

UNIVERSIDAD DE SONORA
Unidad Regional Centro
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN FÍSICA

BIBLIOTECA
D.I.F.U.S.- UNISON

**“Heteroestructuras de Cristal Fotónico
en una Dimensión.”**

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

Raúl Archuleta García

Director de Tesis
Dr. Jesús Manzanarez Martínez

Hermosillo, Sonora, Mexico, Enero 2007.

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Universidad De Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Investigación en Física

“Heteroestructuras de Cristal Fotónico en una dimensión”

TESIS

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Presenta

Raúl Archuleta García

Hermosillo, Sonora, México

Enero de 2007

ÍNDICE

	Índice	2
	Glosario	3
	Introducción	6
Capítulo 1	El Campo Electromagnético	8
	1.1 Introducción	8
	1.2 Las Ecuaciones de Maxwell	8
	1.3 La Ecuación de Onda	9
	1.4 Transporte de Energía Electromagnética	11
	1.5 Condiciones de Frontera	12
Capítulo 2	El Método de la Matriz de Transferencia	14
	2.1 Introducción	14
	2.2 Reflexión y Transmisión en una interfase	14
	2.3 Relaciones de Fresnel	16
	a) Polarización Transversal Eléctrica (TE)	16
	b) Polarización Transversal Magnética (TM)	19
	c) Reflexión y Transmisión en una interfase	21
	2.4 Reflexión y Transmisión en una Película Delgada	22
	2.5 Sistema Multicapa	25
	2.6 Implementación del Método de la Matriz de Transferencia para obtener la Reflexión y Transmisión de un Sistema Multicapa	29
Capítulo 3	El Método de Ondas Planas.	30
	3.1 Introducción	30
	3.2 La Serie de Fourier para la Función Dieléctrica	31
	3.3 Ecuación de Valores Propios	34
	3.4 Representación Matricial de la Ecuación de Valores Propios	36
	3.5 Conclusiones	42
Capítulo 4	Velocidad de Grupo	43
	4.1 Introducción	43
	4.2 Estructura de Bandas: Zona Reducida y Zona Extendida	44
	4.3 Variación Paulatina del Factor de Llenado	46
	4.4 Índice Efectivo a Bajas Concentraciones	48
	4.5 Conclusiones	49
Capítulo 5	Bandas Prohibidas Gigantes en Heteroestructuras de Cristales Fotonicos	50
	5.1 Introducción	50
	5.2 El Método de Ondas Planas para la Heteroestructura	51
	5.3 Bandas en una Heteroestructura Homogénea	53
	5.4 Heteroestructuras binarias	56
	5.5 Conclusiones	60
	Conclusiones Generales	62
	Apéndice Analítico	64
	Apéndice de Programas	66
	Bibliografía	73

Glosario.

CONCEPTO	DESCRIPCIÓN
Banda de Energía	Región del espectro electromagnético donde existen modos permitidos de propagación de una onda en un cristal.
Banda de Energía Prohibida	Región del espectro electromagnético donde no se puede propagar una onda hacia el interior de un cristal
Base	Átomo -en el sentido de indivisible-, que al ser repetido forma un cristal
Celda Primitiva de Wigner-Seitz	Volúmen mínimo obtenido por la división mediante planos bisectores de la celda primitiva.
Celda Primitiva	Paralelepípedo formado por los ejes primitivos de volúmen mínimo.
Cristal	Arreglo infinito de idénticos grupos de átomos repetidos
Desarrollo de Fourier 1D	$f(x) = \sum_T f(T) \exp\left(i\left(\frac{2\pi}{a}\right)nx\right)$
Desarrollo de Fourier 3D	$f(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} f(\vec{G}) \exp(i\vec{G}\cdot\vec{r})$
Coefficiente de Fourier 3D	$f(\vec{G}) = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} f(\vec{r}) \exp(-i\vec{G}\cdot\vec{r}) dV$ donde V_c es el volúmen de la celda unitaria del cristal
Esquema de Zona Extendida	Método de desplegar el diagrama $\omega - k$, donde las bandas mas altas de energía, son presentadas en sucesivas zonas de Brillouin cada vez mas grandes.
Esquema de Zona Reducida	Es el mapeo de las bandas de energía seleccionando el valor del índice del vector de onda de cualquier función de Bloch, restringido a la Primera Zona de Brillouin.
Función Periódica	Una función $f(x)$ es periódica, con período T, si para todo valor de la variable se cumple que $f(x+T) = f(x)$

