunta I.2 (reactivo 2). Si de la parte del terreno que se siembra de hortalizas una tercera parte la siembra de lechugas ¿Qué parte del total del terreno se siembra de lechugas?

Aquí se pretende evaluar; la habilidad para comprender el problema y la habilidad para buscar estrategias de solución.

Pregunta I.3 (reactivo 3). ¿Cuál es el área de la parte que se siembra de hortalizas?

Pregunta I.4 (reactivo 4). ¿Cuál es el perímetro de la parte de terreno que se sembró de maíz?

Las habilidades que se tratan de medir en estas dos preguntas, son las mostradas en la pregunta I.2.

El segundo problema inicia planteando la información siguiente: Se tiene una caja de base cuadrada sin tapa, donde el área de la base y sus cuatro caras laterales juntas es de 2800 centímetros cuadrados.

Con esta información se plantean las siguientes preguntas:

Pregunta II.1 (reactivo 5). Si le llamamos "b" al lado de la base y "h" a la altura de la caja, escribe la fórmula para calcular el volumen de la caja.

Pregunta II.2 (reactivo 6). Escribe la fórmula para calcular el área de una cara lateral de la caja.

En estos reactivos se pretende sólo que el alumno recuerde el conocimiento matemático específico que se le esta requiriendo para la solución del problema.

Pregunta II.3 (reactivo 7). Si el lado de la base mide 20 centímetros ¿Cuál es el área de una cara lateral?

Aquí se pretende observar la habilidad para comprender el problema y la correcta aplicación de fórmulas.

En el tercer problema se plantea la siguiente información: El perímetro de un triángulo rectángulo es de 3.72 metros, sus catetos son iguales y cada uno mide 1.24 metros.

Con esta información se plantean las preguntas siguientes:

Pregunta III.1 (reactivo 8). Escribe la fórmula para calcular el perímetro del triángulo.

Mismo comentario que reactivo II.1.

Pregunta III.2 (reactivo 9). Encuentra el valor del lado desconocido del triángulo.

Aquí se pretende medir la habilidad para comprender el problema y la correcta aplicación de una fórmula.

Pregunta III.3 (reactivo 10). Haz un dibujo del triángulo donde indiques los valores de sus lados.

En este reactivo se evalúa la habilidad del alumno para analizar los resultados obtenidos, y así, decidir la congruencia de estos con respecto a la información planteada en el enunciado del problema.

La información que se proporciona en este problema es: Un ranchero y su caballo se encuentran a 4 kilómetros al sur de un río cuya agua fluye de oeste a este y a 7 kilómetros al norte de una iglesia, la iglesia se encuentra a 8 kilómetros al oeste de la casa del ranchero.

Las preguntas planteadas aquí son:

Pregunta IV.1 (reactivo 11). Haz un dibujo donde representes la información que se te proporciona en el problema.

Mismo comentario que el reactivo I.1.

Pregunta IV.2 (reactivo 12). Sobre el dibujo traza una ruta por donde el ranchero pueda ir desde donde se encuentra, a darle de beber agua a su caballo en el río y después regresar a su casa. Intenta que la ruta trazada sea la más corta.

Esta pregunta pretende medir la habilidad para comprender la información del problema y la habilidad para encontrar una estrategia de solución gráfica.

EL ANÁLISIS ESTADÍSTICO.

En el anexo se presentan las tablas de datos que se utilizaron en este análisis. Aquí se muestran los niveles de respuesta del cero al nueve, dados por los alumnos del grupo C y F, en cada reactivo de este examen.

REACTIVO I.1 (Problema 1, reactivo 1).

En este reactivo se realizó un reordenamiento de los niveles por necesidades de la prueba estadística. Los niveles que se obtuvieron son[1]:

Nivel I (NI). Esta formado por el nivel 9.
Nivel II (NII). Está formado por el resto de los niveles.

[1] La tabla de contingencia está elaborada con el criterio siguiente: $n_i \geq 5$; cuando esta condición no se cumple, se tomará la condición $n_i \geq 1$, siempre y cuando $(f_o - f_e)^2 / f_e$ no aporte un valor considerable a la suma. Cuando se realiza un reordenamiento de niveles en el proceso, se tiene el cuidado de considerar el valor cualitativo de la respuesta.

La tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	18	19.208955	21	19.791045	39
NII	15	13.791045	13	14.208955	28
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 0.3587807$

- Para GL = 1 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 2.71$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo I.1.**

REACTIVO I.2 (Problema 1, reactivo 2).

Después del reordenamiento se obtuvieron los niveles siguientes:

- Nivel I (NI). Está constituido por el nivel 9.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 8, y 5.
- Nivel III (NIII). Lo forman los niveles 4, 3 y 2.
- Nivel IV (NIV). Está constituido por el nivel 1.
- Nivel V (NV). Está formado por el nivel 0.

La tabla de contingencia fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	7	7.880597	9	8.119403	16
NII	5	5.9104478	7	6.0895522	12
NIII	9	8.8656716	9	9.1343284	18
NIV	7	5.9104478	5	6.0895522	12
NV	5	4.4328358	4	4.5671642	9
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 1.0130781$

- Para GL = 4 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 7.78$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo I.2.**

REACTIVO I.3 (Problema 1, reactivo 3).

Reordenando niveles se obtiene:

- Nivel I (NI). Está constituido por los niveles 9, 8 y 5.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 4 y 3.
- Nivel III (NIII). Lo forma el nivel 2.
- Nivel IV (NIV). Está constituido por el nivel 1.
- Nivel V (NV). Está formado por el nivel 0.

La tabla de contingencia fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	3	7.880597	13	8.119403	16
NII	6	4.9253731	4	5.0746269	10
NIII	8	6.4029851	5	6.5970149	13
NIV	9	7.880597	7	8.119403	16
NV	7	5.9104478	5	6.0895522	12
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 7.9124782$

- Para GL = 4 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 7.78$

- Como $X^2_c > X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, no son equivalentes respecto al reactivo I.3.**

REACTIVO I.4 (Problema 1, reactivo 4).

Los niveles empleados en la tabla de contingencia son:

- Nivel I (NI). Está constituido por los niveles 9, 8 y 5.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 4 y 3.
- Nivel III (NIII). Lo forman los niveles 2.
- Nivel IV (NIV). Está constituido por el nivel 1.
- Nivel V (NV). Está formado por el nivel 0.

La tabla de contingencia en este caso fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	8	9.358209	11	9.641791	19
NII	6	4.4328358	3	4.5671642	9
NIII	3	2.9552239	3	3.0447761	6
NIV	11	11.328358	12	11.671642	23
NV	5	4.9253731	5	5.0746269	10
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 1.5025719$

- Para GL = 4 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 7.78$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo I.4.**

REACTIVO II.1 (Problema 2, reactivo 1).

En este caso no fue necesario reordenar niveles. La tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	2	1.4776119	1	1.5223881	3
1	23	23.641791	25	24.358209	48
0	8	7.880597	8	8.119403	16
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia y la fórmula (2), se obtiene que; $X^2_c = 0.4018308$

- Para GL = 2 y α = 0.100, se obtiene X^2_α = 4.61

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo II.1.**

REACTIVO II.2 (Problema 2, reactivo 2).

En este reactivo no se reordenaron los niveles. La tabla de contingencia fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	13	12.80597	13	13.19403	26
1	16	13.298507	11	13.701493	27
0	4	6.8955224	10	7.1044776	14
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; X^2_c = 3.4832055

- Para GL = 2 y α = 0.100, se obtiene X^2_α = 4.61

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo II.2.**

REACTIVO II.3 (Problema 2, reactivo 3).

Los niveles utilizados en este reactivo son:

- Nivel I (NI). Está constituido por los niveles 9, 8 y 2.
- Nivel II (NII). Está formado por el nivele 1.
- Nivel III (NIII). Lo forma el nivel 0.

La tabla de contingencia en este caso fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	2	0.9850746	0	1.0149254	2
NII	19	17.731343	17	18.268657	36
NIII	12	14.283582	17	14.716418	29
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 2.958914$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-1 y G-2, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo II.3.**

REACTIVO III.1 (Problema 3, reactivo 1).

En este reactivo se conservaron los niveles originales. La tabla de contingencia que se utilizó fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	13	12.80597	13	13.19403	26
1	10	11.328358	13	11.671642	23
0	10	8.8656716	8	9.1343284	18
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 0.5987345$

- Para GL = 2 y α = 0.100, se obtiene X^2_α = 4.61

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo III.1.**

REACTIVO III.2 (Problema 3, reactivo 2).

Los niveles que resultaron del reordenamiento son:
- Nivel I (NI). Está constituido por el nivel 9.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 2 y 1.
- Nivel III (NIII). Lo forma el nivel 0.

La tabla de contingencia fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	11	12.80597	15	13.19403	26
NII	13	12.80597	13	13.19403	26
NIII	9	7.3880597	6	7.6119403	15
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; X^2_c = 1.2007267

- Para GL = 2 y α = 0.100, se obtiene X^2_α = 4.61

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo III.2.**

REACTIVO III.3 (Problema 3, reactivo 3).

Los niveles considerados aquí son:

- Nivel I (NI). Está constituido por los niveles 9, y 4.
- Nivel II (NII). Está formado por el nivel 3.
- Nivel III (NIII). Lo forma el nivel 2.
- Nivel IV (NIV). Está formado por el nivel 1.
- Nivel V (NV). Lo constituye el nivel 0.

La tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	13	12.80597	13	13.19403	26
NII	3	3.4477612	4	3.5522388	7
NIII	11	7.880597	5	8.119403	16
NIV	4	6.8955224	10	7.1044776	14
NV	2	1.9701493	2	2.0298507	4
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 4.9504632$

- Para GL = 4 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 7.78$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo III.3.**

REACTIVO IV.1 (Problema 4, reactivo 1).

Los niveles obtenidos del reordenamiento son:

- Nivel I (NI). Está formado por los niveles 9 y 2.
- Nivel II (NII). Lo forman los niveles 1 y 0.

La tabla de contingencia fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	5	5.9104478	7	6.0895522	12
NII	28	27.089552	27	27.910448	55
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 0.3366648$

- Para GL = 1 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 2.71$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo IV.1.**

REACTIVO IV.2 (Problema 4, reactivo 2).

