

UNIVERSIDAD DE SONORA.
ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS.

LOS METODOS DE POINCARÉ
Y DE VAN DER POL.



BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
ANA MARIA DE LOS ANGELES PEREZ CASADOS

HERMOSILLO, SONORA, MEXICO

1976.

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

A MIS PADRES

POR SU AMOR, COMPRENSION
Y SACRIFICIO.

A MIS HERMANOS,

POR EL EJEMPLO Y APOYO
QUE ME HAN DADO.

I N D I C E :

Introducción()

CAPITULO 1

Introducción	1
Método de Poincaré	3
Expansiones de Poincaré y Soluciones Generadoras	9
Ejemplos	24

CAPITULO 2

Introducción	29
Método de Van Der Pol	29
Topología del Plano de Variables de Van Der Pol	34
Ejemplos	40
Apéndices	54
Bibliografía	60



INTRODUCCION.

El objeto de este trabajo es presentar dos de los métodos - más antiguos que se conocen para la búsqueda de soluciones periódicas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, estos son, el Método de Poincaré y el Método de Van Der Pol. Quizá un estudio sistemático de este tipo de problemas deba empezar con el Análisis de estos métodos y de algunas de sus aplicaciones. Esto es lo que se - pretende hacer aquí.

El capítulo I expondrá el Método de Poincaré y algunas de - sus aplicaciones, en particular, la aplicación a cierta ecuación ---- diferencial que se presenta en el estudio de generadores de tipo -- Termiónico.

El capítulo II consistirá del Método de Van Der Pol y ----- también se verá su aplicación para la ecuación diferencial mencio- nada en el párrafo anterior.

El Método de Poincaré y el de Van Der Pol se aplica a sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del tipo cuasi-lineal, es decir, a sistemas de la forma:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + \mu f_1(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + \mu f_2(x, y) \end{aligned}$$

con a, b, c, d constantes reales o complejas; f_1 y f_2 funciones analíticas y μ un parametro pequeño, como veremos en el desarrollo de este trabajo.

Para estudiar la existencia de soluciones periódicas para sistemas no-lineales más generales que el de las ecuaciones (1.1), tales métodos no son aplicables y se tiene que recurrir a métodos analítico topológico, como son: Teoría del Grado Topológico, Método de la Alternativa, etc.- Realizar un estudio de estos métodos va más allá de la intención de este trabajo, pero el lector interesado puede recurrir a las referencias [2], [3] .

CAPITULO I

METODO DE POINCARÉ.

1.1. Introducción. - Es evidente que para aplicaciones, son necesarios métodos cuantitativos capaces de proporcionar - nos soluciones numéricas para las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En general, no existen métodos capaces de darnos so-
luciones exactas de ecuaciones diferenciales no - lineales, -
y el único método disponible es el de aproximaciones. - En
aplicaciones, una clase típica y muy general de ecuaciones
diferenciales no - lineales son las llamadas de tipo cuasi--
lineal que son de la forma

$$(1.1.1.) \quad \dot{X} = AX + \mu f(X)$$

Donde A es una matriz $n \times n$, $X \in \mathbb{R}^n$, μ u n
parámetro pequeño y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función analítica.

Cuando $\mu = 0$, la ecuación (1.1.1.) será lineal y si --
cumple ciertas condiciones; sus soluciones serán ω periód-
dicas. (Ver apéndice I).

Nuestro objetivo es demostrar que muy cerca de algu-
na de éstas soluciones cuando $\mu = 0$, pueden existir solucio-
nes periódicas de la ecuación (1.1.1.) para valores muy --

pequeños de μ La búsqueda de estas soluciones es el propósito del Método de parámetros pequeños de Poincaré.

La exposición de éste método, constituye el principal objetivo de la sección 2.

El alcance de los métodos cuantitativos disponibles en el presente es bastante limitado. En efecto, la clase de ecuaciones diferenciales no-lineales del tipo (1.1.1) están restringidas por la condición de que el parámetro μ debe de ser muy pequeño. A pesar de estas limitaciones, la utilidad de éstos métodos es muy grande y sus aplicaciones son muchas en varias ramas de la ciencia aplicada.

En la sección 3 veremos las expansiones de Poincaré y soluciones generadoras.

En la sección 4 incluiremos un ejemplo de la aplicación de ésta teoría. En esta misma sección daremos un ejemplo de una ecuación diferencial cuasi-lineal la cual cumple con la hipótesis de analiticidad para la perturbación f , y sin embargo no existen soluciones periódicas de dicha ecuación en ninguna vecindad de la solución periódica cuando el parámetro es igual a cero.

1.2 Método de Poincaré.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$(1.2.1.) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= a x + b y + \mu f_1(x, y) \\ \dot{y} &= c x + d y + \mu f_2(x, y) \end{aligned}$$

Donde μ es un parámetro pequeño, f_1 y f_2 son funciones analíticas en sus variables (x, y)

En primer término buscamos las soluciones periódicas de este sistema cuando es lineal, es decir, cuando $\mu = 0$. Su ecuación característica es

$$(1.2.2) \quad s^2 - (a+d) s + (ad - cb) = 0$$

Para que existan soluciones periódicas se deben cumplir las siguientes condiciones

$$(1.2.3) \quad a+d=0 \text{ y } ad - cb > 0$$

Con estas condiciones encontramos que todas las soluciones periódicas del sistema lineal son de la forma

$$(1.2.4) \quad \begin{aligned} x &= x_0(t, K) = K \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t \\ y &= y_0(t, K) = -K \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t \end{aligned}$$

Con condiciones iniciales $x_0(0) = K$ y $y_0(0) = b$

Estas soluciones tienen período $2\pi/\omega$ donde ---

$$\omega = \sqrt{ad - cb} \text{ (Ver Apéndice I)}$$

El método de Poincaré consiste en indicar las condiciones bajo las cuales existe una solución del sistema --- (1.2.1) para cada valor de μ suficientemente pequeño, que tienda a la solución periódica del sistema lineal cuando $\mu \rightarrow 0$.

Las soluciones del sistema (1.2.1) las designamos - por

$$(1.2.5) \quad \begin{aligned} x &= x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K) \\ y &= y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K) \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$(1.2.6) \quad \begin{aligned} x(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= x_0(0, K) + \beta_1(\mu) \\ y(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= y_0(0, K) + \beta_2(\mu) \end{aligned}$$

Donde $\beta_1(\mu)$ y $\beta_2(\mu)$ son las desviaciones de las condicio_ nes iniciales de las soluciones $x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K)$ y $y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K)$ con respecto a las condiciones iniciales $x_0(0, K)$ y $y_0(0, K)$ de las soluciones periódicas del sistema cuando es lineal.

En base al teorema sobre la dependencia analítica -- respecto al parámetro, podemos expandir las soluciones - $x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K)$ y $y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K)$ en series de potencias de μ , β_1 , y β_2 las cuales convergen en un intervalo finito -- del tiempo, esto está demostrado en el Teorema de las -- Expansiones de Poincaré. (Ver Apéndice II)



Los coeficientes de las expansiones así obtenidos son funciones del tiempo. Sustituyendo éstas expansiones en la ecuación (1.2.1) es posible determinar estos coeficientes - igualando como potencias de μ, β_1 y β_2 . Obtendremos de ésta manera un sistema de ecuaciones diferenciales su- jeto a ciertas condiciones iniciales.

La solución periódica del sistema cuando es lineal -- tiene período T y es lógico suponer que en una vecindad_ de esta solución, la solución periódica del sistema ----- (1.2.1) cuando $\mu \neq 0$, tendrá un período $T + \vartheta'(\mu)$ donde_ $\vartheta'(\mu)$ es una pequeña corrección la cual tiende a cero cuando $\mu \rightarrow 0$.

Demostraremos que bajo ciertas condiciones pueden - existir soluciones periódicas siempre que μ sea suficien- temente pequeño.

La condición de periodicidad de (1.2.1) es:

$$(1.2.7) \quad \begin{aligned} x(T + \vartheta, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - x(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0 \\ y(T + \vartheta, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - y(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0 \end{aligned}$$

Para valores determinados de μ y K debemos selec- cionar funciones $\beta_1(\mu), \beta_2(\mu)$ y $\vartheta'(\mu)$ que satisfagan ---- (1.2.7) además la ecuación no - lineal será lineal cuando - $\mu=0$ luego $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \vartheta'(0) = 0$.

Como el ángulo fase es arbitrario, es posible hacer una de las β igual a cero, digamos que $\beta_1=0, \beta_2 = \beta$ y así la condición (1.2.7) la podemos escribir como sigue:

$$(1.2.8) \quad \begin{aligned} x(T+\mathcal{T}, \mu, 0, \beta, K) - x(0, \mu, 0, \beta, K) &= \phi(\mathcal{T}, \mu, \beta, K) \\ y(T+\mathcal{T}, \mu, 0, \beta, K) - y(0, \mu, 0, \beta, K) &= \psi(\mathcal{T}, \mu, \beta, K) \end{aligned}$$

donde ϕ y ψ son funciones analíticas de $(\mathcal{T}, \mu, \beta, K)$.

El sistema (1.2.1) cuando es lineal y cumple las --- condiciones de periodicidad, tiene una infinidad de soluciones periódicas correspondientes a los valores arbitrarios - de K en las ecuaciones (1.2.4). En tal caso (1.2.8) se - rán satisfechos idénticamente para cualquier valor de K . Por lo anterior los términos independientes de μ son cero lo cual implica que existen ϕ_1 y ψ_1 tales que

$$(1.2.9) \quad \begin{aligned} \phi(\mathcal{T}, \mu, \beta, K) &= \mu \phi_1(\mathcal{T}, \mu, \beta, K) \\ \psi(\mathcal{T}, \mu, \beta, K) &= \mu \psi_1(\mathcal{T}, \mu, \beta, K) \end{aligned}$$

donde ϕ_1 y ψ_1 son funciones en las cuales $\mathcal{T}(\mu), \beta(\mu)$ están expresadas en términos de μ .

Por el Teorema de las Funciones Implícitas, se pue_ de afirmar que si el jacobiano

(Ver Apéndice III)

(7)

$$J \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha'} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha'} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \end{vmatrix} \frac{\partial (\phi_1, \psi_1)}{\partial (\alpha', \beta)} \neq 0$$

y además para $\mu = 0$ $\alpha'(0) = \beta(\mu) = 0$, para cada valor de μ suficientemente pequeño podemos encontrar un par único de funciones $\alpha'(\mu)$ y $\beta(\mu)$ que satisfagan las condiciones de periodicidad (1.2.7).

Por lo tanto con las condiciones señaladas, para cada μ suficientemente pequeña, existe una solución periódica de (1.2.1) que tienda a la solución periódica del sistema lineal cuando $\mu \rightarrow 0$.