Índice Efectivo de Grupo	$n_{eff,g}(\omega) = \frac{c}{v_g(\omega)}$
Ley de Bragg	Definida como $2d\text{Sen}\theta = n\lambda$ establece que habrá interferencia constructiva en las ondas reflejadas por un cristal si la diferencia en la trayectoria es un múltiplo entero de la longitud de onda.
Primera Zona de Brillouin	El volumen mas pequeño encerrado por completo por los planos bisectores y perpendiculares de los vectores primitivos de la red reciproca, trazados desde el origen. La PZB es el equivalente en la red reciproca de la celda de Wigner-Seitz en la red directa.
Puntos de la Red Reciproca	Si tenemos una función periódica $f(x)$ con período a , definida en el espacio real del cristal, decimos que $\left(\frac{2\pi}{a}\right)_n$ es un punto de la Red Reciproca del espacio de Fourier del cristal. Los puntos de la red reciproca nos dicen cuales son los términos que se pueden tomar para formar una Serie de Fourier, y que sean consistentes con la periodicidad del cristal.
Red	Conjunto matemático de puntos en los cuales está anclada el cristal
Red Primitiva	Aquella constituida por los tres vectores de traslación que forman el volumen $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ que puede servir como bloque fundamental para construir la estructura cristalina.
Relación de Dispersión	Función que relaciona la variación de la frecuencia en términos del vector de onda, utilizada para describir las bandas de energía de un sistema.
Teorema de Bloch	Las eigenfunciones de la ecuación de onda para un potencial periódico son el producto de una onda plana $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ por una función $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ que contenga la periodicidad de la red del cristal $f_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$
Vector de Traslación	Denotados por \vec{a}_i $i=1,2,3$ son los vectores linealmente independientes que definen a un vector de posición arbitrario de la red cristalina mediante una combinación lineal: $\vec{r}' - \vec{r} = \sum_i u_i \vec{a}_i \quad u_i \in \mathbb{R}$

Vectores de la Red Recíproca

Los vectores de la red recíproca se construyen a partir de los vectores de la red directa mediante las igualdades vectoriales $\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3}$

$$\vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3} \quad \vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3} \quad \text{y cumplen la condición}$$

$$\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = 2\pi \delta_{i,j}$$

Vectores primitivos de traslación

Son los vectores que forman una red primitiva y definen a los ejes cristalinos

Velocidad de Grupo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Introducción.

Las Heteroestructuras de semiconductores son hechas por la combinación de al menos dos materiales que tengan distinta estructura de bandas. Las Heteroestructuras confinan ondas electrónicas en la escala cuántica permitiendo un refinado control sobre los estados electrónicos y de transporte de carga. La Ingeniería de Heteroestructuras es ampliamente practicada hoy en día, produciendo láseres de semiconductores más eficientes,¹ transistores de alta velocidad² y novedosos dispositivos electrónico-cuánticos³⁻⁵.

Los Cristales Fotónicos⁶⁻¹¹ son materiales artificiales con una modulación periódica de sus constantes dieléctricas que presentan muchas propiedades análogas a los semiconductores, en particular, la existencia de bandas prohibidas y permitidas. Recientemente, las Heteroestructuras de Cristal Fotónico han sido introducidas para extender muchos de los atractivos rasgos de su contraparte semiconductor hacia el dominio de la óptica.

Hablando en términos generales, la funcionalidad de un Cristal Fotónico homogéneo es la de transmitir luz totalmente en la banda de energía o reflejar totalmente en la Banda de Energía Prohibida. Sin embargo, para crear una tecnología basada en Cristales Fotónicos es necesario tener el control activo de la luz. Los transistores de semiconductor³⁻⁵ fueron obtenidos a partir de heteroestructuras, en donde se unieron tres redes distintas para crear un dispositivo que permite el paso de la corriente en función de un parámetro externo. En forma semejante, actualmente se buscan nuevas funcionalidades en dispositivos fotónicos basados en *la fabricación de estructuras híbridas de cristales fotónicos con diferentes parámetros estructurales*.

Uno de los fenómenos físicos más comunes para la fabricación de dispositivos fotónicos es el fenómeno de espejo o reflexión total. En este trabajo desarrollamos un método para optimizar el ancho de la Banda de Energía Prohibida en Cristales Fotónicos mediante el uso de heteroestructuras. En diferencia con la mayoría de los trabajos teóricos que hemos revisado, en donde se optimiza la Banda de Energía Prohibida mediante el cálculo de transmisión de luz, nosotros exploramos por primera vez la estrategia de calcular la velocidad de grupo a partir del cálculo de la estructura de bandas de una heteroestructura. Hemos encontrado que nuestros resultados son comparables con

los cálculos de transmisión de luz. Sin embargo, este es solo un primer paso. Nuestra aproximación nos permitirá realizar la optimización de estructuras en dos o tres dimensiones.