En este reactivo no se reordenaron los niveles. La tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	2	1.9701493	2	2.0298507	4
2	13	13.298507	14	13.701493	27
1	5	7.3880597	10	7.6119403	15
0	13	10.343284	8	10.656716	21
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se

obtiene que; $X^2_c = 2.879896$

- Para $GL = 3$ y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 6.25$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo IV.2.**

A N E X O 4

ANÁLISIS ESTADÍSTICO REACTIVO POR REACTIVO

DEL EXAMEN DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS FINAL.

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS DATOS OBTENIDOS EN EL EXAMEN DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS FINAL.

El análisis estadístico de los datos de este diagnóstico se realiza reactivo por reactivo, utilizando para esto la ji cuadrada, bajo las consideraciones y procesos descritos en el libro "Applied Statistics for engineers and physical scientists" de Robert V. Hogg y Johannes Ledolter, segunda edición. Esta prueba se aplicó para aceptar o rechazar la hipótesis siguiente: "El grupo C es equivalente al grupo F", las pruebas se hicieron con un nivel de significancia de 0.1.

Este examen consta de cuatro problemas de aritmética y geometría, en cada uno de ellos se incluyeron preguntas abiertas con el fin de medir alguna habilidad para resolver problemas. Por el tipo de reactivos, las respuesta dadas por los alumnos en cada pregunta es muy variada. Para distinguir entre las respuestas obtenidas se elaboró una escala ordinal donde se destaca solamente que una respuesta es mejor o peor que otra, esto, sin ánimo de asignar una calificación numérica.

A continuación se presenta la diversidad de respuesta encontradas en cada reactivo:

Reactivo I.1, II.1 y III.2

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Representó bien
2	Representó incompleto bien
1	Representó mal
0	No contestó

Reactivo I.2, I.3 y I.4

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Contestó bien y representó bien
8	Contestó bien y no representó
5	Contestó bien y representó mal
4	Representó bien (sin proc. arit.)
3	Contestó mal y representó bien
2	Contestó mal y representó mal
1	Contestó mal y no representó
0	No contestó

Reactivo II.2 y III.1

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Bien
1	Mal
0	No contestó

Reactivo II.4

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Contestó bien, completo
8	Contestó bien (expresando fórmula)
2	Contestó incompleto bien
1	Contestó mal
0	No contestó

Reactivo III.2, IV.1 y IV.2

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Cálculos correctos
2	Cálculos incorrectos
1	Cálculos incoherentes
0	No contestó

Reactivo III.6

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Bien y detectó inconsistencia
4	Bien de acuerdo a la información
3	Bien inconsistente (no detectó incons.)
2	Mal coherente
1	Mal incoherente
0	No contestó

Reactivo III.3 y III.4

NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	No omitió ningún dato
8	Omitió un dato
3	Omitió más de un dato
0	No contestó

Reactivo III.5

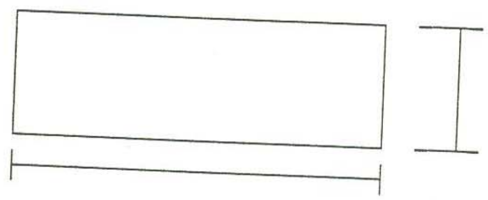
NIVEL	SIGNIFICADO DEL NIVEL
9	Observó que no tiene solución
3	Forzó un lado ó un ángulo
1	Mal
0	No contestó

El tipo de habilidades que se evaluaron en cada pregunta se describen a continuación:

El primer problema que se presenta en el examen inicia con la siguiente información: En un terreno rectangular de 500 metros por 200 metros se construirá una institución educativa, la tercera parte del terreno se utilizará para el área de edificios, el resto se ocupará como área deportiva.

Con esta información se plantean las siguientes preguntas:

Pregunta I.1 (reactivo 1). Si el rectángulo de la figura representa el terreno, indica en el la información que se te proporciona en el problema.



En este reactivo se pretende obtener información acerca de: i) la habilidad para comprender el problema, ii) la habilidad para representar información a un dibujo.

Pregunta I.2 (reactivo 2). Si de la parte del terreno que se utilizará como área deportiva, una cuarta parte será utilizada para la construcción de un estadio de fútbol ¿Qué parte del total del terreno abarcará el estadio de fútbol?

Aquí se pretende evaluar; la habilidad para comprender el problema y la habilidad para buscar estrategias de solución.

Pregunta I.3 (reactivo 3). ¿Cuál es el área de la parte que ocupará la sección de edificios?

Pregunta I.4 (reactivo 4). ¿Cuál es el perímetro de la parte de terreno que comprende el área deportiva, excluyendo el estadio de fútbol?

Las habilidades que se tratan de medir en estas dos preguntas, son las mostradas en la pregunta I.2.

El segundo problema inicia planteando la información siguiente: Se tiene una caja de base cuadrada con tapa, donde el área de sus seis caras juntas es de 4000 centímetros cuadrados.

Con esta información se plantean las siguientes preguntas:

Pregunta II.1 (reactivo 5). Haz un dibujo de la caja en tres dimensiones, señalando en ella los lados de su base y su altura.

En este reactivo se pretende obtener información acerca de: i) la habilidad para comprender el problema, ii) la habilidad para representar información a un dibujo.

Pregunta II.2 (reactivo 6). Si le llamamos "b" al lado de la base y "h" a la altura de la caja, escribe la fórmula para calcular el volumen de la caja.

Pregunta II.3 (reactivo 7). Escribe la fórmula para calcular el área de una cara lateral de la caja.

En estos reactivos se pretende sólo que el alumno recuerde el conocimiento matemático específico que se le esta requiriendo para la solución del problema.

Pregunta II.4 (reactivo 8). Si el lado de la base mide 20 centímetros ¿Cuál es el área de una cara lateral?

Aquí se pretende observar la habilidad para comprender el problema y la correcta aplicación de fórmulas.

En el tercer problema se plantea la siguiente información: El perímetro de un triángulo rectángulo es de 3.72 metros, sus catetos son iguales y cada uno mide 1.24 metros.

Con esta información se plantean las preguntas siguientes:

Pregunta III.1 (reactivo 9). Escribe la fórmula para calcular el perímetro del triángulo.

Mismo comentario que reactivo II.2.

Pregunta III.2 (reactivo 10). Encuentra el valor del lado desconocido del triángulo.

Aquí se pretende medir la habilidad para comprender el problema y la correcta aplicación de una fórmula.

Pregunta III.3 (reactivo 11). Haz un dibujo del triángulo donde indiques los valores de sus lados.

Pregunta III.4 (reactivo 12). Utiliza el dibujo anterior para calcular el perímetro del triángulo.

Pregunta III.5 (reactivo 13). Escoge tres segmentos de 1.24 centímetros y trata de construir un triángulo rectángulo.

Pregunta III.6 (reactivo 14). ¿Consideras que la respuesta que encontraste en este problema es correcta?

En estos reactivos se evalúa la habilidad del alumno para analizar los resultados obtenidos, y así, decidir la congruencia de estos con respecto a la información planteada en el enunciado del problema.

La información que se proporciona en el problema cuatro es: Un lanchero se encuentran a 4 kilómetros al sur de una playa que va de oeste a este y a 7 kilómetros al norte de una isla A, la isla A se encuentra a 8 kilómetros al oeste de una isla B.

Las preguntas planteadas aquí son:

Pregunta IV.1 (reactivo 11). Haz un dibujo donde represente la información que se te proporciona en el problema.

Mismo comentario que el reactivo I.1.

Pregunta IV.2 (reactivo 12). Sobre el dibujo traza una ruta por donde el lanchero pueda ir a la playa y posteriormente a la isla B. Intenta que la ruta trazada sea la más corta.

Esta pregunta pretende medir la habilidad para comprender la información del problema y la habilidad para encontrar una estrategia de solución gráfica.

EL ANÁLISIS ESTADÍSTICO.

En el anexo se presentan las tablas de datos que se utilizaron en este análisis. Aquí se muestran los niveles de respuesta del cero al nueve, dados por los alumnos del grupo C y F, en cada reactivo de este examen.

REACTIVO I.1 (Problema 1, reactivo 1).

En este reactivo se realizó un reordenamiento de los niveles por necesidades de la prueba estadística. Los niveles que se obtuvieron son[1]:

Nivel I (NI). Esta formado por el nivel 9.
Nivel II (NII). Está formado por el resto de los niveles.

La tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	28	26.597015	26	27.402985	54
NII	5	6.4029851	8	6.5970149	13
TOTAL	33	33	34	34	67

[1] La tabla de contingencia está elaborada con el criterio siguiente: $n_i \geq 5$; cuando esta condición no se cumple, se tomará la condición $n_i \geq 1$, siempre y cuando $(f_o - f_e)^2 / f_e$ no aporte un valor considerable a la suma. Cuando se realiza un reordenamiento de niveles en el proceso, se tiene el cuidado de considerar el valor cualitativo de la respuesta.

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 0.7516238$

- Para GL = 1 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 2.71$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo I.1.**

REACTIVO I.2 (Problema 1, reactivo 2).

Después del reordenamiento se obtuvieron los niveles siguientes:

- Nivel I (NI). Está constituido por el nivel 9.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 8, y 5.
- Nivel III (NIII). Lo forman los niveles 4, 3 y 2.
- Nivel IV (NIV). Está constituido por el nivel 1.
- Nivel V (NV). Está formado por el nivel 0.

La tabla de contingencia utilizada en la prueba fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	12	8.8656716	6	9.1343284	18
NII	0	0	0	0	0
NIII	15	13.298507	12	13.701493	27
NIV	6	10.835821	16	11.164179	22
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 6.8653924$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c > X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, no son equivalentes respecto al reactivo I.2.**

REACTIVO I.3 (Problema 1, reactivo 3).

Reordenando niveles se obtiene:

- Nivel I (NI). Está constituido por los niveles 9, 8 y 5.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 4 y 3.
- Nivel III (NIII). Lo forma el nivel 2.
- Nivel IV (NIV). Está constituido por el nivel 1.
- Nivel V (NV). Está formado por el nivel 0.

La tabla de contingencia fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	12	7.880597	4	8.119403	16
NII	8	14.776119	22	15.223881	30
NIII	3	2.9552239	3	3.0447761	6
NIV	6	3.447761	1	3.5522388	7
NV	4	3.9402985	4	4.0597015	8
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 14.092975$

- Para GL = 4 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 7.78$

- Como $X^2_c > X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, no son equivalentes respecto al reactivo I.3.**

REACTIVO I.4 (Problema 1, reactivo 4).