En el caso cuasi-lineal calcularemos el jacobiano

Tenemos las funciones siguientes:

$$\phi(\alpha', \mu, \beta, \kappa) = \mu \phi_1(\alpha', \mu, \beta, \kappa)$$

$$\psi(\alpha', \mu, \beta, \kappa) = \mu \psi_1(\alpha', \mu, \beta, \kappa)$$

donde ϕ_1 y ψ_1 son funciones analíticas en las cuales $\alpha'(\mu)$ y $\beta(\mu)$ están expresadas en términos de μ .

Representemos a $\alpha'(\mu)$ y $\beta(\mu)$ como series de potencias de μ .

$$(1.2.10) \quad \begin{aligned} \alpha'(\mu) &= d\mu + e\mu^2 + \dots \\ \beta(\mu) &= d_1\mu + e_1\mu^2 + \dots \end{aligned}$$

Expendiendo las funciones ϕ_1 y ψ_1 obtenemos -

$$(1.2.11) \quad \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{o1} + a\mu + b\gamma + c\beta + \dots = 0 \\ \psi_1 &= \psi_{o1} + a_1\mu + b_1\gamma + c_1\beta + \dots = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en estas expansiones los valores de ---

$\gamma(\mu)$ y $\beta(\mu)$ dados por (1.2.10)

_____ podemos considerar el problema

$$(1.2.12) \quad \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{o1} + \mu(a + b d + c d_1) = 0 \\ \psi_1 &= \psi_{o1} + \mu(a_1 + b_1 d + c_1 d_1) = 0 \end{aligned}$$

ya que el Teorema de las funciones implícitas solo tiene -
que ver con la continuidad de las primeras parciales de -
 ϕ_1 y ψ_1 ; podemos despreciar los términos de segun_
do orden ya que éstos están relacionados con los segundos
parciales.

Las ecuaciones (1.2.12) deben ser satisfechas por va_
lores muy pequeños de μ , por lo tanto las siguientes dos -
condiciones deben ser satisfechas:

$$(1.2.13) \quad \phi_{o1} = \phi_{o1}(K) = 0; \quad \psi_{o1} = \psi_{o1}(K) = 0$$

$$(1.2.14) \quad a + b d + c d_1 = 0, \quad a_1 + b_1 d + c_1 d_1 = 0$$

La condición (1.2.13) establece que los términos inde_
pendientes de μ deben ser cero, y (1.2.14) que el sistema

(9)

de dos ecuaciones deben darnos los valores de d y d_1 , los cuales determinan las cantidades de $\gamma(\mu)$ y $\beta(\mu)$ de primer orden.

Esto es posible siempre que

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Lo anterior es equivalente a calcular el jacobiano

$$(1.2.15) \quad J \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces siempre que el jacobiano (1.2.15) sea -- diferente de cero, existen soluciones del sistema --- cuasi-lineal.

1.3. Expansiones de Poincaré, Soluciones Generadoras.

En lugar de la ecuación(1.2.1) consideraremos -- ahora una ecuación diferencial no-lineal de la forma

$$(1.3.1.) \quad \ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$$

Sea $x = x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, \kappa)$ su solución periódica en la vecindad de $\mu = 0$. Expandiendo esta solución en una serie de potencias de μ, β_1, β_2 , sabemos por el teorema de Poincaré que estas expansiones convergen en un intervalo arbitrario pero finito del tiempo siempre que estas cantidades sean suficientemente pequeñas en valor absoluto. Obtenemos

$$(1.3.2.) \quad x = \phi_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + F\mu^2 + \dots$$

donde ϕ_0, A, B, \dots son funciones de t . -Nuestro propósito será identificar la expansión (1.3.2.) con una solución periódica de (1.3.1.) siempre que $|\mu|, |\beta_1|$ y $|\beta_2|$ sean pequeños.

Derivando (1.3.2.) con respecto a t , obtenemos

$$(1.3.3.) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\phi}_0(t) + \dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dot{D}\beta_1\mu + \dot{E}\beta_2\mu + \dot{F}\mu^2 + \dots \\ \ddot{x} &= \ddot{\phi}_0(t) + \ddot{A}\beta_1 + \ddot{B}\beta_2 + \ddot{C}\mu + \ddot{D}\beta_1\mu + \ddot{E}\beta_2\mu + \ddot{F}\mu^2 + \dots \end{aligned}$$

Expandiendo $f(x, \dot{x})$ en una serie de Taylor alrededor de los valores x_0, \dot{x}_0 tenemos:

$$(1.3.4.) \quad \begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= f(x_0, \dot{x}_0) + (x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + (\dot{x} - \dot{x}_0) \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)_0 + \\ &+ \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 + \frac{1}{2} (\dot{x} - \dot{x}_0)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \right)_0 + \\ &+ (x - x_0)(\dot{x} - \dot{x}_0) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{x}} \right)_0 + \dots \end{aligned} \quad \text{### 12.}$$

Sustituyendo en (1.3.4.) a $x-x_0=x-\phi_0(t)$ y $\dot{x}-\dot{x}_0=\dot{x}-\dot{\phi}_0(t)$ dadas por (1.3.2.) y (1.3.3.) y reemplazando a x, \ddot{x} y $f(x, \dot{x})$ por sus valores (1.3.2.), (1.3.3.) y (1.3.4.) en la ecuación diferencial (1.3.1.), obtenemos una serie arreglada en términos de $\mu, \beta_1, \beta_2, \beta_1 \mu, \beta_2 \mu, \mu^2, \dots$ la cual por el teorema de Poincaré converge. -Por una igualdad de los coeficientes de μ, β_1, \dots obtenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales. -Si la expansión está limitada por términos de segundo orden, obtenemos 9 - - - ecuaciones diferenciales de las cuales 3 son idénticamente satisfechas y las 6 restantes son como sigue:

$$(1.3.5.). \ddot{A}+A=0; \ddot{B}+B=0; \ddot{C}+C=f(x_0, \dot{x}_0)$$

$$\ddot{D}+D=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 A+\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{A}; \ddot{E}+E=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 B+\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{B}$$

$$\ddot{F}+F=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 C+\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{C}$$

Aquí los símbolos $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ y $\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0$ designan la derivada parcial de f con respecto a las variables x y \dot{x} en las cuales las soluciones generadoras $x_0 = \phi_0(t)$; $\dot{x}_0 = \dot{\phi}_0(t)$ serán substituidas después de la derivación.

Por (1.2.6.) podemos escribir a (1.3.2.) y su derivada con respecto a t en la forma siguiente:

$$(1.3.6.) \quad x - x_0 = \beta_1 = A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1 \mu + E\beta_2 \mu + F\mu^2 + \dots$$

$$\dot{x} - \dot{x}_0 = \beta_2 = \dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dot{D}\beta_1 \mu + \dot{E}\beta_2 \mu + \dot{F}\mu^2 + \dots$$

obtenemos las siguientes condiciones iniciales

$$(1.3.7.) \quad A(0) = 1 \quad \dot{B}(0) = 1$$

$$B(0) = C(0) = D(0) = E(0) = F(0) = \dot{A}(0) = \dot{C}(0) = \dot{D}(0) = \dot{E}(0) = \dot{F}(0) = 0$$

Con estas condiciones iniciales, las 2 primeras ecuaciones de (1.3.5) tienen las soluciones:

$$A = \cos t; \quad B = \sin t$$

con período 2π .

Las 4 ecuaciones restantes de (1.3.5.) son de la forma $\ddot{v} + v = V(t)$, teniendo las condiciones iniciales $v(0) = \dot{v}(0) = 0$. Por la fórmula de variación de parámetro, la solución de estas es:

$$(1.3.8.) \quad v = \int_0^t V(u) \sin(t-u) du$$

Reemplazando $V(u)$ en la ecuación (1.3.8.) por los términos del lado derecho de las 4 últimas ecuaciones de

(1.3.5.), obtenemos las siguientes expresiones:

$$(1.3.9.) A = \cos t; \dot{A} = -\sin t$$

$$B = \sin t; \dot{B} = \cos t$$

$$C = \int_0^t f[\phi_0(u), \dot{\phi}_0(u)] \sin(t-u) du$$

$$\dot{C} = \int_0^t f[\phi_0(u), \dot{\phi}_0(u)] \cos(t-u) du$$

$$D = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x_0} \cos u - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \sin u \right] \sin(t-u) du$$

$$\dot{D} = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x_0} \cos u - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \sin u \right] \cos(t-u) du$$

$$E = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x_0} \sin u + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \cos u \right] \sin(t-u) du$$

$$\dot{E} = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x_0} \sin u + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \cos u \right] \cos(t-u) du$$

$$F = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x_0} C + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \dot{C} \right] \sin(t-u) du$$

$$\dot{F} = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x_0} C + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \dot{C} \right] \cos(t-u) du$$

Donde $x_0 = K \cos t$, $\dot{x}_0 = -K \sin t$ son las soluciones generadoras en las cuales la fase está tomada como --- cero.

Como solo soluciones periódicas son de interés aquí, es importante saber los valores de A, B, \dots, F después de un período.

Reemplazando t por 2π en las expresiones --- (1.3.9.) obtenemos lo siguiente:

$$(1.3.10.) \quad A(2\pi) = 1; \quad \dot{A}(2\pi) = 0$$

$$B(2\pi) = 0; \quad \dot{B}(2\pi) = 1$$

$$C(2\pi) = - \int_0^{2\pi} f(x_0, \dot{x}_0) \sin u \, du$$

$$\dot{C}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \dot{f}(x_0, \dot{x}_0) \cos u \, du$$

$$D(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_0} \sin 2u + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \sin^2 u \right] du$$

$$\dot{D}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial x_0} \cos^2 u - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \sin 2u \right] du$$

$$E(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\partial f}{\partial x_0} \sin^2 u - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \sin 2u \right] du$$

$$\dot{E}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_0} \sin 2u + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \cos^2 u \right] du$$

$$F(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\partial f}{\partial x_0} C(u) \sin u - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \dot{C}(u) \sin u \right] du$$

$$\dot{F}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial x_0} C(u) \cos u + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \dot{C}(u) \cos u \right] du$$

Las expresiones D y E pueden ser aún más simplifi --
cadas, expresando los valores de $\frac{1}{K} \frac{d}{du} (f \cos u)$ y $-\frac{1}{K} \frac{d}{du} (f \sin u)$ de la siguiente manera:

$$\frac{d}{du} (f \cos u) = \frac{df}{du} \cos u - f \sin u$$

$$\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial u}$$

Como las soluciones generadoras x_0 y \dot{x}_0 son:

$$x_0 = K \cos u; \quad \dot{x}_0 = -K \sin u$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = -K \sin u; \quad \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial u} = -K \cos u$$

luego

$$\frac{df}{du} = -K \frac{\partial f}{\partial x_0} \sin u - K \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} \cos u$$

por lo tanto

$$\frac{1}{K} \frac{d}{du} (f \cos u) = -\frac{\partial f}{\partial X_0} \sin u \cos u - \frac{\partial f}{\partial \dot{X}_0} \cos^2 u - \frac{f}{K} \sin u$$

o

$$(1.3.11.) \frac{1}{K} \frac{d}{du} (f \cos u) = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial X_0} \sin 2u - \frac{\partial f}{\partial \dot{X}_0} \cos^2 u - \frac{f}{K} \sin u$$

y similarmente

$$(1.3.12.) \frac{1}{K} \frac{d}{du} (f \sin u) = -\frac{\partial f}{\partial X_0} \sin^2 u - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \dot{X}_0} \sin 2u + \frac{f}{K} \cos u$$

