



BIBLIOTECA DEL D.I.F.U.S.

# Fricción Dinámica en Halos de Materia Oscura

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora

para el

Grado de Maestro en Ciencias

por

*Manuel Atienzo De La Cruz*

---



Departamento de Investigación en Física

Universidad de Sonora

Junio de 2008

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



# Fricción Dinámica en Halos de Materia Oscura

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora para el Grado de Maestro en Ciencias por

*Manuel Atienzo De La Cruz*

Junio de 2008

## *Resumen*

En este trabajo presentamos un estudio de los efectos que surgen cuando un cuerpo masivo transita por un mar de partículas de Materia Oscura del halo en el cual orbita. En particular presentamos un análisis semianalítico y simulaciones de uno de estos efectos llamado Fricción Dinámica. Ésta tiene lugar debido a que, conforme va avanzando el cuerpo masivo, deja atrás un agregado de partículas, mismas que crean una sobredensidad. La fuerza de gravedad de este agregado afecta a la partícula masiva modificando su dinámica, de tal forma que pierde energía, haciendo así que orbite en forma espiral hacia el centro del halo.

## *Abstract*

In this work we present a study of the effects that arise when a massive body travels through a sea of dark matter particles in the halo in which it orbits. In particular we present a semianalytic analysis and simulations of one of these effects called Dynamical Friction. This Friction is present because, as the massive particle travels it leaves an aggregate of particles which generates an overdensity. The gravitational force of this aggregate affects the massive particle by modifying its dynamics in such a way that it loses energy thus making it fall to the center of the halo in a spiral orbit.

# Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer al Dr. Carlos Calcáneo Roldán y la Dra. María Elena Tejeda Yeomans quienes me facilitaron sus instalaciones para que pudiera trabajar en la tesis. A Calcáneo: por su dirección en la realización de este trabajo, por las madrugadas y desveladas que tuvo que soportar y por toda la ayuda que me brindó durante mis cursos de la maestría. A María Elena: por la ayuda que nos brindó en Latex, Maple y por aguantar que usáramos a la mafalda y su escritorio para trabajar en la tesis. No tengo palabras suficientes para expresar lo mucho que disfruté trabajar con ustedes y sobre todo, los ratos cuando nos tomábamos el café y nos fumábamos unos cigarros.

También quiero agradecer a mis padres Manuel y Ma. Elizabeth, quienes siempre han estado pendientes de mí y que gracias a ellos he llegado a donde estoy ahora.

Y por último y no por importancia a mi novia, al amor de mi vida, Roxana por estar a mi lado incondicionalmente.

# Contenido

<b>Lista de Figuras</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Un modelo cosmológico</b>	<b>3</b>
1.1. Los constituyentes del Universo . . . . .	3
1.2. Materia Oscura . . . . .	6
1.3. Simulaciones de CDM . . . . .	9
<b>2 Dinámica en halos de materia oscura</b>	<b>11</b>
2.1. Perfil de densidad . . . . .	11
2.2. Órbitas . . . . .	14
2.3. Simulaciones . . . . .	16
<b>3 Fricción Dinámica</b>	<b>29</b>
3.1. Fricción Dinámica . . . . .	29
3.2. Simulaciones . . . . .	32
3.2.1. Órbitas elípticas . . . . .	37
3.3. Simulaciones en el Plano $XZ$ . . . . .	44
3.3.1. Órbitas elípticas . . . . .	57
<b>Conclusiones</b>	<b>62</b>

Apéndices	64
A Cálculo de la integral para el período azimutal	64
B Cálculo de la integral para el período azimutal, con ayuda de Maple	69
C Aproximación de Chandrasekhar con ayuda de Maple	71
Bibliografía	73

# Lista de Figuras

2.1. Características del halo dada las condiciones iniciales. Izq. Perfil de densidad. Der. Curva de velocidad circular. . . . .	18
2.2. Órbita circular de una partícula de masa puntual dentro del potencial $\Phi(r) = -\frac{GM_T}{r+a}$ . . . . .	19
2.3. Órbita elíptica de una partícula de masa puntual dentro del potencial $\Phi(r) = -\frac{GM_T}{r+a}$ . . . . .	21
2.4. Características del satélite dada las condiciones iniciales. Izq. Perfil de densidad. Der. Curva de velocidad circular. . . . .	22
2.5. Evolución del perfil de velocidad del satélite en aislamiento. Los círculos negros corresponden a $t = 0$ Gyr. y los triángulos rojos, a $t = 5$ Gyr. . . . .	23
2.6. Evolución del satélite que inicia en una órbita con $r = a$ , en un potencial suave. Arriba Izq. Configuración inicial del satélite $t = 0.00$ Gyr. Arriba Der. $t = 18.75$ Gyr. Abajo Izq. $t = 37.51$ Gyr. Abajo Der. $t = 56.25$ Gyr . . . . .	25
2.7. Evolución del satélite que inicia en una órbita con $r = .5a$ , en un potencial suave. Arriba Izq. Configuración inicial del satélite $t = 0.00$ Gyr. Arriba Der. $t = 9.98$ Gyr. Abajo Izq. $t = 19.84$ Gyr. Abajo Der. $t = 30.00$ Gyr . . . . .	26
2.8. Evolución del satélite que inicia en una órbita con $r = 5a$ , en un potencial suave. Arriba Izq. Configuración inicial del satélite $t = 0.00$ Gyr. Arriba Der. $t = 41.54$ Gyr. Abajo Izq. $t = 83.08$ Gyr. Abajo Der. $t = 125.00$ Gyr . . . . .	27
2.9. Evolución del satélite que inicia su órbita en $r = a$ , con las condiciones iniciales para ser elíptica, en un potencial suave. Arriba Izq. Configuración inicial del satélite $t = 0.00$ Gyr. Arriba Der. $t = 22.17$ Gyr. Abajo Izq. $t = 44.33$ Gyr. Abajo Der. $t = 66.65$ Gyr . . . . .	28
3.1. Evolución del perfil de velocidad del halo en aislamiento. Los círculos negros corresponden a $t = 0$ Gyr. y los triángulos rojos, a $t = 5$ Gyr. . . . .	33
3.2. Órbita descrita por el satélite que inicia en una órbita con $r = a$ . . . . .	34

3.3.	Comparación del decaimiento del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia en $r = a$ .	34
3.4.	a) Izq. Órbita descrita por el satélite. b) Der. Decaimiento del radio. Para el caso en que el satélite inicia en una órbita con $r = .5a$ .	36
3.5.	a) Izq. Órbita descrita por el satélite. b) Der. Decaimiento del radio. Para el caso en que el satélite inicia en una órbita con $r = 5a$ .	37
3.6.	a) Izq. Órbita descrita por el satélite. b) Der. Decaimiento del radio. Para el caso en que el satélite inicia en $r = a$ , con las condiciones iniciales para ser elíptica, girando en contra del sentido de las manecillas del reloj.	39
3.7.	a) Izq. Órbita descrita por el satélite. b) Der. Decaimiento del radio. Para el caso en que el satélite inicia en $r = a$ , con las condiciones iniciales para ser elíptica, girando a favor del sentido de las manecillas del reloj.	39
3.8.	Evolución del momento angular cuando el satélite inicia en una órbita elíptica en $r = a$ que gira en contra del sentido de las manecillas del reloj. Negro $l$ , rojo $l_x$ , azul $l_y$ , verde $l_z$ .	41
3.9.	Evolución del momento angular cuando el satélite inicia en una órbita elíptica en $r = a$ que gira en a favor del sentido de las manecillas del reloj. Negro $l$ , rojo $l_x$ , azul $l_y$ , verde $l_z$ .	41
3.10.	Proyecciones de las componentes cartesianas del momento angular del halo. En negro $L$ , rojo $L_x$ , azul $L_y$ , verde $L_z$ . Nótese que se ha graficado el valor absoluto de $L_y$ .	43
3.11.	Representación esquemática de las proyecciones cartesianas del momento angular del halo. Con la intensidad de cada flecha se pretende distinguir la magnitud de cada componente.	44
3.12.	Órbita en el plano $XZ$ descrita por el satélite que inicia en una órbita con $r = a$ <i>corrotando</i> con el halo.	45
3.13.	Comparación del decaimiento del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia con $r = a$ en el plano $XZ$ <i>corrotando</i> con el halo.	46
3.14.	Órbita en el plano $XZ$ descrita por el satélite que inicia en una órbita con $r = a$ <i>contrarrotando</i> con el halo.	47
3.15.	Comparación del decaimiento del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia con $r = a$ en el plano $XZ$ <i>contrarrotando</i> con el halo.	47
3.16.	Comparación de las velocidades angulares del satélite cuando inicia en $r = a$ . a) Izq. satélite <i>corrotando</i> con el halo. b) Der. satélite <i>contrarrotando</i> con el halo. Rojo $v_r$ , verde $v_\theta$ y azul $v_\phi$ .	49



3.17. Órbita en el plano $XZ$ descrita por el satélite que inicia en una órbita con $r = .5a$ <i>corrotando</i> con el halo. . . . .	50
3.18. Comparación del decaimiento del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia con $r = .5a$ en el plano $XZ$ <i>corrotando</i> con el halo. . . . .	50
3.19. Órbita en el plano $XZ$ descrita por el satélite que inicia en una órbita con $r = .5a$ <i>contrarrotando</i> con el halo. . . . .	51
3.20. Comparación del decaimiento del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia en $r = .5a$ en el plano $XZ$ <i>contrarrotando</i> con el halo. . . . .	52
3.21. Comparación de las velocidades angulares del satélite cuando inicia en $r = .5a$ . a) Izq. Satélite <i>corrotando</i> con el halo. b) Der. Satélite <i>contrarrotando</i> con el halo. Rojo $v_r$ , verde $v_\theta$ y azul $v_\phi$ . . . . .	53
3.22. Órbita en el plano $XZ$ descrita por el satélite que inicia en una órbita con $r = 5a$ <i>corrotando</i> con el halo. . . . .	54
3.23. Comparación del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia con $r = 5a$ en el plano $XZ$ <i>corrotando</i> con el halo. . . . .	54
3.24. Órbita en el plano $XZ$ descrita por el satélite que inicia en una órbita con $r = 5a$ <i>contrarrotando</i> con el halo. . . . .	55
3.25. Comparación del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia con $r = 5a$ en el plano $XZ$ <i>contrarrotando</i> con el halo. . . . .	56
3.26. Comparación de las velocidades angulares del satélite cuando inicia en $r = 5a$ . a) Izq. Satélite <i>corrotando</i> con el halo. b) Der. Satélite <i>contrarrotando</i> con el halo. Rojo $v_r$ , verde $v_\theta$ y azul $v_\phi$ . . . . .	57
3.27. Órbita en el plano $XZ$ descrita por el satélite que inicia en una órbita con las condiciones iniciales para ser elíptica en $r = a$ <i>corrotando</i> con el halo. . . . .	58
3.28. Comparación del radio teórico con el de la simulación para una órbita con las condiciones iniciales para ser elíptica que inicia en $r = a$ en el plano $XZ$ <i>corrotando</i> con el halo. . . . .	58
3.29. Órbita en el plano $XZ$ descrita por el satélite que inicia en una órbita con las condiciones iniciales para ser elíptica en $r = a$ <i>contrarrotando</i> con el halo. . . . .	59
3.30. Comparación del radio teórico con el de la simulación para una órbita con las condiciones iniciales para ser elíptica que inicia en $r = a$ en el plano $XZ$ <i>contrarrotando</i> con el halo. . . . .	60
3.31. Comparación de las proyecciones del momento angular del satélite que inicia en una órbita elíptica con $r = a$ , <i>corrotando</i> con el halo. En negro $l$ , rojo $l_x$ , azul $l_y$ , verde $l_z$ . . . . .	61

- 3.32. Comparación de las proyecciones del momento angular del satélite que inicia en una órbita elíptica con  $r = a$ , *contrarrotando* con el halo. En negro  $l$ , rojo  $l_x$ , azul  $l_y$ , verde  $l_z$ . . . . 61

# Introducción

El avance en las técnicas observacionales en la astronomía así como las técnicas computacionales y la capacidad de cálculo, han hecho que la astrofísica y la cosmología tengan un avance sin precedentes. Estos campos de trabajo tienen una extensión tal que no es raro encontrar grandes comunidades enfocadas a los distintos problemas particulares que surgen en el estudio de los objetos que componen el Universo. Una cualidad de estos sistemas es que los distintos fenómenos pueden estudiarse uno a uno de manera aislada, para entender con gran detalle sus efectos y después incorporarlos en una teoría completa.

En este trabajo pretendemos hacer una revisión de uno de estos fenómenos dinámicos que, además, es poco estudiado en cursos tradicionales de mecánica: *Fricción Dinámica*. Se trata de un efecto que debe tomarse en cuenta al considerar el comportamiento de sistemas astronómicos reales constituidos por un gran número de partículas. Muchos fenómenos astrofísicos tienen su origen, sin lugar a duda, debido a esta fricción: la formación de sistemas planetarios, la evolución de cúmulos estelares dentro de las galaxias y el comportamiento de las galaxias dentro de cúmulos de galaxias, por mencionar sólo algunos.

La *Fricción Dinámica* es un proceso que fue introducido por primera vez en sistemas estelares por Subrahmanyan Chandrasekhar y resumidamente consiste en lo siguiente: una partícula masiva  $M$  experimenta una fuerza de arrastre cuando se mueve en un mar de partículas mucho más ligeras  $m$  mediante el intercambio de energía y momento.

La motivación inicial de este trabajo fue explorar el espacio de parámetros importante para entender el comportamiento de los cúmulos de galaxias, tomados como un sistema granular dentro del cual evolucionan las galaxias. Por esta razón llevamos a cabo simulaciones numéricas de estos sistemas con la finalidad de estudiar el efecto que tiene la Fricción Dinámica sobre las trayectorias de galaxias dentro de cúmulos de galaxias. En primera instancia no es nuestro objetivo hacer un estudio exhaustivo del fenómeno, sino más bien de entender los parámetros que son esenciales para su debida interpretación durante la evolución de órbitas galácticas.

Para lograr este objetivo empezamos por resumir el modelo cosmológico que servirá como base, así como nuestra elección para la forma de materia que se estará simulando, ésto lo hacemos

---

en el capítulo uno. Después, en el capítulo dos, presentamos un breve resumen de la dinámica esperada en estos sistemas y de la forma particular en que los construimos. En el capítulo tres, después de definir el concepto de Fricción Dinámica y de calcular la aproximación teórica usando el modelo de Chandrasekhar, mostramos los principales resultados de nuestro trabajo, considerando todos los casos que fueron simulados. Por último presentamos las conclusiones particulares del trabajo, así como algunas sugerencias para continuar con el estudio de este tipo de fricción.

# Capítulo 1

## *Un modelo cosmológico*

En este capítulo hacemos una breve revisión del modelo cosmológico actual, en particular la necesidad de introducir una componente de materia con propiedades diferentes a la materia ordinaria.

La Cosmología trata de dar una explicación autocontenida del origen y evolución del Universo. Desde la segunda mitad del siglo XX las observaciones astronómicas han logrado una precisión sin precedentes, además, el avance en las técnicas numéricas y semianalíticas han logrado que esta ciencia deje de ser meramente descriptiva para alcanzar la capacidad predictiva de las ciencias Físicas. El modelo actual se fundamenta en un conjunto de observaciones e hipótesis que hacen posible describir la historia del Universo desde fracciones de segundo después de su creación hasta la época actual y permite hacer extrapolaciones al futuro.

No tenemos espacio en este trabajo para hacer una revisión exhaustiva de todos los logros alcanzados. Por otra parte el proyecto realizado tiene mayor relevancia a escalas galácticas y de cúmulos de galaxias. Sin embargo debido a que toda la discusión supondrá la existencia de Materia Oscura, conviene aclarar de antemano porqué es razonable hacer esta suposición.

### 1.1. Los constituyentes del Universo

Por ser un sistema de gran extensión (de hecho es *el sistema*) la descripción formal debe hacerse usando Relatividad General, sin entrar en detalles podemos resumir que: “La cantidad total de materia/energía en el Universo define como será su geometría y ésta, a su vez, define como se distribuye la materia/energía”.

Para estudiar el origen y evolución del Universo resulta entonces de gran importancia entender como está constituido, es decir ¿Cuál es su contenido material/energético? Por sencillez se acostumbra describir todas las formas de materia y energía como una fracción de la densidad crítica del Universo ( $\rho_o$ ):

$$\Omega_o = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\rho_o} = \Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\text{M}} + \Omega_{\Lambda} \quad (1.1)$$

En la ecuación 1.1 hemos escrito el subíndice “o” para denotar cantidades observadas en el

presente. En esta expresión

$$\rho_o = 3H_o^2/8\pi G = 1.88h^2\text{grcm}^{-3} = 278h^2M_\odot\text{Kpc}^{-3} \quad (1.2)$$

es la densidad crítica del Universo, misma que aparece en las ecuaciones de evolución y que define si éste tiene geometría plana ( $\Omega_o = 1$ ); abierta, como una silla de montar ( $\Omega_o < 1$ ) o cerrada, como una esfera ( $\Omega_o > 1$ ). Para esta descripción hemos dividido a la densidad de materia/energía en tres componentes: una fracción debida a radiación,  $\Omega_{\text{rad}}$ , la componente material,  $\Omega_M$ , y una contribución escalar suave,  $\Omega_\Lambda$ . Notemos que la densidad crítica está escrita en las unidades astronómicas convencionales: *Kiloparsec*, Kpc, que corresponde a una distancia de  $3.0856782 \times 10^{21}$  cm y *Masas solares*,  $M_\odot$ , que equivale a la masa del Sol, esto es,  $1.989 \times 10^{33}$  gr.

Es importante señalar que sólo las componentes de radiación y materia son evidentes, la tercera componente ha sido introducida recientemente en virtud de la evidencia observacional [19] (otro punto de notación que debemos aclarar es que todas las cantidades en las que interviene la distancia están escaladas por la constante de Hubble,  $H_o = 100h\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ , en donde el parámetro  $h$  se usa para englobar la incertidumbre en esta medición y está determinado en el rango de 0.5 a 1.0. Un valor muy favorecido en este momento es  $h \sim 0.70$ , el cual usaremos a lo largo de este trabajo).

La observación de la Radiación Cósmica de Fondo, CMB, marcó el inicio de la Cosmología Física y consiste en detectar radiación que está a la frecuencia de las microondas. Su origen cosmológico está garantizado por dos razones: primero, en este rango de frecuencias no existen fenómenos astrofísicos que la puedan generar, por otra parte, la radiación observada es prácticamente isotrópica y homogénea en el cielo, por lo que es difícil de explicar un origen distinto al cosmológico. Con una precisión mayor al 0.05 % la CMB se ajusta a un cuerpo negro a una temperatura  $T_o = 2.7277\text{K}$ . Con este dato es posible fijar la densidad de fotones cosmológicos en  $\Omega_{\text{fotones}}h^2 = 2.48 \times 10^{-5}$ . Debido a esta contribución tan pequeña a la densidad total continuaremos la discusión como si no existiera.

A partir de la década de los noventa fue posible observar la CMB con una precisión tal que se detectaron pequeñas oscilaciones en la temperatura en las escalas más pequeñas observadas. Estas pequeñas fluctuaciones (del orden de  $\Delta T/T \approx 10^{-5}$ ) pueden ser utilizadas para determinar el valor de  $\Omega_o$ .

En el estado denso y caliente del Universo temprano todas las partículas, tanto de materia como de energía estaban acopladas. El Universo, al enfriarse lo suficiente, llega a un momento

en que finalmente los fotones logran escapar de la materia. En la actualidad, la CMB que observamos son los fotones que se desacoplaron de este estado. Mientras que las partículas de materia se concentraban por gravitación, la presión de los fotones actuaba como una fuerza restauradora, lo cual resultó en oscilaciones acústicas en la densidad. Así las variaciones en la radiación corresponden a variaciones de densidad en el Universo temprano. En la práctica las oscilaciones de la CMB se pueden desarrollar en una serie de armónicos esféricos con coeficientes  $C_{lm}$ , y al calcular la correlación entre la temperatura en diferentes puntos del cielo, se obtiene una gráfica que presenta diferentes picos de correlación. Resulta que la posición del primer pico en esta gráfica depende directamente del valor de  $\Omega_o$  [15]. Las primeras observaciones de estas variaciones en la radiación cósmica de fondo fijaron el valor para la densidad total del Universo en  $\Omega_o = 1 \pm 0.1$  [22].

Recientemente la sonda espacial “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe”, WMAP, ha podido hacer un estudio detallado de las oscilaciones de la CMB. Incorporando los mejores modelos de la creación de los primeros elementos en el Universo (“Nucleosíntesis”) y observaciones independientes tanto de la constante de Hubble, como de la abundancia relativa de los elementos más ligeros (Hidrógeno, Deuterio, Helio y Litio) se concluye que el mejor ajuste a las observaciones se logra con un modelo cosmológico con los siguientes parámetros (en la tabla se presentan sólo los valores centrales, para información más precisa sobre los rangos de error, ver [4]):

Parámetro		Valor
Constante de Hubble	h	.732
Densidad total de materia	$\Omega_M$	.259
Densidad de materia ordinaria	$\Omega_b$	.048
Densidad de la componente suave	$\Omega_\Lambda$	.716

Estas observaciones nos permiten asegurar que el modelo más aceptado del Universo es aquel en el cual alrededor de un tercio está compuesto por materia,  $\Omega_M \approx 0.3$  y el resto en una componente suave de “Energía Oscura”,  $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ . La existencia y naturaleza de esta última componente se encuentra bajo discusión, sin embargo la restricción para la parte material ya es muy aceptada. El valor pequeño observado de material ordinario sugiere que la mayor parte consiste en una clase de materia de composición exótica a la cual se le conoce como “*Materia Oscura*”. En la siguiente sección presentamos evidencia adicional de la existencia de esta forma de materia.

## 1.2. Materia Oscura

Los experimentos recientes a nivel cosmológico (BOOMERanG [1], The Supernova Cosmology Project [19], Wilkinson Microwave Anisotropy Probe [4], entre otros) han permitido mediciones muy precisas de los parámetros globales del Universo. Sin embargo, los primeros intentos para describir la composición del Universo se hicieron a las escalas de las galaxias y los cúmulos de galaxias.

Es posible construir teorías que modelan el origen y la evolución de galaxias y cúmulos combinando observaciones astronómicas detalladas con la dinámica esperada dentro de estos objetos, por esta razón es de gran importancia desarrollar modelos de interacción lo más realistas posibles si queremos dar una explicación precisa de la fenomenología observada.

Podemos usar a los cúmulos de galaxias como una muestra representativa del Universo, esto se debe a que ocupan una región grande de espacio (típicamente se forman en regiones de sobredensidad con una longitud característica de 10 Mpc). Por esta razón la evidencia de la existencia de una componente adicional de materia en estos sistemas se usa para inferir las propiedades del Universo entero.

En 1933 Fritz Zwicky aplicó por primera vez el Teorema del Virial al análisis de los cúmulos de galaxias. En su forma más sencilla, este teorema asocia la energía cinética total,  $\mathcal{T}$ , con la energía potencial,  $\mathcal{U}$ , de un cúmulo de galaxias de manera sencilla:

$$2\mathcal{T} + \mathcal{U} = 0$$

combinando las observaciones de las velocidades particulares de las galaxias en el cúmulo con la suposición de que el sistema está en equilibrio y unido gravitacionalmente, concluyó que, para que se mantuviera el equilibrio, se requería de 10 a 100 veces más masa de la que se podía justificar por la presencia de las galaxias luminosas.

Esta observación por sí sola no es suficiente para concluir que existe alguna forma de material exótico, sin embargo es un ejemplo típico de cómo se puede usar la dinámica de los objetos astrofísicos para medir masa.

En la actualidad existen otros métodos independientes para medir la masa de cúmulos. Uno de ellos consiste en usar mapas del brillo de rayos X y perfiles de su temperatura, los cuales han llegado a una resolución suficiente que permiten estimar la profundidad de los pozos de potencial que confinan el gas caliente que emite esta radiación. Otro método se basa en la detección de galaxias tenues de fondo cuya forma es distorsionada porque la luz se ve afectada por el



campo gravitacional de los cúmulos. La ventaja de estas técnicas es que proveen una manera directa de obtener información de la distribución de masa total, sin importar sus características particulares.