Los niveles empleados en la tabla de contingencia son:

- Nivel I (NI). Está constituido por los niveles 9, 8 y 5.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 4 y 3.
- Nivel III (NIII). Lo forman los niveles 2.
- Nivel IV (NIV). Está constituido por el nivel 1.
- Nivel V (NV). Está formado por el nivel 0.

La tabla de contingencia en este caso fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	10	7.880597	6	8.119403	16
NII	4	4.9253731	6	5.0746269	10
NIII	9	4.9253731	1	5.0746269	10
NIV	2	7.880597	14	8.119403	16
NV	8	7.3880597	7	7.6119403	15
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 16.855496$

- Para GL = 4 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 7.78$

- Como $X^2_c > X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, no son equivalentes respecto al reactivo I.4.**

REACTIVO II.1 (Problema 2, reactivo 1).

Reordenando los niveles por necesidades de la prueba se obtiene:

- Nivel I (NI). Está constituido por el nivel 9.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 2 y 1.
- Nivel III (NIII). Lo forma el nivel 0.

La tabla de contingencia en este caso fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	29	25.61194	23	26.38806	52
NII	2	5.4179104	9	5.5820896	11
NIII	2	1.9701493	2	2.0298507	4
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 5.1330713$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c > X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, no son equivalentes respecto al reactivo II.1.**

REACTIVO II.2 (Problema 2, reactivo 2).

En este reactivo no se reordenaron los niveles. La tabla de contingencia utilizada en la prueba fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	11	10.835821	11	11.164179	22
1	19	18.223881	18	18.776119	37
0	3	3.9402985	5	4.0597015	8
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se

obtiene que; X^2_c = 0.5122156

- Para GL = 2 y α = 0.100, se obtiene X^2_α = 4.61

- Como $X^2_c \le X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo II.2.**

REACTIVO II.3 (Problema 2, reactivo 3).

Reordenando niveles se obtiene:

- Nivel I (NI). Está constituido por el nivel 9.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 1 y 0.

La tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	21	20.19403	20	20.80597	41
NII	12	12.80597	14	13.19403	26
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; X^2_c = 0.1633473

- Para GL = 1 y α = 0.100, se obtiene X^2_α = 2.71

- Como $X^2_c \le X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo II.3.**

En este caso no se reordenaron niveles, la tabla de contingencia utilizada fue:

obtiene que; $X^2_c = 0.5122156$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo II.2.**

REACTIVO II.3 (Problema 2, reactivo 3).

Reordenando niveles se obtiene:

- Nivel I (NI). Está constituido por el nivel 9.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 1 y 0.

La tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	21	20.19403	20	20.80597	41
NII	12	12.80597	14	13.19403	26
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 0.1633473$

- Para GL = 1 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 2.71$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo II.3.**

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	21	21.179104	22	21.820896	43
1	9	8.3731343	8	8.6268657	17
0	3	3.4477612	4	3.5522388	7
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 0.2100579$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo III.1.**

REACTIVO III.2 (Problema 3, reactivo 2).

Los niveles que resultaron del reordenamiento son:

- Nivel I (NI). Está constituido por el nivel 9.
- Nivel II (NII). Está formado por los niveles 2 y 1.
- Nivel III (NIII). Lo forma el nivel 0.

La tabla de contingencia fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
NI	20	18.223881	17	18.776119	37
NII	7	9.358209	12	9.641791	19
NIII	6	5.4179104	5	5.5820896	11
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 1.6353807$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo III.2.**

REACTIVO III.3 (Problema 3, reactivo 3).

En este caso no se reordenaron los niveles, la tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	20	19.701493	20	20.298507	40
8	6	8.8656716	12	9.1343284	18
3	5	2.9552239	1	3.0447761	6
0	2	1.4776119	1	1.5223881	3
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 4.9861853$

- Para GL = 3 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 6.25$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes en el reactivo III.3.**

REACTIVO III.4 (Problema 3, reactivo 4).

En este reactivo no se reordenaron niveles, la tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	23	18.223881	14	18.776119	37
8	0	2.9552239	6	3.0447761	6
3	5	4.9253731	5	5.0746269	10
0	5	6.8955224	9	7.1044776	14
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 9.3191966$

- Para GL = 3 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 6.25$

- Como $X^2_c > X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, no son equivalentes respecto al reactivo III.4.**

REACTIVO III.5 (Problema 3, reactivo 5).

En este reactivo no se reordenaron los niveles, la tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	12	9.358209	7	9.641791	19
3	10	13.298507	17	13.701493	27
1	1	2.4626866	4	2.5373134	5
0	10	7.880597	6	8.119403	16
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 5.9169966$

- Para GL = 3 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 6.25$

- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo III.5.**

REACTIVO III.6 (Problema 3, reactivo 6).

En este reactivo no se reordenaron niveles, la tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	15	10.343284	6	10.656716	21
4	10	15.268657	21	15.731343	31
0	8	7.3880597	7	7.6119403	15
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 7.8138503$

- Para GL = 2 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 4.61$

- Como $X^2_c > X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, no son equivalentes respecto al reactivo III.6.**

REACTIVO IV.1 (Problema 4, reactivo 1).

En este reactivo no se reordenaron niveles, la tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	7	5.9104478	5	6.0895522	12
2	13	6.4029851	0	6.5970149	13
1	12	18.716418	26	19.283582	38
0	1	1.9701493	3	2.0298507	
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se obtiene que; $X^2_c = 19.480642$

- Para GL = 3 y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 6.25$

- Como $X^2_c > X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, no son equivalentes respecto al reactivo IV.1.**

REACTIVO IV.2 (Problema 4, reactivo 2).

En este reactivo no se reordenaron niveles, la tabla de contingencia utilizada fue:

	G-C		G-F		
NIVEL	f_o	f_e	f_o	f_e	TOTAL
9	5	4.9253731	5	5.0746269	10
2	18	17.731343	18	18.268657	36
1	9	7.3880597	6	7.6119403	15
0	1	2.9552239	5	3.0447761	6
TOTAL	33	33	34	34	67

- Utilizando la información de la tabla de contingencia, se

obtiene que; $X^2_c = 3.2524659$

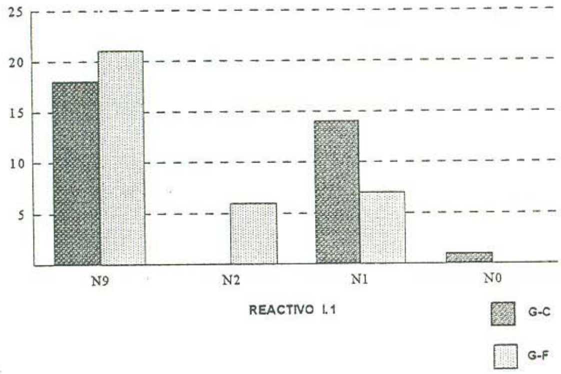
- Para $GL = 3$ y $\alpha = 0.100$, se obtiene $X^2_\alpha = 6.25$

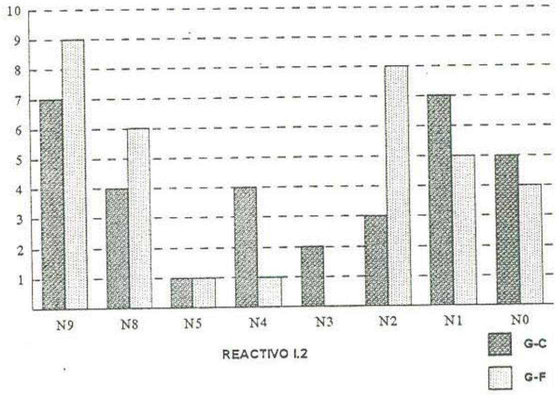
- Como $X^2_c \leq X^2_\alpha$, entonces la hipótesis nula no se rechaza. Lo que significa que; **los grupos G-C y G-F, pueden considerarse equivalentes respecto al reactivo IV.2.**

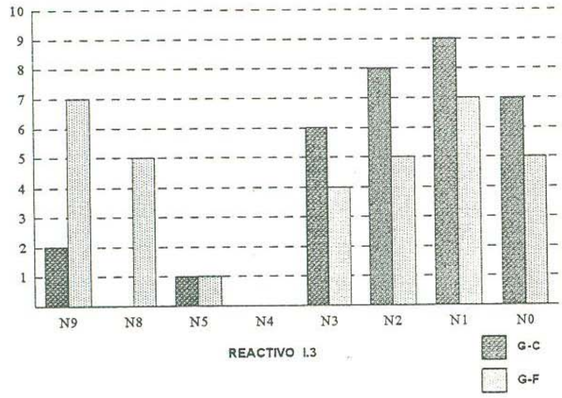
A N E X O 5

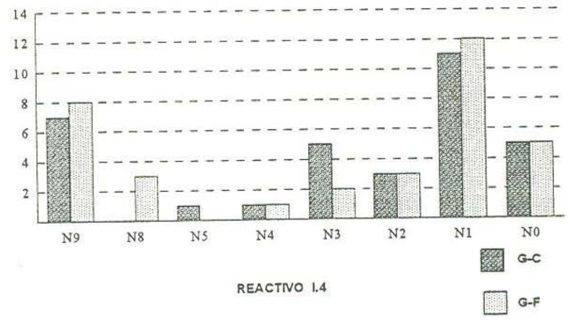
NIVELES DE RESPUESTA REACTIVO POR REACTIVO DE LOS EXÁMENES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS INICIAL Y FINAL.