En esta Tesis exponemos las herramientas numéricas que hemos desarrollado para estudiar Heteroestructuras. Presentamos los Métodos de la Matriz de Transferencia (MMT) y el de Ondas Planas (MOP) con un enfoque que relaciona la estructura de bandas, la transmisión de energía y la velocidad de grupo. Procedemos en varias etapas.

En el Capítulo 1 hacemos un resumen de las Ecuaciones de Maxwell y las condiciones de Frontera. En el Capítulo 2 aplicamos el MMT para obtener los Coeficientes de Reflexión y Transmisión para una interfase, película delgada y supercelda. En el Capítulo 3 hacemos expansiones de Fourier de la constante dieléctrica y del campo electromagnético para con ellas plantear la ecuación de onda como un problema de valores propios, resolviéndolo de manera numérica para encontrar las bandas de energía.

En el Capítulo 4, se analiza la velocidad de grupo en cristales fotónicos unidimensionales a partir de la estructura de bandas en la zona de Brillouin extendida, descartando con esto la posibilidad de propagación del campo electromagnético con velocidad negativa al interior de un cristal fónico.

Por último en el Capítulo 5 mostramos que es posible diseñar bandas prohibidas gigantes en heteroestructuras fotónicas. A pesar de la forma tan complicada que presenta la estructura de bandas en la heteroestructura se pueden discriminar regiones de alta o baja transmisión por medio del cálculo de la velocidad de grupo, lo cual es verificado por cálculos de transmisión efectuados con el MMT.

CAPITULO 1

El Campo Electromagnético.

1.1 Introducción.

En el presente capítulo revisaremos algunas de las propiedades básicas de la propagación de ondas electromagnéticas, por lo que el material aquí expuesto será frecuentemente utilizado en el desarrollo posterior de este trabajo y constituirá una fuente inmediata de referencia.

Comenzaremos revisando las Ecuaciones de Maxwell, las Ecuaciones Materiales y la Ecuación de Onda, para después, discutiendo los estados de polarización, introducir un análisis de las condiciones de frontera que favorecen la propagación de ondas planas para el flujo de energía asociado con la radiación electromagnética.

1.2 Las Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica son las ecuaciones de Maxwell, y las podemos escribir en unidades CGS como:¹²

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{\mathbf{J}} \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = 4\pi\rho \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.1d)$$

En el caso donde $\rho = 0$ y $\vec{\mathbf{J}} = 0$, existen soluciones no nulas de las ecuaciones de Maxwell, lo cual implica que un campo electromagnético existe aun en ausencia de cargas y corrientes. A los campos electromagnéticos que ocurren en ausencia de cargas, se les llama ondas electromagnéticas.

Para obtener una determinación única de los vectores de campo, las ecuaciones de Maxwell deben ser suplementadas por las llamadas ecuaciones constitutivas (o ecuaciones materiales)

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}} \quad (1.2a)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} \quad (1.2b)$$

Las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes de carga y corrientes, considerando medios no magnéticos ($\mu = 1$) pueden ser escritas como

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (1.3a)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (1.3b)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0 \quad (1.3c)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.3d)$$

1.3 La Ecuación de Onda

Un resultado importante que se deriva de las ecuaciones de Maxwell es la ecuación de onda y la posibilidad de encontrar funciones de onda electromagnéticas que sean solución de ellas. Para derivar las ecuaciones de onda, consideramos un medio isotrópico y lineal.

Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (ecs. 1.3), son ondas viajeras que transportan energía de un punto a otro, es decir ondas planas.