Las expresiones D, \dot{D} , E y \dot{E} de (1.3.10.) tomando en cuenta la expresión para C son simplificadas por medio de las ecuaciones (1.3.11.) y (1.3.12.) y adoptan la siguiente forma simétrica:

$$(1.3.13.) \quad D(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \dot{X}_0} du - \frac{C(2\pi)}{K}; \quad \dot{D}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial X_0} du - \frac{\dot{C}(2\pi)}{K}$$
$$E(2\pi) = -\frac{1}{K} \dot{C}(2\pi); \quad \dot{E}(2\pi) = \frac{1}{K} C(2\pi)$$

Si $C(2\pi) = 0$ y $\dot{C}(2\pi) \neq 0$, las ecuaciones (1.3.13.) serán:

$$(1.3.14) \quad D(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \dot{X}_0} du; \quad \dot{D}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial X_0} du - \frac{\dot{C}(2\pi)}{K}$$
$$E(2\pi) = -\frac{1}{K} \dot{C}(2\pi); \quad \dot{E}(2\pi) = 0$$

Si $C(2\pi) = \dot{C}(2\pi) = 0$ tenemos:

$$(1.3.15.) \quad D(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0} du; \quad \dot{D}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x_0} du$$

$$E(2\pi) = 0; \quad \dot{E}(2\pi) = 0$$

De (1.3.15.) las expresiones $D(2\pi)$ y $\dot{D}(2\pi)$, representan los términos constantes de la expansión de Fourier de $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_0}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ multiplicadas por 2π . Por otro lado, $-C(2\pi)$ y $\dot{C}(2\pi)$, como se dieron en (1.3.10.) son los coeficientes de $\sin t$, $\cos t$ en la expansión de $f(x_0, \dot{x}_0)$ multiplicados por π . Entonces, si $f(x_0, \dot{x}_0)$ está dado, estos coeficientes pueden ser calculados directamente de la ecuación (1.3.10.).

Estamos ahora en posición de escribir las ecuaciones (1.3.10.) en una nueva forma, expresando la existencia de soluciones periódicas. Es claro que por la elección de las soluciones generadoras en la forma $x_0(t) = K \cos t$ y $\dot{x}_0(t) = -K \sin t$, la amplitud K está ya contenida en las expresiones para β_1 y β_2 así la ecuación (1.2.9.) puede ser escrita como:

$$(1.3.16.) \quad \phi(\sigma, \mu, \beta_1, \beta_2) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(\sigma, \mu, \beta_1, \beta_2) = 0$$

Estas ecuaciones expresan las condiciones suficientes para la existencia de soluciones periódicas. Hay así 2 ecuaciones con 3 incógnitas ϑ , β , y β_2

Una de las β , como ya se mencionó antes, es arbitraria y la podemos tomar como cero.

Si además, las ecuaciones (1.3.16.) pueden resolverse dándonos ϑ y β_1 , como funciones de μ de tal manera que cuando $\mu \rightarrow 0$, $\vartheta(\mu) \rightarrow 0$ y $\beta_1(\mu) \rightarrow 0$, el problema está resuelto. Si esto es imposible, hay aún otra alternativa.

Podemos poner $\beta_1 = 0$ y tratar de resolver para ϑ y β_2 como funciones desconocidas de μ

Los términos de la izquierda de las ecuaciones (1.3.16.), representan la diferencia

$$x(2\pi + \vartheta) - x(0) \quad \text{y} \quad \dot{x}(2\pi + \vartheta) - \dot{x}(0)$$

Expandiendo $x(2\pi + \vartheta)$ y $\dot{x}(2\pi + \vartheta)$ en una serie de Taylor en la cual ϑ se considera pequeña, tenemos:

$$(1.3.17.) \quad \begin{aligned} x(2\pi + \vartheta) &= x(2\pi) + \vartheta \dot{x}(2\pi) + \dots \\ \dot{x}(2\pi + \vartheta) &= \dot{x}(2\pi) + \vartheta \ddot{x}(2\pi) + \dots \end{aligned}$$

Aquí sustituimos las expansiones en serie (1.3.2.) y (1.3.3.). - Los coeficientes $A(2\pi)$, $B(2\pi)$... , ya están calculados en las ecuaciones (1.3.10.). Consideraremos a ϑ y μ cantidades de primer orden quitando las expresiones de segundo orden, tenemos:

$$(1.3.18.) \quad x(2\pi+\vartheta) = x_0(2\pi) + A(2\pi)\beta_1 + B(2\pi)\beta_2 + C(2\pi)\mu + D(2\pi)\beta_1\mu + \\ + E(2\pi)\beta_2\mu + F(2\pi)\mu^2 + \vartheta\dot{x}_0(2\pi) + \vartheta\dot{A}(2\pi)\beta_1 + \\ + \vartheta\dot{B}(2\pi)\beta_2 + \vartheta\dot{C}(2\pi)\mu + \frac{\vartheta^2}{2}\ddot{x}_0(2\pi)$$

$$(1.3.19.) \quad \dot{x}(2\pi+\vartheta) = \dot{x}_0(2\pi) + \dot{A}(2\pi)\beta_1 + \dot{B}(2\pi)\beta_2 + \dot{C}(2\pi)\mu + \dot{D}(2\pi)\beta_1\mu + \dot{E}(2\pi)\beta_2\mu + \\ + \dot{F}(2\pi)\mu^2 + \vartheta\ddot{x}_0(2\pi) + \vartheta\ddot{A}(2\pi)\beta_1 + \vartheta\ddot{B}(2\pi)\beta_2 + \vartheta\ddot{C}(2\pi)\mu + \\ + \frac{\vartheta^2}{2}\dddot{x}_0(2\pi)$$

Pero $x_0(2\pi) = x_0(0)$ y $\dot{x}_0(2\pi) = \dot{x}_0(0)$ además -
 $A(2\pi) = 1, \dot{A}(2\pi) = 0, B(2\pi) = 0, \dot{B}(2\pi) = 1$. -

Con estos valores de los coeficientes, las ecuaciones (1.3.18.) y (1.3.19.) quedan:

$$(1.3.20.) \quad x(2\pi+\vartheta) - x(0) = -K\frac{\vartheta^2}{2} + \vartheta\beta_2 + C(2\pi)\mu + \vartheta\dot{C}(2\pi)\mu + \\ + D(2\pi)\beta_1\mu + E(2\pi)\beta_2\mu + F(2\pi)\mu^2 = 0$$

$$(1.3.21.) \quad \dot{x}(2\pi+\vartheta) - \dot{x}(0) = -K\vartheta - \vartheta\beta_1 + \dot{C}(2\pi)\mu + \vartheta\ddot{C}(2\pi)\mu + \\ + \dot{D}(2\pi)\beta_1\mu + \dot{E}(2\pi)\beta_2\mu + \dot{F}(2\pi)\mu^2 = 0$$

Uno de los parámetros β puede hacerse de manera que nos satisfaga.-Así para un valor dado de una de las β , esta ecuación determina la otra β y la corrección δ' del período.- Como μ , β , β_2 y δ' son cantidades pequeñas de primer orden, podemos -- obtener condiciones diferentes de acuerdo con el orden de aproximación.

El caso más simple es aquel en el cual consideramos soluciones de primer orden, quitando términos de segundo orden.-El único término de primer orden en (1.3.20.) es $C(2\pi)\mu$ y en (1.3.21.) hay 2 términos de primer orden $-K\delta'$ y $\dot{C}(2\pi)\mu$.-Igualando estos términos con cero, obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$(1.3.22.) C(c\pi) = -\int_0^{2\pi} f(K\cos u - K\sin u) \sin u \, du \equiv \phi(K) = 0$$

$$(1.3.23.) \delta' = \frac{\dot{C}(2\pi)\mu}{K} = \frac{\mu}{K} \int_0^{2\pi} f(K\cos u - K\sin u) \cos u \, du \equiv \mu\psi(K)$$

La ecuación (1.3.22) determina la amplitud K de las soluciones generadoras en una vecindad de una solución periódica ya conocida de (1.3.1.), y la ecuación (1.3.23.) nos da la corrección δ' del período, -

21.

siempre y cuando $\dot{C}(2\pi) \neq 0$.- si $\dot{C}(2\pi) = 0$,
de las ecuaciones (1.3.15.), $E(2\pi) = \dot{E}(2\pi) = 0$.-En-
tonces las ecuaciones (1.3.20.) se reducen a:

$$(1.3.24.) \quad D(2\pi) \beta_1 + F(2\pi) \mu = 0$$

Ya que ϑ' es un cero de primer orden, podemos proseguir con el de segundo orden y poner $\vartheta' = \sigma \mu^2$.- De (1.3.21.), en la cual podemos poner $\beta_2 = 0$, y donde $\dot{C}(2\pi) = 0$, $\ddot{C}(2\pi) = 0$ y $\dot{E}(2\pi) = 0$, obtenemos:

$$-K \sigma \mu^2 + \dot{D}(2\pi) \beta_1 \mu + \dot{F}(2\pi) \mu^2 = 0$$

Dividiendo entre μ y sustituyendo el valor de β_1 , obtenido en (1.3.24.), la ecuación anterior nos queda:

$$(1.3.25.) \quad \sigma = \frac{\dot{F}(2\pi) D(2\pi) - F(2\pi) \dot{D}(2\pi)}{K \cdot D(2\pi)}$$

La corrección $\vartheta' = \sigma \mu^2$ debe ser introducida al mismo tiempo que el movimiento es isocrono de primer orden.- Asi si $K \neq 0$ y $D(2\pi) \neq 0$, las ecuaciones (1.3.24.) y (1.3.25.) determinan β_1 , y $\vartheta' = \sigma \mu^2$, la amplitud K está determinada por ----

(1.3.22.).- Sustituyendo los valores de A, B, C y β_1 , en (1.3.2.) obtenemos:

$$(1.3.26.) \quad x = K \cos t + \mu \left[\int_0^t f(K \cos u, -K \sin u) \sin(t-u) du - \frac{F(2\pi)}{D(2\pi)} \cos t \right]$$

Donde K ha sido calculada en (1.3.22.).