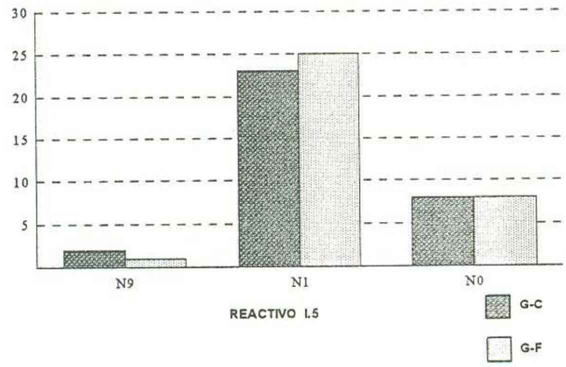
NIVELES DE RESPUESTA REACTIVO POR REACTIVO DEL EXAMEN DIAGNÓSTICO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

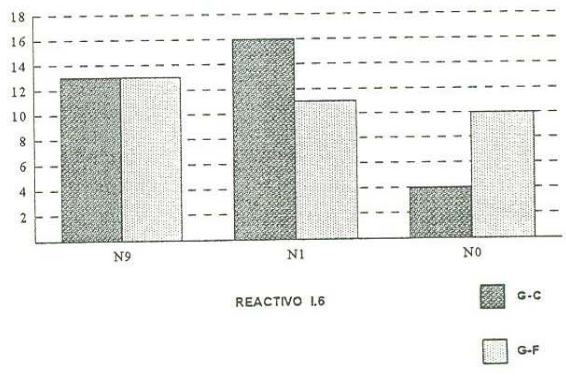


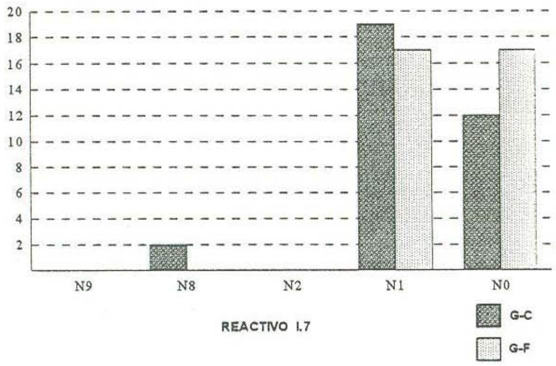


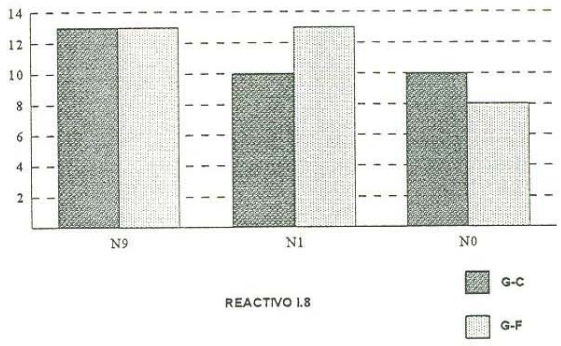


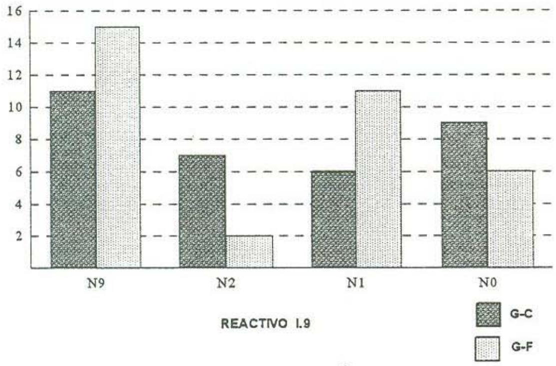


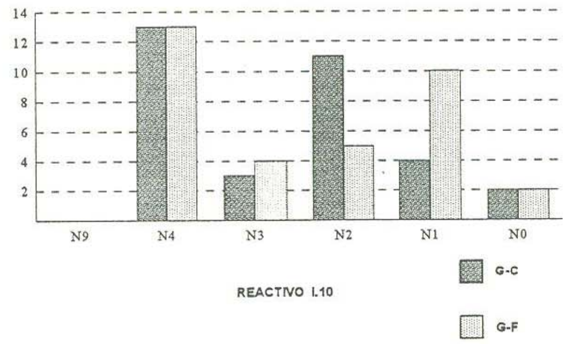


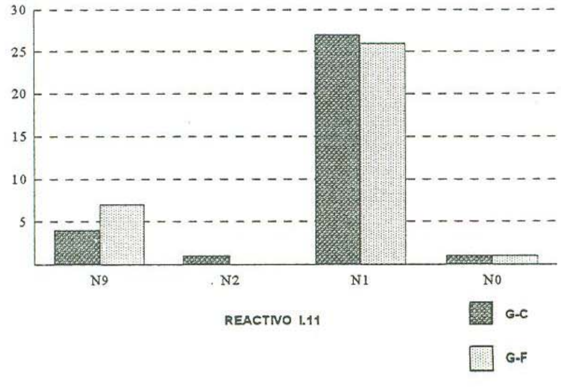


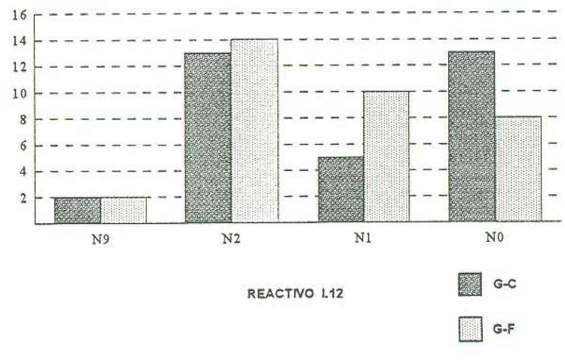

20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
N9
N8
N2
N1
N0
REACTIVO I.7
G-C
G-F


14
12
10
8
6
4
2
N9
N1
N0
REACTIVO I.8
G-C
G-F

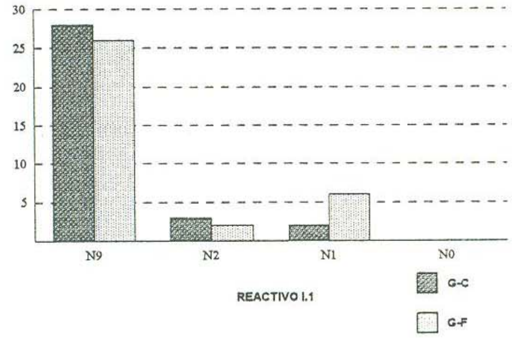

16
14
12
10
8
6
4
2
N9
N2
N1
N0
REACTIVO I.9
G-C
G-F

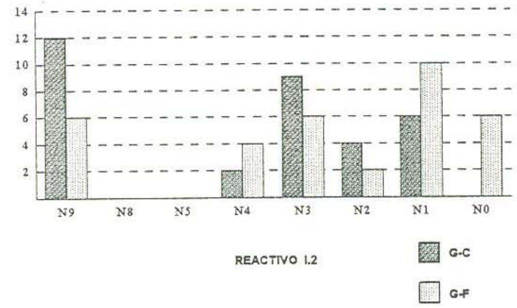

14
12
10
8
6
4
2
N9
N4
N3
N2
N1
N0
REACTIVO I.10
G-C
G-F

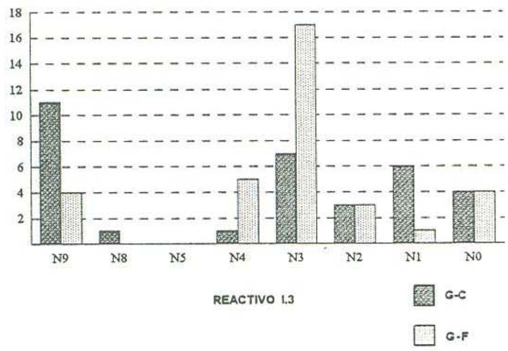

30
25
20
15
10
5
N9
N2
N1
N0
REACTIVO I.11
G-C
G-F

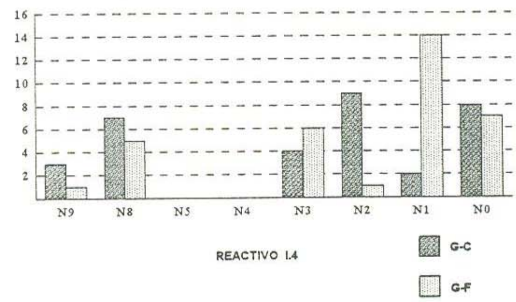

16
14
12
10
8
6
4
2
N9
N2
N1
N0
REACTIVO I.12
G-C
G-F

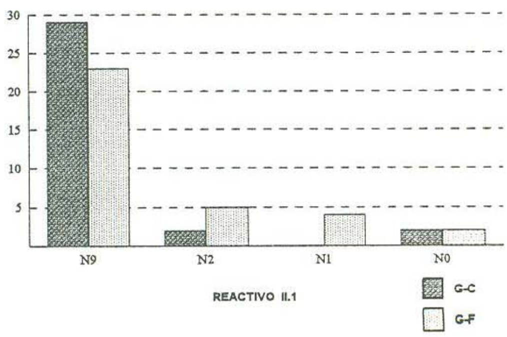
NIVELES DE RESPUESTA REACTIVO POR REACTIVO DEL EXAMEN FINAL DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