Para obtener la ecuación de onda, obtenemos el rotacional de ambos lados de las ecuaciones (1.3a) y (1.3b)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\nabla \times \vec{\mathbf{B}})}{\partial t} \quad (1.4a) \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{H}}) = \frac{1}{c} \frac{\partial (\nabla \times \vec{\mathbf{D}})}{\partial t} \quad (1.4b)$$

Aplicando convenientemente las ecuaciones de Maxwell y las relaciones materiales obtenemos una ecuación para el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ y otra para el campo de inducción magnética $\vec{\mathbf{H}}$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) = -\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \quad (1.5a) \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{H}}) = -\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2} \quad (1.5b)$$

usamos la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{A}}$ para escribir

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \quad (1.6a) \quad \nabla (\nabla \cdot \vec{\mathbf{H}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{H}} = -\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2} \quad (1.6b)$$

Tanto la divergencia de $\vec{\mathbf{E}}$ como la de $\vec{\mathbf{H}}$ son cero en virtud de (1.3c) y (1.3d), por lo que podemos escribir la ecuación de onda para ambos campos en la forma

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.7a)$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{H}} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.7b)$$

Estas ecuaciones de onda vectoriales, satisfacen la ecuación de onda escalar para cada componente cartesiana u de los campos $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$,

$$\nabla^2 u + \frac{1}{V^2} u = 0 \quad (1.8)$$

donde en este caso $V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$ es la velocidad de fase de la onda electromagnética considerada.

La solución a la ecuación de onda, utilizando una base ortogonal de ondas planas toma la forma

$$u = u_0 e^{ikz - i\omega t} \quad (1.9)$$

donde u_0 es la amplitud de la componente de campo considerada, ω la frecuencia angular y k la magnitud del vector de onda.

$$k = \sqrt{\epsilon} \frac{\omega}{c} \quad (1.10)$$

La solución más general a la ecuación de onda en una dimensión, se obtiene sumando las ondas que viajan en las posibles direcciones de su movimiento

$$u(z, t) = u^+ e^{i(kz - \omega t)} + u^- e^{i(-kz - \omega t)} \quad (1.11)$$

donde u^+ y u^- son las amplitudes de un par de campos que viajan a la derecha y a la izquierda respectivamente.

En el Apéndice P-1, incluimos un programa que simula la variación temporal de la magnitud de dos campos eléctricos que viajan en distintas direcciones, y el campo resultante de la suma de ambos. En la Figura 1.1 mostramos el resultado.

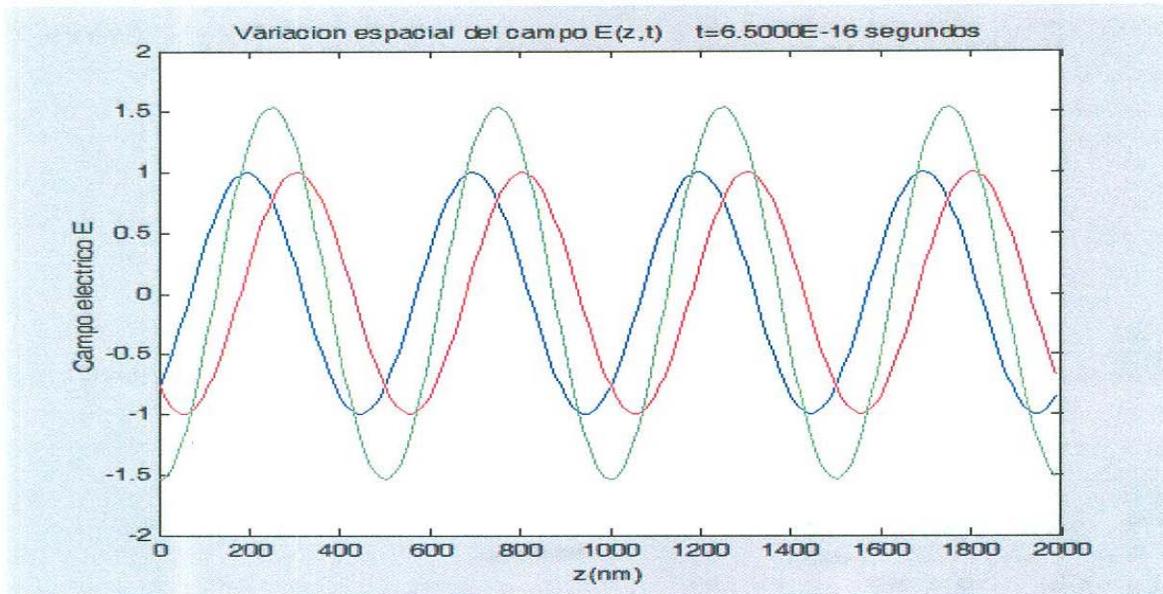


Figura 1.1 Superposición de dos campos que viajan en distintas direcciones (azul y rojo) y el campo resultante de la suma de ambos (verde).

1.4 Transporte de Energía Electromagnética

Es conocido que la luz transporta energía con ella y que de hecho es una forma de radiación electromagnética. El vector \vec{S} , que representa el flujo de energía, es llamado Vector de Poynting.