Hacemos notar que los términos:

$$\frac{2}{\tau + \vartheta'} \int_0^{\tau + \vartheta'} f(x_0, \dot{x}_0) \sin(t-u) du$$

representan el primer término de la expansión de Fourier de la función que aparece del lado derecho de la ecuación (1.3.1.).- Además, el período ha sido cambiado por la presencia de ϑ' , la corrección del período.- La función $x(t)$ dada por la ecuación (1.3.26.) permanece periódica.

Debemos mencionar aquí que la presencia de términos seculares no destruye la periodicidad, tan solo explica una modificación del período.-La aparición de términos seculares puede verse como en el siguiente ejemplo:

$$(1.3.27.) \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k(\mu) \cos k\omega(\mu)t + b_k(\mu) \operatorname{sen} k\omega(\mu)t \right]$$

En donde la amplitud y la frecuencia son funciones de un parametro μ

La expansión de esta función en una serie de potencias de μ nos da:

$$(1.3.28.) \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k(0) \cos k\omega(0)t + b_k(0) \operatorname{sen} k\omega(0)t \right] + \\ + \mu \sum_{k=0}^{\infty} \left[a'_k(0) \cos k\omega(0)t + b'_k(0) \operatorname{sen} k\omega(0)t - \right. \\ \left. - a_k(0)\omega'(0)kt \operatorname{sen} k\omega(0)t + b_k(0)\omega'(0)kt \cos k\omega(0)t \right] + \\ + \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \dots$$

Donde a'_k , b'_k y ω' representan las derivadas de $a_k(\mu)$, $b_k(\mu)$ y $\omega(k)$ con respecto a μ en las cuales el valor de $\mu = 0$ se sustituye -- después de la diferenciación. - Observamos que como la función $x(t)$ es periódica, la presencia de términos seculares no destruye la periodicidad en vista de la sumatoria de 0 a ∞ .

Con referencia a (1.3.26.) se observa que los términos seculares no aparecen en la expansión de $x(t)$ si la corrección δ puede calcularse pri--

mero, lo cual requiere que $D(2\pi) \neq 0$. -Es suficiente entonces usar como el período sobre el cual las funciones A, B, \dots de Poincaré están determinadas, el período corregido $T + \gamma$, cuyas cantidades de las soluciones generadoras escogidas x_0, \dot{x}_0 en la forma $K \cos \left[1 - \frac{\sigma \mu^2}{2\pi} t \right]$ y $-K \sin \left[1 - \frac{\sigma \mu^2}{2\pi} t \right]$, en lugar de $K \cos t$ y $-K \sin t$.

1.4. Ejemplo.

1.4.1. Ciclo Límite y Frecuencia de un Generador Termiónico.

Nos proponemos aplicar la teoría anterior a la ecuación de un Generador Termiónico. - Esta ecuación simplificada se puede escribir como:

$$(1.4.1.) \quad \ddot{v} + v = \mu (\beta - 3\delta v^2) \dot{v}$$

Esta ecuación es de menor dimensión; $\beta > 0, \delta > 0$. - El parametro pequeño μ , ha sido introducido, así que podemos considerar a la oscilación como del tipo cuasi-lineal y por lo tanto se puede aplicar la teoría anterior.

Para $\mu = 0$ las soluciones generadoras son de la forma:

$$(1.4.2.) \quad v_0 = \phi_0(t) = K \cos t; \quad \dot{v}_0 = \dot{\phi}_0(t) = -K \sin t$$

En este caso: $f(v, \dot{v}) = \beta \dot{v} - 3\delta v^2 \dot{v}$ y entonces: -

$$(1.4.3.) \quad f(v_0, \dot{v}_0) = -\beta K \sin t + 3\delta K^3 \cos^2 t \sin t$$

Hagamos uso de las condiciones de Poincaré, ecuación (1.3.22.), en la integración de la ecuación (1.4.3.) y vemos que $\beta K - \frac{3}{4} \delta K^3 = 0$ y entonces tenemos que:

$$(1.4.4.) \quad K^2 = \frac{4\beta}{3\delta}$$

Por lo tanto la amplitud de la solución generadora en la primera aproximación depende del radio $\sqrt{\frac{\beta}{\delta}}$. -En otras palabras, la amplitud de oscilación lograda por el proceso de auto excitación será más grande a medida que el valor de δ se hace más pequeño.

Esto es físicamente obvio, cuando $\delta \rightarrow 0$ la auto excitación podría crecer indefinidamente, ya que el factor que limita eventualmente ésta, es precisa

26.

27.

mente la no linealidad de la característica expresada por el término $-\delta_1 v^3$. -Regresando al término no lineal $f(v, \dot{v})$, encontramos que $\frac{\partial f}{\partial v} = -6\delta v \dot{v}$ y $\frac{\partial f}{\partial \dot{v}} = \beta - 3\delta v^2$, así que:

$$\frac{\partial f}{\partial v_0} = 6\delta k^2 \cos t \sin t = 3\delta k^2 \sin 2t$$

$$y \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{v}_0} = \beta - 3\delta k^2 \cos^2 t$$

De (1.3.14) y tomando en cuenta (1.4.4.), tenemos

$$(1.4.5.) \quad D(2\pi) = \int_0^{2\pi} (\beta - 3\delta k^2 \cos^2 t) dt = 2\pi(\beta - \frac{3\delta k^2}{2}) = 2\pi\beta \quad .-$$

Vemos también que $\dot{D}(2\pi) = 0$. -De la ecuación (1.3.26.) la corrección para el período $\vartheta = \sigma \mu^2$ es

$$(1.4.6.) \quad \vartheta = \frac{\dot{F}(2\pi)}{K} \mu^2$$

Calculando $\dot{F}(2\pi)$ de la última ecuación (1.3.10.) obtenemos:

$$(1.4.7.) \quad \vartheta = \pi \mu^2 \beta^2$$

El coeficiente $C(t)$ dado por la ecuación (1.3.9.) después de un cálculo es:

$$C(t) = -\frac{3\delta k^3}{32} \sin 3t + \frac{15\delta k^3}{32} \sin t =$$

$$= -\frac{\beta}{4} \sqrt{\frac{\beta}{3\delta}} \sin 3t + \frac{5\beta}{4} \sqrt{\frac{\beta}{3\delta}} \sin t$$

Por lo tanto, la solución periódica sin términos -- seculares es:

$$(1.4.8.) \quad v = 2 \sqrt{\frac{\beta}{3\delta}} \cos \left[\left(1 - \frac{\mu^2 \beta^2}{2} \right) t + \psi \right] + \mu \left(-\frac{\beta}{4} \right) \sqrt{\frac{\beta}{3\delta}} \operatorname{sen} 3 \left[\left(1 - \frac{\mu^2 \beta^2}{2} \right) t + \psi \right] + \mu \frac{5\beta}{4} \sqrt{\frac{\beta}{3\delta}} \operatorname{sen} \left[\left(1 - \frac{\mu^2 \beta^2}{2} \right) t + \psi \right] + \mu^2 \left[\quad \right] + \dots$$

Donde ψ es un ángulo fase arbitrario. -Es claro - que la solución periódica se encuentra en la vecindad de la amplitud $2 \sqrt{\frac{\beta}{3\delta}}$. -La corrección del período es de segundo orden y entonces puede despreciarse para valores pequeños de μ . -Los términos -seculares no aparecen aquí en vista de que el factor de corrección δ' para el período ha sido calculado primero.

A continuación veremos un ejemplo de un sistema de ecuaciones diferenciales de tipo cuasi-lineal el cual cumple con la hipótesis de que f es una función analítica y sin embargo, no existen soluciones periódicas en ninguna vecindad de la solución periódica del sistema cuando es lineal.

Este sistema es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + \varepsilon x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \varepsilon x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

Donde ε es un parámetro y las funciones -----
 $f_1(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$ y $f_2(x_1, x_2) = x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$
son funciones analíticas en sus variables (x_1, x_2) .

Cuando $\varepsilon = 0$ el sistema será lineal y sus solucio-
nes son periódicas con período 2π , digamos que -
 $x_1 = \cos(t + \theta')$ y $x_2 = \text{sen}(t + \theta')$ donde θ' es una -
constante. Para $\varepsilon \neq 0$ las soluciones del sistema ante-
rior no son periódicas.

Para mostrar esto, tomemos $\varepsilon > 0$ y considere --
mos las coordenadas polares r, θ con $x_1 = r \cos \theta$,
 $x_2 = r \text{ sen } \theta$ luego tenemos el sistema

$$\dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1$$

la solución con condiciones iniciales $r(0) = a > 0$ y
 $\theta(0) = b$ está dada por $r = e^{\varepsilon t} (-1 + \bar{a}^2 + e^{2\varepsilon t})^{-\frac{1}{2}}$,
 $\theta = b + t$ y $r \rightarrow 1$, $\theta \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$

Por lo anterior vemos que las soluciones son espi-
rales que se enrollan alrededor de $x_1^2 + x_2^2 = 1$
cuando $t \rightarrow +\infty$.

CAPITULO II

METODO DE VAN DER POL.

2.1. Introducción. En este capítulo trataremos otro método para encontrar soluciones periódicas de un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales del tipo cuasi-lineal.-El Método de Van Der Pol consiste en cambiar el sistema de coordenadas originales en un plano fase por un sistema rotatorio en el cual las soluciones periódicas estarán representadas por puntos.

En la sección 2 desarrollaremos el Método de Van Der Pol.- En la sección 3 veremos la Topología del Plano de las Variables de Van Der Pol.- En la sección 4 analizaremos un ejemplo de la aplicación de este método.

2.2. Método de Van Der Pol.

2.2.1. Rotación del Sistema de Ejes, Ecuaciones de Primera Aproximación.

Consideremos nuevamente la ecuación cuasi-lineal

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, y)$$

Su sistema equivalente en \mathbb{R}^2 es

$$(2.2.1) \quad \dot{x} = y; \quad \dot{y} = -x + \mu f(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu f(x, y) \end{pmatrix}$$

La notación es la misma que en el capítulo anterior.-----

Para $\mu = 0$ tenemos la ecuación lineal $\ddot{x} + x = 0$, tiene una solución armónica.

$$(2.2.2) \quad x = a \cos t + b \sin t; \quad \text{con } \dot{x} = -a \sin t + b \cos t \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes de integración.}$$

Las trayectorias fase en este caso son círculos con radio $K = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si en lugar de considerar un sistema de coordenadas (x, \dot{x}) en un plano fase fijo, introducimos un sistema rotatorio con velocidad angular $\omega = 1$ alrededor del origen común de ambos sistemas, en este plano fase rotatorio la ecuación (2.2.2) representará un punto fijo A a una distancia $OA = K = \sqrt{a^2 + b^2}$ del origen O. La inclinación de OA con respecto a una línea en el plano rotatorio está dada por el ángulo $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$. Aquí vemos que esta transformación no es más que el método usual de representar cantidades senoidales por rectores usados en la teoría de corrientes alternas.

Al plano rotatorio que consideramos anteriormente y que tiene una velocidad angular $\omega = 1$ tiene coordenadas (a, b) las cuales varían con respecto al tiempo t , a este

plano lo llamaremos el plano (a, b) de Van Der Pol.