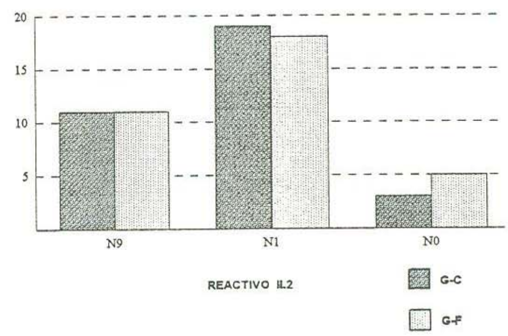


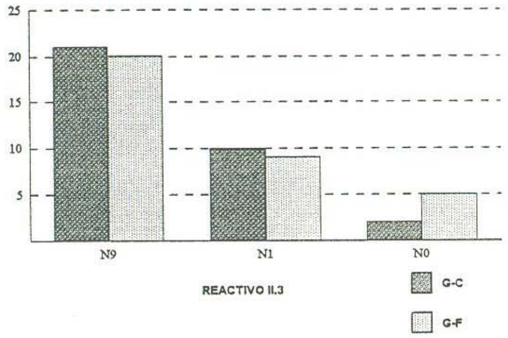


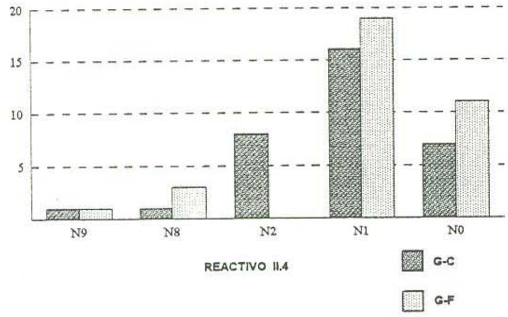


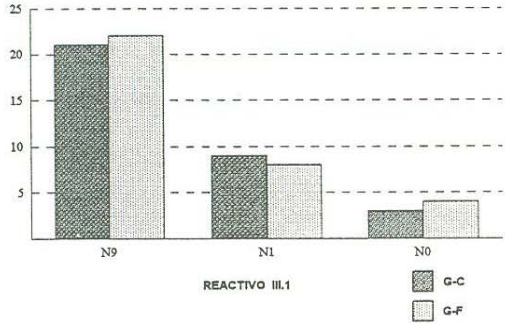


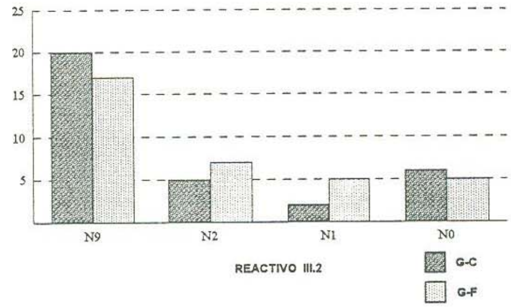


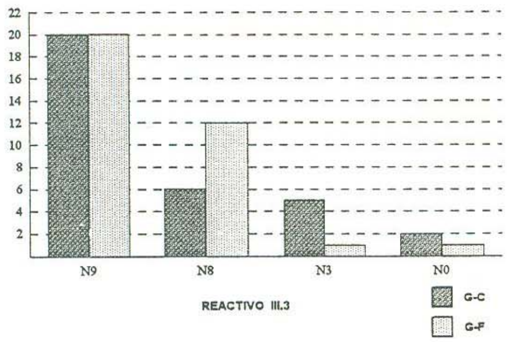


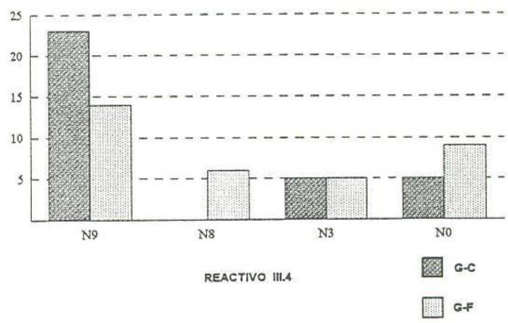

25
20
15
10
5
N9
N1
N0
REACTIVO II.3
G-C
G-F

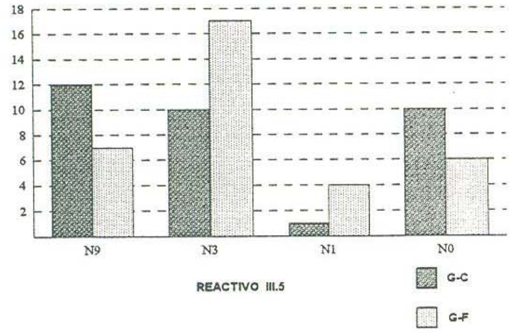

20
15
10
5
N9
N8
N2
N1
N0
REACTIVO II.4
G-C
G-F


25
20
15
10
5
N9
N1
N0
REACTIVO III.1
G-C
G-F

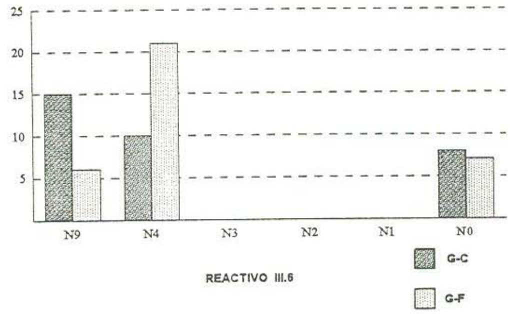

25
20
15
10
5
N9
N2
N1
N0
REACTIVO III.2
G-C
G-F


22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
N9
N8
N3
N0
REACTIVO III.3
G-C
G-F

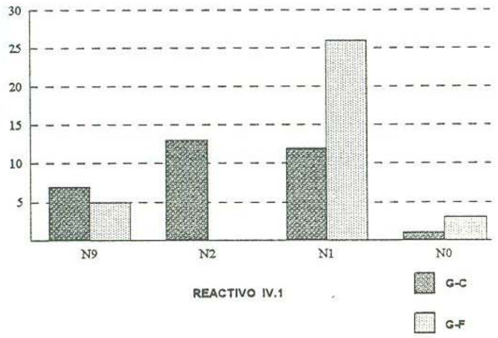

25
20
15
10
5
N9
N8
N3
N0
REACTIVO III.4
G-C
G-F



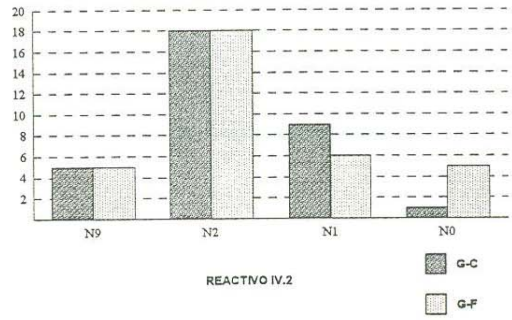
REACTIVO III.5



REACTIVO III.6



REACTIVO IV.1



REACTIVO IV.2

A N E X O 6

DATOS RECABADOS DE LOS INSTRUMENTOS APLICADOS EN EL CURSO

EXAMEN DE CONOCIMIENTO MATEMATICO INICIAL; V C

NOMBR	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R23	R24	R25
AEJ	e	c	b	b	e	e	a	a	c	b	d	d	c	b	d	e	c	c	c	a	e	e	b	b	e
AMFJ	e	c	e	e	e	e	d	a	a	c	e	b	d	c	a	e	e	c	e	a	e	d	d	a	c
AOK	e	c	c	b	e	e	a	e	d	c	b	b	c	b	d	c	c	c	b	a	d	e	a	e	a
AVFI	e	c	c	b	e	e	d	b	c	b	b	e	e	b	e	e	e	e	a	c	c	e	b	b	e
BGV	d	c	b	d	e	b	e	e	a	c	c	b	b	b	d	e	e	e	c	a	c	b	e	a	d
CNJ	a	c	e	e	e	e	e	a	d	b	e	b	b	b	c	e	e	c	b	c	c	e	a	e	d
CNR	e	c	b	e	e	c	a	e	a	c	d	b	b	e	d	e	c	e	e	a	e	d	c	b	b
CRCI	e	c	a	e	a	c	a	e	e	b	b	e	b	c	e	e	e	c	e	d	e	e	a	a	d
DGA	e	c	b	b	a	c	a	a	a	c	d	b	b	e	e	e	e	e	e	a	c	a	e	c	c
DNX	e	d	a	b	e	e	e	a	d	c	b	e	b	b	e	e	e	e	b	a	d	e	e	a	e
FVK	e	c	c	a	e	c	a	e	e	c	d	b	e	b	d	e	e	a	e	a	d	e	d	a	e
HBCI	d	c	a	b	e	e	a	a	c	a	a	d	a	b	a	d	e	c	e	a	c	b	b	e	d
IIEL	e	d	c	e	e	d	b	a	d	c	b	c	a	c	c	e	a	e	e	c	c	c	b	a	d
LLVEL	e	e	a	e	e	e	a	a	a	b	e	e	b	b	d	c	e	e	b	a	a	e	c	a	d
LSGE	e	c	b	b	e	e	a	a	e	a	a	e	a	c	e	e	e	c	a	a	b	a	c	b	d
MER	e	c	c	b	e	d	c	a	d	c	a	d	d	c	e	c	a	e	b	a	c	e	a	d	d
MFS	e	c	c	b	e	d	a	a	d	c	d	a	b	e	0	e	e	e	e	a	c	a	b	e	d
MHRJ	e	c	c	e	e	e	a	0	a	c	b	b	c	c	0	0	b	0	c	a	0	c	b	e	c
MMFA	c	c	e	0	a	c	d	a	c	c	d	e	b	b	0	a	e	b	e	a	c	a	e	a	b
MRJI	e	e	b	b	e	d	b	a	a	c	d	e	b	b	d	c	e	b	d	e	c	c	e	a	b
NRDB	e	c	b	b	e	b	a	a	d	c	d	b	b	c	d	d	d	b	a	a	b	a	b	c	d
OPLM	e	c	a	b	e	e	a	a	c	d	c	b	b	b	c	e	e	e	b	a	d	c	a	b	e
OTE	e	c	c	e	e	e	e	a	a	b	d	b	b	e	e	e	a	e	a	e	e	a	b	a	b
PHO	e	c	c	b	e	d	a	a	d	c	d	b	b	c	e	e	a	b	b	c	c	a	b	a	d
PSAO	e	c	c	b	a	e	d	e	a	c	b	b	c	e	e	e	e	b	b	e	c	a	d	b	e
RBBO	c	d	b	b	a	e	a	b	c	a	b	b	a	b	d	e	a	c	b	a	e	a	b	c	d
RRMG	c	c	a	b	a	c	d	d	a	c	d	b	b	e	d	e	e	b	a	a	c	a	d	a	d
RSEL	e	d	b	b	e	e	e	a	c	c	a	e	b	e	e	e	a	c	a	c	d	a	b	e	e
RUJC	e	c	b	b	a	c	d	a	d	c	d	c	b	b	0	e	e	b	c	a	c	d	c	a	c
RVML	e	d	c	b	e	e	a	a	c	c	d	b	b	b	d	e	e	c	e	a	d	b	e	e	d
TVAO	a	c	b	a	c	e	a	c	a	b	d	e	b	e	d	e	e	b	a	c	c	a	b	a	e
VFBK	e	d	c	c	e	e	d	e	0	c	c	b	b	e	d	0	a	b	a	a	0	a	0	0	b
VMAL	e	d	c	b	e	e	a	a	0	a	c	c	d	b	c	c	e	b	b	a	d	0	b	0	d