Así, la información obtenida de estas observaciones del gas caliente permite determinar cuanto material ordinario se encuentra encerrado en los cúmulos. La conclusión es dramática: el gas caliente representa, cuando mucho, un 15 % de la masa total. Esta observación lleva a la conclusión de que la mayor parte de estos sistemas debe estar conformado por un material de naturaleza distinta, mismo que interactúa de manera tan débil que no le es posible llegar a un equilibrio térmico para generar una temperatura detectable. La baja temperatura de este material hace que no presente brillo alguno, por esta razón se le conoce como Materia Oscura.

Una evidencia adicional de la existencia de la Materia Oscura se obtiene de la dinámica de las galaxias. De todos los sistemas a nivel galáctico que se observan, las galaxias espirales son aquellas que presentan, un plano de rotación para las estrellas que las conforman. Este plano se manifiesta como un disco con estructura de brazos que claramente las distingue. La existencia del disco se explica por el equilibrio dinámico entre el potencial gravitacional y la velocidad circular de las estrellas.

Las mediciones ópticas (entre 1950 y 1960) estaban usualmente restringidas a las partes internas de las galaxias. Las curvas de rotación mostraban un comportamiento típico, un crecimiento rápido en la velocidad de rotación cerca del centro, y después una sección de decaimiento. Este comportamiento es característico de la curva de rotación de un disco exponencial el cual puede ser dividido en tres regiones: (i) una región interna en la cual la velocidad crece linealmente con la distancia al centro; (ii) una región donde la velocidad alcanza un máximo y después empieza a decaer; y (iii) una región Kepleriana en la cual el potencial del disco se asemeja al potencial de una masa puntual, de tal manera que la velocidad de rotación decae como  $R^{-1/2}$ . Estas tres regiones se observan en la mayoría de las curvas de rotación generadas por una distribución de densidad con masa finita, ya sea esférica o achatada. Por lo tanto era natural asumir una caída Kepleriana en la velocidad de rotación después del último punto de medición, además de que la luz de la galaxia estaba casi toda contenida dentro del radio del último punto de medición [9]. Esta situación cambió cuando se aumentó la sensibilidad de las observaciones las cuales permitieron extender las curvas de rotación a radios mayores. Cuando se mide esta velocidad como función de la distancia al centro de la galaxia se observa que, conforme nos alejamos del centro, el valor de velocidad circular incrementa hasta llegar a un valor máximo constante, es

decir; para radios mayores la velocidad circular ya no cambia, hasta la orilla donde se detecta el material luminoso. Esto contrasta fuertemente con lo que se espera ya que, en un sistema en equilibrio dinámico, sostenido solo por gravedad, la curva de velocidad circular debe decaer conforme nos alejamos del centro.

La explicación más socorrida para este fenómeno es que la orilla luminosa de la galaxia no representa su orilla real; en realidad el disco está sumergido en un gigantesco halo del cual el material luminoso representa a lo más el 10 %.

Como hemos visto, existe gran evidencia astrofísica y cosmológica para suponer la existencia de una componente adicional de Materia Oscura en el Universo. Para su clasificación es común dividir esta materia de acuerdo a la naturaleza de su interacción en Materia Oscura Caliente (HDM) y Materia Oscura Fría (CDM).

Los candidatos de HDM son partículas que se movían a velocidades relativistas en la época en que las galaxias empezaban a formarse. El candidato típico para esta clase de materia era el neutrino más ligero, sin embargo las simulaciones sugieren que la formación de estructura en el Universo procede de manera jerárquica, con las estructuras más pequeñas formándose primero, seguidas por galaxias y después por cúmulos de galaxias. Este modelo de formación de estructura requiere algo como CDM para poder tener éxito. Las simulaciones de la formación de estructura considerando un Universo dominado por HDM fueron incapaces de reproducir las estructuras (cúmulos de galaxias) que se observan a las escalas más grandes [17], por lo que la HDM ha sido descartada como candidata viable de Materia Oscura.

En contraste las simulaciones de CDM si logran reproducir las estructuras a gran escala que se observan. Estas partículas, que se movían más lentamente en la época de formación de galaxias, caen rápidamente en los pozos de potencial gravitacionales generando mucha estructura.

Actualmente se han logrado simulaciones de aún más alta resolución con CDM y gas, y existe un modelo autoconsistente para la formación de la estructura del Universo [21].

Resultará de gran importancia conocer la forma específica de la Materia Oscura y finalmente corroborar su existencia en el laboratorio. Mientras tanto, es necesario tener un buen entendimiento de los procesos dinámicos en los sistemas dominados por Materia Oscura. En este trabajo estudiaremos uno de estos procesos, particularmente a la escala de galaxias y cúmulos de galaxias.

### 1.3. Simulaciones de CDM

El modelo de CDM ha sido explorado en gran detalle por más de 25 años a través de simulaciones de N-cuerpos y modelado semianalítico. Una propiedad importante de las simulaciones es que los halos a escalas pequeñas son los primeros en colapsarse y separarse de la expansión del Universo. A partir de su formación, estos halos van creciendo ya sea gradualmente, por la acreción de cúmulos pequeños, o bien en grandes saltos, a través de la unión de dos halos de tamaño comparable. Esto es; la formación de estructura es *jerárquica*: los objetos pequeños se forman primero, los grandes después.

Los primeros estudios numéricos de la formación de estructura fueron hechos por Peebles [16] y White [18]. Las estructuras finales que ellos encontraron tenían propiedades globales parecidas a los cúmulos de galaxias observados (masas y tamaños), pero no presentaban subestructura. Este es el problema de la "sobrefundición", las estructuras pequeñas sí se formaban, pero desaparecían tan pronto se incorporaban a estructuras más grandes. Con el tiempo se reconoció que éste era un problema de resolución y se ha comprobado que sí es posible resolver la estructura interna [2].

Las simulaciones numéricas han logrado tal resolución que es posible cuantificar la estructura interna de los halos de Materia Oscura. A escalas que van desde las de galaxias enanas hasta las de los cúmulos de galaxias. Los halos de CDM son estructuras triaxiales, casi esféricos, con perfiles de densidad singulares para radios pequeños, que pueden describirse por la siguiente familia de curvas[3]:

$$\rho(r) = \frac{\rho_o}{(r/a)^\gamma [1 + (r/a)^\alpha]^{(\beta-\gamma)/\alpha}} \quad (1.3)$$

En la ecuación (1.3),  $\rho_o$  es una densidad característica que puede ser determinada para cada halo y  $a$  es un radio característico que se determina a través de la concentración,  $c = r_{vir}/a^*$ . Ésta última se determina, a su vez por la cosmología y la masa del halo y  $\alpha$  define lo drástico del cambio entre pendientes, mientras que  $a$  determina su localización en  $r$ . Resulta que los halos simulados se ajustan bien por este tipo de perfil para un amplio rango de masas que van desde cúmulos hasta galaxias enanas. Navarro *et al.* [11] fueron los primeros en reconocer que estos perfiles son universales y en desarrollar una manera sistemática de determinar los parámetros  $\rho_o$ ,  $a$  y  $c$  (el procedimiento completo se puede revisar en las referencias [10, 11]).

\*En esta expresión hemos utilizado el radio del virial,  $r_{vir}$ , un radio característico de los halos simulados y que corresponde al corte donde la densidad es aproximadamente 200 veces la densidad crítica del Universo  $\rho_o$ .

Escribir el perfil de esta forma nos permite encontrar su comportamiento asintótico de manera sencilla:

$$\rho(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} (r/a)^{-\beta}$$

$$\rho(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} (r/a)^{-\gamma}$$

Originalmente se pensaba que los halos de Materia Oscura seguían una distribución isotérmica modificada,  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 2, 0)$ , la cual fue muy utilizada en el análisis de curvas de rotación. Las simulaciones de alta resolución más recientes dan lugar a valores distintos para  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Una de las razones principales para estudiar las interacciones entre halos de Materia Oscura es que éstas nos permitan entender la evolución de galaxias dentro de los cúmulos o bien la evolución de la subestructura de la Vía Láctea. Se observa a las galaxias en ambientes distintos, ya sea agrupadas en cúmulos o bien en aislamiento. Una motivación importante para estudiar su evolución es entender las transformaciones principales que sufren al transitar por estos ambientes.

Esperamos que en el centro de los halos de Materia Oscura se formen las galaxias, si el halo es suficientemente grande (como se concluye de las observaciones) debe dominar la interacción gravitacional de las galaxias. Así, al estudiar estas interacciones idealizadas en los halos esperamos comprender los factores importantes que influyen en su evolución.

En este trabajo pondremos especial atención en uno de los efectos presentes en la interacción de sistemas de muchos cuerpos. La Fricción Dinámica. Haremos este estudio en sistemas relativamente sencillos, dominados por Materia Oscura fría, sin embargo esperamos que nuestras conclusiones sean independientes de la naturaleza específica del material interactuante.

## Capítulo 2

# *Dinámica en halos de materia oscura*

En el capítulo anterior, hemos dado una justificación para estudiar la dinámica de sistemas dominados por Materia Oscura. Por tratarse de colecciones de partículas que interactúan débilmente mediante la fuerza gravitacional, los modelamos como un gas ideal de partículas que no interactúan, es decir, una simulación de N-cuerpos donde solo está presente la interacción gravitacional. En este tipo de simulaciones se llevan a cabo numerosos procesos que influyen en la evolución del sistema.

En este capítulo revisaremos los principales conceptos físicos que fueron necesarios para nuestro estudio numérico, así como la metodología que seguimos.

### 2.1. Perfil de densidad

En la ecuación (1.3) hemos indicado la forma genérica que tiene el perfil de densidad de los halos de Materia Oscura. Una vez definido este perfil es posible obtener todas las propiedades físicas de interés sin embargo, la expresión (1.3) es tan general que no resulta útil de manera operativa por lo que debemos especificar la forma particular que tomará para nuestro estudio.

Para escoger el perfil de densidad debemos cuidar, primero, que refleje las características que se encuentran para este tipo de sistemas en las simulaciones cosmológicas; este aspecto está contenido en respetar la forma funcional de la ecuación (1.3). Por otra parte, el perfil elegido debe contener también la información que se conoce para las galaxias observadas. Para cumplir con este segundo requisito seguiremos la práctica común de comparar con lo que se conoce para galaxias espirales.

La distribución de luminosidad de muchas galaxias elípticas (o bien, los bulbos centrales de algunas galaxias espirales) está representada por la ley empírica

$$\log_{10} \left[ \frac{I(R)}{I(R_e)} \right] = -3.331 \left[ \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right] \quad (2.1)$$

donde  $R$  es el radio proyectado,  $R_e$  es el radio efectivo de la isofota (curva de igual brillo superficial) que contiene la mitad de la luminosidad total e  $I$  es el brillo superficial [13]. Esta ley es conocida como la ley de de Vaucouleurs. Aun cuando es conveniente para representar las propiedades observables de galaxias, el perfil de de Vaucouleurs no es muy útil para hacer análisis teóricos, ya que su densidad de masa,  $\rho(r)$ , proyectada no es tratable analíticamente. Este hecho motiva a buscar perfiles de densidad semejantes al de la ley de  $R^{1/4}$  pero que tengan formas analíticas más simples.

Se han propuesto numerosos modelos para el estudio de galaxias esféricas tales que muchas de sus propiedades intrínsecas pueden ser calculadas analíticamente. Para nuestro caso, usaremos el siguiente perfil de densidad [13], para construir los halos de Materia Oscura de nuestras simulaciones:

$$\rho(r) = \frac{M_T}{2\pi a^3} \frac{1}{\frac{r}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right)^3}, \quad (2.2)$$

Es decir, se trata de un perfil como el que se obtiene de las simulaciones cosmológicas (plasmado en la ecuación 1.3), con los valores específicos para los parámetros  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 4, 1)$ .

Aquí debemos señalar que estos perfiles de densidad representan sistemas que son infinitos en extensión, si bien la densidad descrita por la ecuación anterior es cada vez más pequeña conforme nos alejamos de su centro. Por esta razón es importante introducir un radio de truncamiento que representará el radio máximo de nuestros halos simulados, por lo tanto,  $M_T$  es la *masa truncada del halo* o bien, su masa total y  $a$  es el radio de escala descrito anteriormente.

Este perfil presenta un comportamiento  $\rho \propto r^{-1}$  para  $r \rightarrow 0$ , por lo que es compatible con la densidad volumétrica integrada, para radios pequeños, obtenida a partir de la ley de de Vaucouleurs.

Como los potenciales se añaden linealmente, podemos fácilmente calcular el potencial en cualquier punto  $r$  generado por una distribución de densidad simétrica arbitraria, sumando las contribuciones al potencial producidas por cascarones con radios menores a  $r$  y radios mayores que  $r$ . De esta manera obtenemos

$$\Phi(r) = -4\pi G \left[ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right], \quad (2.3)$$

donde el primer término es la masa interior y el segundo término es la suma de potenciales de cascarones exteriores, así fácilmente obtenemos el potencial generado por la densidad (2.2).

$$\Phi(r) = -\frac{GM_T}{r+a}. \quad (2.4)$$

Con ayuda de las expresiones (2.2) y (2.4) podemos construir halos simulados de Materia Oscura sin la necesidad de generar una simulación cosmológica completa. Ésto se logrará resolviendo la ecuación de Eddington (Binney and Tremaine [9] capítulo 4), suponiendo que las velocidades de las partículas del sistema que resulta siguen una distribución gaussiana. En nuestro caso hemos seguido el procedimiento descrito por Hernquist [13, 14] y hemos dejado evolucionar los halos generados en aislamiento, comprobando su estabilidad durante más de  $5 \times 10^9$  años, esto es cinco Giga años (5 Gyr). En secciones posteriores tendremos la oportunidad de discutir más sobre las características de nuestros halos simulados, los cuales tomamos como condiciones iniciales para las simulaciones de los procesos dinámicos que nos interesa estudiar.

Una propiedad importante en distribuciones de masa esférica es su velocidad circular  $v_c$ , definida como la velocidad de una partícula prueba en una órbita circular en un radio  $r$ . Igualando la aceleración centrípeta con la fuerza que siente la partícula debido a la distribución de densidad, tenemos

$$v_c^2(r) = \frac{rd\Phi(r)}{dr} = \frac{GM_T}{a} \frac{(r/a)}{(1+r/a)^2} \quad (2.5)$$

Calculando la distribución de masa acumulativa para (2.2), usando la relación

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr', \quad (2.6)$$

obtenemos el siguiente resultado

$$M(r) = M_T \left( \frac{r/a}{1+r/a} \right)^2. \quad (2.7)$$

Así, sustituyendo en la expresión para la velocidad circular (2.5), tenemos

$$v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r}, \quad (2.8)$$

como podemos observar, la velocidad circular es una medición de la masa interior a  $r$ .

La velocidad circular presenta un valor máximo y podemos identificar la velocidad máxima que se ha medido en las curvas de luz de galaxias con este parámetro, por lo tanto calculamos el máximo de la velocidad circular (2.8), y obtenemos que este se obtiene cuando se cumple la relación

$$\frac{r}{a} = 1. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, para este par densidad-potencial, el máximo de la velocidad circular se alcanza en el radio de escala y está dada por la siguiente relación

$$v_{pico} = \frac{1}{2}v_*, \quad (2.10)$$

donde  $v_* = \sqrt{\frac{GM_T}{a}}$ .

Otra cantidad importante es la velocidad de escape  $v_e$  definida como

$$v_e = \sqrt{2|\Phi(r)|}. \quad (2.11)$$

Esta definición se obtiene cuando la energía cinética de una partícula es igual al valor absoluto de su energía potencial, es decir, partículas con energía total positiva no están ligadas al sistema. Esto es, para que la partícula pueda escapar del sistema, su velocidad tendrá que ser mayor a la velocidad de escape.

## 2.2. Órbitas

Para el estudio de la Fricción Dinámica seguiremos la trayectoria de sistemas dentro de potenciales generados por halos de Materia Oscura. Primero empezaremos por el problema más sencillo de resolver: el movimiento de una partícula bajo la influencia del campo gravitacional generado por el potencial de la ecuación (2.4). Como puede apreciarse de esta ecuación, se trata de un problema clásico de campo central, de hecho la similitud de este potencial con el del problema de Kepler es evidente. Por esta razón sólo reproduciremos aquí la metodología general que se aplica en su solución. Sin embargo, surgen de inmediato las siguientes preguntas: ¿Qué tipos de órbitas son posibles en un potencial esféricamente simétrico? ¿Cómo se modifican estas órbitas si distorsionamos el potencial?

Para empezar nos enfocaremos al estudio de partículas de masa del orden de los halos de Materia Oscura en campos analíticos suaves, pero los resultados obtenidos los aplicaremos para la generación de nuestras órbitas de los halos de Materia Oscura granulares, conformados por muchas partículas.

De entrada debemos señalar un resultado importante de la mecánica clásica que se conoce como el *Teorema de Bertrand*: En el caso de partículas bajo la influencia de un potencial de campo central que depende sólo de la distancia radial a través de una ley de potencias, los únicos potenciales que garantizan órbitas cerradas estables son el potencial gravitacional (o de Coulomb),  $\Phi(r) \propto -\frac{1}{r}$ , y el de oscilador armónico tridimensional  $\Phi(r) \propto r^2$  (para una demostración completa del teorema ver, por ejemplo Goldstein, *et al.* [7]). Por lo mencionado



anteriormente, podemos ver que para el potencial que nosotros usaremos, aunque similar al primero, ya no están garantizadas las órbitas cerradas.

Las fuerzas gravitacionales son conservativas, por lo que la energía de una partícula dentro de un campo gravitacional se conserva. La energía potencial de una partícula es proporcional a su masa y podemos escribir

$$\Phi(r) = m\phi(r), \quad (2.12)$$

donde  $\phi(r)$  es el potencial gravitacional. Por lo tanto podemos escribir a la energía por unidad de masa de la partícula como

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \phi(r). \quad (2.13)$$

Reescribiendo la ecuación de la energía en coordenadas polares, obtenemos

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \phi(r). \quad (2.14)$$

Pero de la conservación del momento angular por unidad de masa

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = L, \quad (2.15)$$

podemos sustituir en la ecuación de la energía (2.14) y despejar  $dr/dt$ , para obtener así

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2[E - \phi(r)] - L^2/r^2}, \quad (2.16)$$

Que es la ecuación de la órbita para la trayectoria, donde los dos signos nacen del hecho de que la partícula se mueve alternadamente hacia adentro y hacia fuera. Se cumple que  $\dot{r} = 0$  en el punto más cercano al centro de fuerzas, la *periápside* y en el punto más lejano a este centro, la *apoápside*.

El periodo radial  $T_r$  es el tiempo requerido para que la partícula viaje de la apoápside a la periápside y de regreso. Por lo tanto se sigue que el periodo radial es

$$T_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2[E - \phi(r)] - L^2/r^2}}, \quad (2.17)$$

siendo  $r_1$  y  $r_2$  la periápside y la apoápside respectivamente.

Luego, en el viaje de la periápside a la apoápside y de regreso, el ángulo azimutal aumenta una cantidad

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\theta}{dr} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{r^2} \frac{dt}{dr} dr. \quad (2.18)$$

Sustituyendo el valor de  $dt/dr$ ,  $\Delta\theta$  se transforma de la siguiente manera

$$\Delta\theta = 2L \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2[E - \phi(r)] - L^2/r^2}}. \quad (2.19)$$

Así el periodo azimutal es

$$T_\theta = \frac{2\pi}{\Delta\theta} T_r. \quad (2.20)$$

La velocidad angular media de la partícula es  $2\pi/T_\theta$ . Si se cumple que  $\Delta\theta/2\pi$  sea un número racional, la órbita de nuestra partícula será cerrada. En el caso de no serlo, la órbita no será cerrada y generará una órbita tipo roseta que eventualmente pasará por todos los puntos entre los círculos definidos por la periápside y la apoápside.

Hemos encontrado una técnica útil que nos dirá si el potencial del halo de Materia Oscura generará órbitas cerradas. Para resolver las integrales involucradas, construimos un integrador numérico del cual hablaremos más adelante.

## 2.3. Simulaciones

Como hemos dicho, para estudiar el efecto de Fricción Dinámica en halos de Materia Oscura es necesario seguir el comportamiento de muchas partículas dentro de los potenciales típicos que se encuentran para estos sistemas en las simulaciones cosmológicas. Por tratarse de un sistema de muchos cuerpos, el problema no es tratable de manera analítica, por lo tanto haremos uso de simulaciones que nos permitan describir el movimiento sin resolverlo de manera exacta.

En el desarrollo de estas simulaciones existen un gran número de parámetros por determinar, tales como: Las características de los halos a simular, el número de halos que consideraremos, las condiciones iniciales para las trayectorias, por mencionar sólo algunos. El problema general está más allá del alcance y los objetivos del presente trabajo por lo que debemos tomar decisiones adecuadas que permitan limitar el problema, conservando sus características esenciales.

Hemos adelantado que la Fricción Dinámica se presenta siempre que tenemos partículas en movimiento dentro de otro conjunto de partículas, esto nos señala el sistema mínimo que debemos estudiar para describir el fenómeno: Una partícula dentro de un halo de Materia Oscura conformado por un sistema de muchas partículas. Este será el escenario de estudio principal en nuestro trabajo.

La elección del potencial descrito por la ecuación (2.4) también delimita el problema. De hecho, podríamos resolver analíticamente el caso de una partícula masiva en este potencial

suave y describir las trayectorias resultantes, sin embargo; conviene tomar este caso sencillo para establecer la metodología y escoger las condiciones que usaremos durante nuestro estudio más general.

Así, el objetivo final será simular una partícula con masa y velocidad características de una galaxia en un cúmulo de galaxias, evolucionando dentro de un halo formado por muchas partículas que simule el potencial de un cúmulo de galaxias.

Al sistema más grande le llamaremos simplemente *halo* y al más pequeño le llamaremos *satélite*. Como dijimos, este sistema mínimo ya presenta gran parte de la riqueza de la dinámica que se observa en las simulaciones cosmológicas, pero es aún tratable por nuestros métodos semianalíticos y la capacidad computacional de la que disponemos.

En las simulaciones de N-cuerpos que vamos a llevar a cabo, modelamos un sistema de partículas que no colisionan y que interactúan sólo con la fuerza gravitacional. Ésto lo logramos reemplazando el potencial gravitacional puntual por un *potencial suavizado* en el cual cada partícula puede visualizarse como un pequeño bulto de partículas con *radio de suavizado*  $r_{soft}$ . En la práctica este suavizado puede afectar los resultados en escalas lineales de unos cuantos  $r_{soft}$ , por lo que debemos tomar en cuenta esta escala al momento de analizar los resultados.

Para realizar las simulaciones usamos el integrador de N-cuerpos "PKDGRAV" [12]. El cual es un código de árbol adaptado con tamaño de paso variable que se ajusta según las aceleraciones locales [20] y usa fuerzas de suavizado tipo spline que son completamente newtonianas a dos radios de suavizado. Todo el trabajo numérico se llevará a cabo en una computadora tipo pentium con procesador de 3.0 Ghz, FSB de 800Mhz y 1Gb de memoria RAM (a 400Mhz) y sistema operativo Linux.

Para su trabajo numérico PKDGRAV usa unidades tales que la constante gravitacional es adimensional (es decir  $G = 1$ ), de tal manera que las unidades de longitud son Kpc, las de velocidad son  $\text{Kms}^{-1}$ , las de tiempo Giga años y, por lo tanto, la unidad de masa es  $\tilde{M} = 2.32 \times 10^5 M_{\odot}$ . Al menos que se indique explícitamente, estas son las unidades que se usarán para el desarrollo de este trabajo.

Para establecer las características del halo, usamos aquellas que representan el halo de Materia Oscura dentro del cual se espera que se genere un cúmulo de galaxias, es decir, con una masa total del orden de  $10^{15} M_{\odot}$  y una distribución de velocidades gaussiana con dispersión media,  $\sigma = 1000 \text{ Kms}^{-1}$ . En particular, fijamos la masa total en  $2.77 \times 10^{15} M_{\odot}$ , el radio de escala en  $a = 2985 \text{ Kpc}$ , el radio máximo en  $r_{MAX} = 13a$  y el radio de suavizado en  $r_{soft} = a/50$ .