Consideremos ahora a la ecuación (2.2.2) como --
una transformación que depende de t , definiendo a --
 x, y en términos de las nuevas variables a, b .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Tenemos que estudiar el comportamiento de un pun-
to dado en (x, \dot{x}) , en el sistema rotatorio que conside-
ramos ahora esto es equivalente a estudiar la transfor-
mación $A(t) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, luego tenemos que:

$$x = a \cos t + b \text{sen } t \quad y = -a \text{sen } t + b \cos t$$

$$\dot{x} = \frac{da}{dt} \cos t + \frac{db}{dt} \text{sen } t + [-a \text{sen } t + b \cos t] =$$

$$= \frac{da}{dt} \cos t + \frac{db}{dt} \text{sen } t + y$$

$$\dot{y} = -\frac{da}{dt} \text{sen } t + \frac{db}{dt} \cos t + [-a \cos t - b \text{sen } t] =$$

$$= -\frac{da}{dt} \text{sen } t + \frac{db}{dt} \cos t - x$$

Considerando el sistema equivalente $\dot{x} = y$; --

$$\dot{y} + x = \mu f(x, y)$$

y tomando en cuenta la transformación anterior, vemos -
que el sistema (2.2.1) es equivalente en el plano (a, b) de
Van Der Pol a las ecuaciones

$$(2.2.6) \quad \frac{da}{dt} \cos t + \frac{db}{dt} \text{sen } t = 0$$

$$-\frac{da}{dt} \text{sen } t + \frac{db}{dt} \cos t = \mu f[a \cos t + b \text{sen } t, -a \text{sen } t + b \cos t]$$

El sistema (2.2.6) contiene a t explícitamente y el sistema original no. De (2.2.6) obtenemos

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \sin t \\ \frac{db}{dt} &= \mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \cos t \end{aligned}$$

Como μ tiene que ser pequeña, $\frac{da}{dt}$ y $\frac{db}{dt}$ son también pequeñas ya que $f(x, y)$ está acotada. En otras palabras, a y b son cantidades de variación suave en comparación con la rápida variación de términos trigonométricos de frecuencia $\omega = 1$. Por lo tanto para la primera aproximación es suficiente considerar a y b como constantes en el lado derecho de la ecuación (2.2.4). - Si $a \times y$ y las reemplazamos por sus expresiones (2.2.2), el lado derecho de (2.2.4) es periódico y puede expandirse en una serie de FOURIER, [Ver apéndice IV]. Por lo tanto las expresiones (2.2.4) nos quedan

$$(2.2.5) \quad \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \left[\frac{\phi_0(a, b)}{2} + \phi_1(a, b) \cos t + \bar{\phi}_1(a, b) \sin t + \right. \\ &\quad \left. + \phi_2(a, b) \cos 2t + \dots \right] \\ \frac{db}{dt} &= \mu \left[\frac{\psi_0(a, b)}{2} + \psi_1(a, b) \cos t + \bar{\psi}_1(a, b) \sin t + \right. \\ &\quad \left. + \psi_2(a, b) \cos 2t + \dots \right] \end{aligned}$$

Para el análisis de los puntos representativos del sistema (2.2.5) en el plano (a, b) de Van Der Pol, introduciremos un sistema de ecuaciones de primera aproximación con respecto a (2.2.5) en el cual es más fácil estudiar estos mismos puntos que en el sistema original (2.2.5)

Van Der Pol considera las siguientes ecuaciones "abreviadas" como ecuaciones de primera aproximación

$$(2.2.6) \quad \frac{da}{dt} = \mu \frac{\phi_0(a, b)}{2} ; \quad \frac{db}{dt} = \mu \frac{\psi_0(a, b)}{2}$$

Ellas fueron obtenidas de (2.2.5) quitando los términos que contienen funciones trigonométricas. Por otro lado tenemos que

$$(2.2.7) \quad \begin{aligned} \frac{\phi_0(a, b)}{2} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \operatorname{sen} \xi, -a \operatorname{sen} \xi + b \cos \xi) \operatorname{sen} \xi \, d\xi \\ \frac{\psi_0(a, b)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \operatorname{sen} \xi, -a \operatorname{sen} \xi + b \cos \xi) \cos \xi \, d\xi \end{aligned}$$

Expresemos al sistema (2.2.6) en coordenadas polares (K, θ) mediante el siguiente desarrollo. Multiplicando la primera ecuación de (2.2.6) por a , la segunda por b , sumándolas y sustituyendo $K^2 = a^2 + b^2$ obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{dK^2}{dt} = K \frac{dK}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \operatorname{sen} \xi, -a \operatorname{sen} \xi + b \cos \xi) (-a \operatorname{sen} \xi + b \cos \xi) \, d\xi.$$

$$\text{Poniendo } a \cos \xi + b \operatorname{sen} \xi = K \cos(\xi - \theta)$$

$$-a \operatorname{sen} \xi + b \cos \xi = -K \operatorname{sen}(\xi - \theta)$$

donde $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ e introduciendo la variable $u = \xi - \theta$ tenemos:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \phi(K), \text{ y por otra transformación similar } \frac{d\theta}{dt} = \mu \psi(K).$$

Por lo tanto el sistema (2.2.6) en coordenadas polares nos queda

$$(2.2.8) \quad \frac{dK}{dt} = \mu \phi(K), \quad \frac{d\theta}{dt} = \mu \psi(K) \quad \text{donde}$$

$$(2.2.9) \quad \begin{aligned} \phi(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du \\ \psi(K) &= \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du \end{aligned}$$

Vemos que la integral definida en estas ecuaciones coincide con las funciones $C(2\pi)$ y $\dot{C}(2\pi)$ de Poincaré ecuaciones (1.3.10), las cuales son los coeficientes de $\sin t$, $\cos t$ en la expansión de $f(x_0, \dot{x}_0)$ multiplicados por π .

2.3.- Topología del Plano de Variables de Van Der Pol.

En el plano fase (x, y) el ciclo límite es alcanzado cuando la trayectoria fase es un círculo, en el plano (a, b) de Van Der Pol, la condición necesaria para que exista un ciclo límite estable es satisfecha cuando el final del vector K es un punto de equilibrio estable, o sea, en el punto donde

$$\frac{dK}{dt} = \mu \phi(K) = 0$$

Entonces, existen ciclos límite para radios K correspondientes a las raíces de

$$\phi(K) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = 0$$

Vemos nuevamente que esta ecuación coincide con la ecuación (1.3.22) la cual determina la amplitud K de las soluciones generadas en una vecindad de una solución periódica ya conocida de (1.3.1), en la Teoría de Poincaré.

Una raíz K_i de $\phi(K)=0$ corresponderá a un ciclo límite estable si $\phi'_K(K_i) < 0$. El ciclo límite será inestable si $\phi'_K(K_i) > 0$.
[Ver 1 cap. 6].

Consideremos ahora la segunda ecuación (2.2.8). Aquí dos casos son de interés.

Caso 1.

$$(2.3.2.) \quad \psi(k) = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} f(k \cos u, -k \sin u) \cos u \, du = 0$$

En este caso $\Theta = \Theta_0 =$ constante. -El retrato topológico de las trayectorias en el plano de las variables (a, b) de Van Der Pol, en este caso, es mostrado en la figura [2.3.1] .- El equilibrio de un ciclo límite en el punto k_i para $\Theta = \Theta_0$ es estable si el punto representativo comienza a desplazarse a lo largo del radio regresando a k_i ; - si este punto no regresa a k_i , como por ejemplo el punto $k_i^?$, tal ciclo límite es inestable. El lugar geométrico de los ciclos límite en este caso son círculos concéntricos correspondientes a todos los valores de posibles de Θ_0 .

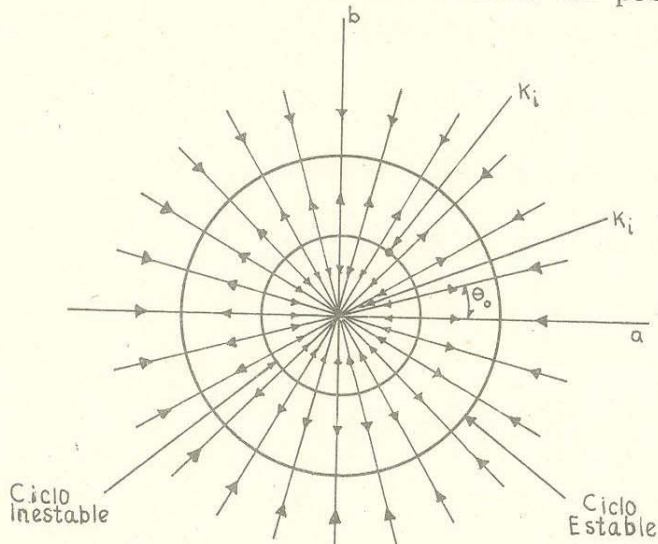


Fig. [2.3.1.]

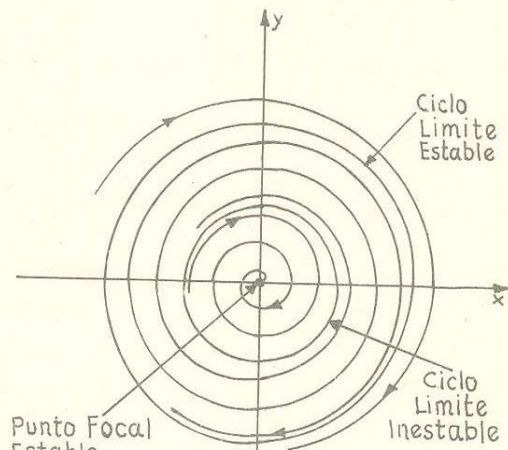


Fig. [2.3.2.]

36.

Si retornamos a las variables originales (x, y) del plano fase, debemos aplicar la ecuación de transformación (2.2.2.), donde las variables a y b son $K_i \cos \theta_0$ y $K_i \sin \theta_0$ respectivamente.-Esto nos da:

$$(2.3.3.) \quad \begin{aligned} x &= a \cos t + b \sin t = K_i \cos \theta_0 \cos t + K_i \sin \theta_0 \sin t = \\ &= K_i \cos (t - \theta) \\ y &= -a \sin t + b \cos t = -K_i \cos \theta_0 \sin t + K_i \sin \theta_0 \cos t = \\ &= -K_i \sin (t - \theta) \end{aligned}$$

donde θ_0 es arbitraria.-Esta arbitrariedad de θ_0 para el plano fase (x, y) , es debida al hecho de que un punto de equilibrio en el plano de variables (a, b) , corresponde a un ciclo en el plano fase (x, y) .-La forma general de las trayectorias en el plano (x, y) es mostrada en la figura [2.3.2.]