EXAMEN DE CONOCIMIENTO MATEMATICO INICIAL; VF

NOMBR	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R23	R24	R25
AFKM	d	c	b	d	c	c	d	e	a	c	d	a	b	e	c	e	0	e	e	a	c	a	e	0	e
ALKL	e	d	a	b	e	e	b	a	d	c	a	e	b	b	a	0	a	e	d	c	c	d	e	e	a
CEWA	e	c	b	a	c	c	d	c	a	e	d	b	b	e	d	e	c	b	e	a	c	a	b	a	c
CGB	e	c	a	c	c	c	a	a	a	d	b	a	0	0	0	0	0	e	d	a	d	a	0	a	e
CMMA	b	c	e	c	e	d	a	a	a	a	a	c	a	a	d	0	0	c	a	a	c	a	e	a	e
CMML	d	b	c	e	c	d	a	a	a	d	b	b	b	c	e	e	a	c	d	a	c	b	a	a	d
DBBA	e	c	c	b	e	e	e	a	a	d	b	c	b	e	e	e	e	b	e	a	d	b	e	a	d
DCHE	c	c	d	b	a	e	e	a	c	c	d	c	b	e	d	a	d	b	e	c	e	a	d	a	e
GRA	e	c	b	a	a	c	d	c	a	c	c	c	b	e	d	e	e	b	a	a	a	a	a	a	c
GVRV	e	c	c	e	e	e	e	c	a	b	a	d	d	c	d	e	e	0	e	c	0	d	0	a	e
HCPE	e	c	a	e	e	c	a	0	0	c	b	b	c	0	e	e	0	b	e	a	0	e	0	b	b
HGM	e	d	c	b	a	e	a	a	d	c	c	b	b	e	d	e	e	b	e	a	e	d	e	a	c
IDEV	e	c	b	b	e	c	a	a	e	c	b	e	c	c	d	e	e	b	b	a	e	0	e	a	d
JGJC	c	c	b	e	e	c	a	d	d	c	d	b	b	e	c	e	e	e	b	c	e	0	d	a	d
LSKE	e	e	b	e	e	c	a	a	d	b	b	e	d	b	d	a	d	c	d	c	a	a	b	d	b
LVHD	e	c	b	a	c	b	c	c	a	c	b	e	b	e	d	e	c	b	b	a	c	e	a	a	c
LVHG	e	c	c	e	c	e	e	b	a	d	a	b	c	b	d	d	b	e	e	a	c	e	a	a	a
MCNA	e	c	c	a	e	a	d	c	a	c	d	c	b	e	d	b	c	b	e	0	c	a	a	a	b
MDME	e	d	b	b	e	d	a	a	c	b	c	a	b	b	e	c	e	e	a	c	c	a	b	a	a
MHMJ	e	c	b	c	e	e	d	c	d	b	c	c	b	b	a	d	c	c	a	a	d	c	b	a	b
MSAT	e	c	b	b	e	e	e	a	e	b	a	b	e	b	e	e	e	c	c	b	c	a	e	a	d
OGRM	e	c	a	b	e	e	b	a	d	a	c	e	e	b	a	e	e	e	b	a	c	a	e	b	d
QVO	e	a	0	0	e	c	a	e	0	c	d	e	b	b	d	e	c	e	a	c	c	0	b	a	c
RFLZ	e	c	b	b	e	a	d	e	e	c	b	e	d	c	e	e	e	e	a	a	d	c	e	d	d
RNJA	e	c	b	b	e	e	a	a	a	c	c	c	b	b	d	d	d	b	0	0	0	0	a	a	a
RRMP	e	c	c	a	e	e	a	c	a	d	b	b	b	c	d	e	e	c	e	a	e	a	a	a	e
SCGG	e	c	b	e	e	e	a	a	e	c	b	e	b	b	a	0	e	e	a	a	0	0	b	a	d
SNI	b	c	d	b	c	d	d	a	d	b	b	e	d	b	e	a	e	b	a	b	d	a	a	a	0
SRBE	e	c	b	a	c	c	a	c	e	c	c	b	b	e	d	e	c	e	e	a	b	e	e	a	e
VD	e	c	a	c	e	b	d	a	0	e	c	c	d	b	c	a	e	b	a	a	e	a	c	a	a
VDL	d	e	a	e	e	c	a	a	e	b	b	a	e	b	e	e	e	b	a	a	0	a	e	a	e
VNPP	e	a	b	b	e	e	a	a	c	b	b	b	d	b	c	a	c	e	d	a	c	b	d	a	c
VTJF	e	c	b	e	a	d	a	e	a	c	d	a	b	e	d	e	c	b	e	c	c	a	c	a	e
YCG	e	c	a	e	c	c	e	a	d	c	b	a	c	b	c	e	0	b	e	a	0	a	b	a	e

EXAMEN DE CONOCIMIENTO MATEMATICO INICIAL; V C

NOMBR	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R23	R24	R25
AEJ	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
AMFJ	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
AOK	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
AVFI	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
BGV	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
CNJ	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
CNR	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
CRCI	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
DGA	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
DNX	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
FVK	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
HBCI	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
IIEL	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
LLVEL	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
LSGE	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
MER	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
MFS	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
MHRJ	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
MMFA	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
MRJI	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
NRDB	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
OPLM	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
OTE	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
PHO	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0
PSAO	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
RBBO	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
RRMG	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
RSEL	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
RUJC	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
RVML	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
TVAO	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0
VFBK	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
VMAL	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
TOTAL	26	24	11	2	1	7	5	1	11	21	14	9	20	9	13	23	3	10	10	6	15	13	13	14	4

EXAMEN DE CONOCIMIENTO MATEMATICO INICIAL; VF

NOMBR	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R23	R24	R25
AFKM	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
ALKL	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
CEWA	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
CGB	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
CMMA	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
CMML	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
DBBA	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0
DCHE	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
GRA	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
GVRV	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
HCPE	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
HGM	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
IDEV	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
JGJC	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
LSKE	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
LVHD	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
LVHG	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
MCNA	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
MDME	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
MHMJ	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
MSAT	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
OGRM	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
QVO	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
RFLZ	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RNJA	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
RRMP	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
SCGG	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
SNI	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
SRBE	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
VD	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
VDL	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
VNPP	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
VTJF	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
YCG	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
TOTAL	27	26	16	6	9	12	6	8	14	17	7	9	19	11	16	20	8	15	13	8	14	17	7	28	6

EXAMEN SOBRE RESOLUCION DE PROBLEMAS INICIAL; V C

NOMBRE	IP1	IP2	IP3	IP4	IIP1	IIP2	IIP3	IIIP1	IIIP2	IIIP3	IVP1	IVP2
AEJ	9	3	3	9	1	1	1	1	2	4	9	1
AMFJ	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
AOK	9	4	3	3	1	9	1	9	2	2	9	9
AVFI	9	1	0	0	1	1	1	0	0	2	1	2
BGV	1	1	1	3	1	9	1	0	0	3	1	2
CNJ	1	1	1	1	1	0	0	9	2	2	1	0
CNR	0	1	1	1	0	0	0	0	0	2	0	0
CRCI	9	9	2	9	1	1	1	9	9	4	1	2
DGA	9	9	3	9	1	9	1	0	9	4	9	9
DNX	9	4	1	1	1	9	0	1	1	2	1	0
FVK	1	8	1	1	0	1	0	1	1	1	1	2
HBCI	1	4	2	2	1	9	1	1	9	4	1	0
IIEL	1	2	2	9	9	9	8	9	1	4	1	0
LLVEL	9	9	2	1	1	1	1	1	9	2	2	2
LSGE	9	0	0	1	0	1	0	0	0	3	1	0
MER	9	9	3	4	9	9	8	9	9	4	1	0
MFS	9	9	2	3	1	1	1	9	0	4	1	0
MHRJ	1	9	0	0	0	1	0	0	2	4	1	2
MMFA	9	8	9	9	0	1	1	9	1	1	1	2
MRJI	9	0	0	9	1	9	0	9	9	4	1	2
NRDB	1	2	1	1	1	9	0	9	1	2	1	0
OPLM	1	5	5	5	1	1	1	1	0	1	1	1
OTE	1	8	1	1	1	9	1	9	9	4	9	0
PHO	9	4	2	1	1	1	1	1	9	1	1	2
PSAO	9	1	3	3	0	1	0	9	9	4	1	0
RBBO	9	8	3	0	1	1	1	9	2	2	1	1
RRMG	9	9	1	1	0	9	1	0	0	0	1	1
RSEL	9	2	2	3	1	1	1	0	2	2	1	2
RUJC	1	0	0	2	1	9	1	1	1	2	1	0
RVML	1	1	1	1	1	1	0	9	9	4	1	1
TVAO	1	3	2	2	1	0	1	1	9	4	1	2
VFBK	9	1	9	9	1	9	0	1	2	3	1	2
VMAL	1	0	0	0	1	1	1	0	0	2	1	0

EXAMEN SOBRE RESOLUCION DE PROBLEMAS INICIAL; V F

NOMBRE	IP1	IP2	IP3	IP4	IIP1	IIP2	IIP3	IIIP1	IIIP2	IIIP3	IVP1	IVP2
AFKM	2	9	2	1	0	9	0	0	0	0	1	2
ALKL	9	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1	2
CEWA	9	9	9	9	9	9	0	9	9	4	9	1
CGB	9	9	1	8	1	9	1	9	9	4	9	9
CMMA	1	5	5	2	1	0	1	1	1	1	1	2
CMML	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
DBBA	9	8	1	8	1	9	1	1	1	4	1	2
DCHE	2	2	2	4	1	9	1	1	9	4	1	0
GRA	9	8	9	9	0	9	1	9	9	4	1	2
GVRV	9	9	9	9	1	0	1	9	1	1	1	2
HCPE	9	8	3	3	0	0	0	9	9	2	1	2
HGM	1	0	0	2	0	0	0	1	0	3	9	1
IDEV	2	8	8	1	1	0	0	1	0	1	9	1
JGJC	9	1	9	1	1	1	0	9	9	4	1	2
LSKE	9	1	3	1	1	1	1	9	9	4	1	1
LVHD	9	9	8	9	1	9	0	9	9	4	1	0
LVHG	9	2	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
MCNA	9	0	2	1	0	0	0	9	2	2	1	1
MDME	9	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
MHMJ	1	2	2	9	1	1	1	9	9	4	1	2
MSAT	1	0	0	2	1	0	0	1	1	1	1	0
OGRM	2	0	0	1	1	0	1	0	9	2	1	2
QVO	2	1	8	8	1	9	1	1	9	4	9	9
RFLZ	9	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
RNJA	9	9	9	1	1	9	1	0	1	3	1	2
RRMP	9	9	1	9	0	9	0	9	9	2	1	1
SCGG	1	2	1	0	1	1	0	1	1	2	1	1
SNI	1	2	0	0	1	0	0	0	0	3	1	2
SRBE	9	9	8	9	1	1	0	9	9	4	9	1
VD	9	9	8	3	1	9	1	0	9	4	1	2
VDL	9	2	9	0	0	9	0	0	0	3	1	0
VNPP	2	8	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
VTJF	9	2	2	0	1	1	1	1	2	1	9	1
YCG	9	8	9	9	0	9	0	9	9	4	1	0