Definidos los parámetros del halo podemos obtener las características que determinan su estructura y que definirán la dinámica interna (figura 2.1).

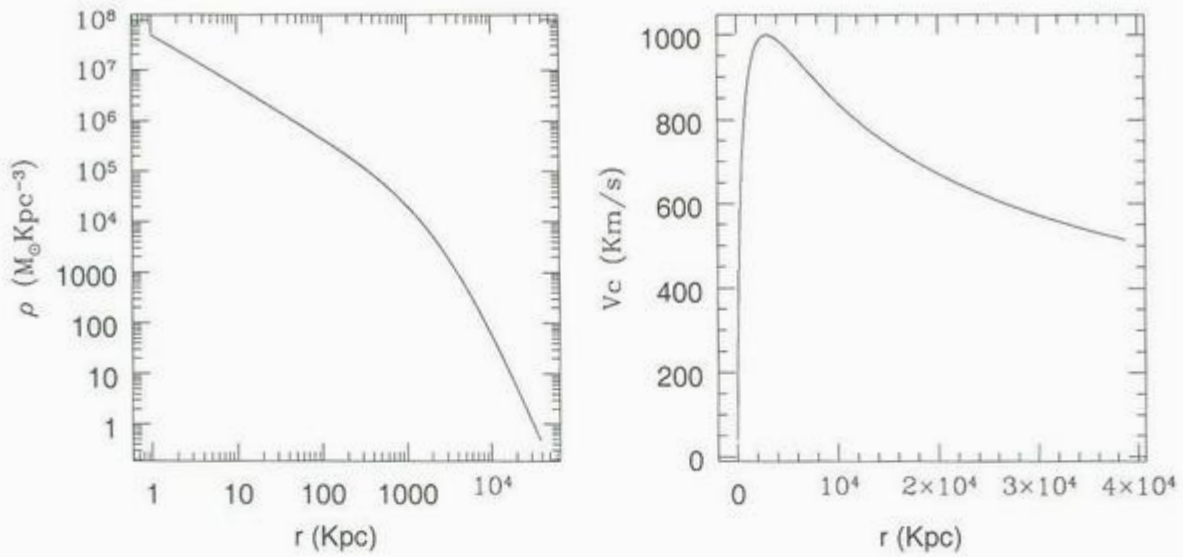


Figura 2.1: Características del halo dada las condiciones iniciales. Izq. Perfil de densidad. Der. Curva de velocidad circular.

Debido a que el satélite representará una galaxia, escogemos su masa,  $m = 2 \times 10^{12} M_{\odot}$ , colocándola con posiciones y velocidades fijadas por el halo, de tal manera que presente órbitas regulares.

Empezaremos con las simulaciones más sencillas realizadas: aquellas donde la galaxia se representa por una partícula prueba y el cúmulo es un potencial analítico suave, correspondiente al halo que acabamos de describir. Para ello introducimos explícitamente la forma específica del potencial del halo en PKDGRAV. Por las características del integrador, el centro de fuerzas tiene coordenadas  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  y podemos fijar las condiciones iniciales colocando a la partícula en un punto espacial de coordenadas  $(x_o, y_o, z_o)$  y con un vector de velocidad  $(v_{ox}, v_{oy}, v_{oz})$ .

Recordemos que el valor de la velocidad circular pico (del orden de  $1000 \text{ Kms}^{-1}$  para nuestro cúmulo simulado), junto con la forma del potencial, determinan las propiedades físicas de los halos (de hecho, fue así como obtuvimos, por ejemplo, el radio de escala). Una vez fijados los parámetros, la curva de velocidad circular es única para el halo, esto nos provee un mecanismo para escoger órbitas circulares de partículas prueba. Por tal razón, si colocamos a la partícula satélite con coordenadas  $(2985, 0, 0)$  y le imprimimos una velocidad tangencial ( $v_T$ ) de  $1000 \text{ Kms}^{-1}$ , bajo la influencia del potencial (2.4), la partícula deberá tener una órbita totalmente

circular cerrada, tardándose alrededor de 18 Gyr en completar una revolución.

Una vez acordadas las condiciones iniciales, dejamos evolucionar a la partícula en el potencial. Observamos, una vez realizada la simulación, que la partícula está en una órbita totalmente circular cerrada y estable como se muestra en la figura 2.2. La partícula tardó un total de 18.75 Gyr para completar su órbita lo cual representó un tiempo de cómputo del orden de un minuto.

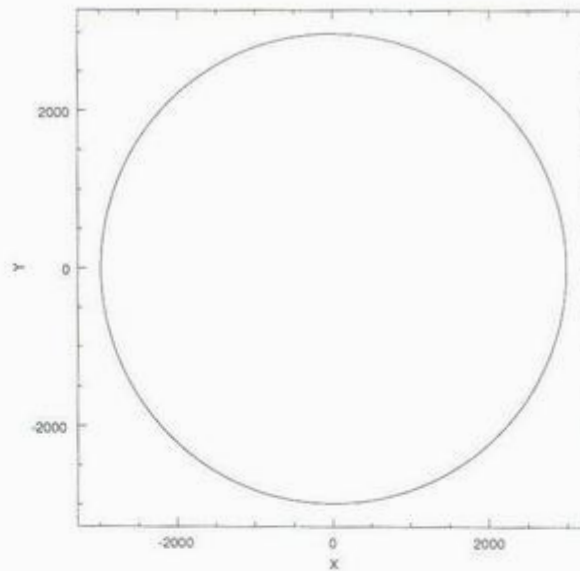


Figura 2.2: Órbita circular de una partícula de masa puntual dentro del potencial  $\Phi(r) = -\frac{GM_T}{r+a}$ .

Procedimos de esta manera para un total de tres órbitas circulares con  $r = .5a$ ,  $v_T = 942.8620$  Kms<sup>-1</sup>;  $r = a$ ,  $v_T = 1000.0000$  Kms<sup>-1</sup> y  $r = 5a$ ,  $v_T = 745.3560$  Kms<sup>-1</sup> (recordemos que el radio de escala  $a$ , es igual a 2985 Kpc). En todos los casos verificamos la estabilidad y forma de la órbita (para el caso  $r = .5a$  la revolución completa tardó alrededor de 10 Gyr, mientras que para el caso  $r = 5a$  la revolución completa se logró en 125 Gyr, empleando ambas alrededor de un minuto de cómputo).

Para enriquecer nuestro estudio, también nos interesa explorar órbitas no circulares. Debido a la similitud de nuestro potencial con el kepleriano, esperamos que éste genere órbitas elípticas estables, solo que ahora, de acuerdo al Teorema de Bertrand, ya no podemos esperar que éstas sean cerradas.

Para generar nuestras órbitas elípticas, haremos una variación en la velocidad inicial de la partícula, cuidando que la energía por unidad de masa (2.13) sea la misma que para los casos circulares, sólo que ahora la velocidad total de la partícula tendrá una componente tangencial y

otra radial.

Para ejemplificar esta técnica para generar orbitas elípticas, tomemos el caso en que la velocidad tangencial es

$$v_T = \frac{1}{2}v_{pico}, \quad (2.21)$$

recordemos que  $v_{pico}$  es la velocidad circular pico del halo ( $1000 \text{ Kms}^{-1}$ ) de tal manera que, para que la energía total siga correspondiendo a la de la órbita circular, es necesario que la velocidad radial sea

$$v_r = \sqrt{v_{pico}^2 - v_T^2} = -866.0254 \text{ Kms}^{-1}, \quad (2.22)$$

donde el signo negativo indica que hemos escogido que el satélite empiece dirigido hacia el centro de fuerzas.

Recordando la ecuacion (2.20), tenemos que verificar que  $\Delta\theta/2\pi$  sea un número racional para que la órbita generada con nuestras condiciones iniciales sea cerrada; esto implica resolver las integrales (2.17) y (2.19). Para ello, escribimos un programa en C++ que calcula las integrales numericamente usando integración trapezoidal\* [8]. Con este integrador obtenemos, para las condiciones iniciales mencionadas en el ejemplo anterior:

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = 0.6379548697\dots, \quad (2.23)$$

esto es,  $\Delta\theta/2\pi$  no es un numero racional, por lo que la orbita elíptica será estable más no cerrada. Este resultado muestra como una modificación muy pequeña al potencial de Kepler (de hecho, el potencial utilizado es la variación más sencilla) ya no permite encontrar órbitas cerradas y estables. No tenemos entonces un método para generar condiciones iniciales, para partículas prueba dentro de este potencial, que garanticen órbitas cerradas. Sin embargo, el método de elección de velocidad radial y tangencial es sencillo de seguir por lo que lo adoptaremos como la forma de generar órbitas no circulares.

En resumen, fijaremos la posición inicial de la órbita elíptica prueba a las coordenadas:  $(x_o, y_o, z_o) = (2985, 0, 0)$  y fijaremos su velocidad inicial en  $(v_{ox}, v_{oy}, v_{oz}) = (-866.025, 500, 0)$ . Una vez obtenidas las condiciones iniciales para esta nueva simulación, ponemos a evolucionar la partícula dentro del potencial suave del halo.

Encontramos que la órbita generada no es cerrada más si es estable, esto es, la órbita si es elíptica pero esta precesando como se muestra en la figura 2.3. En esta ocasión la partícula estuvo confinada a una órbita entre los radios  $r_1 = 829.89 \text{ Kpc}$  y  $r_2 = 4717.81 \text{ Kpc}$ . Permitimos

\*Los detalles del programa se discuten el apéndice A

que evolucionara por un tiempo de 200 Gyr durante el cual recorrió más de 15 períodos radiales y más de 9 períodos azimutales. El tiempo de simulación para esta órbita fue alrededor de 5 minutos de cómputo.

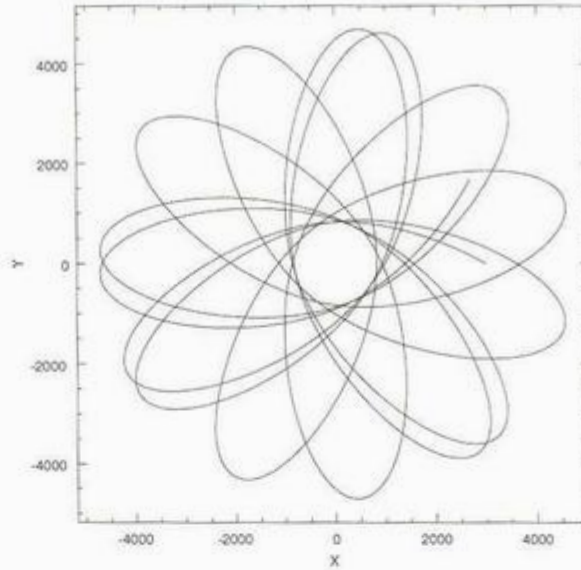


Figura 2.3: Órbita elíptica de una partícula de masa puntual dentro del potencial  $\Phi(r) = -\frac{GM_T}{r+a}$ .

Las simulaciones anteriores nos han permitido conocer el potencial del halo y servirán de guía para la elección de las condiciones iniciales para los casos de una partícula moviéndose en un potencial granular.

Para estudiar el efecto de Fricción Dinámica con más detalle sería interesante, en última instancia, estudiar un sistema en el que muchos halos galácticos de Materia Oscura orbitan dentro del halo de un cúmulo de galaxias. Para darnos una idea de los efectos posibles en esa simulación más complicada, podemos usar el potencial analítico y ver que efecto tiene sobre un halo galáctico.

Primero procederemos a generar el halo de Materia Oscura que estará orbitando dentro del potencial suave. El satélite tendrá las características típicas de aquel que se espera rodee a una galaxia como la Vía Láctea, es decir con una masa del orden de  $10^{12} M_{\odot}$  y una velocidad circular pico de alrededor de  $200 \text{ Kms}^{-1}$ .

Para el satélite elegimos las siguientes características físicas: Fijamos la masa total en  $2 \times 10^{12} M_{\odot}$ , con un radio de escala  $a_{sat} = 53.8462 \text{ Kpc}$ . Para este sistema el radio máximo se fijó en  $r_{MAX} = 13a_{sat}$  y el radio de suavizado en  $r_{soft} = a_{sat}/50$ . Estos parámetros nos permiten definir el perfil de densidad para el satélite, que de nuevo tendrá la misma forma genérica que para el

halo lo cual, a su vez nos permite encontrar el potencial y la curva de velocidad circular, ahora para este sistema más pequeño.

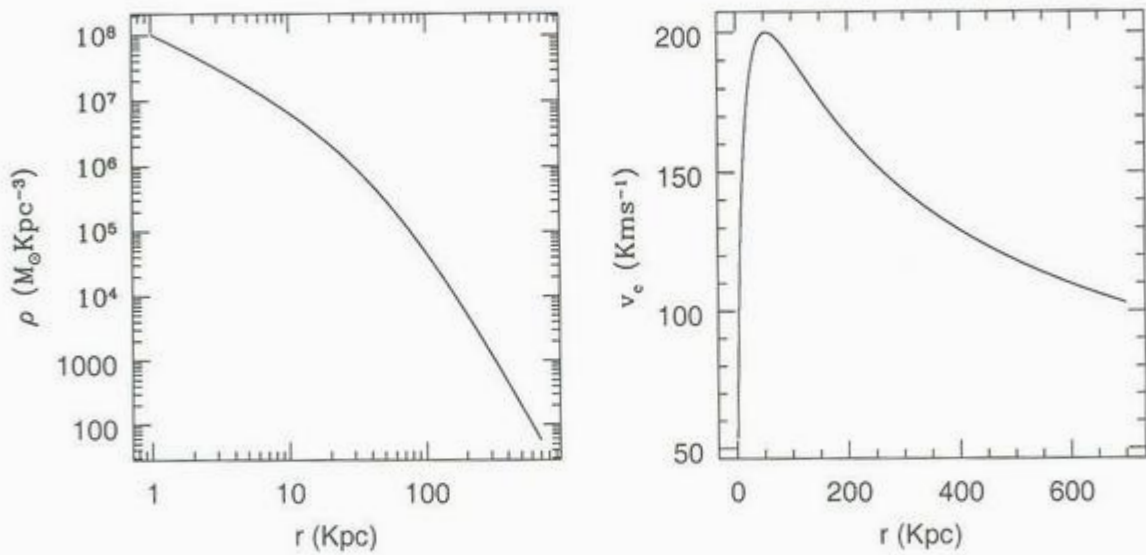


Figura 2.4: Características del satélite dada las condiciones iniciales. Izq. Perfil de densidad. Der. Curva de velocidad circular.

Como se mencionó en la sección 2.1, podemos usar estas expresiones para establecer una distribución de partículas en equilibrio que conformen un halo de Materia Oscura. La técnica consiste en encontrar la función de distribución en el espacio fase, resolviendo la ecuación de Eddington, a partir de la densidad y el potencial específicos encontrados para el halo. Una vez encontrada esta distribución se escogen posiciones y velocidades de manera aleatoria, asumiendo una distribución uniforme para las primeras y una distribución gaussiana para las segundas. Por construcción, esperamos que los halos construidos de esta manera sean estables, sin embargo, una vez inicializado el halo satélite, lo dejamos evolucionar 5 Gyr en aislamiento para verificar que es estable, esto lo corroboramos revisando que se mantiene el mismo perfil de velocidad circular a lo largo del tiempo de simulación en aislamiento. En la figura 2.5 hemos graficado el perfil de velocidad para el satélite antes y después de la simulación en aislamiento, ahí claramente podemos reconocer la estabilidad de este halo.

Ya verificado que el halo generado es estable, lo ponemos a evolucionar en diferentes órbitas circulares, tal y como lo hicimos para el caso de una partícula puntual. Como ya dijimos, la intención es ahora explorar el efecto del potencial suave del halo sobre el satélite.

En esta ocasión calculamos el centro de masa del satélite y será este punto el que servirá de



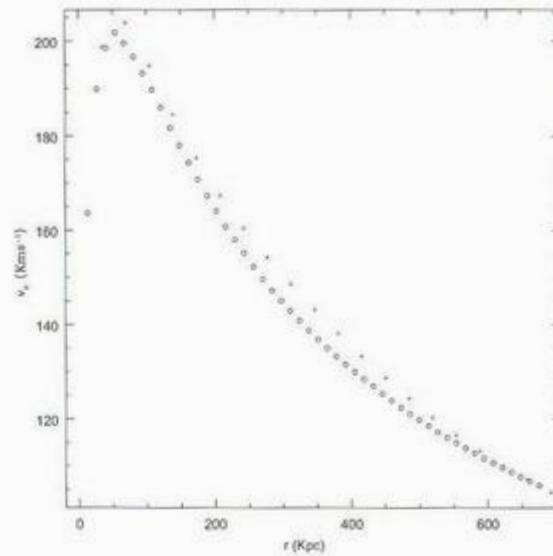


Figura 2.5: Evolución del perfil de velocidad del satélite en aislamiento. Los círculos negros corresponden a  $t = 0$  Gyr. y los triángulos rojos, a  $t = 5$  Gyr.

referencia como la *posición del satélite*. Así, ahora generaremos tres condiciones iniciales para el satélite con una órbita circular, colocando su centro de masa en  $r = .5a$ ,  $r = a$ ,  $r = 5a$ , y las condiciones iniciales para el caso de una órbita elíptica que inicia en  $r = a$ , en estos casos,  $a$  corresponde al radio de escala del halo ( $a = 2985$  Kpc). Por su parte, debemos imprimir al satélite velocidades tangenciales, buscando generar las mismas órbitas circulares que se observaron en el caso en que el satélite era una partícula, a saber:  $v_T = 942.8620$   $\text{kms}^{-1}$ ,  $v_T = 1000.0000$   $\text{kms}^{-1}$ ,  $v_T = 745.3560$   $\text{kms}^{-1}$ , para los casos circulares y  $v_r = -866.0254$   $\text{kms}^{-1}$ ,  $v_T = 500$   $\text{kms}^{-1}$ , para el caso elíptico.

En la figura 2.6 mostramos la configuración para diferentes tiempos, en el plano  $XY$  para el caso en que el centro de masa del satélite está localizado en  $r = a$ . Podemos observar que el comportamiento global del halo reprodujo lo que se observó para las simulaciones de una partícula dentro de este potencial. En general las partículas constituyentes del satélite siguen órbitas circulares, de hecho su centro de masa presenta sólo pequeñas desviaciones de la circularidad, mismas que analizaremos a continuación.

En estas nuevas simulaciones (Figuras 2.6, 2.7, 2.8 y 2.9) es evidente un desprendimiento de partículas del satélite en su tránsito por el potencial suave del halo. Ahora el potencial que mantiene unido al satélite debe competir con el potencial mayor del halo. Para las partículas que se encuentran más alejadas del centro de masa del satélite, la fuerza de marea generada por

el halo llega a ser de tal magnitud que las partículas más exteriores llegan a adquirir suficiente energía cinética que empiezan a orbitar de manera independiente. Estamos ante un efecto que es común en las simulaciones de este tipo de objetos que llamaremos *desprendimiento de marea*. Al perder constituyentes, el satélite pierde masa, sin embargo, sobrevive su núcleo orbitando aproximadamente en la trayectoria original.

Como muestra de que el efecto se debe al potencial del halo vemos que el efecto es más notorio entre más cercano nos encontremos a su centro. De hecho, cuando pusimos al satélite en una órbita que empieza en  $r = .5a$ , después de apenas 30 Gyr el satélite ha perdido 44% de su masa, para el caso en el que la órbita inició en  $r = a$ , la pérdida de masa fue de 39%, después de orbitar por más de 56 Gyr, mientras que cuando se colocó inicialmente en una órbita con  $r = 5a$  observamos que, aún después de 125 Gyr de evolución, el satélite perdió solamente el 4% de su masa. En el caso elíptico el desprendimiento de partículas debido al efecto del potencial suave es mucho más evidente pues por las características de la órbita, el satélite transita en regiones mucho más cercanas al centro de fuerzas, de tal manera que, después de 66 Gyr, el satélite ha perdido el 52% de su masa, esta tendencia continúa, de tal manera que, después de 200 Gyr, ha quedado prácticamente destruido.

Es importante recalcar la relevancia de estas simulaciones debido a que se pueden malinterpretar estos resultados, ya que la desviación de la órbita se puede confundir con el efecto de Fricción Dinámica, pero es de naturaleza diferente. En el siguiente capítulo estudiaremos con detenimiento este último efecto.

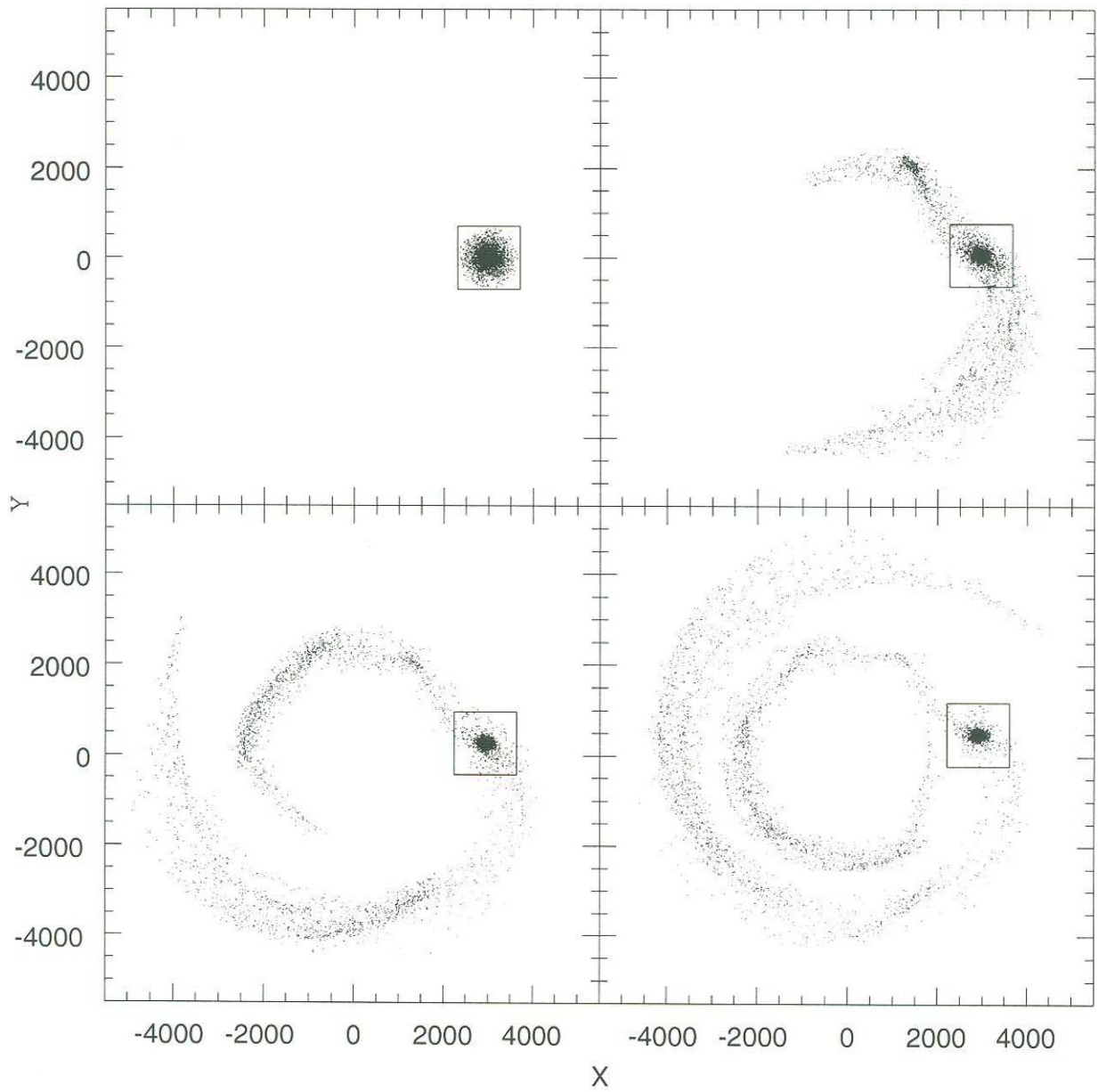


Figura 2.6: Evolución del satélite que inicia en una órbita con  $r = a$ , en un potencial suave. Arriba Izq. Configuración inicial del satélite  $t = 0.00$  Gyr. Arriba Der.  $t = 18.75$  Gyr. Abajo Izq.  $t = 37.51$  Gyr. Abajo Der.  $t = 56.25$  Gyr