La magnitud del vector de Poynting, debe ser obtenida a través de su promedio temporal, debido a que los campos vectoriales que estamos considerando son funciones dependientes del tiempo que varían muy rápidamente.

Como los campos electromagnéticos ya los hemos expresado por medio de ondas planas, el vector de Poynting podemos obtenerlo a partir de la relación

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] \quad (1.12)$$

utilizando las Ecuaciones de Maxwell, expresamos esta relación en función únicamente del campo eléctrico

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \vec{E} \times \left\{ \frac{c(\nabla \times \vec{E})}{i\omega} \right\} = \frac{c}{8\pi} \vec{E} \times \frac{c(i\hat{k} \times \vec{E})}{i\omega} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\epsilon} (\vec{E} \times \hat{k} \times \vec{E}) \quad (1.13)$$

que podemos simplificar gracias a la identidad vectorial $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ y al hecho de que los campos electromagnéticos cumplen la condición establecida en las ecs. 1.3c y 1.3d

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\epsilon} |\vec{E}|^2 \hat{k} \quad (1.14)$$

Esta ecuación, nos permite conocer el flujo de energía que se transmite en un medio cualquiera de permitividad ϵ como una función de la intensidad del campo eléctrico y nos indica además que ese flujo se desplaza en la misma dirección que el vector de propagación de la onda electromagnética.

1.5 Condiciones de Frontera

Consideremos una frontera superficial que separe a dos medios con diferente permitividad (medio 1 y medio 2). Para obtener las condiciones de frontera para los campos B y D, construimos un pequeño cilindro sobre un área unitaria de la superficie, tal como se muestra en la figura 1.2a. Las caras del cilindro son paralelas a la superficie.

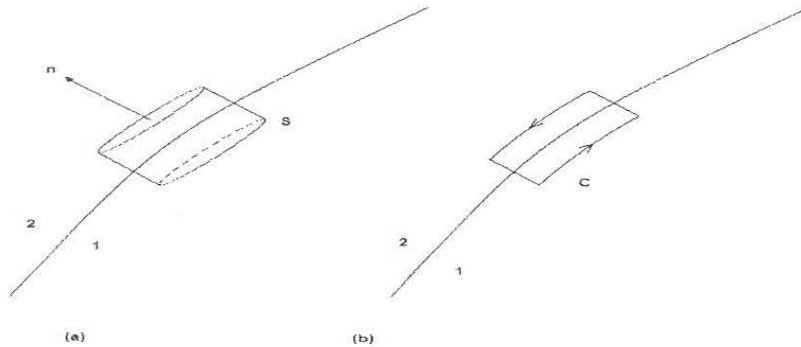


Figura 1.2 (a) Un pequeño cilindro sobre la interfase de dos medios: S es la superficie del cilindro. (b) Rectángulo delgado sobre la interfase de dos medios: C es la frontera del rectángulo.

Enunciamos ahora el Teorema de la Divergencia de Gauss:¹³

$$\int \nabla \cdot \vec{F} dV = \int \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (1.15)$$

aplicamos este teorema a ambos lados de las ecuaciones de Maxwell (1.3c) y (1.3) y obtenemos:

$$\int \nabla \cdot \vec{D} dV = \int \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (1.16a) \quad \text{y} \quad \int \nabla \cdot \vec{B} dV = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.16b)$$

Cuando la altura del cilindro de la figura (1.2a) se aproxima a cero, en el límite, las integrales de superficie se reducen a una sola integral sobre la superficie de las caras, esto no lleva a tener

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \quad (1.17a)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.17b)$$

Donde $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal unitaria a la superficie dirigida desde el medio 1 hacia el medio 2 y los subíndices se refieren a que dichos valores son tomados en las superficies correspondientes. Las condiciones de frontera a menudo se escriben como

$$D_{2,\perp} = D_{1,\perp} \quad (1.18a) \quad B_{2,\perp} = B_{1,\perp} \quad (1.18b)$$

Es decir, las componentes normales del desplazamiento eléctrico D_{\perp} y la componente normal del campo magnético B_{\perp} son siempre continuas al pasar de un medio a otro.

Para los vectores de campo $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{H}}$ dibujaremos un contorno rectangular con dos de sus lados paralelos a la superficie de continuidad, tal como se muestra en la figura (1.2b).