EXAMEN DE CONOCIMIENTO MATEMATICO FINAL; V C

NOMBR	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R23	R24	R25
AEJ	e	c	c	b	e	e	c	a	a	c	e	b	b	e	d	e	e	b	e	a	d	a	d	a	c
AMFJ	e	c	b	e	c	b	d	d	e	c	e	a	b	e	c	e	e	b	e	a	c	a	a	a	c
AOK	e	c	b	b	e	e	a	a	e	c	b	b	b	d	a	e	e	c	a	a	e	a	e	a	e
AVFI	e	d	a	a	b	b	d	e	c	c	e	c	b	c	e	a	a	e	a	a	c	a	d	a	e
BGV	e	c	b	d	a	b	e	e	a	b	d	a	c	a	c	c	c	b	b	a	e	c	e	a	d
CNJ	e	c	e	e	e	e	e	e	e	e	a	b	d	e	c	e	b	e	a	e	b	a	e	a	b
CNR	e	c	a	a	a	c	e	c	a	c	e	a	b	e	d	e	c	b	e	c	c	a	b	a	e
CRCI	e	c	a	a	e	c	d	c	b	d	a	a	e	e	d	c	b	d	e	b	c	a	e	a	c
DGA	e	c	b	a	e	c	e	c	a	c	e	a	b	e	c	e	c	e	e	a	e	a	a	a	c
DNX	e	c	a	b	e	e	a	a	a	c	c	a	b	e	e	e	a	d	e	b	e	a	d	a	c
FVK	e	c	e	e	e	e	e	e	e	c	e	b	b	e	e	e	e	e	e	a	c	a	c	a	e
HBCI	e	c	c	b	e	e	a	a	a	b	c	b	e	a	d	e	c	b	d	a	c	a	e	a	c
IIEL	e	c	c	b	e	e	a	a	a	b	e	0	b	e	d	e	0	b	a	a	0	a	e	a	c
LLVEL	e	c	b	b	e	e	c	a	e	d	b	c	c	a	e	e	e	e	a	a	c	a	d	b	c
LSGE	e	c	c	b	e	e	e	a	a	c	e	c	b	e	d	e	0	b	e	a	c	a	e	a	e
MER	e	c	a	b	e	b	d	a	e	c	d	b	b	e	c	a	c	e	a	a	b	a	d	a	c
MFSG	e	c	b	e	e	0	d	e	a	b	d	e	c	d	d	e	c	b	e	c	c	a	b	a	c
MHRJ	e	c	b	c	e	b	d	d	a	c	e	e	b	e	e	e	a	b	a	c	c	a	e	a	e
MMFA	e	a	a	b	e	e	e	e	e	e	e	a	b	e	d	e	d	e	a	e	b	a	a	a	e
MRJI	c	c	a	d	e	e	d	a	d	e	e	b	b	d	e	c	e	d	b	a	b	a	e	a	b
NRDB	e	c	b	b	c	b	e	a	a	c	e	a	b	e	c	e	c	d	e	e	c	a	e	a	c
OPLM	e	c	c	b	e	e	a	a	a	c	c	d	b	e	e	e	c	d	a	b	e	a	c	a	c
OTE	e	c	b	e	c	c	e	e	a	b	d	e	b	e	d	e	c	e	e	c	0	a	e	a	e
PHO	e	c	b	b	c	c	a	a	a	e	b	c	d	b	d	e	c	e	a	b	c	a	0	a	c
PSAO	e	c	a	a	c	c	d	b	e	c	e	a	e	a	d	e	b	e	e	c	c	a	e	a	e
RBBO	e	c	c	b	e	b	e	a	a	c	e	e	b	b	c	e	d	d	e	b	c	e	a	0	d
RRMG	e	c	b	d	0	b	d	c	a	b	e	b	b	a	c	e	d	b	a	a	0	a	a	a	e
RSEL	e	c	c	b	d	e	d	a	e	c	e	b	b	e	e	e	c	c	a	b	c	a	b	a	d
RUJC	e	a	c	a	e	e	a	c	0	c	c	b	e	e	0	e	0	b	a	0	c	a	0	a	0
RVML	e	d	c	b	e	e	b	a	a	c	d	b	b	d	c	a	0	b	b	a	0	a	b	d	c
TVAO	e	c	d	e	b	a	c	d	b	e	e	c	e	e	d	b	a	a	e	e	c	c	b	a	b
VFBK	e	c	a	e	e	c	e	e	d	c	e	a	b	e	a	c	e	b	e	b	b	c	e	a	c
VMAL	e	c	b	a	c	b	a	c	a	c	e	c	b	e	d	e	d	b	e	c	c	a	a	a	c

EXAMEN DE CONOCIMIENTO MATEMATICO FINAL; V F

NOMBR	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R23	R24	R25
AFKM	e	c	b	e	e	c	d	c	a	c	e	a	b	d	d	e	e	a	e	c	0	0	e	a	0
ALKL	e	d	b	c	e	b	a	d	c	c	a	a	d	e	a	0	b	c	a	b	c	b	a	d	c
CEWA	e	c	b	a	c	c	e	c	a	a	d	a	b	e	d	e	c	b	e	c	c	a	b	a	c
CGB	e	c	a	e	c	c	d	e	e	d	c	a	b	e	d	e	d	b	a	a	c	a	b	a	e
CMMA	c	d	d	e	b	b	b	0	0	e	d	c	0	a	0	0	0	a	b	a	e	a	0	a	c
CMML	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DBBA	e	c	c	a	e	c	c	d	a	c	e	e	e	e	d	e	e	b	e	a	c	d	d	a	c
DCHE	e	a	c	b	a	c	e	a	a	c	e	c	b	e	d	a	c	b	a	c	e	a	c	a	e
GRA	e	c	b	d	a	c	e	c	e	c	e	c	b	e	d	a	c	e	a	a	c	a	a	a	c
GVRV	e	c	b	c	e	c	e	c	a	c	e	b	e	e	d	e	0	c	e	a	0	a	d	a	e
HCPE	e	c	c	e	e	c	a	0	a	b	e	e	0	e	d	0	0	0	b	a	e	a	a	0	0
HGM	e	c	c	b	e	e	d	a	0	c	e	a	e	c	d	e	e	e	d	e	e	e	e	e	e
IDEV	e	c	b	d	e	b	a	e	e	c	a	e	b	e	d	0	e	b	e	a	0	c	e	a	c
JGJC	e	c	e	e	e	b	a	a	d	e	c	c	e	c	d	c	0	e	e	d	c	e	e	a	b
LSK	e	c	c	b	e	e	a	a	e	c	b	a	a	b	d	a	c	d	a	c	c	a	b	a	c
LVHD	e	c	a	a	e	c	c	c	c	c	e	a	b	e	c	e	e	b	e	a	b	a	e	b	e
LVHG	c	c	a	b	a	b	e	a	a	c	d	a	b	a	d	a	b	d	a	b	a	a	a	a	e
MCNA	e	c	c	a	c	c	a	0	a	d	e	a	b	e	d	e	b	e	e	e	e	a	0	a	b
MDME	e	d	c	b	e	b	d	a	e	c	d	c	b	c	e	e	b	c	b	a	d	e	a	e	b
MHMJ	c	c	a	c	c	e	c	e	b	c	b	c	b	c	b	d	b	c	a	a	b	c	d	e	b
MSAT	e	c	c	b	e	e	e	a	e	d	a	b	b	c	d	e	0	c	c	e	c	e	d	e	b
OGRM	d	c	a	a	a	c	d	c	a	c	e	a	e	a	b	e	b	b	c	a	d	a	d	a	c
QVO	e	c	b	a	c	c	e	c	a	c	d	c	b	c	d	e	c	c	e	c	a	a	d	a	c
RFLZ	e	c	c	e	e	b	d	c	e	c	b	a	e	e	d	e	c	c	e	a	c	a	e	b	e
RNJA	e	c	a	b	a	b	e	0	a	c	d	c	b	e	d	e	c	b	e	a	c	c	a	a	a
RRMP	a	c	b	e	c	c	b	c	c	c	e	a	b	d	d	e	c	c	e	a	c	a	e	a	c
SCGG	e	c	a	b	e	b	d	a	e	b	e	a	c	e	d	e	c	b	d	a	e	c	b	a	b
SNI	c	c	c	b	e	e	b	a	e	c	d	a	c	a	c	a	b	a	b	c	a	b	c	a	d
SRBE	e	c	b	a	e	c	d	c	e	c	e	a	e	e	d	e	e	b	e	c	c	a	e	a	c
VD	e	c	a	b	e	c	d	c	e	c	e	b	b	e	d	e	e	a	a	a	c	a	d	a	e
VDL	d	c	c	c	e	b	a	d	e	c	c	a	0	e	c	0	c	e	e	a	c	c	e	a	c
VNPP	c	d	a	a	e	b	a	d	d	d	b	a	b	e	c	b	e	b	d	c	b	a	e	a	c
VTJF	e	c	a	e	c	b	a	c	a	c	c	a	b	e	d	e	e	b	e	c	c	c	d	a	e
YCG	a	c	a	e	c	c	e	0	a	b	d	c	b	e	d	a	a	0	e	a	c	a	b	a	a

EXAMEN DE CONOCIMIENTO MATEMATICO FINAL; V C

NOMBR	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R23	R24	R25
AEJ	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
AMFJ	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
AOK	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
AVFI	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
BGV	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
CNJ	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
CNR	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
CRCI	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
DGA	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
DNX	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
FVK	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
HBCI	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
IIEL	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
LLVEL	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
LSGE	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
MER	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
MFSG	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
MHRJ	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
MMFA	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
MRJI	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
NRDB	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
OPLM	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
OTE	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
PHO	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
PSAO	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
RBBO	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
RRMG	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
RSEL	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
RUJC	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
RVML	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
TVAO	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
VFBK	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
VMAL	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
TOTAL	32	29	12	7	6	7	11	6	18	20	5	4	23	21	13	25	11	14	16	6	18	29	5	30	16