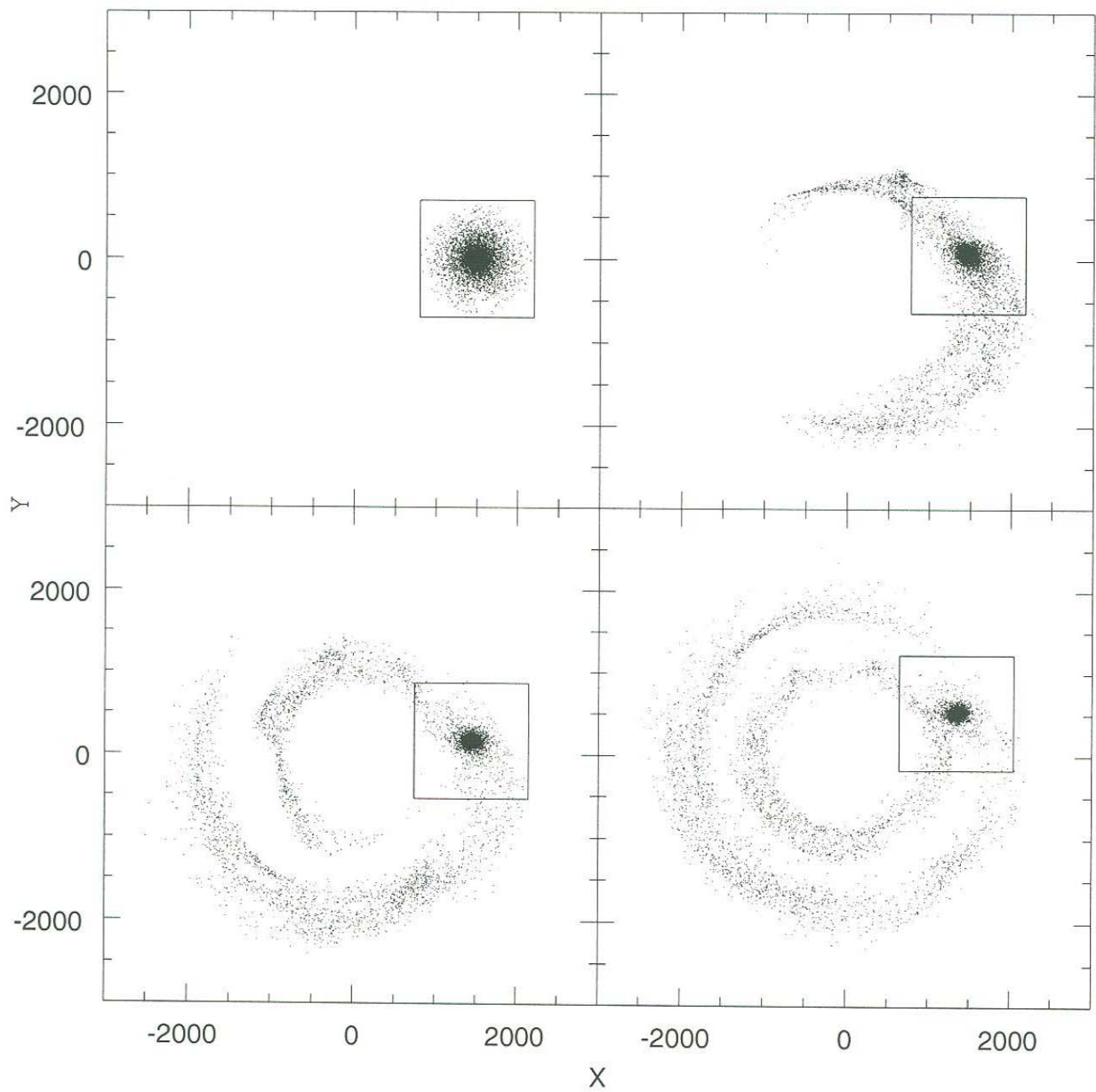


Figura 2.7: Evolución del satélite que inicia en una órbita con  $r = .5a$ , en un potencial suave. Arriba Izq. Configuración inicial del satélite  $t = 0.00$  Gyr. Arriba Der.  $t = 9.98$  Gyr. Abajo Izq.  $t = 19.84$  Gyr. Abajo Der.  $t = 30.00$  Gyr

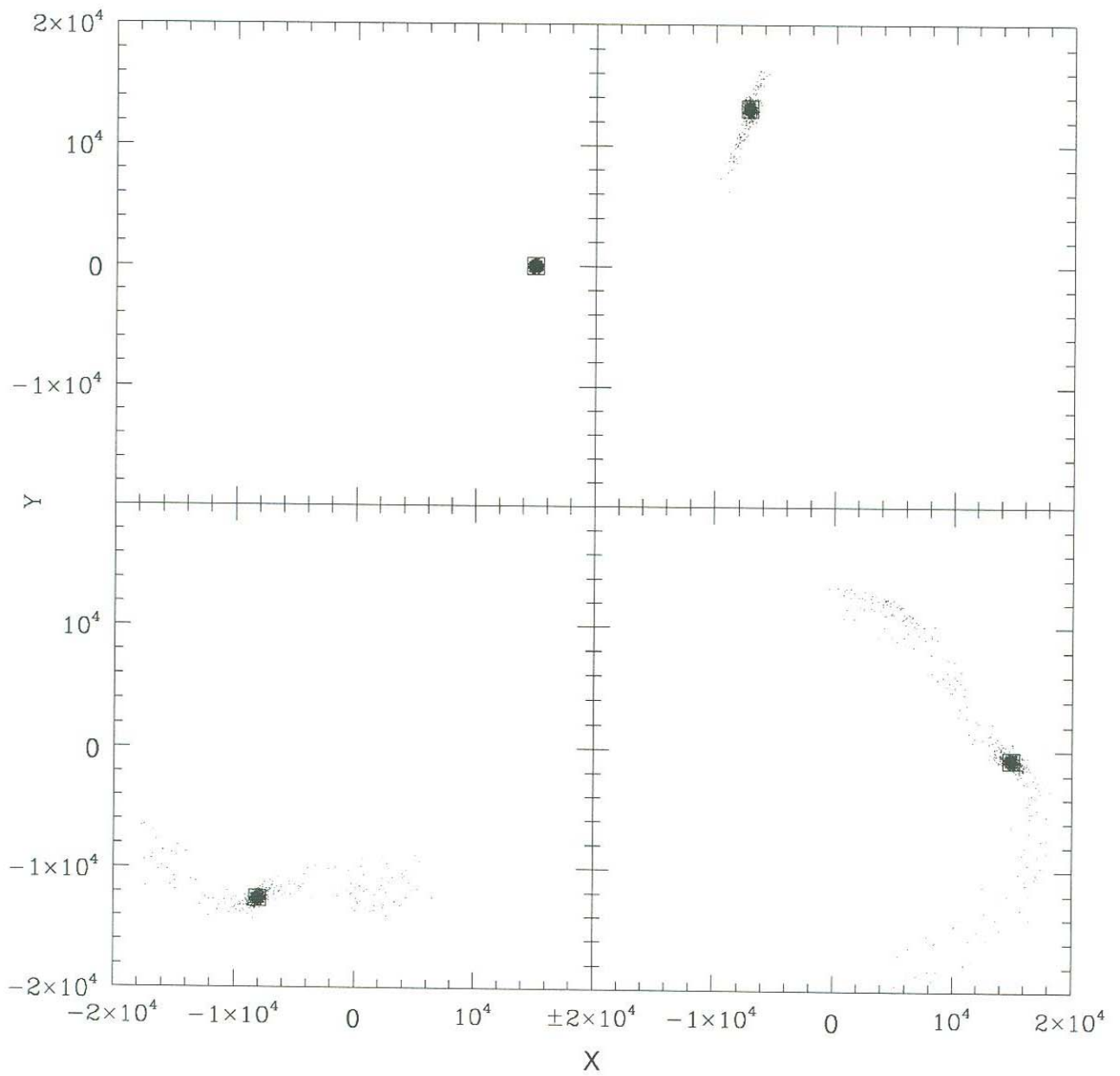


Figura 2.8: Evolución del satélite que inicia en una órbita con  $r = 5a$ , en un potencial suave. Arriba Izq. Configuración inicial del satélite  $t = 0.00$  Gyr. Arriba Der.  $t = 41.54$  Gyr. Abajo Izq.  $t = 83.08$  Gyr. Abajo Der.  $t = 125.00$  Gyr

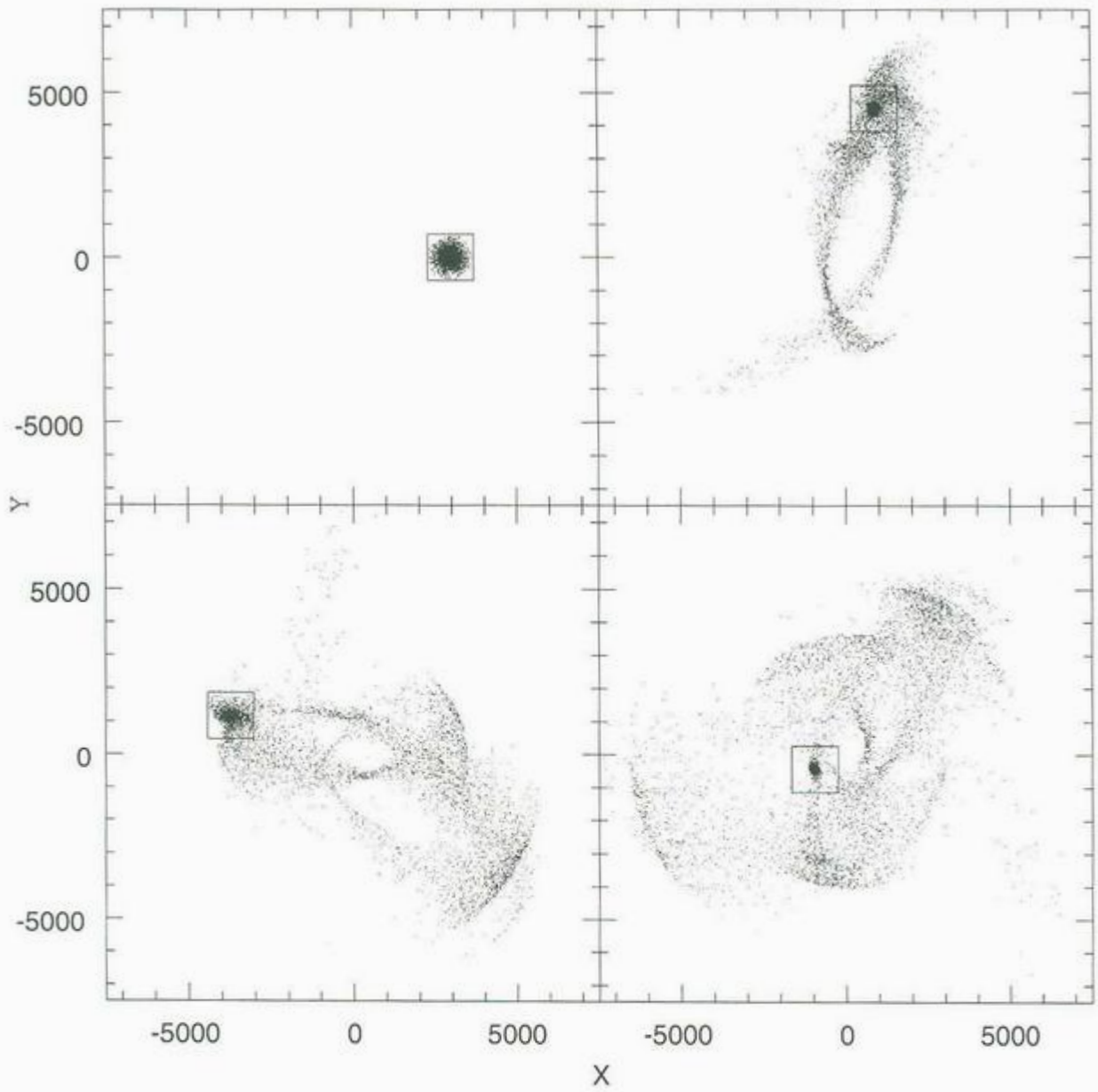


Figura 2.9: Evolución del satélite que inicia su órbita en  $r = a$ , con las condiciones iniciales para ser elíptica, en un potencial suave. Arriba Izq. Configuración inicial del satélite  $t = 0.00$  Gyr. Arriba Der.  $t = 22.17$  Gyr. Abajo Izq.  $t = 44.33$  Gyr. Abajo Der.  $t = 66.65$  Gyr

# Capítulo 3

## *Fricción Dinámica*

La mecánica clásica, quizás una de las ciencias físicas más antiguas, continúa siendo un área de intensa investigación y es una fuente de discusión y ejemplos para la enseñanza. Las aplicaciones van desde el modelado mecánico de procesos celulares mecánicos hasta la dinámica del sistema solar y sistemas galácticos.

El fenómeno de la fricción es introducido usualmente considerando el deslizamiento de un bloque sobre una superficie, donde se establece una clara distinción entre fricción estática y cinética. Un ejemplo clásico de los efectos de una fuerza de fricción es el movimiento de una masa atada a un resorte dentro de un medio viscoso, donde se resuelve la ecuación diferencial correspondiente y se estudia su comportamiento.

El propósito de este trabajo es el brindar un ejemplo de la astronomía muy relacionado con la fricción mecánica estándar, llamado: *Fricción Dinámica*. Este proceso fue primero introducido en sistemas estelares por Subrahmanyan Chandrasekhar y resumidamente consiste en lo siguiente: una partícula masiva  $M$  experimenta una fuerza de arrastre cuando se mueve en un mar de partículas mucho mas ligeras  $m$  mediante el intercambio de energía y momento.

La Fricción Dinámica es importante en estudios astronómicos de, por ejemplo, el destino de galaxias satélites o cúmulos globulares orbitando una galaxia, la subestructura de halos de Materia Oscura rodeando galaxias, y el movimiento de agujeros negros en los centros de las galaxias. También ha sido propuesta para explicar la formación de binarias en el cinturón Kuiper, y la migración de planetas masivos como Júpiter en otros sistemas solares de orbitas externas ( $\geq 1AU^*$ ) a orbitas pequeñas ( $\leq 0.1AU$ ) donde son observados[6].

### 3.1. Fricción Dinámica

Podemos entender el concepto de la Fricción Dinámica que experimenta una partícula masiva  $M$  al moverse a través de un sistema de estrellas mucho más ligeras  $m$  de las siguientes dos formas (que son equivalentes):

---

\*Aquí hemos usado la Unidad Astronómica,  $AU$ , que corresponde a la distancia media sol-tierra y equivale a  $1.49597892 \times 10^{13}$  cm.

1. La partícula  $M$  produce una región de sobre densidad de estrellas detrás de ella, parecida a la estela producida por el movimiento de un barco; esta región más densa genera un arrastre gravitacional sobre  $M$ , llevándola a su desaceleración.
2. La partícula  $M$  se mueve en el mar de partículas ligeras de masa  $m$  y ocurre un intercambio de energía.

Empecemos por escribir la fuerza que experimentará una partícula prueba de masa  $M$  cuando se mueva a una velocidad  $v_c$  a un radio  $r$  en una órbita circular dentro de un halo compuesto de muchas partículas de masa  $m$ [9].

$$F(r) = -\frac{4\pi \ln \Lambda G^2 M^2 \rho(r)}{v_c^2(r)} \left[ \operatorname{erf}(X) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-X} \right], \quad (3.1)$$

donde  $v_c(r)$  es la velocidad circular del halo,  $X = v_c/(\sqrt{2}\sigma)$ ; siendo  $\sigma$  la dispersión de velocidad del halo,  $\operatorname{erf}(X)$  es la función error, y  $\ln \Lambda$  es conocido como logaritmo Coulombiano el cual es una medida del parámetro de impacto máximo  $b_{\text{máx}}$ . El parámetro de impacto es la distancia en la cual la densidad de partículas es pequeña en la vecindad de la partícula perturbadora (tomaremos al parámetro de impacto como el radio máximo del halo en el cual orbitará la partícula,  $r = 13a$ ).

$$\Lambda = \frac{b_{\text{máx}} v_c^2}{G(M+m)}. \quad (3.2)$$

Como estamos considerando que la partícula estará orbitando en el halo, recordemos que este tiene un perfil de densidad de la forma

$$\rho(r) = \frac{M_T}{2\pi a^3} \frac{1}{r/a (1+r/a)^3}, \quad (3.3)$$

y su velocidad circular está dada por

$$v_c^2(r) = \frac{GM_T}{a} \frac{r/a}{(1+r/a)^2}, \quad (3.4)$$

recordando que  $M_T$  es la masa truncada del halo y  $a$  es su radio de escala, como se describió en el Capítulo 2. Haciendo la aproximación de que el halo tiene una dispersión de velocidades  $\sigma = v_c/\sqrt{2}$ , podemos escribir la ecuación (3.1) como

$$\frac{Fr}{M} = -\frac{2 \ln \Lambda GM}{a} \left[ \operatorname{erf}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \right] \frac{1}{(r/a)(1+r/a)}. \quad (3.5)$$



La ecuación (3.5) es una fuerza tangencial en sentido opuesto al movimiento de la partícula a través del halo y la afecta disminuyéndole su energía cinética. Esta pérdida de energía se ve reflejada en un cambio en el momento angular de la partícula.

Si consideramos que la pérdida de momento angular se debe al trabajo realizado por la torca producida por la fuerza de fricción y que la partícula satélite cae siempre a órbitas circulares, podemos establecer la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{M} \frac{dL}{dt} = -\frac{Fr}{M}. \quad (3.6)$$

Además, como el satélite permanecerá en órbita circular, podemos calcular el momento angular, obteniendo el siguiente resultado:

$$\frac{L}{M} = rv_c(r), \quad (3.7)$$

esto surge debido a que la velocidad del satélite tiene solamente una componente tangencial (de nuevo aplicando la condición de que las órbitas son siempre circulares). Al calcular  $dL/dt$ , obtenemos

$$\frac{1}{M} \frac{dL}{dt} = \frac{v_c(r)}{2} \left( \frac{3+r/a}{1+r/a} \right) \frac{dr}{dt}. \quad (3.8)$$

Así, igualando esta expresión con (3.5) y despejando  $dr/dt$ , obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4 \ln \Lambda G^{1/2} M}{(aM_T)^{1/2}} \frac{1+r/a}{(r/a)^{3/2}(3+r/a)} \left[ \operatorname{erf}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \right]. \quad (3.9)$$

Esta es la ecuación para obtener el radio a un tiempo determinado, la cual dependerá de las condiciones iniciales. Para simplificar hacemos un cambio de variable,  $y = r/a$ , obteniendo así:

$$\frac{dy}{dt} = -K \frac{1+y}{y^{3/2}(3+y)}, \quad (3.10)$$

donde

$$K = \left( \frac{4 \ln \Lambda G^{1/2} M}{(a^3 M_T)^{1/2}} \right)^{-1} \left[ \operatorname{erf}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \right]^{-1}.$$

Una vez obtenida la integral<sup>\*\*</sup>, tenemos el siguiente resultado

$$t(y) = K \left[ \frac{2}{5} y_0^{5/2} + \frac{4}{3} y_0^{3/2} - 4 y_0^{1/2} + 4 \arctan(y_0)^{1/2} - \frac{2}{5} y_0^{5/2} - \frac{4}{3} y^{3/2} + 4 y^{1/2} - 4 \arctan(y)^{1/2} \right]. \quad (3.11)$$

<sup>\*\*</sup> Los detalles del cálculo de esta integral se presentan en el apéndice C

Esta ecuación (3.11) es un buen método para obtener el tiempo que tardaría una partícula en caer al centro del halo en el cual orbita, sin embargo, hay ciertas condiciones que se tienen que cumplir para que esta aproximación sea confiable:

1. La masa de la partícula prueba no debe ser comparable a la masa del halo, esto es con el fin de que no tenga suficiente energía tal que domine sobre el potencial del halo.
2. La órbita de la partícula no debe estar cerca del centro o más allá del límite del halo. Si la partícula se encuentra orbitando prácticamente en el centro, no sentirá el efecto de la Fricción Dinámica pues ya ha alcanzado al centro del halo. Si la partícula se encuentra en regiones del límite del halo, ésta no se verá afectada por el potencial del halo y no quedará fuertemente ligada a él.
3. La órbita, aunque decae, siempre es totalmente circular (este fue un elemento esencial del cálculo realizado anteriormente, por ejemplo al calcular el momento angular como en 3.7).

Si la órbita es excéntrica, el tiempo obtenido de la aproximación de Chandrasekhar (3.11) puede ser mayor o menor al tiempo observado en la simulación. Sin embargo, vamos a aplicar nuestro método a un caso elíptico para probar su aplicabilidad.

En el caso en que las trayectorias siempre decaen en órbitas circulares, esperamos que la curva de decaimiento calculada sea similar al decaimiento obtenido en la simulación.

## 3.2. Simulaciones

Ahora tenemos que construir el halo en el cual estará orbitando nuestro satélite. Como mencionamos anteriormente, este halo tendrá las características típicas de un cúmulo de galaxias: una masa de alrededor de  $3 \times 10^{15} M_{\odot}$ , un radio de escala de  $a = 2985$  Kpc y una velocidad circular pico de  $1000 \text{ Kms}^{-1}$ . Además, estará formado por 10,000 partículas, tendrá un radio máximo de 13 veces su radio de escala y un radio de suavizado  $r_{soft} = a/50$ .

Ya generado el halo dentro del cual simularemos las distintas órbitas, lo pusimos a evolucionar en aislamiento 5 Gyr para confirmar que el halo construido es estable y no presenta formaciones de estructuras, las cuales podrían afectar al satélite. Para corroborar la estabilidad, revisamos que se mantenga el mismo perfil de velocidad circular.

Siguiendo de la misma manera que en los casos cuando teníamos el potencial suave, ponemos al satélite a orbitar dentro de este halo. Primero lo haremos para una órbita que inicia en un

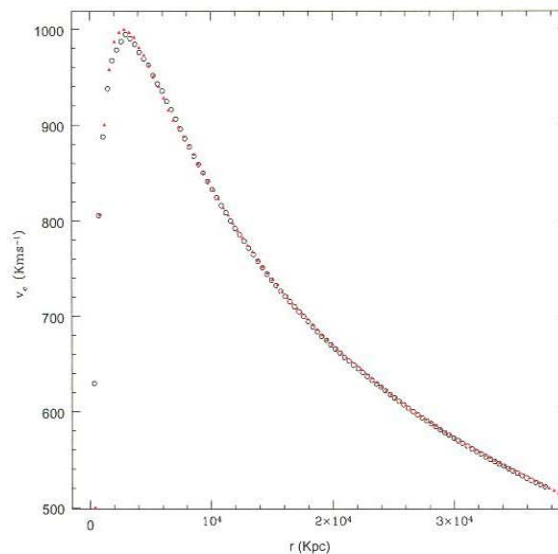


Figura 3.1: Evolución del perfil de velocidad del halo en aislamiento. Los círculos negros corresponden a  $t = 0$  Gyr. y los triángulos rojos, a  $t = 5$  Gyr.

radio de 2985 Kpc ( $r = a$ ), con una velocidad tangencial  $v_T = 1000.0000$  Kms $^{-1}$ . Para este caso, dejamos evolucionar al satélite dentro del halo 200 Gyr para poder apreciar el efecto de la fuerza de arrastre. Esta simulación tardó alrededor de 25 horas de cómputo.

Al observar los resultados vemos que se presenta un efecto del halo sobre el satélite, mismo que hace que éste pierda energía y por lo tanto caiga hacia el centro del halo. En la figura 3.2 se muestra la trayectoria del satélite para estas condiciones. De la figura, es evidente que la partícula se ve alterada por una fuerza de arrastre. A esta fuerza la modelaremos como la Fricción Dinámica.