Enunciamos ahora el Teorema de Stokes:¹³

$$\int \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} \quad (1.19)$$

aplicando este teorema a ambos lados de las ecuaciones de Maxwell (1.3a) y (1.3b) obtenemos:

$$\int \nabla \times \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} \quad (1.20a) \quad \int \nabla \times \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} \quad (1.20b)$$

En el límite cuando el ancho del rectángulo se aproxima a cero, la integral de contorno se reduce a integrar sobre estos dos lados paralelos a la interfase solamente. Esto nos proporciona el resultado

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathbf{E}}_2 - \vec{\mathbf{E}}_1) = 0 \quad (1.21a) \quad \hat{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathbf{H}}_2 - \vec{\mathbf{H}}_1) = 0 \quad (1.21b)$$

Las condiciones de frontera para los campos eléctrico y de inducción magnética se escriben generalmente en la forma

$$E_{2,\parallel} = E_{1,\parallel} \quad (1.22a) \quad H_{2,\parallel} = H_{1,\parallel} \quad (1.22b)$$

En otras palabras, las componentes tangenciales del vector de campo eléctrico E_{\parallel} y del vector de campo magnético H_{\parallel} siempre son continuas en la frontera de la superficie.

CAPITULO 2

El Método de la Matriz de Transferencia

2.1 Introducción

Este capítulo trata sobre la propagación de los campos electromagnéticos en sistemas que están compuestos de dos o más medios. Se hace una introducción al Método de Matriz de Transferencia (MMT)¹⁴ y la implementación de éste método en un programa computacional. Procedemos en tres etapas. Primero, se analiza el problema de la reflexión y la transmisión de luz en una interfase. Se discuten los diferentes tipos de soluciones del campo electromagnético en la frontera entre dos medios. Segundo, se analiza el problema de la reflexión y transmisión en un sistema compuesto por una película delgada cuyo espesor es del orden de la longitud de onda del campo incidente. Finalmente, se analiza la propagación de luz en un sistema compuesto por varios medios estratificados o *multicapas*.

2.2 Reflexión y transmisión en una interfase

En esta sección se estudia como se comporta una onda plana monocromática que incide sobre una interfase entre dos medios homogéneos e isotrópicos. Vamos a demostrar que debido a las condiciones de frontera, una parte de la onda es reflejada hacia el primer medio, mientras que otra parte penetra en el segundo medio. Vamos a encontrar las condiciones para la dirección de propagación, también denominada la Ley de Snell, y para las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida mediante las Fórmulas de Fresnel.

En la Fig. 2.1 mostramos la interfase entre dos medios. Las funciones dieléctricas antes y después del plano $z=0$ son

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1 & z \leq 0 \\ \varepsilon_2 & z > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Vamos a suponer tres ondas planas, incidente reflejada y transmitida, caracterizadas por los vectores de onda $\hat{\mathbf{k}}_i$, $\hat{\mathbf{k}}_r$ y $\hat{\mathbf{k}}_t$, respectivamente. El plano que

contiene el vector de onda $\hat{\mathbf{k}}_i$ de la onda incidente y el vector unitario normal a la interfase $\hat{\mathbf{n}}$ se le llama *plano de incidencia*. El eje “y” es normal al plano de incidencia.

El vector de onda $\hat{\mathbf{k}}_i$ forma un ángulo θ_i con el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$, en forma similar se forman los ángulos θ_r y θ_t con las ondas reflejadas y transmitidas.

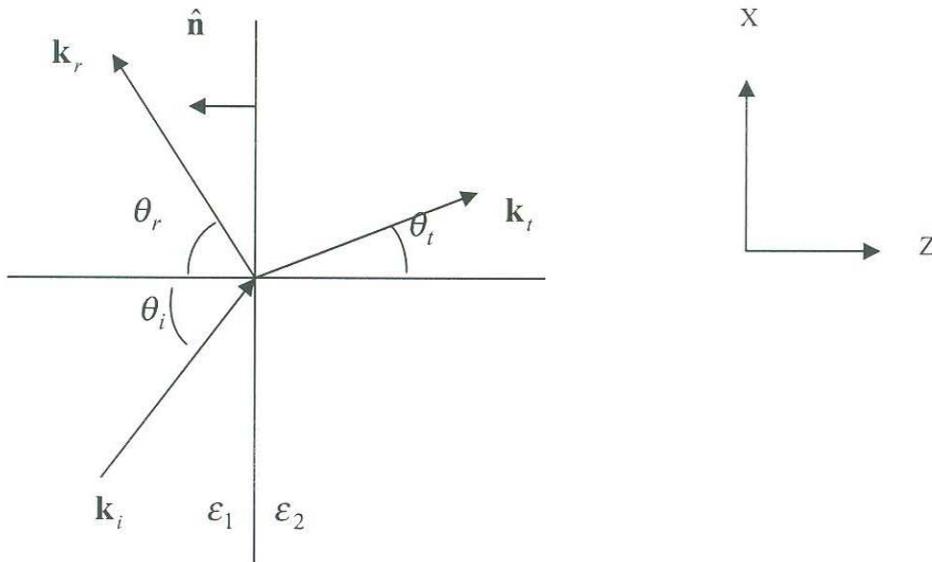


Figura 2.1 Campos incidente, reflejado y transmitido en una interfase de dos dieléctricos diferentes.