EXAMEN DE CONOCIMIENTO MATEMATICO FINAL; V F

NOMBR	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R23	R24	R25
AFKM	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
ALKL	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
CEWA	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CGB	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0
CMMA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
CMML	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
DBBA	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
DCHE	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
GRA	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
GVRV	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
HCPE	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
HGM	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
IDEV	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
JGJC	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
LSK	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
LVHD	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
LVHG	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
MCNA	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
MDME	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MHMJ	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MSAT	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
OGRM	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
QVO	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1
RFLZ	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
RNJA	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
RRMP	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
SCGG	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
SNI	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
SRBE	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
VD	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
VDL	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
VNPP	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1
VTJF	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
YCG	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
TOTAL	24	28	9	8	8	16	9	12	13	23	8	3	19	21	26	19	10	13	18	9	17	18	5	26	13

EXAMEN SOBRE RESOLUCION DE PROBLEMAS FINAL; V C

NOMBR	IP1	IP2	IP3	IP4	IIP0	IIP1	IIP2	IIP3	IIIP1	IIIP2	IIIP3	IIIP4	IIIP5	IIIP6	IVP1	IVP2
AEJ	9	2	9	8	9	1	9	0	9	9	9	9	3	9	1	2
AMFJ	9	4	4	0	9	1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AOK	9	3	0	0	9	1	9	2	0	0	0	0	0	0	2	2
AVFI	2	1	0	0	9	9	1	2	1	9	9	9	3	4	1	1
BGV	9	1	1	2	9	1	9	2	9	9	9	9	9	9	9	1
CNJ	9	1	0	0	2	1	0	0	9	0	3	9	0	4	1	1
CNR	2	3	3	3	9	9	9	2	9	9	8	9	3	9	2	2
CRCI	9	9	9	8	9	0	9	2	9	9	9	9	9	9	1	1
DGA	9	9	9	2	9	9	1	1	1	2	9	9	9	9	9	9
DNX	9	4	2	2	9	1	9	2	9	9	9	9	3	4	1	1
FVK	9	9	9	2	9	9	9	2	9	9	9	9	3	4	2	2
HBCI	9	3	1	2	2	1	1	0	9	9	9	9	9	9	2	2
IIEL	1	1	1	1	9	1	1	1	9	9	9	9	3	0	1	2
LLVEL	9	9	8	8	9	1	9	2	9	2	8	9	3	4	2	2
LSGE	9	3	3	0	9	9	9	8	1	0	3	0	0	0	1	1
MER	9	2	3	0	9	9	9	1	1	9	9	0	0	0	2	2
MFS	9	9	9	8	9	0	9	1	1	1	8	3	9	9	1	2
MHRJ	9	1	1	1	9	1	1	1	9	9	9	9	9	9	9	9
MMFA	9	9	9	2	9	9	9	1	9	9	9	9	9	9	9	9
MRJI	9	9	9	2	9	1	1	1	9	9	3	9	3	0	2	2
NRDB	9	3	3	3	9	9	9	1	9	2	3	0	0	0	1	2
OPLM	9	3	2	8	9	1	9	1	1	0	9	3	0	4	1	1
OTE	2	9	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
PHO	9	3	3	3	9	1	9	1	9	9	9	9	1	4	1	2
PSAO	9	1	3	3	9	1	9	1	9	9	8	9	9	9	2	2
RBBO	9	9	9	8	9	1	9	1	1	1	9	3	9	9	9	9
RRMG	9	9	3	8	9	9	1	1	9	2	9	9	0	9	9	1
RSEL	9	2	1	2	9	1	9	1	9	9	9	9	3	4	2	2
RUJC	9	3	9	0	9	0	1	1	1	2	3	3	0	4	2	2
RVML	1	2	2	2	9	1	1	1	9	9	9	9	9	9	2	1
TVAO	9	9	9	9	0	1	0	0	9	9	8	9	9	9	2	2
VFBK	9	3	9	9	9	9	9	1	1	9	9	9	3	4	2	2
VMAL	9	9	0	0	0	1	1	1	0	0	8	3	0	0	1	2

EXAMEN SOBRE RESOLUCION DE PROBLEMAS FINAL; V F

NOMBR	IP1	IP2	IP3	IP4	IIP0	IIP1	IIP2	IIP3	IIIP1	IIIP2	IIIP3	IIIP4	IIIP5	IIIP6	IVP1	IVP2
AFKM	9	1	3	3	1	1	0	0	9	9	9	8	3	4	1	2
ALKL	9	0	3	3	2	1	9	1	9	9	9	9	3	4	1	2
CEWA	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
CGB	9	3	3	0	2	1	0	0	9	2	8	8	3	4	9	9
CMMA	9	3	1	1	2	1	9	0	1	0	0	0	1	0	1	0
CMML	1	1	2	1	2	1	1	1	1	2	9	0	3	4	1	1
DBBA	9	1	3	1	9	9	9	8	9	2	9	9	3	4	1	1
DCHE	9	1	3	8	9	1	1	1	9	9	9	8	0	0	1	2
GRA	9	4	3	8	9	9	9	1	9	2	9	9	9	9	1	2
GVRV	9	9	3	0	9	9	9	1	9	9	8	3	3	4	1	1
HCPE	2	2	3	3	9	9	9	1	9	9	9	9	9	4	1	2
HGM	1	0	0	0	9	1	9	8	0	0	9	0	9	4	1	2
IDEV	9	4	3	1	9	1	1	1	0	1	8	0	0	0	9	9
JGJC	1	1	2	1	9	1	9	0	9	0	8	0	3	4	0	0
LSKE	1	1	3	0	9	1	1	1	1	1	8	3	1	4	1	2
LVHD	9	9	4	3	9	1	1	1	9	9	9	9	3	4	1	2
LVHG	2	0	0	0	9	0	0	0	1	1	8	3	3	0	0	0
MCNA	9	0	4	1	9	0	0	0	1	9	9	9	3	9	1	1
MDME	9	3	3	1	9	0	9	1	1	1	3	3	3	4	1	2
MHMJ	9	3	3	3	1	1	9	0	9	1	9	8	3	4	1	2
MSAT	9	1	3	1	1	1	1	1	9	9	8	9	3	9	1	2
OGRM	1	0	2	2	9	0	9	8	0	2	9	0	3	4	1	2
QVO	9	9	9	8	9	9	9	1	9	9	9	9	9	9	1	2
RFLZ	1	0	0	0	9	1	9	1	1	0	8	0	3	4	1	2
RNJA	9	9	4	3	1	1	0	0	9	2	8	8	1	0	1	2
RRMP	9	1	3	1	9	9	9	1	9	2	9	8	9	4	1	1
SCGG	9	4	0	0	0	1	1	1	0	0	8	0	0	4	1	0
SNI	9	1	4	1	2	0	1	0	9	9	8	0	0	0	0	0
SRBE	9	9	9	8	9	9	1	1	9	9	9	9	3	4	9	9
VD	9	2	4	1	9	1	9	1	1	9	9	3	9	9	1	2
VDL	9	3	3	1	9	9	9	0	9	9	9	9	1	4	1	2
VNPP	9	1	3	1	9	1	9	1	9	9	8	9	0	4	1	2
VTJF	9	3	3	1	9	9	9	1	9	9	9	9	3	4	9	9
YCG.	9	4	9	8	0	9	9	0	9	9	9	9	0	0	1	1

EXAMEN DE EVALUACION; GRUPO V C

NOMBR	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21
AEJ	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9	9	9	2	9	9	9
AMFJ	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	9	9	9	9	9	9	9
AOK	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	9	1	9	0	0
AVFI	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	9	2	9	9	9	0	0
BGV	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	9	0	0
CNJ	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
CNR	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9	9	9	9	9	9	9
CRCI	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	9	9	9	9	9	0	0
DGA	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	9	2	9	9	9	2	1
DNX	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	9	9	9	9	2	1
FVK	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	9	9	9	9	9	0	0
HBCI	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	9	2	9	1	0
IIEL	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	9	9	9	1	0
LLVEL	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	2	9	9	9	9	9
LSGE	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	9	0	9	3	1
MER	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	9	9	9	3	1
MFS	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	9	0	0
MHRJ	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	9	2	1
MMFA	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	9	1	9	9	9	0	0
MRJI	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	9	9	9	9	9	9
NRDB	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	9	1	1	0	9	0	0
OPLM	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	9	1	1	0	0
OTE	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	2	9	9	1	9	9	9
PHO	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	2	9	3	1
PSAO	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	2	9	9	9	9	9
RBBO	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	9	0	1
RRMG	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	9	9	9	9	9	2	1
RSEL	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	9	9	9	9	9	0	0
RUJC	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	9	9	9	0	9	3	1
RVML	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	9	1	9	2	9	2	1
TVAO	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	9	9	9	9	9	9	9
VFBK	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	9	0	0
VMAL	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	9	1	9	0	0
TOTAL	32	20	4	17	14	24	21	24	13	15	25	9	33	6							

EXAMEN DE EVALUACION, GRUPO VF

NOMBR	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21
AFKM	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
ALK	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	9	0	0
CEWA	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	9	1	9	2	9	4	9
CGB	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	9	0	0
CMMA	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
DBBA	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	2	9	9	0	9	0	0
DCHE	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	9	1	9	1	9	0	0
GRA	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	9	9	9	1	9	5	1
GVRV	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	9	1	0	0	9	0	0
HCPE	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	9	1	1	1	9	0	0
HGM	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	9	0	0
IDEV	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	9	1	9	1	9	0	0
JGJC	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	9	0	0
LSKE	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	9	9	9	2	9	0	0
LVHD	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
LVHG	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	9	0	0	0	0	0	0
MCNA	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	9	1	9	1	9	0	0
MDME	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	9	0	0
MHMJ	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
MLDA	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	9	0	0
MSAT	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
OGRM	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	9	9	0	9	0	0
QVO	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	9	9	9	2	9	0	0
RFLZ	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
RNJA	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	9	1	9	1	9	2	1
RRMP	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	9	0	9	9	9	5	1
SCGG	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SNI	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	9	0	0
SRBE	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	9	9	9	2	9	1	0
VD	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	9	1	9	1	9	1	0
VDL	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	9	1	9	2	9	3	0
VNPP	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	9	1	9	1	9	0	0
VTJF	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	9	1	9	1	9	0	0
YCG	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	9	1	9	0	9	0	0
TOTAL	33	17	3	14	14	22	21	23	17	17	22	4	26	13							