Aplicamos las condiciones iniciales a nuestro modelo, y obtenemos (al sustituir en la ecuación 3.11) una relación para el decaimiento del radio, esperado por la aproximación de Chandrasekhar (radio teórico):

$$t(r) = 150.3821 \left[ -\frac{34}{15} + 4 \arctan(1) - \frac{2}{5} \left(\frac{r}{a}\right)^{5/2} - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} + 4 \left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} - 4 \arctan\left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} \right]. \quad (3.12)$$

Con los datos obtenidos de la simulación, podemos hacer una comparación directa del decaimiento del radio de la órbita y la predicción que se obtiene de la ecuación (3.12). En la figura 3.3 podemos ver que la curva obtenida de los datos de la simulación presenta oscilaciones irregulares, esto nos indica que la órbita ha perdido circularidad prácticamente desde el inicio.

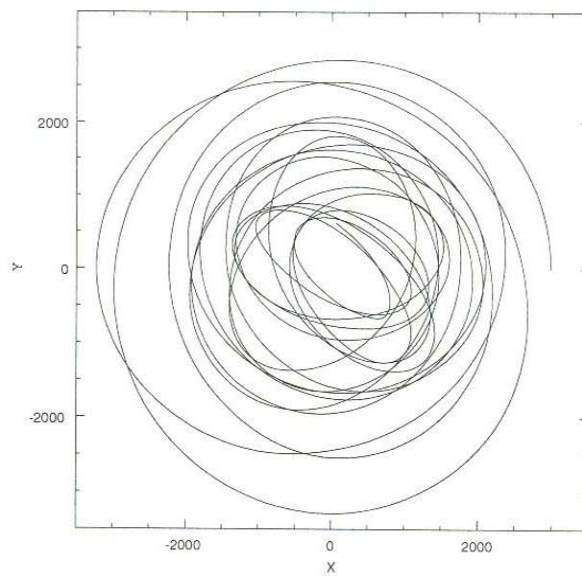


Figura 3.2: Órbita descrita por el satélite que inicia en una órbita con  $r = a$ .

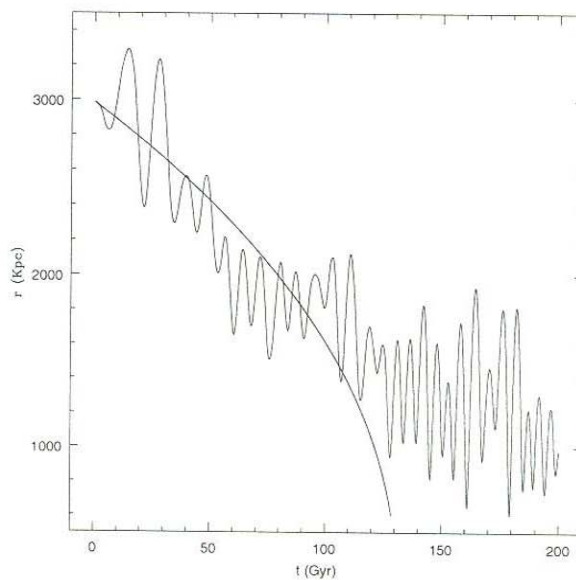


Figura 3.3: Comparación del decaimiento del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia en  $r = a$ .

Por otra parte, como se dijo, la aproximación fue construida tomando en cuenta que las órbitas decaen siempre conservando su circularidad; sin embargo vemos que, para estas condiciones, describe la tendencia de decaimiento de la órbita para los primeros 90 Gyr; desde ese momento hay una evidente separación entre la tendencia predicha por el radio teórico y la que presenta la simulación. De hecho a partir de los 130 Gyr podemos ver que la partícula ya no decae al centro tan rápidamente como en la primera parte de su evolución. Si calculamos, de la ecuación (3.12), el tiempo total para decaer desde el radio inicial hasta el centro del halo, obtenemos que a la partícula le tomaría  $t = 131$  Gyr. En contraste, vemos en la simulación que la partícula no ha llegado al centro e incluso sigue orbitando, es decir, la órbita sobrevive más de lo esperado.

Considerando que el tiempo de vida disponible para los cúmulos de galaxias es menor a 15 Gyr nuestra aproximación sencilla parece predecir la tendencia del movimiento interno de las galaxias durante su existencia, sin embargo buscamos explorar hasta donde podemos llevar a la aproximación.

De manera similar al caso de la partícula dentro de un potencial suave, se han generado simulaciones de órbitas con condiciones iniciales:  $r = .5a$ ,  $v_T = 942.862 \text{ Kms}^{-1}$  y  $r = 5a$ ,  $v_T = 745.356 \text{ Kms}^{-1}$ , las cuales dieron origen a órbitas circulares para este potencial.

Para el primer caso, se han sustituido las condiciones iniciales en 3.11 y hemos encontrado la relación para el decaimiento del radio esperado por la aproximación de Chandrasekhar.

$$t(r) = 53.9498 \left[ -\frac{97}{30\sqrt{2}} + 4 \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{2}{5} \left( \frac{r}{a} \right)^{5/2} - \frac{4}{3} \left( \frac{r}{a} \right)^{3/2} + 4 \left( \frac{r}{a} \right)^{1/2} - 4 \arctan \left( \frac{r}{a} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.13)$$

En la figura 3.4b presentamos la comparación de este radio con el observado. De nueva cuenta observamos que la órbita pierde, casi desde el inicio, toda circularidad ya que se presentan oscilaciones irregulares para el radio como función del tiempo. Contrario al caso anterior (cuando la órbita inicia en  $r = a$ ), el radio teórico no describe la tendencia de decaimiento de la órbita, pues en la primera parte de la simulación no se observa una tendencia clara a decaer al centro del halo. De hecho a partir de los 50 Gyr es cuando se observa esta tendencia. Otro resultado que se desprende de este hecho es que la órbita sobrevive casi 9 veces más de lo esperado ya que, según el cálculo de la aproximación, al setélite le tomaría 9.47 Gyr para decaer al centro del halo, mientras que en la simulación la órbita sobrevive por 90 Gyr.

Como hemos mencionado, la aproximación fue construida tomando en cuenta que las órbitas decaen siempre conservando su circularidad.

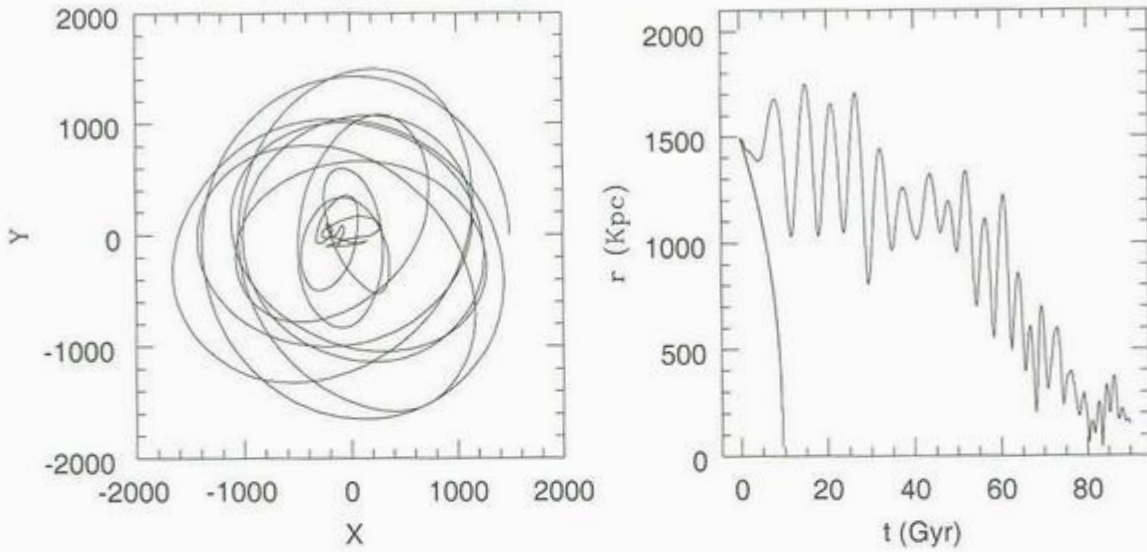


Figura 3.4: a) Izq. Órbita descrita por el satélite. b) Der. Decaimiento del radio. Para el caso en que el satélite inicia en una órbita con  $r = .5a$ .

Continuando de la misma manera con el siguiente caso para las condiciones iniciales, al sustituirlas en 3.11, encontramos la relación para el radio teórico predicho por la aproximación de Chandrasekhar

$$t(r) = 1807.6890 \left[ \frac{38}{3} \sqrt{5} + 4 \arctan(\sqrt{5}) - \frac{2}{5} \left( \frac{r}{a} \right)^{5/2} - \frac{4}{3} \left( \frac{r}{a} \right)^{3/2} + 4 \left( \frac{r}{a} \right)^{1/2} - 4 \arctan \left( \frac{r}{a} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.14)$$

De nueva cuenta, con los resultados obtenidos de la simulación y 3.14, podemos comparar el decaimiento del radio teórico con el observado. Presentamos los resultado de esta simulacion en la figura 3.5

Observamos que, una vez más, la órbita que sigue el satélite pierde, desde el inicio, toda circularidad. Contrario al caso anterior, el radio teorico obtenido de 3.14 describe de manera muy similar a la tendencia de la órbita. Debido a la lejanía del centro del halo, el satélite transita por regiones de menor densidad de partículas y pierde importancia la contribución de la Fricción Dinámica. Esta pérdida de importancia se observa en la figura 3.5 pues no hay una tendencia clara del satelite a decaer al centro del halo.

Para el caso  $r = .5a$  la simulación fue por 90 Gyr tardando aproximadamente 12 hrs de cómputo, mientras que para el caso  $r = 5a$  la simulación fue de 911 Gyrs tardando alrededor de

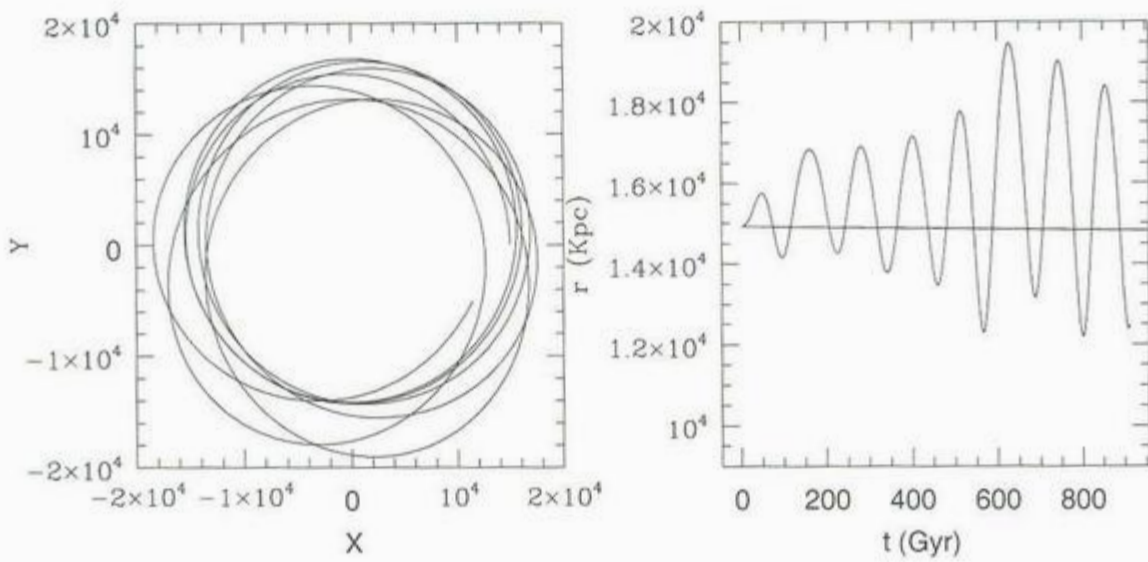


Figura 3.5: a) Izq. Órbita descrita por el satélite. b) Der. Decaimiento del radio. Para el caso en que el satélite inicia en una órbita con  $r = 5a$ .

4 días de cómputo.

### 3.2.1. Órbitas elípticas

En virtud de que hemos observado que este método sencillo funciona para predecir la tendencia del decaimiento de las órbitas, a pesar de que éstas pierden su circularidad, decidimos hacer un primer intento por extenderlo a órbitas que fueron construidas para ser elípticas, como las descritas en el capítulo anterior.

Ya hemos hecho un estudio del efecto de Fricción Dinámica para  $r = .5a$ ,  $r = a$  y  $r = 5a$ , en donde vimos que el segundo caso presentaba una buena oportunidad para estudiar este efecto (se puede ver como un caso intermedio en el cual la tendencia del decaimiento de la órbita es bien descrito por la aproximación de Chandrasekhar). Por esta razón, construiremos el caso elíptico iniciando en  $r = a$ . En el capítulo anterior presentamos una metodología para generar este tipo de órbitas en la cual, con una modificación en las velocidades tangencial y radial, podíamos obtener distintas trayectorias con esta geometría.

Recordemos que para establecer una órbita escogemos una energía y momento angular iniciales (esto corresponde a fijar la posición y la velocidad iniciales del satélite); sin embargo, en el caso circular para potencial suave, fijando la energía y la magnitud del momento angular produce dos órbitas indistinguibles, una con el momento angular orientado en el eje  $Z$  positivo y otra en

el caso contrario (es decir, en un caso el satélite orbita en contra del sentido de las manecillas del reloj y el otro a favor de este sentido). Para el caso elíptico, debido a que la simulación es finita, si es posible hacer una distinción entre las órbitas girando en diferentes sentidos. A falta de un criterio para escoger alguna de ellas simularemos los dos casos. Ambas simulaciones se dejaron evolucionar 200 Gyr tardando alrededor de 25 hrs. de cómputo cada una.

Como se ha hecho en los casos anteriores, haremos una comparación entre la tendencia de decaimiento obtenida con la aproximación de Chandrasekhar y el radio de la órbita tomada directamente de la simulación. Notemos que en el cálculo de la aproximación sólo intervienen la posición y la magnitud de la velocidad iniciales, por construcción estas variables son las mismas para las dos órbitas elípticas que para el caso de órbita circular que iniciaba en  $r = a$ , por lo que la curva de tendencia del radio estará descrita por la ecuación 3.12.

Para el caso de la órbita con momento angular orientado en la dirección positiva del eje  $Z$  (condiciones iniciales:  $r = a$  y  $v_r = -866.025 \text{ Kms}^{-1}$ ,  $v_T = 500 \text{ Kms}^{-1}$ ). Observamos que la órbita presenta tres lóbulos principales y una notoria estabilidad, misma que se se refleja en la gráfica del radio donde vemos que el decaimiento de la órbita es pequeño. Con la aproximación de Chandrasekhar se esperaba que el satélite decayera al centro del halo en un tiempo de 131 Gyr, sin embargo la simulación dura 200 Gyr y en este tiempo el satélite no alcanza a llegar a este punto. Estos resultados se observan en la figura 3.6. Notemos que este comportamiento era de esperarse ya que, por construcción esta órbita no era circular.

En el otro caso de órbita elíptica (condiciones iniciales:  $r = a$  y  $v_r = -866.025 \text{ Kms}^{-1}$ ,  $v_T = -500 \text{ Kms}^{-1}$ ) en donde ahora el momento angular está orientado en la dirección negativa del eje  $Z$  el movimiento fue radicalmente distinto. Ahora no se presenta alguna estructura regular y el decaimiento es más notorio. De hecho observamos que la tendencia calculada por la aproximación se apega más a la obtenida directamente de la simulación. A diferencia del caso anterior el satélite prácticamente ha alcanzado el centro del halo alrededor de los 160 Gyr, de nuevo esto es más consistente con el tiempo esperado de la aproximación. Estos resultados se grafican en la figura 3.7. Es sorprendente el hecho de que se observe una mejoría en la capacidad de la aproximación para describir al sistema simulado, a pesar de que por construcción la órbita es no circular.

De los últimos resultados surge la pregunta: ¿Porqué es tan diferente el efecto de Fricción Dinámica para ambos casos?



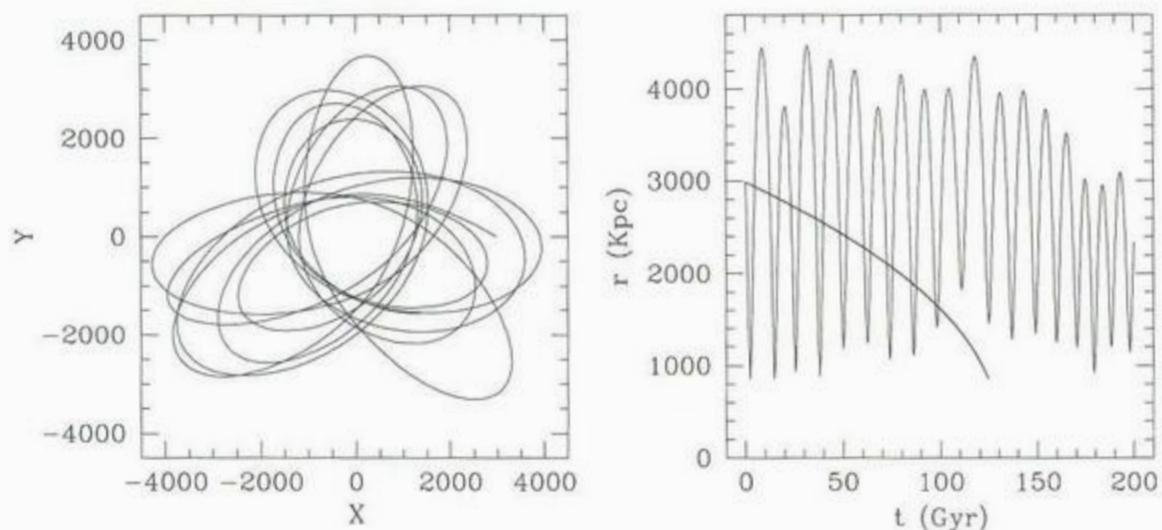


Figura 3.6: a) Izq. Órbita descrita por el satélite. b) Der. Decaimiento del radio. Para el caso en que el satélite inicia en  $r = a$ , con las condiciones iniciales para ser elíptica, girando en contra del sentido de las manecillas del reloj.

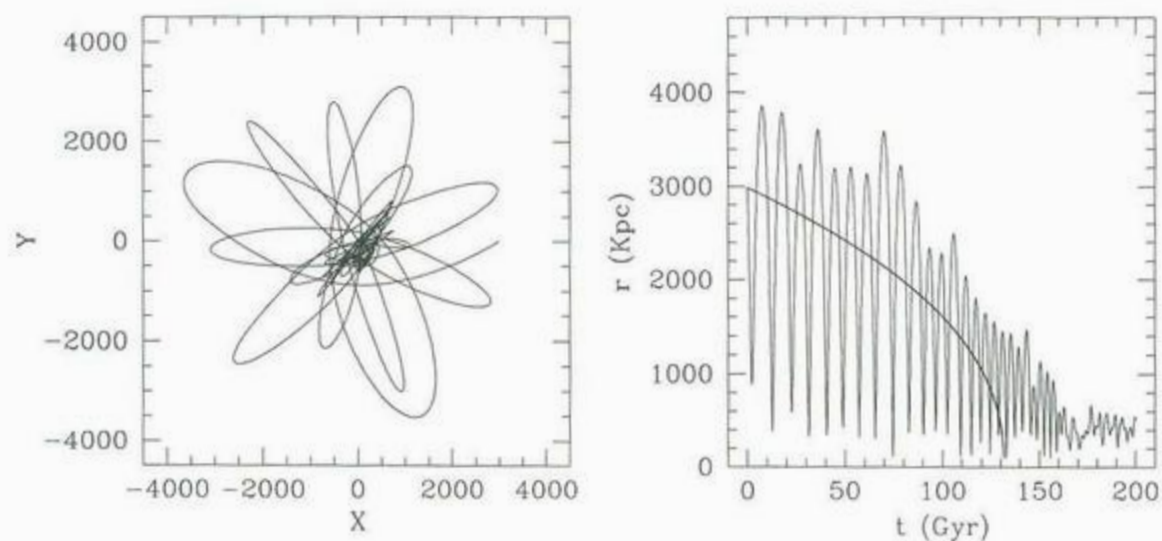


Figura 3.7: a) Izq. Órbita descrita por el satélite. b) Der. Decaimiento del radio. Para el caso en que el satélite inicia en  $r = a$ , con las condiciones iniciales para ser elíptica, girando a favor del sentido de las manecillas del reloj.

Como ya mencionamos, la única diferencia entre ambas trayectorias fue el sentido del momento angular inicial,  $\mathcal{L}_o$ , para el satélite. En el primer caso,  $\mathcal{L}_o$  está orientado inicialmente en la dirección positiva del eje  $Z$  mientras que en el segundo está orientado en sentido opuesto. Con el objetivo de encontrar el origen de la diferencia entre estos casos, estudiaremos la evolución en el tiempo del momento angular del satélite,  $\mathcal{L}$ . Para entender esta evolución basta con calcular el momento angular por unidad de masa:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\mathcal{L}}{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{V} \\ &= (yv_z - zv_y)\hat{i} + (zv_x - xv_z)\hat{j} + (xv_y - yv_x)\hat{k} \\ &= l_x\hat{i} + l_y\hat{j} + l_z\hat{k} \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde hemos usado coordenadas cartesianas con la notación convencional para las componentes de la base:  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ . De aquí en adelante nos referimos a esta cantidad simplemente como *el momento angular*

Al examinar la expresión (3.15) reconocemos que, en el sistema de unidades usado, las unidades para el momento angular serán:  $[l] = \bar{l} = \text{Kpc Kms}^{-1}$ .

Tenemos a nuestra disposición (entre otros parámetros de la evolución) las posiciones y velocidades del satélite para distintos tiempos, con esta información podemos calcular el momento angular a lo largo del recorrido del satélite por el halo.

Hemos graficado el resultado de este cálculo para las diferentes componentes cartesianas de momento angular del satélite, así como la magnitud de su momento angular total: El caso en el que la órbita gira en contra del sentido de las manecillas del reloj, en la figura 3.8 y aquel en que gira a favor de este sentido, en la figura 3.9.

Al comparar ambas gráficas podemos constatar la diferencia de las órbitas: En el primer caso (figura 3.8) el momento angular en el eje  $Z$  corresponde, prácticamente, al momento angular total de la órbita, sin embargo aparece un nuevo efecto: la proyección del momento angular en el eje  $Y$  crece casi desde el inicio hasta llegar a tener, en magnitud, el mismo valor que el momento angular total; después de los 100 Gyr de evolución, esta componente de momento se estabiliza en un valor que es prácticamente la mitad de la magnitud del momento angular total. De hecho, algo similar sucede con la proyección de momento a lo largo del eje  $X$  sólo que en este caso es menos dramático.

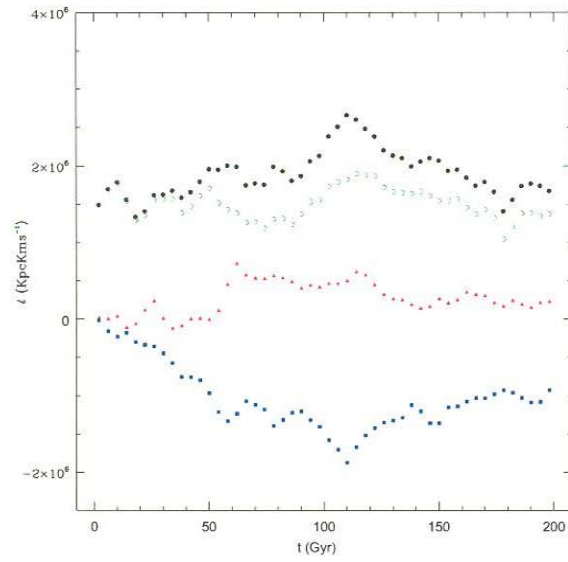


Figura 3.8: Evolución del momento angular cuando el satélite inicia en una órbita elíptica en  $r = a$  que gira en contra del sentido de las manecillas del reloj. Negro  $l$ , rojo  $l_x$ , azul  $l_y$ , verde  $l_z$ .