Caso 2.

$$\psi(K) = \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du \neq 0$$
 sean $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots$ las raíces de $\psi(K) = 0$ y supongamos que son diferentes a las raíces K_1, K_2, \dots de $\phi(K) = 0$.

El movimiento en un ciclo límite es representado en el plano de las variables (a, b) por puntos de equilibrio dados por las ecuaciones

$$(2.3.4.) \quad a = K_i \cos \left[\mu \psi(K_i) t + \theta_0 \right]$$
$$b = K_i \sin \left[\mu \psi(K_i) t + \theta_0 \right]$$

obtenidas de las ecuaciones (2.2.8.)

La estabilidad (o inestabilidad) de un ciclo límite es determinada nuevamente por el signo de $\phi'(K_i)$ y la dirección de rotación por el signo de $\psi(K_i)$. -El retrato topológico de las trayectorias en el plano (a, b) es mostrado en la figura [2.3.3.] -Las trayectorias "regresan" a los puntos correspondientes de las raíces $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots$ de $\psi(K_i)$, aproximándose al ciclo límite estable el cual está determinado nuevamente por los puntos de equilibrio en el plano de Van Der Pol. El retrato topológico de las trayectorias en el plano fijo (x, y) tiene la misma apariencia como el que se mostró en la figura [2.3.2.] -La única diferencia entre los dos casos, es que, en el segundo caso, la ecuación (2.3.3.) es:

$$(2.3.5.) \quad x = a \cos t + b \sin t = K_i \cos \left([1 - \mu \psi(K_i)] t - \theta_0 \right)$$
$$y = -a \sin t + b \cos t = -K_i \sin \left([1 - \mu \psi(K_i)] t - \theta_0 \right)$$

Es claro que en este caso existe una corrección de la frecuencia expresada por $\mu \psi(K_i)$. - En otras palabras, la velocidad a lo largo de la trayectoria espiral no es uniforme

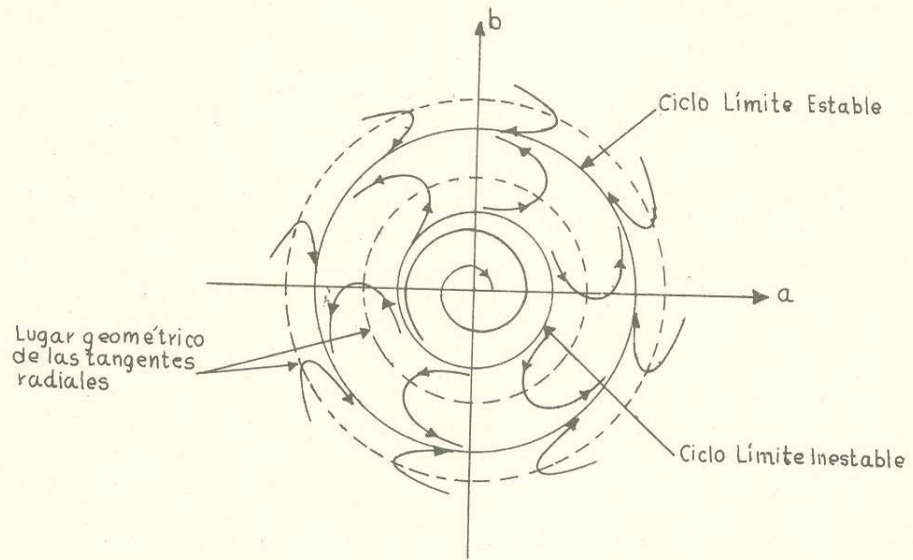


Fig. [2.3.3.]

Por un análisis más amplio se puede demostrar - que cuando $\psi(K_i) = 0$ la corrección de la fre--- frecuencia (y por lo tanto del período) es del orden --- μ^2 y consecuentemente se puede despreciar en la teoría de la primera aproximación.- Sin embargo, -

si $\psi(k_i) \neq 0$, esta corrección de la frecuencia aparece con el primer orden de μ .

Resumiendo los resultados de esta sección, podemos decir que el uso de las variables (a, b) de Van Der Pol nos permite, si el sistema es isocrono, representar un ciclo límite por un punto en el plano (a, b) , esto es, por un vector constante. Tal representación de ciclos límite es similar al modo de representar corrientes alternas por vectores. Por las condiciones anteriores el punto representativo se mueve hacia el ciclo límite punto o se aleja de él a lo largo de la extensión del radio vector, ya que el ángulo fase Θ_0 permanece constante. El ángulo fase en este caso no tiene un significado físico particular si se considera un simple fenómeno oscilatorio. No obstante, si $\psi(k) \neq 0$, es decir, si el movimiento no es isócrono, en el plano de las variables (a, b) de Van Der Pol el vector k_i sufre oscilaciones dependiendo de las raíces de $\psi(k) = 0$.

2.4. Ejemplo.

2.4.1. Auto-Excitaciones "Suaves" y "Fuertes" de un -- Generador Termiónico.

Es sabido que existen 2 clases de auto-excitaciones de circuitos termiónicos designados como "suaves" y "fuertes". Se observa que por el incremento del coeficiente de inducción mútua λ entre el ánodo y los circuitos de parrilla, empieza suavemente la auto-excitación tan pronto como un valor crítico $\lambda = \lambda_0$ de este parametro es obtenido; para $\lambda > \lambda_0$ la amplitud de las oscilaciones aumenta constantemente con el crecimiento de λ , como se muestra en la figura [2.4.1.], ésta representa el caso de auto-excitación "suave"; con λ decreciente el fenómeno toma lugar en dirección opuesta, como lo muestran las flechas

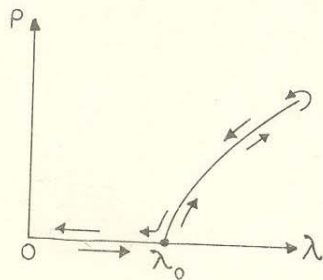


Fig. [2.4.1.]

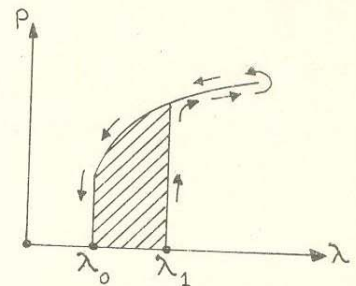


Fig. [2.4.2.]

41.

En algunos casos ocurre un tipo diferente de auto-excitación, como se muestra en la figura [2.4.2].- Con el crecimiento de λ se observa que la auto-excitación empieza abruptamente con una amplitud finita para $\lambda = \lambda_1$ y crece suavemente para $\lambda \geq \lambda_1$.- Con λ decreciente observamos que el fenómeno es diferente; digamos, que para $\lambda = \lambda_1$, la auto excitación no desaparece; esta desaparece cuando $\lambda = \lambda_0 < \lambda_1$.-Este tipo de auto-excitación es llamado "fuerte".-Este fenómeno es debido a la no-linealidad del sistema.

Nos proponemos aplicar el Método de Van Der Pol al problema tratado en el capítulo anterior sección [1.4.].-Consideremos la ecuación $\ddot{v} + v(\beta + 2\gamma v - 3\delta v^2) \dot{v}$.-Aquí hacemos $\beta = \mu \beta_1$; $\gamma = \mu \gamma_1$, $\delta = \mu \delta_1$, donde μ es un parametro pequeño.

$$(2.4.1.) \ddot{v} + v = \mu (\beta_1 + 2\gamma_1 v - 3\delta_1 v^2) \dot{v}$$

donde $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$ son positivos.

En este caso $f(v, \dot{v}) = (\beta + 2\gamma v - 3\delta v^2) \dot{v}$.

Usando la primera ecuación de (2.2.9.), tenemos:

$$(2.4.2.) \phi(k) = + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\beta + 2\delta k \cos u - 3\delta k^2 \cos^2 u) k \sin u \sin u du$$

en donde se han sustituido las soluciones generadoras

$$v = k \cos u \quad , \quad \dot{v} = -k \sin u \quad . \text{ Luego -}$$

tenemos:

$$(2.4.3.) \phi(k) = \frac{1}{2\pi} \left[\beta k \int_0^{2\pi} \sin^2 u du + 2\delta k^2 \int_0^{2\pi} \cos u \sin^2 u du - \right. \\ \left. - 3\delta k^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin^2 u du \right]$$

$$\text{Como } \int_0^{2\pi} \sin^2 u du = \pi \quad ; \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 u \cos u du \quad , \text{ la}$$

integramos por sustitución, haciendo $v = \sin u, dv = \cos u du$

$$\text{luego tenemos que: } \int_0^{2\pi} v^2 dv = \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \left[\frac{\sin^3 u}{3} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{y}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin^2 u du = \int_0^{2\pi} \sin^2 u du - \int_0^{2\pi} \sin^4 u du = \pi - \frac{3}{4} \pi = \frac{\pi}{4}$$

esto lo obtuvimos haciendo uso de lo siguiente:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \quad \text{luego } \cos^2 u = 1 - \sin^2 u$$

$$\text{por lo tanto: } \cos^2 u \sin^2 u = \sin^2 u - \sin^4 u$$

Con los valores de las integrales anteriores tenemos que:

$$(2.4.4.) \phi(k) = \frac{1}{2\pi} \left(\beta k \pi - \frac{3\delta k^3 \pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\beta k - \frac{3\delta k^3}{4} \right) \\ = \frac{k}{2} \left(\beta - \frac{3\delta k^2}{4} \right)$$

Por la primera ecuación (2.2.8.), la condición para que exista un ciclo límite es que $\phi(\kappa) = 0$. -De la ecuación (2.4.4.) esto tiene lugar cuando $\kappa_1 = 0$ y

$$\kappa_2 = \sqrt{\frac{4\beta}{3\delta}}$$

Para $\kappa_1 = 0$, el ciclo límite se reduce a un punto que es el punto singular. -El radio de un ciclo límite finito es:

(2.4.5.)
$$\kappa_2 = \sqrt{\frac{4\beta}{3\delta}}$$

Para determinar que hay realmente una condición de auto-excitación, tenemos que probar que la singularidad es inestable y que el ciclo límite es estable. Para demostrar el primer punto debemos de construir ecuaciones de primera aproximación en el sentido de Liapunov.

El sistema equivalente a la ecuación (2.4.1.), despreciando los términos no-lineales es $\dot{v} = \gamma$ y $\dot{y} + v = \mu \beta y$, esto es:

(2.4.6.)
$$\dot{v} = \gamma \quad \dot{y} = -v + \mu \beta y$$

La ecuación característica es $s^2 - \mu \beta s + 1 = 0$ -
cuyas raíces son: $s_{1,2} = \frac{\mu \beta \pm \mu \beta \sqrt{1 - \frac{4}{\mu^2 \beta^2}}}{2}$.

Como μ es pequeña, esto nos hace ver que las raíces son complejas, con una parte real positiva. --
Por lo tanto, la singularidad es un punto focal inestable por lo cual las trayectorias espirales se van desenrollando acercándose al ciclo límite $K_2 = \sqrt{\frac{4\beta}{3\delta}}$, con tal que éste sea estable.