Los campos eléctrico incidente, reflejado y transmitido se describen por medio de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}_{\text{incidente}} &= \vec{\mathbf{E}}_i e^{i(\vec{\mathbf{k}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)} & z < 0 \\ \vec{\mathbf{E}}_{\text{reflejado}} &= \vec{\mathbf{E}}_r e^{i(\vec{\mathbf{k}}_r \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)} & z < 0 \\ \vec{\mathbf{E}}_{\text{transmitido}} &= \vec{\mathbf{E}}_t e^{i(\vec{\mathbf{k}}_t \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)} & z > 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

Debido a las condiciones de frontera sabemos que las componentes tangenciales del campo eléctrico deben de ser continuas a ambos lados de la interfase

$$\vec{\mathbf{E}}_{i,\parallel} e^{i(\vec{\mathbf{k}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)} + \vec{\mathbf{E}}_{r,\parallel} e^{i(\vec{\mathbf{k}}_r \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)} = \vec{\mathbf{E}}_{t,\parallel} e^{i(\vec{\mathbf{k}}_t \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)}\tag{2.3}$$

La ecuación anterior debe de ser válida para todo tiempo t y para todos los puntos de la interfase $z = 0$. Los argumentos de las exponenciales deben de ser idénticos

$$\left(\vec{\mathbf{k}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)_{z=0} = \left(\vec{\mathbf{k}}_r \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)_{z=0} = \left(\vec{\mathbf{k}}_t \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)_{z=0}\tag{2.4}$$

De esta forma, las componentes tangenciales de los vectores de onda son continuas,

$$k_{i,\parallel} = k_{r,\parallel} = k_{t,\parallel} \quad (2.5)$$

por lo que obtenemos

$$\theta_i = \theta_r \quad (2.6a)$$

$$n_1 \text{sen} \theta_i = n_2 \text{sen} \theta_t \quad (2.6b)$$

La primera ecuación indica que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, y la segunda ecuación, también llamada Ley de Snell, relaciona los índices de refracción y los ángulos de las ondas incidentes y transmitidas.

2.3 Relaciones de Fresnel

Al analizar la transmisión de energía electromagnética en un medio material es necesario considerar dos tipos de polarización para la onda incidente. Una de ellas es la polarización Transversal eléctrica (TE) que existe cuando el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia. La otra polarización es la llamada Transversal Magnética (TM), donde el campo magnético es el que es perpendicular al plano de incidencia. Toda onda electromagnética puede descomponerse en estas dos polarizaciones.

a) Polarización Transversal Eléctrica (TE)

Las componentes del campo eléctrico que se ilustran en la Fig. 2.2 se escriben

$$E_y(z,t) = \begin{cases} \left(E_1^+ e^{ik_{1z}z} + E_1^- e^{-ik_{1z}z} \right) e^{ik_x x - i\omega t} & -\infty < z < 0 \\ \left(E_2^+ e^{ik_{2z}z} + E_2^- e^{-ik_{2z}z} \right) e^{ik_x x - i\omega t} & 0 < z < \infty \end{cases} \quad (2.7)$$

los campos magnéticos relacionados son

$$H_x(z,t) = \begin{cases} \frac{ck_{1z}}{\omega} \left(E_1^+ e^{ik_{1z}z} - E_1^- e^{-ik_{1z}z} \right) e^{ik_x x - i\omega t} \\ \frac{ck_{2z}}{\omega} \left(E_2^+ e^{ik_{2z}z} - E_2^- e^{-ik_{2z}z} \right) e^{ik_x x - i\omega t} \end{cases} \quad (2.8)$$

aplicando las condiciones de frontera en $z=0$ obtenemos

$$\begin{aligned} E_1^+ + E_1^- &= E_2^+ + E_2^- \\ \frac{ck_{1z}}{\omega}(E_1^+ - E_1^-) &= \frac{ck_{2z}}{\omega}(E_2^+ - E_2^-) \end{aligned} \quad (2.9)$$