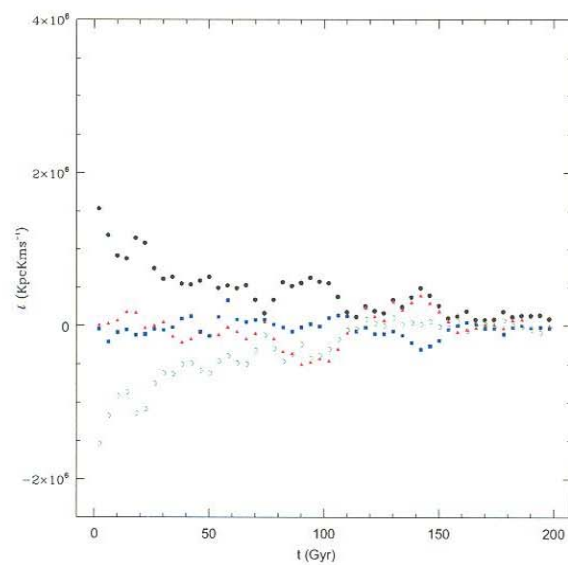


Figura 3.9: Evolución del momento angular cuando el satélite inicia en una órbita elíptica en  $r = a$  que gira en a favor del sentido de las manecillas del reloj. Negro  $l$ , rojo  $l_x$ , azul  $l_y$ , verde  $l_z$ .

La estabilidad de la órbita se ve reflejada en la conservación de la magnitud del momento angular total, pero el crecimiento de las proyecciones de momento en los ejes  $X$  y  $Y$  nos indica claramente que la órbita ha dejado su plano inicial de evolución. Ahora nos preguntamos si la Fricción Dinámica conduce a otros efectos, aparte de hacer que el satélite caiga al centro del halo.

Para el segundo caso (figura 3.9) se observa claramente la pérdida de momento angular total casi del inicio, además se observa como su componente en el eje  $Z$  corresponde, prácticamente, de manera similar que en el anterior, al momento angular total de la órbita. Ésto, y el hecho de que las componentes de momento angular en los ejes  $X$  y  $Y$  se mantienen oscilando alrededor de cero nos indica que la órbita se mantiene en su plano de rotación original.

Surge ahora la pregunta: ¿Cuál es la fuente del crecimiento en momento angular fuera del eje  $Z$  que se observó en el caso anterior?

Al reflexionar esta última pregunta reconocemos que el satélite sólo puede adquirir momento angular influenciado de alguna manera por el medio ambiente en el que está inmerso, esto es: El halo. Así que se vuelve necesario analizar con más detalle la evolución en el tiempo del halo. Como la variable dinámica afectada es el momento angular, vamos a medir esta variable directamente de la simulación, ahora para el halo. Para ello, calculamos la proyección del momento angular en cada uno de los ejes cartesianos para cada una de las partículas, así como le hicimos para el satélite, sólo que ahora será necesario sumar sobre todos los constituyentes,  $N_{tot}$ , del halo:

$$L = \sum_{i=1}^{N_{tot}} (L_{x_i} \hat{i} + L_{y_i} \hat{j} + L_{z_i} \hat{k}) = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k}. \quad (3.16)$$

(cabe señalar que  $[L] = [l]$ ).

Recordemos que la prueba de estabilidad del halo se realizó dejándolo evolucionar en aislamiento. En la figura 3.10 hemos graficado las diferentes proyecciones del momento angular para el halo. En la construcción numérica del halo no consideramos la posibilidad de que éste tuviera momento angular, por lo que aquí esperabamos encontrar valores pequeños, sin embargo observamos un momento angular considerable, con una componente dominante orientada en la dirección negativa del eje  $Y$ , mientras que las proyecciones son positivas en los ejes  $X$  y  $Z$ . Las componentes de momento angular del halo para los ejes cartesianos tienen, respectivamente, los siguientes valores:  $L_x = 4.5436 \times 10^7 \bar{l}$ ,  $L_y = -4.3961 \times 10^8 \bar{l}$  y  $L_z = 2.4187 \times 10^8 \bar{l}$  y la magnitud del momento angular total es:  $L = 5.0381 \times 10^8 \bar{l}$ . Debido a que el halo es un sistema aislado e influenciado sólo por un campo central, tanto el momento angular total, como sus compo-

nentes cartesianas, permanecen constantes durante toda la evolución, probando una vez más la estabilidad del sistema.

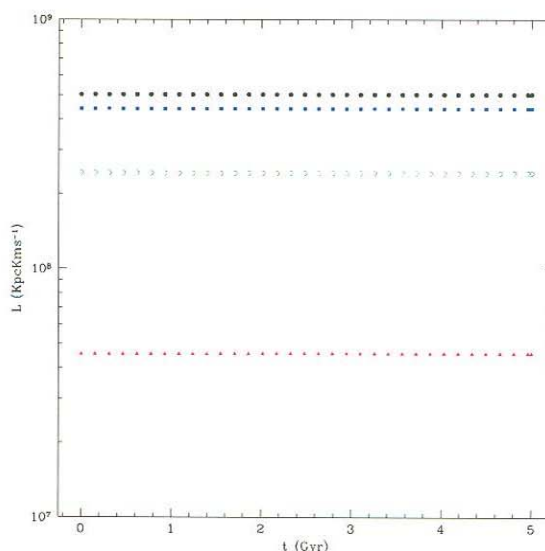


Figura 3.10: Proyecciones de las componentes cartesianas del momento angular del halo. En negro  $L_z$ , rojo  $L_x$ , azul  $L_y$ , verde  $L_z$ . Nótese que se ha graficado el valor absoluto de  $L_y$ .

Estamos en condiciones para analizar la influencia que tiene el momento angular del halo sobre el satélite. En la figura 3.11 graficamos una representación esquemática de las proyecciones de momento angular para el halo. Como ya dijimos, este sistema presenta componentes de momento angular en cada una de las direcciones cartesianas, en particular podemos ver que en el eje  $Z$  la componente de momento angular es importante (de hecho representa casi la mitad del momento angular total). Podemos visualizar esta situación como una tendencia de giro en el plano  $XY$ , es decir: en el plano de la órbita. Si tomamos en cuenta que el momento angular del satélite es inicialmente  $l_z \approx -1.5 \times 10^6 \tilde{l}$ , para el caso en el que la órbita se pone a girar a favor del sentido de las manecillas del reloj y  $l_z \approx 1.5 \times 10^6 \tilde{l}$ , en el caso contrario. Al comparar con la proyección correspondiente para momento angular del halo,  $L_z \approx 2.4 \times 10^8 \tilde{l}$ , vemos que es mayor a la del satélite por dos órdenes de magnitud (más precisamente  $|L_z| \approx 160 |l_z|$ ).

Entonces, de los últimos dos casos, el primero corresponde a la situación en la que la órbita gira a favor de la dirección de giro del halo mientras que la segunda a aquella en la que la órbita gira en contra de esta dirección.

Recordemos que en el primer caso la órbita fue más estable, lo cual explicamos ahora por el hecho de que el satélite gira a favor del sentido del halo, también hemos concluido que la órbita

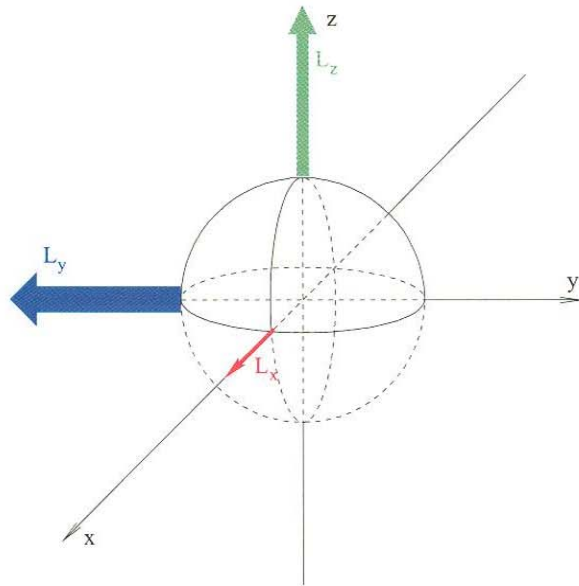


Figura 3.11: Representación esquemática de las proyecciones cartesianas del momento angular del halo. Con la intensidad de cada flecha se pretende distinguir la magnitud de cada componente.

deja su plano de rotación prácticamente desde el inicio. En el segundo caso, podemos apreciar una mayor fricción aparente por lo que surge una nueva pregunta: ¿Cómo afecta la rotación del halo a la Fricción Dinámica?

Para dar respuesta a esta pregunta buscamos la situación en la cual se presente la mayor influencia del halo. Para ello conviene colocar a la órbita con momento angular inicial sobre el eje  $Y$  ya que en esta dirección es donde presenta mayor momento angular el halo. Esta situación corresponde a colocar ahora la órbita en el plano  $XZ$ . Aquí la relación de momentos será  $|L_y| \approx 300|l_y|$  por lo que esperamos que sea más notorio el efecto del halo sobre el satélite.

### 3.3. Simulaciones en el Plano $XZ$

Dado que sólo las condiciones iniciales para el satélite son las que cambiarán para estas nuevas simulaciones, seguiremos usando el mismo modelo para el halo que se usó en la sección anterior.

Como se ha venido haciendo, primero pondremos al satélite a evolucionar dentro del halo en una órbita con un radio inicial de 2985 Kpc ( $r = a$ ).

Como la motivación para hacer el cambio de plano fue hecho de que el halo tiene momento angular predominante en la dirección del eje  $Y$  negativo, y que sí importa el sentido de la

rotación de la partícula, construiremos dos simulaciones para cada radio cuya diferencia sea la velocidad tangencial inicial: una donde el sentido del vector de momento angular de la órbita de la partícula es opuesto al predominante del halo ( $v_T = -1000.0000 \text{ Kms}^{-1}$ ) y otra donde el vector de momento angular de la órbita de la partícula y el vector de momento angular predominante del halo tienen el mismo sentido ( $v_T = 1000.0000 \text{ Kms}^{-1}$ ). Recordemos que la intención es ratificar que en efecto veremos una diferencia en la fricción entre los dos casos.

Dado que el primer caso tiene una tendencia a "oponerse" al sentido predominante de rotación del halo, lo llamaremos *contrarrotando*, y al segundo *corrotando*.

Estas simulaciones se dejaron evolucionar dentro del halo por 200 Gyr (para hacer una buena comparación de los efectos de contrarrotar y corrotar) y tardaron alrededor de 26 horas de cómputo.

Cuando tenemos al satélite *corrotando*, observamos que la circularidad se mantiene, aparentemente, por mayor tiempo que en el caso cuando la órbita estaba en el plano XY. En la figura 3.12 mostramos la trayectoria en este plano.

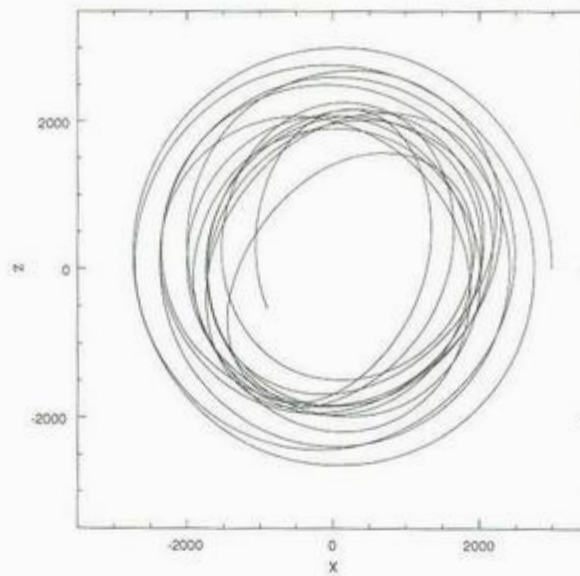


Figura 3.12: Órbita en el plano XZ descrita por el satélite que inicia en una órbita con  $r = a$  corrotando con el halo.

Dado que el método de Chandrasekhar no toma en consideración el sentido de la velocidad tangencial sino su magnitud, podemos aplicar la aproximación obtenida para el caso homólogo en el plano XY y así comparar el radio obtenido de la simulación con la aproximación proporcionada por la ecuación (3.12). En la figura 3.13 se muestra esta comparación.

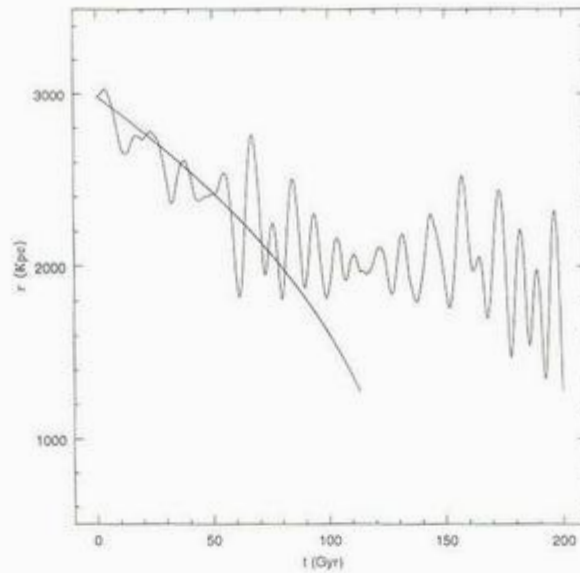


Figura 3.13: Comparación del decaimiento del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia con  $r = a$  en el plano  $XZ$  corrotando con el halo.

De manera similar que antes (plano  $XY$ ) vemos que la curva de la simulación presenta oscilaciones, con la diferencia de que ahora éstas son de menor amplitud, indicándonos que, en efecto, la circularidad se mantiene por un mayor tiempo. De igual forma observamos que la predicción de Chandrasekhar describe la tendencia de decaimiento de la órbita para los primeros 80 Gyr; a partir de los 120 Gyr podemos ver que el satélite ya no decae al centro del halo, como en la primera parte de la simulación. Es decir: *la órbita se estabiliza*

Cuando la partícula satélite está *contrarrotando* observamos una menor duración de la circularidad que en el caso anterior (Fig 3.14). De nueva cuenta podemos hacer uso de la ecuación 3.12, para hacer una comparación entre el radio obtenido de la simulación y el de la aproximación de Chandrasekhar. En la figura 3.15 podemos ver como si hay una mayor pérdida de circularidad y que el radio teórico no describe la tendencia de decaimiento de la órbita. De hecho podemos observar que en los primeros 50 Gyr la órbita no muestra una tendencia clara de decaimiento como en los otros casos, a pesar de que se observa un decaimiento general de la órbita.

Ya con estos resultados podemos observar que sí es importante el sentido de la rotación del satélite, debido a que el halo presenta un momento angular distinto de cero para sus tres ejes. Ésto nos lleva a que tendremos que poner mayor cuidado en la elección de condiciones iniciales para observar el efecto de Fricción Dinámica por encima de otros.



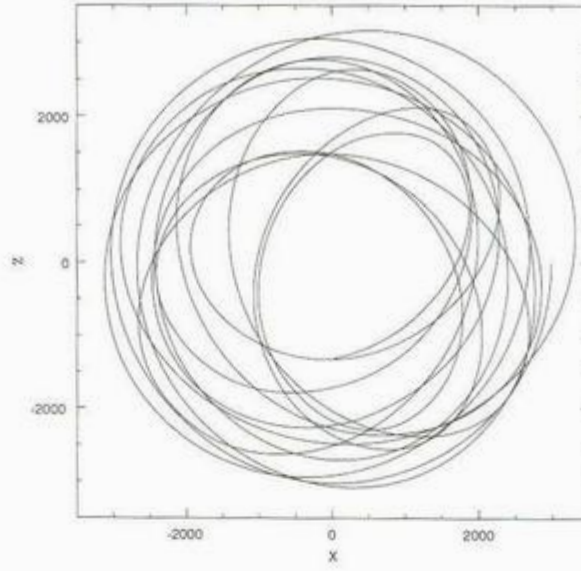


Figura 3.14: Órbita en el plano  $XZ$  descrita por el satélite que inicia en una órbita con  $r = a$  *contrarrotando* con el halo.

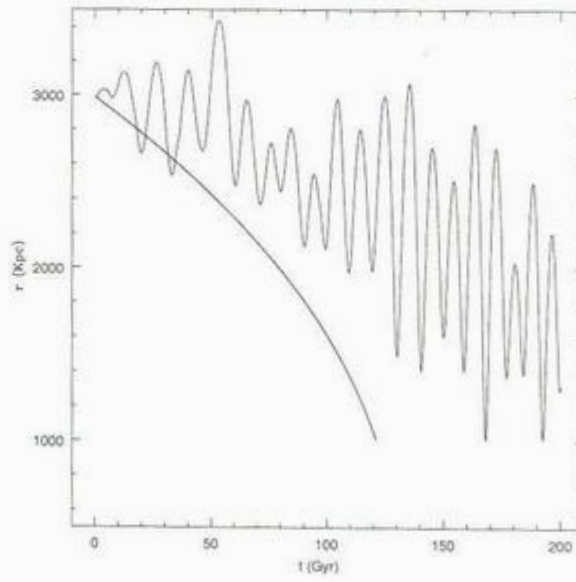


Figura 3.15: Comparación del decaimiento del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia con  $r = a$  en el plano  $XZ$  *contrarrotando* con el halo.

Los resultados anteriores nos llevan a asegurar que, para el caso en que el satélite está *corrotando* con el halo, se observa una mayor eficiencia de la Fricción Dinámica. Para corroborar esta conclusión hacemos ahora un análisis más detallado de la velocidad del satélite. Resulta muy ilustrativo descomponer esta variable en coordenadas esféricas, esto es: en lugar de usar las componentes cartesianas para la velocidad  $(v_x, v_y, v_z)$ , tomadas directamente de la simulación, definimos las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = \frac{xv_x + yv_y + zv_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} = \frac{x(yv_y + zv_z) - v_x(y^2 + z^2)}{(y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \\ v_\phi &= r\dot{\phi} \sin \theta = \frac{yv_z - zv_y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $v_r$  es la velocidad radial (mide la tendencia del satélite a acercarse o alejarse del centro del halo),  $v_\theta$  es la velocidad perpendicular al plano de rotación (mide la tendencia del satélite a salirse de este plano) y  $v_\phi$  es la velocidad tangencial a la órbita, dentro del plano de rotación.

Nótese que no son las definiciones tradicionales, pues se ha hecho un cambio para que el plano principal de las coordenadas esféricas coincida con el plano de rotación del satélite.

Para hacer el análisis, calculamos estas componentes de velocidad directamente de la simulación, por lo que las podemos conocer como función del tiempo. Los resultados de estos cálculos se muestran en la figura 3.16, donde mostramos tanto el caso *corrotando* (3.16a), como el caso *contrarrotando* (3.16b).

La velocidad radial es un indicador de la dinámica de la órbita, si ésta preserva su circularidad deberíamos de observar que la velocidad radial es pequeña. En la figura 3.16a, confirmamos que el valor de esta componente se mantiene alrededor de cero.

Cuando el satélite está *corrotando*,  $v_\theta$ , mantiene un valor pequeño a lo largo de 60 Gyr, sin embargo, al cabo de 80 Gyr empieza a crecer. En el caso cuando está *contrarrotando*, se mantiene con valores pequeños por más tiempo. Esto nos indica que para el caso cuando el satélite está *corrotando* la órbita cambia de plano de manera más notoria.

La velocidad tangencial,  $v_\phi$ , también sirve para calificar la circularidad de la órbita. Para el caso *corrotando*, vemos que su valor se mantiene alrededor del valor inicial por más de la mitad de la simulación, notándose una ligera tendencia a disminuir hacia el final. Para el otro caso  $v_\phi$  oscila desde el inicio de la simulación y la oscilación es cada vez mayor, indicándonos de nuevo que en este caso la órbita ha perdido su circularidad.

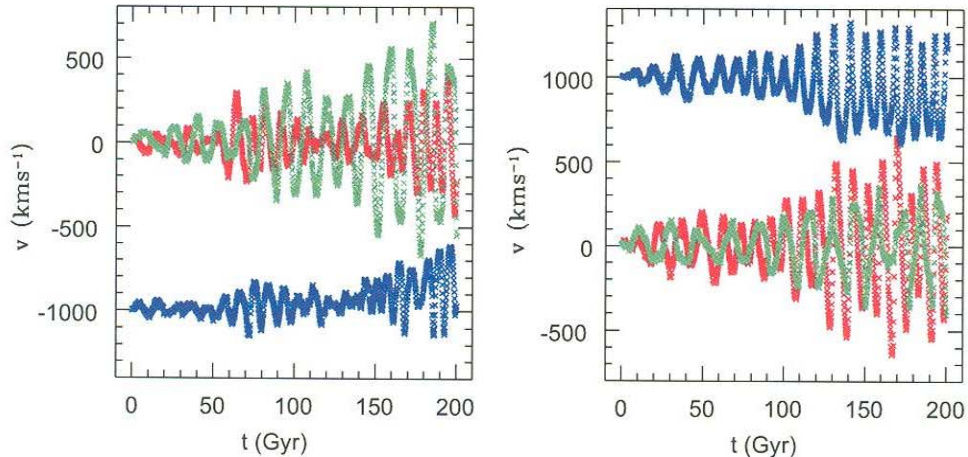


Figura 3.16: Comparación de las velocidades angulares del satélite cuando inicia en  $r = a$ . a) Izq. satélite *corrotando* con el halo. b) Der. satélite *contrarrotando* con el halo. Rojo  $v_r$ , verde  $v_\theta$  y azul  $v_\phi$ .

De igual forma que en el caso de cuando las simulaciones estaban en el plano  $XY$ , generamos simulaciones de órbitas con condiciones iniciales  $r = .5a$ ,  $v_T = 942.862 \text{ Kms}^{-1}$  y  $r = 5a$ ,  $v_T = 745.356 \text{ Kms}^{-1}$ , las cuales dieron origen a órbitas circulares en el potencial suave.

Continuamos con los casos en que el satélite inicia su órbita en  $r = .5a$ , haciendo el estudio de su comportamiento a lo largo de la simulación. Para ello, la dejamos evolucionar por 90 Gyr. Primero, orbitando en el mismo sentido de rotación predominante del halo, es decir, *corrotando* y después *contrarrotando* (estas simulaciones requirieron alrededor de 12 hrs de computo cada una).

Podemos observar en la figura 3.17 como, de nueva cuenta, se presenta una aparente pérdida de circularidad de la órbita, como lo mencionamos anteriormente, esto se debe a que el satélite transita por regiones con una densidad de partículas mayor al caso en el que inicia en  $r = a$  y como resultado el satélite siente una mayor fuerza perturbadora. Los resultados de comparar el radio de la simulación con el de la aproximación de Chandrasekhar (3.13) los podemos observar en la figura 3.18.

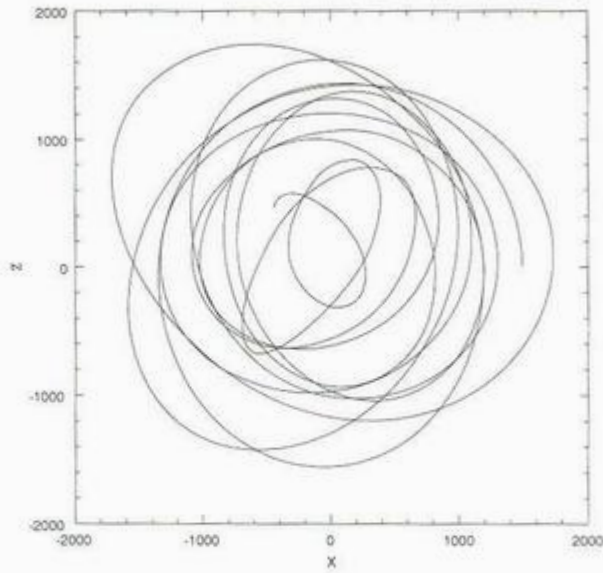


Figura 3.17: Órbita en el plano XZ descrita por el satélite que inicia en una órbita con  $r = .5a$  corrotando con el halo.