Para determinar la estabilidad del ciclo límite ---
 $K_2 = \sqrt{\frac{4\beta}{3\delta}}$, es necesario determinar el signo de ----
 $\phi_K(K_2)$.-Vemos que:

$$\phi_K(K_2) = \frac{1}{2} (\beta - 3\beta) < 0$$

Entonces el ciclo límite es estable.

En esta discusión hemos estado suponiendo que ---
los coeficientes β , γ y δ introducidos en la ecuación (2.4.2.) son positivos. -Sin esta suposición podemos analizar los casos adicionales siguiendo el mismo procedimiento.

Es interesante investigar también la segunda ecuación

ción (2.2.8.), la cual concierne a la frecuencia de --
oscilación $\frac{d\theta}{dt}$

La función $\psi(k)$ en este caso es:

$$(2.4.7.) \psi(k) = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} (\beta + 2\gamma' k \cos u - 3\delta k^2 \cos^2 u) k \sin u \cos u \, du$$

Desarrollando ésta encontramos que:

$$(2.4.8.) \psi(k) = \frac{1}{2\pi k} \left[\beta k \int_0^{2\pi} \sin u \cos u \, du + 2\gamma' k^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin u \, du - 3\delta k^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 u \sin u \, du \right]$$

Tenemos que $\int_0^{2\pi} \sin u \cos u \, du$ integrando por --
sustitución, haciendo $v = \sin u, du = \cos u \, du$ luego:

$$\int_0^{2\pi} v \, dv = \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\sin^2 2\pi}{2} - \frac{\sin^2 0}{2} = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin u \, du = - \int_0^{2\pi} v^2 \, dv \text{ donde } v = \cos u, dv = -\sin u \, du$$

$$\text{luego } \left[-\frac{v^3}{3} \right]_0^{2\pi} = -\frac{\cos^3 2\pi}{3} + \frac{\cos^3 0}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \quad \text{y}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 u \sin u \, du = - \int_0^{2\pi} v^3 \, dv, \text{ con } v = \cos u, dv = -\sin u \, du$$

$$\text{entonces: } \left[\frac{v^4}{4} \right]_0^{2\pi} = -\frac{\cos^4 2\pi}{4} + \frac{\cos^4 0}{4} = 0$$

Como todas estas integrales son cero entonces --
 $\frac{d\theta}{dt} = 0$.-Esto significa que en el plano fase el --
radio vector del punto representativo gira alrededor --
del origen con una velocidad angular constante, y la
corrección de frecuencia es cero de primer orden.

Para investigar la variación de K como una función del tiempo, la primera ecuación (2.2.8.) debe ser integrada sustituyendo $\phi(K)$ por su valor dado en (2.4.4.).

$$\phi(K) = mK - nK^3$$

donde: $m = \frac{\beta}{2}$ y $n = \frac{3\delta}{8}$. Esto nos da:

$$\frac{dK}{mK - nK^3} = \frac{1}{m} \frac{dK}{K(1 - pK^2)} = \mu dt$$

donde: $p = \frac{n}{m} = \frac{3\delta}{4\beta}$. Tenemos que:

$$\frac{dK}{K(1 - pK^2)} = \frac{dK}{K} + \frac{pKdK}{1 - pK^2} = m\mu dt$$

$$\text{luego: } d \log. K - d \left[\frac{1}{2} \log. (1 - pK^2) \right] = m\mu dt$$

$$\text{o } d \left(\log. \sqrt{\frac{K}{1 - pK^2}} \right) = m\mu dt$$

integrando obtenemos:

$$\log. \left(\frac{\sqrt{\frac{K}{1 - pK^2}}}{\sqrt{\frac{K_0}{1 - pK_0^2}}} \right) = m\mu t$$

$$(2.4.9.) \quad \text{o } \sqrt{\frac{K}{1 - pK^2}} e^{-m\mu t} = \sqrt{\frac{K_0}{1 - pK_0^2}}$$

finalmente:

$$(2.4.10) \quad K = \frac{K_0}{\sqrt{(1 - pK_0^2) e^{-2m\mu t} + pK_0^2}}$$

para $t = 0$, $K = K_0 = \sqrt{\frac{4\beta}{3\delta}}$ y para $t \rightarrow -\infty$, $K \rightarrow 0$, lo cual significa que, cuando t crece, el radio vector K crece y se acerca al vector $K_0 = \sqrt{\frac{4\beta}{3\delta}}$ en el ciclo límite. -Además, cuando $t \rightarrow +\infty$, $K = K_0$, lo cual demuestra que el -

ciclo límite es estable.

Para eliminar la operación con infinidades inherentes, en la naturaleza asintótica del proceso, podemos seleccionar para K y K_0 en la ecuación (2.4.10.) - ciertos valores inicial y final K^1 y K_0^1 ligeramente -- alejados del punto focal inestable y del ciclo límite - respectivamente.- En tal caso la ecuación (2.4.10.) - puede ser usada para cálculos numéricos con vistas a descubrir que tan rápido el proceso de auto-excitación de oscilaciones se reconstruye como una función del tiempo.

El paso inverso del plano fase (a, b) de Van Der Pol, al plano fase original (x, y) restituye las expresiones $x = K \cos t$, $y = \dot{x} = -K \sin t$, donde K está dada por la ecuación (2.4.10.).

La condición de auto-excitación considerada anteriormente, representa a la llamada de tipo auto-excitación "suave". Topológicamente, ésta corresponde a la existencia de una singularidad inestable rodeada por un ciclo límite estable o de una singularidad es-

table dentro de un ciclo límite inestable.-El primer caso representa la reconstrucción de oscilaciones - acercándose asintóticamente a un ciclo límite estable; el segundo, a una desaparición asintótica del - proceso oscilatorio.- Si, no obstante, entre una sin gularidad inestable y un ciclo límite estable existe un ciclo límite inestable, entonces pertenece a las llamadas del tipo auto-excitaciones "fuertes" de oscilaciones.

La característica, en su aproximación por una serie de potencias, tiene un punto de inflexión, en la cual tenemos el término ϵv^5 con signo negativo. Como términos iguales no tienen ningún efecto en la determinación de ciclos límite, podemos entonces despreciarlos en la ecuación: Bajo estas condiciones la ecuación de Van Der Pol será de la forma:

$$(2.4.11.) \dot{v} + v = \mu (\beta + 3 \delta v^2 - 5 n v^4) \dot{v}.$$

En este caso: $f(v, \dot{v}) = (\beta + 3 \delta v^2 - 5 n v^4) \dot{v}$ y $f(K \cos u, -K \sin u) = -(\beta + 3 \delta K^2 \cos^2 u - 5 n K^4 \cos^4 u) K \sin u$

De aquí, por la primera ecuación (2.2.9.) Tenemos:

$$\begin{aligned} \phi(K) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \beta K \operatorname{sen}^2 u \, du + \int_0^{2\pi} 3\delta K^3 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 u \, du - \int_0^{2\pi} 5\eta K^5 \cos^4 u \operatorname{sen}^2 u \, du \right] \\ &= \frac{K}{2\pi} \left[\beta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 u \, du + 3\delta K^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 u \operatorname{sen}^2 u \, du - 5\eta K^4 \int_0^{2\pi} \cos^4 u \operatorname{sen}^2 u \, du \right] \end{aligned}$$

Los valores de estas integrales definidas es:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 u \, du &= \pi; \int_0^{2\pi} \cos^2 u \operatorname{sen}^2 u \, du = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 u \, du - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4 u \, du = \pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4} \\ \int_0^{2\pi} \cos^4 u \operatorname{sen}^2 u \, du &= \int_0^{2\pi} \cos^4 u \, du - \int_0^{2\pi} \cos^6 u \, du = \frac{3}{4}\pi - \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}\pi = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Esto nos da:

$$(2.4.12) \quad \phi(K) = \frac{K}{2} \left(\beta + \frac{3}{4} \delta K^2 - \frac{5}{8} \eta K^4 \right) = 0$$

Que es la condición para ciclos límite.-Aquí su --
ponemos que β , δ y η son positivas.- Una raíz es
claramente $K = 0$. Siguiendo el mismo procedi-
miento como antes y haciendo uso de las ecuacio---
nes de Liapunov de primera aproximación, encon-
tramos que la singularidad es un punto focal ines-
table.

El ciclo límite adecuado está dado por la ecuación
cuadrática

$$(2.4.13.) \quad \frac{5}{8} \eta S^2 - \frac{3}{4} \delta S - \beta = 0$$

Donde $S = K^2$. Solo raíces positivas serán consi-

deradas ya que $S=K^2$ es esencialmente positivo. - -

La ecuación (2.4.13.) podemos escribirla como:

$$\beta = \frac{5}{8} \eta S^2 - \frac{3}{4} \delta S = p^2 S^2 - qS = p^2 S^2 - qS + \frac{q^2}{4p^2} - \frac{q^2}{4p^2}$$

$$\beta = \left(pS - \frac{q}{2p} \right)^2 - \frac{q^2}{4p^2} \text{ donde } p^2 = \frac{5}{8} \eta \text{ y } q = \frac{3}{4} \delta$$

Si esta ecuación la reacomodamos tenemos:

$$(2.4.14.) \left(\beta + \frac{q^2}{4p^2} \right) = \left[p \left(S - \frac{q}{2p^2} \right) \right]^2$$

La ecuación (2.4.14.) representa la parábola ----

$$(\beta - \beta_0) = p^2 (S - S_0)^2, \text{ como se muestra en la figu}$$

ra [2.4.1.] .- Si cambiamos los ejes (S, β) por -

un nuevo sistema de ejes (S_1, β_1) con un nuevo --

orígen en $(\beta_0 = - \frac{q^2}{4p^2}, S_0 = \frac{q}{2p^2})$ la ecuación ---

(2.4.14.) será:

$$\beta_1 = p^2 S_1^2$$

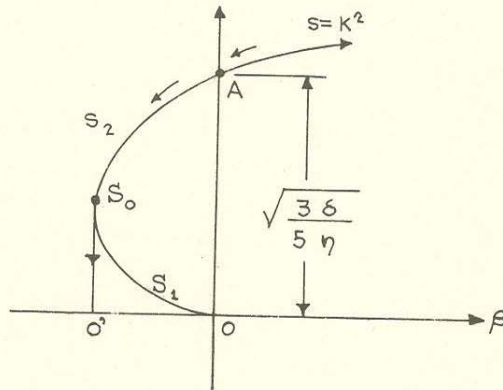


Fig. [24.1]

La segunda raíz corresponde al ciclo límite $K_2 = \sqrt{\frac{3\delta}{5\eta}}$ y la primera a un punto focal inestable, el cual fue determinado y explicado al principio de esta sección.