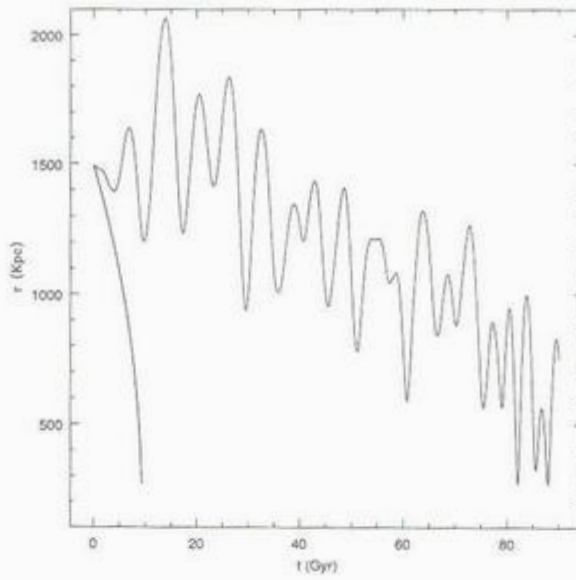


Figura 3.18: Comparación del decaimiento del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia con  $r = .5a$  en el plano XZ corrotando con el halo.

Como era de esperarse, el radio teórico no describe la tendencia de decaimiento de la órbita pues la órbita no decae circularmente además de que sobrevive 10 veces más de lo esperado.

Analicemos ahora el caso en el que el satélite esta *contrarrotando* dentro del halo. Los resultados de esta simulación los podemos observar en las figuras 3.19 y 3.20. En la primera tenemos la trayectoria descrita por el satélite a lo largo de la simulación, aquí podemos notar que hay una mayor circularidad aparente que en el caso cuando esta *corrotando*. Este resultado es contrario a lo observado cuando la órbita inicia en  $r = a$ , donde la circularidad se mantiene por más tiempo cuando el satélite está *corrotando*.

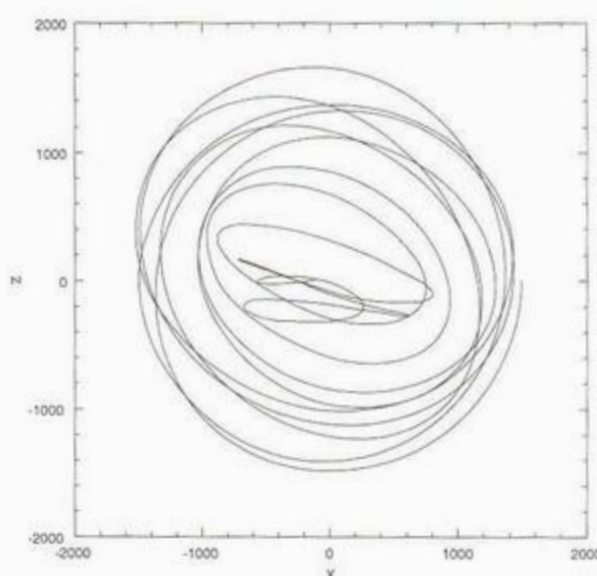


Figura 3.19: Órbita en el plano  $XZ$  descrita por el satélite que inicia en una órbita con  $r = .5a$  *contrarrotando* con el halo.

Por otra parte, podemos comparar el decaimiento del radio con aquél obtenido de la expresión de Chandrasekhar (3.13). Esta comparación confirma que hay una mayor circularidad debido a que el radio presenta oscilaciones irregulares más pequeñas que en el caso anterior, sin embargo; en ambas circunstancias, la predicción del radio teórico es completamente distinta al decaimiento de la órbita.

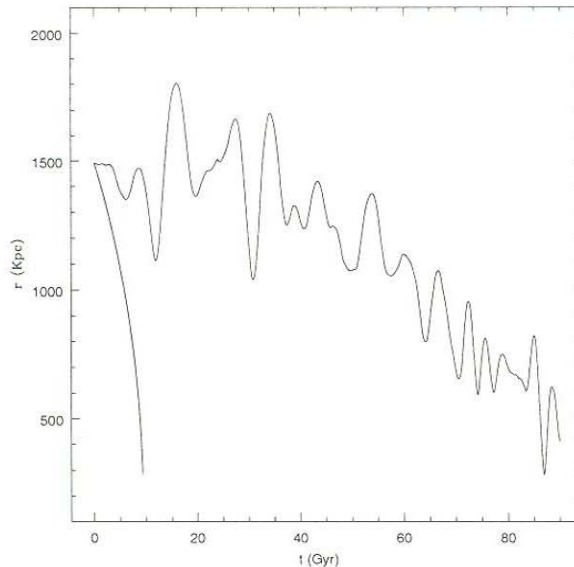


Figura 3.20: Comparación del decaimiento del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia en  $r = .5a$  en el plano  $XZ$  *contrarrotando* con el halo.

También hicimos un estudio de las componentes esféricas de velocidad para el satélite para estos casos. En la figura 3.21a podemos observar que, cuando el satélite está *corrotando*, la velocidad radial presenta valores distintos de cero, que es lo que se esperaba pues como se mencionó anteriormente hay una evidente pérdida de circularidad. Por su parte,  $v_\theta$  presenta valores grandes por lo que afirmamos que el satélite está saliendo del plano de rotación inicial. La velocidad tangencial  $v_\phi$ , muestra una tendencia a disminuir, esto es, el satélite se está frenando.

Ahora cuando el satélite está *contrarrotando*, figura 3.21b, la velocidad radial presenta valores más pequeños que en el caso anterior, esto confirma nuestra conclusión de que hay una mayor circularidad,  $v_\theta$ , sin embargo, presenta una tendencia a crecer y valores aún mayores que en el caso anterior, afirmamos que el plano de rotación está cambiando más en este caso. Al igual que antes,  $v_\phi$  también tiene una tendencia clara a disminuir, solo que ahora es más dramática: después de 80 Gyr,  $v_\phi$  presenta valores cercanos a cero, lo cual, en principio, indica que el satélite se ha frenado, pero esta afirmación es incorrecta. Como vimos en la figura 3.20, el satélite no alcanza a llegar al centro del halo, no se ha detenido en su trayectoria, y el efecto aparente de frenado se debe a que el satélite está cambiando constantemente su plano de rotación, lo cual ocurre de manera más dramática que cuando está *corrotando*.

Debemos hacer notar que, aún cuando en un caso se tiene una mayor circularidad que en el otro y una mayor permanencia en el plano de rotación inicial, el efecto de la Fricción Dinámica

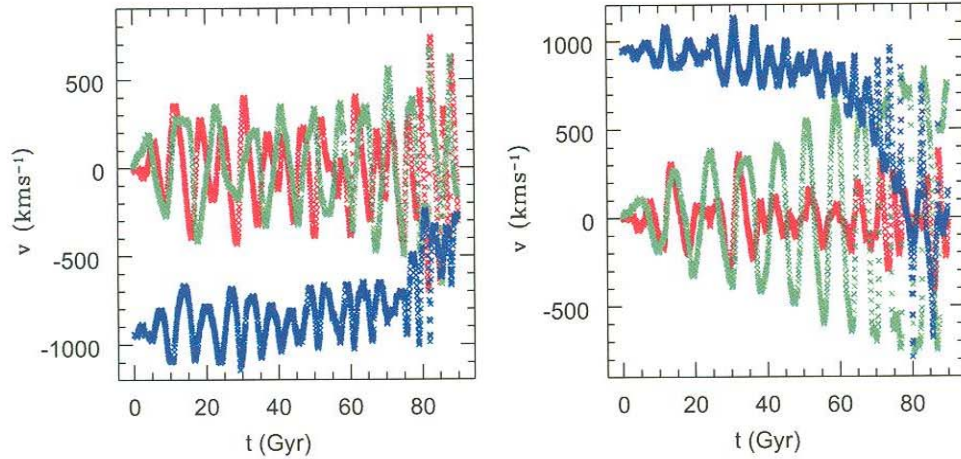


Figura 3.21: Comparación de las velocidades angulares del satélite cuando inicia en  $r = .5a$ . a) Izq. Satélite *corrotando* con el halo. b) Der. Satélite *contrarrotando* con el halo. Rojo  $v_r$ , verde  $v_\theta$  y azul  $v_\phi$ .

en ambos casos es el mismo. Por otra parte, la metodología de Chandrasekhar empleada falla. El satélite está experimentando efectos adicionales a la Fricción Dinámica. Dado que el satélite transita por regiones de mayor densidad de partículas, éste se ve fuertemente influenciado por el potencial del halo, hasta que prácticamente se comporta como otra partícula más del mar por el cual está constituido el halo.

El tercer caso en estudio es, como se mencionó, aquél en el cual el satélite inicia su órbita circular en  $r = 5a$ . Hemos dejado evolucionar estas simulaciones por 911 Gyr tardando alrededor de 4 días de cómputo cada una.

Como en los casos anteriores, analizaremos primero los resultados obtenidos de cuando el satélite está *corrotando* con el halo. En la figura 3.22, podemos observar que, a pesar de que el satélite se encuentra en regiones de menor densidad de partículas, sigue presente el efecto de pérdida de circularidad.

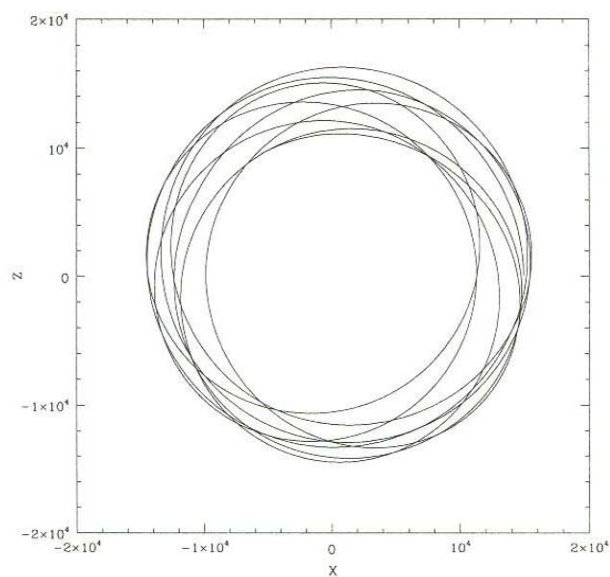


Figura 3.22: Órbita en el plano  $XZ$  descrita por el satélite que inicia en una órbita con  $r = 5a$  corrotando con el halo.

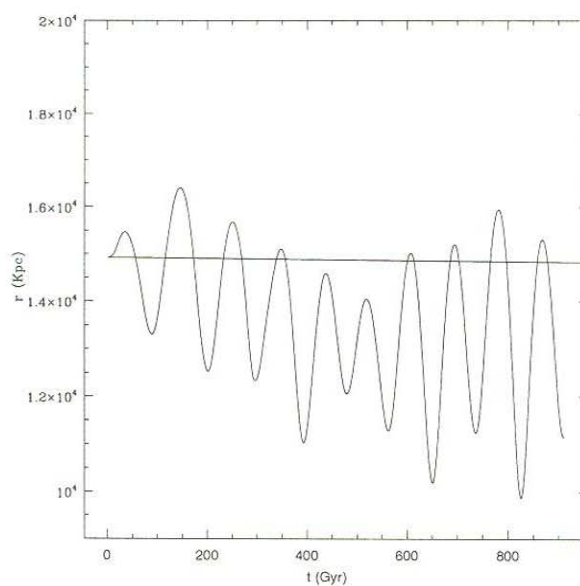


Figura 3.23: Comparación del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia con  $r = 5a$  en el plano  $XZ$  corrotando con el halo.



En la figura 3.23, hemos graficado el radio obtenido de la simulación y aquel que proviene de la aproximación de Chandrasekhar (3.14). En este caso las oscilaciones nos indican la pérdida de circularidad; como se dijo anteriormente, aún cuando el satélite está transitando por regiones de menor densidad de partículas. Podemos observar que para los primeros 500 Gyr si existe una tendencia a decaer, sin embargo después de este tiempo dicha tendencia se ha perdido por lo que la órbita ya no decae.

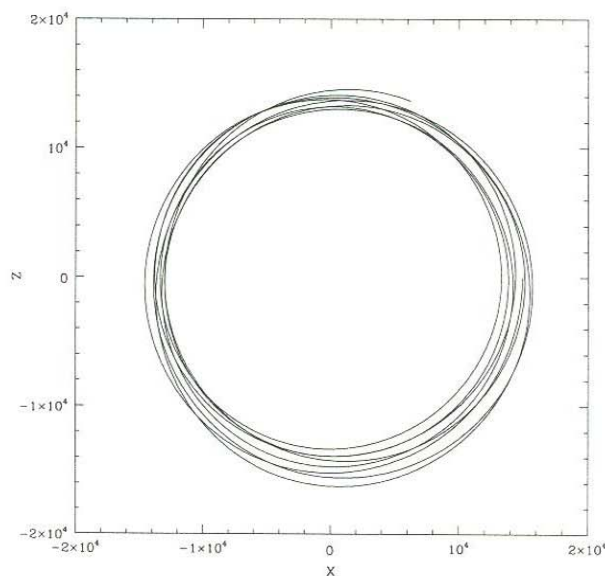


Figura 3.24: Órbita en el plano  $XZ$  descrita por el satélite que inicia en una órbita con  $r = 5a$  contrarrotando con el halo.

Ahora comparemos los resultados que se obtienen cuando el satélite está *contrarrotando* con el halo. En la figura 3.24, podemos observar que hay una aparente mayor circularidad que en el caso anterior, este resultado contrasta con lo que esperabamos: que la circularidad se mantuviera por mayor tiempo en el caso cuando el satélite está *corrotando*.

Para demostrar que existe una mayor circularidad, analizamos el radio obtenido de la simulación. En la figura 3.25, hemos graficado este radio con el obtenido de la aproximación de Chandrasekhar, tal como lo mencionamos existe una mayor circularidad pues las oscilaciones irregulares son de magnitud menor a las del caso anterior, sin embargo, ahora no se aprecia una tendencia evidente de decaimiento.

Aquí también, como en los casos anteriores, se hizo un estudio de la evolución de las componentes de velocidad para el satélite. En la figura 3.26a se observan las velocidades para el caso cuando el satélite esta *corrotando*. Como podemos notar, la velocidad radial,  $v_r$ , presenta valores

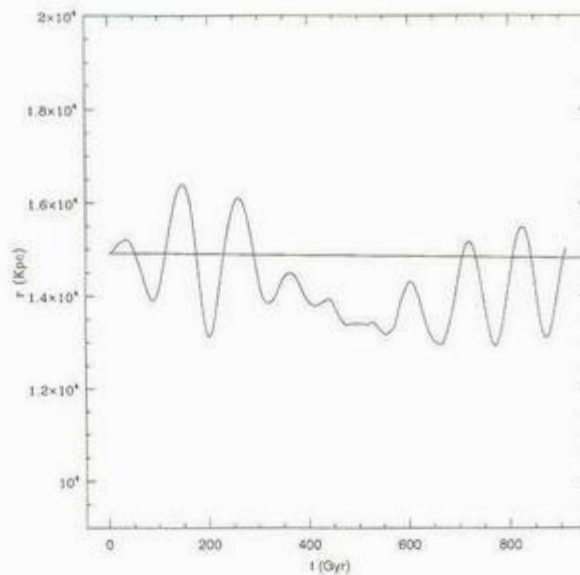


Figura 3.25: Comparación del radio teórico con el de la simulación para una órbita que inicia con  $r = 5a$  en el plano  $XZ$  *contrarrotando* con el halo.

siempre distintos de cero, lo cual concuerda con la afirmación que se hizo acerca de la pérdida de circularidad de la órbita, sin embargo, durante los primeros 400 Gyr  $v_\theta$  presenta valores muy cercanos a cero, lo cual nos indica que el plano de la órbita se mantiene por este tiempo. Además,  $v_\phi$  también presenta oscilaciones, lo cual es otro indicador de la pérdida de circularidad.

Las componentes de velocidad para el caso cuando el satélite está *contrarrotando* se muestran en la figura 3.26b. La velocidad radial,  $v_r$ , presenta, desde el inicio oscilaciones alrededor de cero, indicando una pérdida de circularidad, sin embargo en la región de 400 a 600 Gyr, ésta presenta valores cercanos a cero, es decir por este período de tiempo, el satélite permanece prácticamente en una misma órbita circular. Contrario al caso anterior,  $v_\theta$ , presenta siempre valores distintos de cero, indicándonos que la órbita ya no está en el plano de rotación inicial. Por último,  $v_\phi$  presenta oscilaciones similares a  $v_r$ , tanto en los primeros 400 Gyr como en los últimos 300 Gyr. De nueva cuenta en la región de 400 a 600 Gyr,  $v_\phi$  conserva un valor similar a su valor inicial, lo cual reafirma que el satélite permanece prácticamente en una misma órbita circular.

Con la discusión, tanto del caso *corrotando* como del *contrarrotando*, podemos asegurar que, en regiones mucho mayores al radio de escala del halo, la Fricción Dinámica no tiene un papel importante en la evolución de las órbitas.

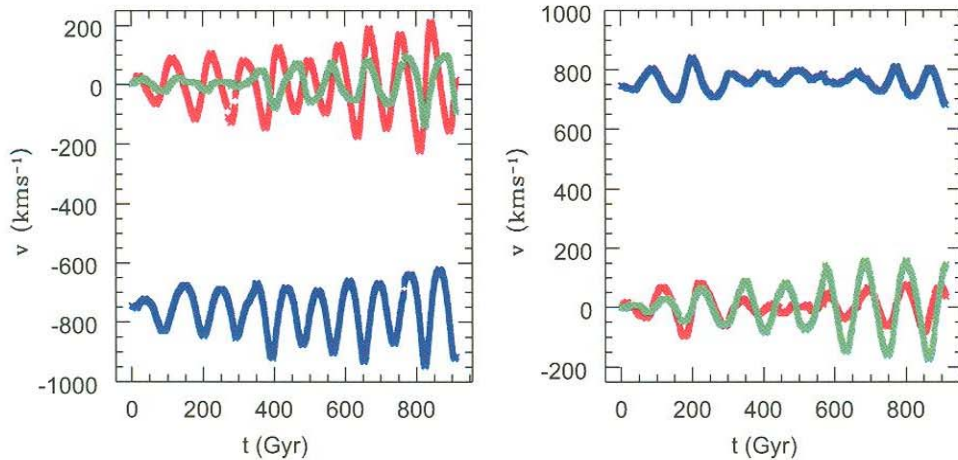


Figura 3.26: Comparación de las velocidades angulares del satélite cuando inicia en  $r = 5a$ . a) Izq. Satélite *corrotando* con el halo. b) Der. Satélite *contrarrotando* con el halo. Rojo  $v_r$ , verde  $v_\theta$  y azul  $v_\phi$ .

### 3.3.1. Órbitas elípticas

Como hemos encontrado que la aproximación de Chandrasekhar implementada en este trabajo tiene su mayor aplicabilidad para órbitas alrededor del radio de escala del halo, podemos aplicar este procedimiento a órbitas elípticas que inicien en  $r = a$ , si bien de antemano sabemos que no reproduce exactamente su decaimiento. De hecho, considerar los casos elípticos nos permitió encontrar el efecto que tiene la rotación del halo sobre el satélite. Por esta razón, y para complementar el análisis de la evolución del satélite, presentaremos ahora dos simulaciones en el plano  $XZ$  para órbitas que inician en  $r = a$  y son elípticas cuando se colocan dentro del potencial suave que hemos considerado en este trabajo. La intención ahora no es extender la aplicabilidad de la metodología al caso de órbitas no circulares, sino de confirmar que hay una mejoría en nuestra capacidad para distinguir los efectos de Fricción Dinámica cuando el momento angular inicial de la órbita está alineado con el momento angular dominante del halo.

Empezamos por analizar el caso cuando el satélite inicia su órbita *corrotando* con el halo, es decir,  $v_r = -866.025 \text{ Kms}^{-1}$ ,  $v_T = 500 \text{ Kms}^{-1}$ . Ahora, observamos que la órbita presenta lóbulos bien definidos y una notoria estabilidad. De nueva cuenta, usando la ecuación 3.12, podemos hacer una comparación entre el radio obtenido de la simulación y aquel obtenido de la aproximación de Chandrasekhar. Confirmamos lo dicho anteriormente: el radio decae poco al centro del halo. Estos resultados los podemos observar en las figuras 3.27 y 3.28.

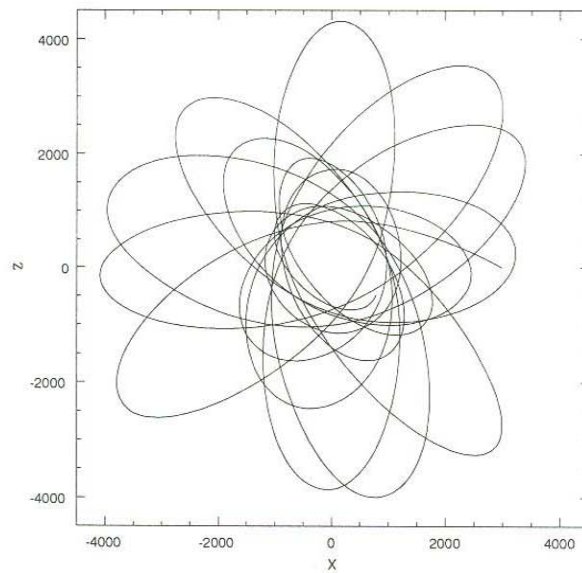


Figura 3.27: Órbita en el plano  $XZ$  descrita por el satélite que inicia en una órbita con las condiciones iniciales para ser elíptica en  $r = a$  corrotando con el halo.

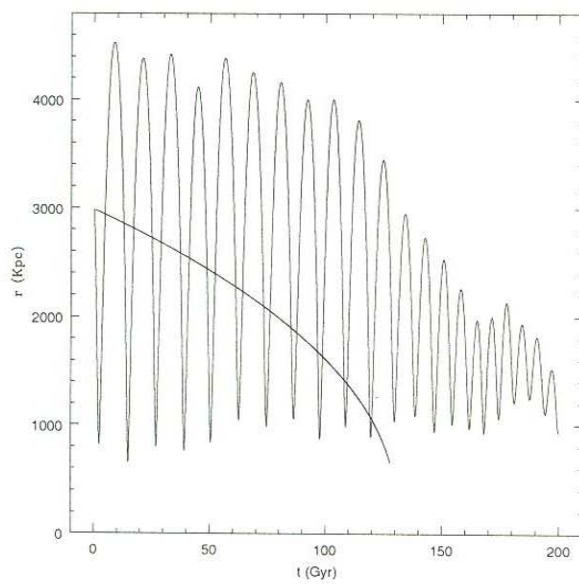


Figura 3.28: Comparación del radio teórico con el de la simulación para una órbita con las condiciones iniciales para ser elíptica que inicia en  $r = a$  en el plano  $XZ$  corrotando con el halo.

En el otro caso, ahora con condiciones iniciales:  $v_r = -866.025 \text{ Kms}^{-1}$ ,  $v_T = -500 \text{ Kms}^{-1}$ , donde el satélite está *contrarrotando*, no se presentaron lóbulos regulares como se muestra en la figura 3.29, y al parecer el satélite ha caído completamente al centro del halo para después salir de éste.

Como podemos ver en la figura 3.30, donde de nueva cuenta se ha hecho una comparación del radio obtenido de la simulación con el que se obtiene con la aproximación de Chandrasekhar (ecuación 3.12), podemos notar que el satélite visita regiones más cercanas al centro del halo. De nueva cuenta la aproximación no describe completamente a la trayectoria, sin embargo existe una tendencia de decaimiento del satélite que es más consistente con la aproximación que en el caso *corrotando*.

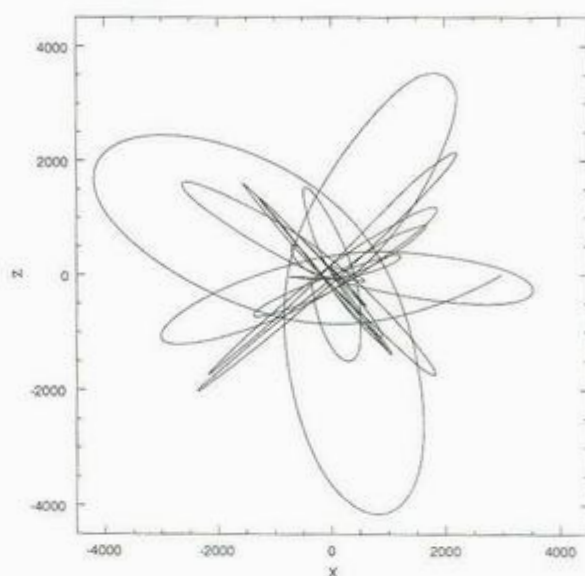


Figura 3.29: Órbita en el plano  $XZ$  descrita por el satélite que inicia en una órbita con las condiciones iniciales para ser elíptica en  $r = a$  *contrarrotando* con el halo.

Para ambos casos las órbitas sobreviven más de lo esperado por la aproximación, como se dijo en las secciones anteriores, se esperaba que el tiempo para decaer al centro del halo fuera alrededor de 131 Gyr. Estas simulaciones se dejaron evolucionar por 200 Gyr. tardando alrededor de 26 hrs. de cómputo.

Recordemos que la diferencia entre ambas simulaciones es el sentido del momento angular inicial  $l_o$ . Para el primer caso  $l_o$  está orientado en el eje  $Y$  negativo y para el segundo, en la dirección opuesta. Como hicimos en el caso cuando las órbitas iniciaban en el plano  $XY$ , haremos un estudio de la evolución en el tiempo del momento angular para estos nuevos casos.

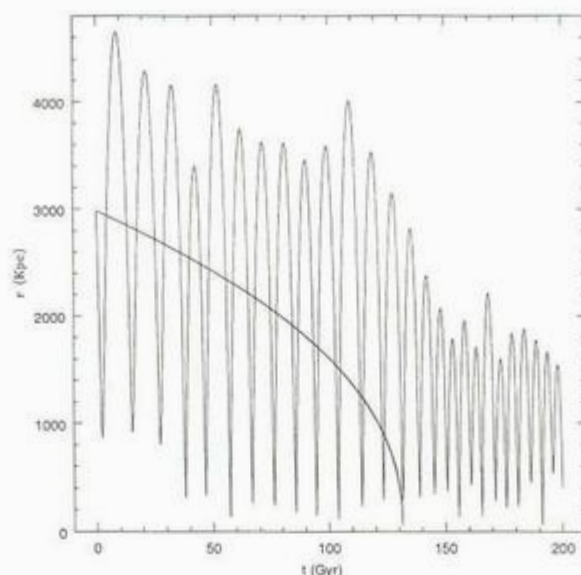


Figura 3.30: Comparación del radio teórico con el de la simulación para una órbita con las condiciones iniciales para ser elíptica que inicia en  $r = a$  en el plano  $XZ$  *contrarrotando* con el halo.

Los resultados de este estudio los presentamos en las figuras 3.31 y 3.32. Al comparar ambas gráficas notamos las diferencias entre estas órbitas: En el primer caso (figura 3.31), cuando el satélite está *corrotando*, la magnitud del momento angular total se conserva, reafirmando lo señalado acerca de la estabilidad de la órbita, las proyecciones de los momentos angulares en los ejes  $X$  y  $Z$ , son distintas de cero, lo cual nos indica que la órbita tiende a salirse del plano original de rotación.

Para el segundo caso (figura 3.32), cuando el satélite está *contrarrotando*, hay una dramática pérdida de momento angular en los primeros 50 Gyr de la simulación, de hecho la componente en el eje  $Y$  corresponde prácticamente al momento angular total de la órbita, de manera similar que en el caso de la órbita en el plano  $XY$ . Este resultado es consistente con el decaimiento que se aprecia en la órbita.

Aún cuando las proyecciones de los momentos angulares sobre los ejes  $X$  y  $Z$ , para ambos casos, son distintas de cero, éstas son de magnitud menor que para el caso homólogo en el plano  $XY$ ; lo cual es un indicador de que fue buena nuestra elección de cambiar las simulaciones al plano  $XZ$ .

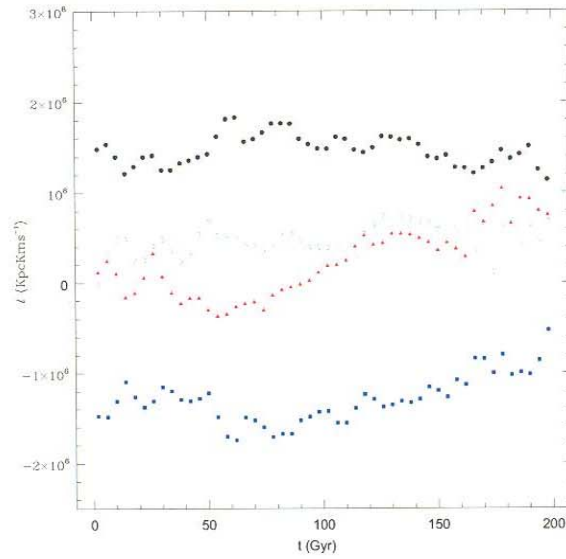


Figura 3.31: Comparación de las proyecciones del momento angular del satélite que inicia en una órbita elíptica con  $r = a$ , *corrotando* con el halo. En negro  $l$ , rojo  $l_x$ , azul  $l_y$ , verde  $l_z$ .

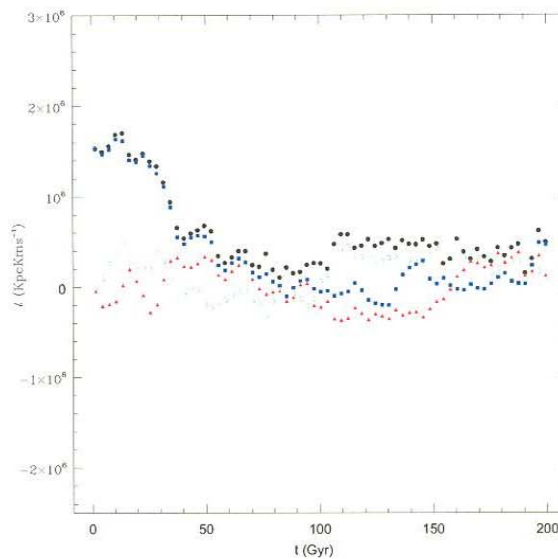


Figura 3.32: Comparación de las proyecciones del momento angular del satélite que inicia en una órbita elíptica con  $r = a$ , *contrarrotando* con el halo. En negro  $l$ , rojo  $l_x$ , azul  $l_y$ , verde  $l_z$ .

## Conclusiones

Como pudimos apreciar en los resultados de las simulaciones elípticas, el hecho de que las proyecciones del momento angular para los ejes  $X$  y  $Z$  hayan sido menores que en el caso cuando las órbitas iniciaban en el plano  $XY$ , es un indicador de que la elección de cambiar de plano fue buena. Esto se debe a que el momento angular de la órbita está orientado en la misma dirección que el del momento angular predominante del halo, lo cual disminuye el efecto de sacar al satélite del plano de rotación inicial, como lo pudimos observar en las simulaciones para las órbitas elípticas.

Aun cuando el método de Chandrasekhar tiene la limitante de que las órbitas en las cuales decae el satélite sean siempre circulares, se logró una buena aproximación del decaimiento de las órbitas elípticas para las simulaciones realizadas en este trabajo,

Hay que tomar en cuenta que para el potencial generado por el halo en estudio, cualquier influencia al satélite hará que presente pérdida de circularidad. De hecho, un resultado importante fue que en ningún caso se reprodujo la órbita de las simulaciones mediante la aproximación de Chandrasekhar presentada en el capítulo tres. Si deseamos extender el método de Chandrasekhar a órbitas no circulares para tener una mejor predicción del radio teórico, habrá que tomar en cuenta que ahora la velocidad no sólo tendrá una componente tangencial, sino que también tendrá una componente radial.

Como pudimos observar en las simulaciones para órbitas elípticas, es importante cuidar las condiciones iniciales del satélite, pues el halo en el cual basamos las simulaciones tiene momento angular distinto de cero para sus tres componentes (de hecho gracias a estas simulaciones nos pudimos dar cuenta de este resultado).

Tenemos presente dos efectos de fricción: uno es debido a la Fricción Dinámica la que es originada por el paso del satélite a través del mar de partículas del halo; el otro efecto de fricción es el debido al paso del satélite por regiones de distinta densidad de partículas, de nuevo este fenómeno se aprecia más en las órbitas elípticas, lo cual justifica nuestra exploración de este tipo de órbitas.

Una característica principal del tipo de halo en el cual basamos las simulaciones es que éstos



son más densos en el centro, por esta razón, el segundo efecto de fricción jugará un papel más importante que el de la Fricción Dinámica conforme nos acercamos al centro del halo.

Incluso, al estudiar las simulaciones cuando el satélite iniciaba en una órbita con radio igual a  $r = .5a$  detectamos que el radio teórico no reprodujo la tendencia de decaimiento de la órbita. Este hecho nos lleva a suponer que, para órbitas en radios pequeños con respecto al radio de escala, dominará esta fricción adicional, para lo cual se requiere mayor estudio. Es importante recalcar que, incluso a estos radios también hay efectos de Fricción Dinámica, sin embargo es más complicado separar ambos efectos.

Vemos de nuevo que el radio de escala de los halos define características importantes en su dinámica interna. Recordemos que es el radio donde se alcanza la velocidad circular máxima del halo. Como observamos, las simulaciones que inician en una órbita circular con radio igual al radio de escala,  $r = a$ , son en las que mejor se pudo apreciar el efecto de la Fricción Dinámica y donde la aproximación de Chandrasekhar reprodujo la tendencia de decaimiento del satélite. Esto es, el radio de escala define la región de máximo efecto para la Fricción Dinámica.

En regiones lejanas al radio de escala del halo, la Fricción Dinámica no juega un papel importante en la dinámica del satélite, es en estas regiones donde el halo está suficientemente diluido como para producir el efecto de Fricción Dinámica. Como mencionamos en el trabajo, para que este efecto sea notorio, el satélite no tiene que estar en regiones cercanas al límite del halo, por lo que las simulaciones para órbitas que inician en  $r = 5a$ , es un claro ejemplo de esta restricción, como pudimos observar no se presentó una clara tendencia del satélite a decaer al centro del halo.

A lo largo de este trabajo, hemos tratado de analizar los efectos que se obtienen cuando un cuerpo masivo viaja a través de un mar de partículas de Materia Oscura. Confirmamos que el estudio de estos efectos va más allá de los cálculos analíticos estudiados en los cursos tradicionales de Mecánica.

Encontramos que el momento angular del halo juega un papel muy importante para describir a la Fricción Dinámica. Una posible salida es modificar el mecanismo para la construcción de halos de Materia Oscura en los cuales no exista una componente predominante de momento angular. Sin embargo es importante recalcar que, de existir, es muy probable que los halos de Materia Oscura que rodean a los cúmulos galácticos reales tengan alguna componente de momento angular global y por lo tanto cualquier estudio de Fricción Dinámica tendrá que tomar en cuenta este hecho.

# Apéndice A

## *Cálculo de la integral para el período azimutal*

Este programa utiliza el método del trapecio para calcular la integral (2.19). Cuando la función `trapzd` es llamada una vez, regresa el estimado de la integral de  $f(x)$  en el intervalo  $[a,b]$ . Llamadas subsecuentes irán mejorando la precisión. El parámetro `EPS` depende de la exactitud que se desea, y `JMAX` es tal que  $2$  a la potencia `JMAX-1` es el número máximo de pasos permitidos.

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<cmath>
using namespace std;

main(int argc, char *argv[])
{
    double phi(double X0,double M,double a);
    double E0(double V0, double phi0);
    double M,m,Vx,Vy,X0,a,E,L,phi0,V0,temp,Xa,Xb;
    double qtrap(double E, double M, double a, double L,
                 double Xa, double Xb);
    double qromb(double E, double M, double a, double L,
                 double Xa, double Xb);
    a=2985;
    system("clear");
    if (argc!=7)
    {
        cout<<"\n";
        cout<<"-----\n";
    }
}
```

```

    cout<<"Uso inconsistente de este programa!!\n";
    cout<<"Uso:      ./integrador M Vx Vy X0 Xa Xb\n";
    cout<<"-----\n";
    cout<<"Donde: M = Masa del halo\n";
    cout<<"      Vx = Velocidad inicial en X\n";
    cout<<"      Vy = Velocidad inicial en Y\n";
    cout<<"      X0 = Posicion inicial en X\n";
    cout<<"      Xa = Limite inferior (periapside)\n";
    cout<<"      Xb = Limite superior (apoapside)\n";
    cout<<"-----\n";
    exit(0);
}

```

```

/*Convirtiendo los argumentos a variables*/

```

```

M=atof(argv[1]);

```

```

Vx=atof(argv[2]);

```

```

Vy=atof(argv[3]);

```

```

X0=atof(argv[4]);

```

```

Xa=atof(argv[5]);

```

```

Xb=atof(argv[6]);

```

```

V0=sqrt(Vx*Vx + Vy*Vy);

```

```

cout<<"M: "<<M<<"  Vx: "<<Vx<<"  Vy: "<<Vy<<"  X0: "<<X0
    <<"  V0: "<<V0<<"  \n\n";

```

```

/*Calculo de las constantes*/

```

```

/*Calculo del momento angular*/

```

```

L=X0*Vy;

```

```

cout<<"Momento angular "<<"L: "<<L<<"\n";

```

```

/*Calculo del Potencial*/

```

```

phi0=phi(X0,M,a);

```

```

cout<<"Potencial "<<"Phi(X0): "<<phi0<<"\n";

/*Calculo de la Energia*/
E=E0(V0,phi0);
cout<<"Energia E0: "<<E<<"\n\n";
cout.precision(11);
cout<<"El valor de la integral es "<<qtrap(E,M,a,L,Xa,Xb);
cout<<"\n";

return (0);
}

double phi(double X0, double M, double a)
{
/*Definicion del potencial*/
double pot;
pot=-M/(X0+a);
return(pot);
}

double E0(double V0, double phi0)
{
double E;
/*Definicion de la Energia*/
E=V0*V0/2+phi0;
return(E);
}

#include <cmath>
#define EPS 1.0e-6          /*Presicion del resultado */
#define JMAX 29            /*Numero maximo de pasos*/

```

```

double qtrap(double E, double M, double a, double L,
             double Xa, double Xb)
{
    double trapzd(double E, double M, double a, double L,
                 double Xa, double Xb, int n);

    int j;
    double s, olds=0.0;

    for (j=1; j<=JMAX; j++)
    {
        s=trapzd(E,M,a,L,Xa,Xb,j);
        if (j>5)
            if (fabs(s-olds) < EPS*fabs(olds) ||
                (s==0.0 && olds==0.0)) return s;

        olds=s;
    }
    cout<<"Demasiados pasos \n";
    return 0.0;
}

#undef EPS
#undef JMAX

/* TRAPZD */
double trapzd(double E, double M, double a, double L,
             double Xa, double Xb, int n)
{
    double x,tnm,sum,del;
    static double s;
    int it,j;
    double FUNC(double E,double M,double a,double L,double x);

    if (n==1)

```

```

    {
        s=0.5*(Xb-Xa)*(FUNC(E,M,a,L,Xa)+FUNC(E,M,a,L,Xb));
        return s;
    }
else
    {
        for (it=1,j=1;j<n-1;j++) it<=1;

        tnm=it;
        del=(Xb-Xa)/tnm;
        x=Xa+0.5*del;

        for (sum=0.0,j=1;j<=it;j++,x+=del) {
            sum+=FUNC(E,M,a,L,x);
        }
        s=0.5*(s+(Xb-Xa)*sum/tnm);
        return s;
    }
}

/* Funcion a integrar, en este caso es la integral (2.19) */
double FUNC(double E, double M, double a, double L, double X)
{
    double phi(double X, double M,double a);
    double temp;

    temp=2*L/(X*X*sqrt(2*(E-phi(X,M,a))-(L*L)/(X*X)));
    return(temp);
}

```

## Apéndice B

### *Cálculo de la integral para el período azimutal, con ayuda de Maple*

A continuación haremos uso de otra herramienta para el cálculo de la integral del período radial y azimutal. Esto lo logramos con ayuda de el software Maple 9.5. Con esto, verificamos que el programa mostrado en el apéndice A es confiable.

```
>restart;
```

```
Definición de las constantes
```

```
>M:=1.0194e10: Vx:=-866.025: Vy:=500:X0:=2985:a:=2985:
```

```
Energía Potencial
```

```
>phi:=-M/(x+a):
```

```
>subs(x=X0,phi):
```

```
Momento Angular
```

```
>L:=X0*Vy:
```

```
Energía Total
```

```
>E:=(Vx**2+Vy**2)/2+phi:
```

```
>subs(x=X0,E):
```

```
Integrando para el Período Radial
```

```
>integrando:=2/sqrt(2*(subs(x=X0,E)-phi)-(L/x)**2):
```

```
>factor(simplify(integrando));
```

$$\frac{20.}{\sqrt{-\frac{3.00000070 \cdot 10^8 (x+586.8636)(x-825.8114)(x-4718.0503)}{x^2(x+2985)}}$$

```
>plot(integrando,x=825.812..4718);
```

calculo del Periodo Radial

```
>Tr:=int(integrando,x=825.8128..4718.0262);
```

Integrando para el Periodo Azimutal

```
>integrando2:=2*L/x**2/sqrt(2*(subs(x=X0,E)-phi)-(L/x)**2):
```

```
>factor(simplify(integrando2)):
```

calculo del Periodo Azimutal

```
>deltapsi:=int(integrando2,x=825.8128..4718.0262);
```

```
>Tpsi:=(2*3.141592*Tr)/deltapsi;
```

```
>deltapsi/(2*3.141592);
```



# Apéndice C

## *Aproximación de Chandrasekhar con ayuda de Maple*

Cálculo de la integral para obtener el tiempo como función del radio para la aproximación de Chandrasekhar usando Maple 9.5. Se ejemplifica el caso para cuando el satélite inicia en una órbita con  $r = a$  y su velocidad circular es 1000.00 Kms.

```
>restart;
```

Calculando la constante de normalizacion de tiempo. (unidad de  $t$ )

```
>lambda:=bMAX*v**2/(Mhijo+mpapapart);
```

```
>lambda:=subs(bMAX=38805,lambda):
```

```
>lambda:=subs(v=1000,lambda):
```

```
>lambda:=subs(Mhijo=1.77e12/2.32e5,lambda):
```

```
>lambda:=subs(mpapapart=2.3748e15/10000./2.32e5,lambda):
```

```
>lambda:=ln(lambda);
```

Radio Inicial

```
>A0:=2985.:
```

```
>cons1:=4*lambda0*m*(erf(1)-2*exp(-1)/sqrt(Pi))/(sqrt(A**3*M));
```

```
>cons1:=subs(lambda0=lambda,cons1):
```

Masa Total del Halo Satelite

```
>cons1:=subs(m=1.77e12/2.32e5,kons):
```

Masa Total del Halo Padre

```
>cons1:=subs(M=2.3748e15/2.32e5,kons):
```

```
>cons1:=subs(A=A0,cons1):
```

```
>cons1:=evalf(cons1):
```

```
>cons1:=1./cons1;
```

```
>assume(y>0,x>0):
```

```
>IntegrandoA:=sqrt(y^3)*(3+y)/(1+y);
```

$$\text{IntegrandoA} := \frac{y^{(3/2)}(3+y)}{1+y}$$

```
>sol:=int(-IntegrandoA,y);
```

$$\text{sol} := -\frac{2}{5}y^{(5/2)} - \frac{4}{3}y^{(3/2)} + 4\sqrt{y} - 4 \arctan(\sqrt{y})$$

```
>test:=int(-IntegrandoA,y=y0...x,'AllSolutions');
```

$$\text{test} := \begin{cases} \text{FAIL} & y_0 < y \\ 0 & x = y_0 \\ \frac{2}{5}y^{(5/2)} - \frac{4}{3}y^{(3/2)} - 4\sqrt{y} + 4 \arctan(\sqrt{y}) & x < y_0 \\ -\frac{2}{5}x^{(5/2)} - \frac{4}{3}x^{(3/2)} + 4\sqrt{x} - 4 \arctan(\sqrt{x}) & \end{cases}$$

```
>test1:=test assuming y0 > x ;
```

$$\text{test1} := \frac{2}{5}y^{(5/2)} - \frac{4}{3}y^{(3/2)} - 4\sqrt{y} + 4 \arctan(\sqrt{y}) - \frac{2}{5}x^{(5/2)} - \frac{4}{3}x^{(3/2)} + 4\sqrt{x} - 4 \arctan(\sqrt{x})$$

```
>t:=subs(y0=1,test1);
```

```
>cons:=subs(y0=1,2/5*y0^(5/2)+4/3*y0^(3/2)-4*y0^(1/2)+4*arctan(y0^(1/2)));
```

```
>cons:=evalf(cons);
```

```
>INFALL_TIME:=cons*kons;
```

$$\text{INFALL\_TIME} := 131.5732189$$

# Bibliografía

- [1] A. Melchiorri, P. A. R. Ade, P. de Bernardis, J. J. Bock, J. Borrill, A. Boscaleri, B. P. Crill, G. De Troia, P. Farese, P. G. Ferreira, K. Ganga, G. de Gasperis, M. Gaicometti, V. V. Hristov, A. H. Jaffe, A. E. Lange, S. Masi, P. D. Mauskopf, L. Miglio, C. B. Netterfield, E. Pascale, F. Piancentini, G. Romeo, J. E. Ruhl, and N. Vittorio. A measurement of  $\omega$  from the north american test flight of boomerang. *ApJ Lett.*, 536:L63, June 2000.
- [2] B. Moore, N. Katz, and G. Lake. On the destruction and overmerging of dark halos in dissipationless n-body simulations. *ApJ*, 457:455-459, february 1996.
- [3] C. Calcano-Roldan, B. Moore. The surface brightness of dark matter: unique signatures of neutralino annihilation in the Galactic halo. *Phys.Rev. D*62 (2000) 123005
- [4] D. N. Spergel, R. Bean, O. Doré, M. R.olta, C. L. Bennet, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, H. V. Peiris, L. Verde, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, E. L. Wright. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology. *ApJS*, 170, 377, 2007.
- [5] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta* 6: 110–127, 1933.
- [6] H. Aceves, and M. Colosimo. Dynamical friction in stellar systems: an introduction. *physics/0603066*, Mar 2006.
- [7] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko. *Classical Mechanics*. Universitat de Barcelona, 2000.
- [8] H. W. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C, The Art of scientific Computing*, Capítulo 4, pág. 137. Cambridge university Press, 1988.

- [9] J. Binney and S. Tremaine. Galactic Dynamic. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.
- [10] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. A universal density profile from hierarchical clustering. *ApJ*, 490:493+, December 1997.
- [11] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. The structure of cold dark matter halos. *ApJ*, 462:563+, May 1996.
- [12] J. Stadel *et. al.* Comunicación privada del grupo de trabajo en Astrofísica Teórica de la Universidad de Zurich. <http://www-theorie.physik.unizh.ch/>
- [13] L. Hernquist. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *ApJ*, 356:359-364, June 1990.
- [14] L. Hernquist. N-body realizations of compound galaxies. *ApJ*, 86:389-400, June 1993.
- [15] M. S. Turner. Dark matter and dark energy in the universe. In *ASP Conf. Ser. 165: The Third Stromlo Symposium: The Galactic Halo*, pages 341+, 1999.
- [16] P. J. E. Peebles. Structure of the coma cluster of galaxies. *AJ*, 75:13+, February 1970.
- [17] S. D. M. White, C. S. Frenk, and M. Davis. Clustering in a neutrino-dominated universe. *ApJ Lett.*, 247:L1-L5, November 1983.
- [18] S. D. M. White. The dynamics of rich clusters of galaxies. *MNRAS*, 177:717-733, December 1976.
- [19] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapunete, N. Walton, B. Schafer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and The Supernova Cosmology Project. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. *ApJ*, 517:565-586, June 1999.
- [20] T. Quinn, N. Katz, J. Stadel, and G. Lake. Time stepping n-body simulations. Submitted to *ApJ*, astro-ph/9710043, oct 1997.

- 
- [21] V. Springel, S. D. M. White, A. Jenkins, C. S Frenk, N. Yoshida, L. Gao, J. Navarro, R. Thacker, D. Croton, J. Helly, J. A. Peacock, S. Cole, P. Thomas, H. Couchman, A. Evrard, J. Coldberg, F. Pearce. Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution. astro-ph/0504097, Apr 2005.
- [22] W. Hu, M. Fukugita, M. Zaldarriaga, and M. Tegmark. Cosmic microwave background observables and their cosmological implications. *ApJ*, 549:669-668, march 2001.