Para $\beta < 0$, esto es, a la izquierda del origen O , las raíces de la ecuación cuadrática -----
 $p^2 S^2 - q S - \beta = 0$ son:

$$S_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4\beta/p^2}}{2 p^2}$$

Elas son reales y positivas solo cuando $q^2 - 4\beta/p^2 \geq 0$.

Estas corresponden a los puntos S_1 y S_2 de las intersecciones de la parábola con la recta $\beta =$ constante. -La condición para una doble raíz es ----
 $|\beta_0| = \frac{q^2}{4 p^2}$; en este valor de la β negativa, el valor de la raíz es $S_0 = \frac{q}{2 p^2}$. -La tangente a la parábola en este punto es vertical.

En la región entre O' y O , donde existen 2 raíces, hay dos ciclos límites $K_1 = \sqrt{S_1}$ y $K_2 = \sqrt{S_2}$.

El primero es inestable y el segundo estable.

Para ilustrar este punto, derivemos la ecuación -
(2.4.12.) con respecto a K

$$(2.4.15.) \phi'(K) = \frac{\beta}{2} + \frac{3}{2} q K^2 - \frac{5}{2} p^2 K^4 = \frac{\beta}{2} + \frac{3}{2} q S - \frac{5}{2} p^2 S^2$$

Es suficiente sustituir en esta ecuación los valores -
de las raíces S_1 y S_2 por β en el intervalo
 $(0, -q^2/4 p^2)$, ya que la curva no se extiende --
a la izquierda de $\beta = -\frac{q^2}{4 p^2}$ y tiene solo una raíz
a la derecha de $\beta = 0$.-Consideremos por ejem-
plo, el valor medio en este intervalo, $\beta_1 = \frac{q^2}{8 p^2}$.-Las
raíces correspondientes son:

$$S_{1,2} = \frac{q}{2 p^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

esto es, $S_1 = 0.293 q/2 p^2$ y $S_2 = 1.707 q/2 p^2$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.4.15.), -
en la cual $\beta = \frac{-q}{8 p^2}$, encontramos después de una --
reducción; que $\phi'(K_1) > 0$ y $\phi(K_2) < 0$.-En-
tonces el ciclo límite S_1 en la rama baja de la
parábola es inestable y en la rama superior S_2 -
es estable. Si β varía de valores negativos y --
alcanza el punto O' , no hay auto-excitación a -
lo largo de la extensión $O' O$ ya que el ciclo lí-
mite inestable S_1 , se interpone entre los puntos -

focales estables situados en el eje β y el ciclo límite estable S_2 , actúa como una barrera, evitando la auto-excitación del desarrollo.- Tan pronto como el punto O en el cual el ciclo límite inestable desaparece estando obtenido, el ciclo límite estable $K_2 = \sqrt{\frac{3\delta}{5n}}$ es obtenido abruptamente.- Si β es nuevamente incrementada, la amplitud del ciclo límite se incrementa continuamente, el punto representativo S sigue la rama superior de la parábola a la derecha del punto A .- Si, no obstante, β decrece, la amplitud del ciclo límite estable sigue la rama superior S_2 hasta que el punto $S_0 (K_0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{6\delta}{5n}})$ es obtenido.- Aquí la oscilación auto-excitada desaparece abruptamente. Este tipo de auto-excitaciones son llamadas "fuertes".

En el segundo ejemplo que dimos en el capítulo 1 el cual no cumple con la Teoría de Poincaré, vemos que en el Plano de Variables de Van Der Pol únicamente en el caso en que $\epsilon=0$, $\phi(\tau)=0$, es decir, sólomente en este caso el final del vector τ es un punto de equilibrio estable, además $\psi(\tau)=0$, por lo tanto Θ es constante.

Apéndices

[1] Consideremos el sistema lineal autónomo de orden dos

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a x_1 + b x_2 \\ \dot{x}_2 &= c x_1 + d x_2 \end{aligned}$$

Con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Sean λ_1, λ_2 las raíces características de A. Para la determinación de estas raíces se obtiene la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - cb) = 0$$

donde λ_1, λ_2 son las raíces de la ecuación característica. Como $\text{Det.} A \neq 0$ ninguna raíz puede ser cero, y se presentan tres casos para las raíces a) que sean reales y distintas, b) reales e iguales c) complejas conjugadas. Las formas canónicas de A para estos casos son:

Caso I $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Caso II $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Caso III $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Caso IV $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

El caso I corresponde a raíces reales y distintas, los casos II y III a raíces real e iguales y el caso IV a raíces complejas conjugadas donde α y β son sus partes real e imaginaria respectivamente.

Cualquiera que fuere el caso, siempre existe una matriz real no singular P tal que, la matriz $P^{-1}AP$ adopta la forma canónica; luego si hacemos el cambio de variable $x = Py$, obtenemos un sistema en el que la matriz tiene una de las formas canónicas. En vista de lo anterior podemos suponer que la matriz A está en una de las formas canónicas I, II, III, IV, y veremos como son las soluciones en cada caso.

Caso I el sistema (1) adopta la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2\end{aligned}$$

cuya solución general es:

$$x_1 = k_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = k_2 e^{\lambda_2 t},$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias. Se presentan dos situaciones esencialmente diferentes, que λ_1 y λ_2 sean de igual o distinto signo. Supongamos que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, en este caso es claro que las soluciones tienden a cero cuando $t \rightarrow +\infty$ ya que las exponenciales tienden a cero, en particular los semi-ejes son soluciones. Por otro lado se tiene que $x_2/x_1 = k_2/k_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ y como $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$, la pendiente de cualquier solución con $k_2 \neq 0$ tiende a ∞ .



Supongamos ahora que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ en este caso, para cualquier solución, $x_1 \rightarrow 0$ y $x_2 \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ (salvo, si, $K_2 = 0$).

Caso II Ahora (1) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

cuya solución general es $x_1 = K_1 e^{\lambda t}$, $x_2 = K_2 e^{\lambda t}$.

Estas ecuaciones son las de una recta con pendiente K_2 / K_1 y si $\lambda < 0$ las soluciones tienden al origen cuando $t \rightarrow +\infty$

Caso III el sistema (1) adopta la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

cuya solución general es $x_1 = (K_1 + K_2 t) e^{\lambda t}$, $x_2 = K_2 e^{\lambda t}$. Si $\lambda < 0$ las soluciones tienden al origen cuando $t \rightarrow +\infty$. Por otro lado, la pendiente $x_2 / x_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, y además todas las trayectorias, salvo para $K_2 = 0$, cortan al eje x_2 para $t = -K_1 / K_2$.

Caso IV. Ahora las raíces son complejas conjugadas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ y (1) adopta la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_1 + \alpha x_2 \end{aligned}$$

cuya solución general es:

$$x_1 = e^{\alpha t} (K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t), \quad x_2 = e^{\alpha t} (-K_1 \sin \beta t + K_2 \cos \beta t)$$

Distinguiremos ahora 2 posibilidades.

Si $\alpha \neq 0$, digamos $\alpha < 0$, vemos que -----
 $x_1^2 + x_2^2 = (K_1^2 + K_2^2) e^{2\alpha t}$. Las soluciones son espirales que tien-
den hacia el origen cuando $t \rightarrow +\infty$.

Supongamos ahora que $\alpha = 0$ es inmediato ver que -----
 $x_1^2 + x_2^2 = K_1^2 + K_2^2$, y por lo tanto las soluciones son círculos con
centro en el origen, cuyo sentido para t creciente depende del -
signo de β . Todas sus soluciones son periódicas, con perío-
do $2\pi/\beta$.

En conclusión, para que el sistema (1) tenga soluciones pe-
riódicas es necesario que las raíces características sean imagina-
rias puras y esto se cumple cuando en la ecuación característica

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - cb) = 0$$
$$a+d = 0 \text{ y } ad - cb > 0$$

luego $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-(ad - cb)}$

[II]

Teorema de las Expansiones de Poincaré sea la ecuación diferen-
cial

(2) $\dot{x} = X(x, y, t)$

con t real y X una función analítica en sus variables (x, y) ,
la ecuación tiene para $y=0$ una solución $\xi(t)$ en el intervalo \bar{I} :
 $t^0 \leq t \leq t^1$ tal que para una t fija, $x_i(x, y, t)$ -----

puede expandirse en una serie de potencias de $(x_i - \bar{\xi}_i(t))$ y de y_i uniformemente convergente en alguna región

$$\|x - \bar{\xi}(t)\| < \alpha, \quad \|y\| < \alpha, \quad t \in \bar{I}$$

luego haciendo $\xi(t^0) = \xi^0$, la ecuación (2) tiene una solución $\xi(t, x^0, y)$ tal que $\xi(t, \xi^0, 0) = \bar{\xi}(t)$ y que para un t fijo, $\xi_i(t, x^0, y)$ puede expandirse en una serie de potencias de $(x_i^0 - \xi_i^0)$ y y_i convergente para $t \in \bar{I}$ y (x^0, y) en cierta región

$$\|x^0 - \xi^0\| < \beta, \quad \|y\| < \beta.$$

En particular si $\xi(t, \xi^0, y) = \xi(t, y)$ entonces esta última es una solución tal que $\xi(t, 0) = \bar{\xi}(t)$ y que $\xi(t, y)$ puede expandirse en una serie de potencias de y_i convergente en una región $\|y\| < \beta$.

[III]

Teorema de las Funciones Implícitas

Si las funciones $f(x, y, z, v)$ y $g(x, y, z, v)$ son continuas en una región que contiene al punto (x_0, y_0, z_0, v_0) para el cual $f(x_0, y_0, z_0, v_0) = 0$ y $g(x_0, y_0, z_0, v_0) = 0$, y las primeras derivadas parciales de f y g son continuas en dicha región, y si en (x_0, y_0, z_0, v_0) el determinante -----

$$J = \left(\frac{f, g}{z, v} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

existe un intervalo en torno de (x_0, y_0, z_0, v_0) en el cual el sistema $f(x, y, z, v) = 0$ y $g(x, y, z, v) = 0$ se puede despejar z y v como funciones continuas y derivables de x e y

$$z = \phi(x, y); \quad v = \psi(x, y)$$

[IV]

Teorema.- Toda función periódica f con período 2π (esto es, $f(x+2\pi) = f(x)$), seccionalmente continua (junto con su derivada), seccionalmente monótona y que satisface la condición (en los puntos de discontinuidad).

$$f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

puede desarrollarse en una serie de Fourier.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$



BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. Imaz y Z. Vorel; Ecuaciones.
Diferenciales Ordinarias.
- [2] L. Cesari; Funtional Analysis.
and Periodic Solutions.
Contributions to Differential
Ecuations 1963, Vol. III
- [3] J. Mawhin; Theorie de Degrée Topologique.
Publicaciones del CNRS,
Francia, 1970.

Para los Métodos de Poincaré y el de Van Der Pol,
una exelente referencia es el libro de Minorski: Non-linear
Mechanics, 1940