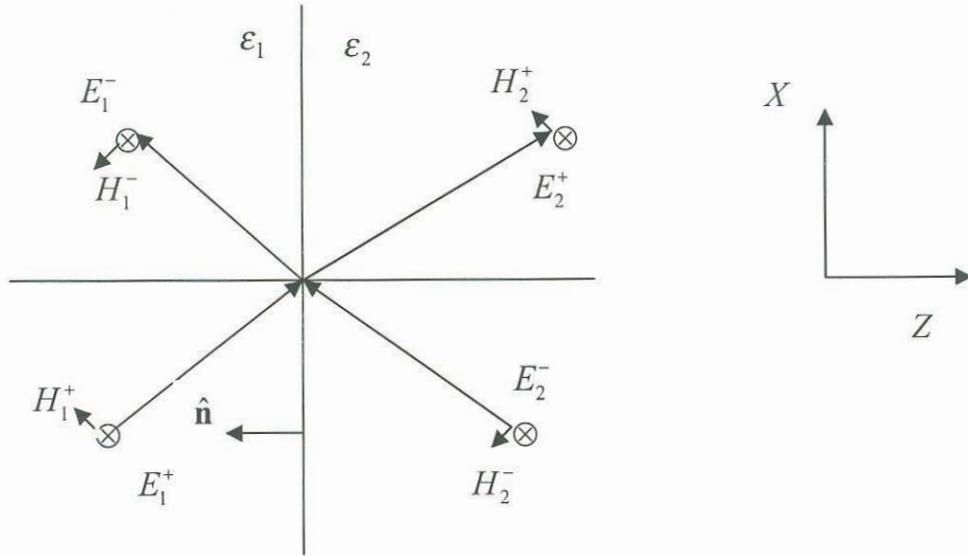


Figura 2.2 Campos eléctricos y magnéticos en la Polarización TE

estas dos ecuaciones pueden escribirse en forma matricial

$$M_1 \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

en donde las matrices dinámicas M_1 y M_2 son

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{ck_{iz}}{\omega} & -\frac{ck_{iz}}{\omega} \end{bmatrix} \quad i = 1,2 \quad (2.11)$$

De la ec. (2.10), podemos conocer los campos en el medio 2 mediante la relación

$$\begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = M_2^{-1} M_1 \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} \quad (2.12a)$$

$$\begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = M_{TE} \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} \quad (2.12b)$$

la matriz M_{TE} es

$$M_{TE} = \begin{bmatrix} (k_{2z} + k_{1z})/(2k_{2z}) & (k_{2z} - k_{1z})/(2k_{2z}) \\ (k_{2z} - k_{1z})/(2k_{2z}) & (k_{2z} + k_{1z})/(2k_{2z}) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Los coeficientes de Fresnel se obtienen considerando el caso en que el campo $E_2^- = 0$, es decir, cuando no existe campo que viaje hacia la izquierda en el medio 2, tal como se muestra en la Figura 2.3

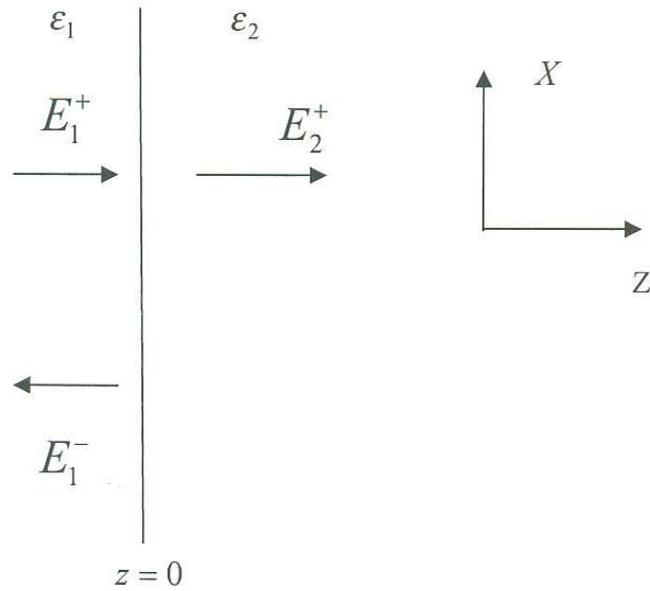


Figura 2.3 Ilustración de un campo que incide a un medio y que es parcialmente reflejado y transmitido.

se propone la normalización de campos

$$r_{TE} = \frac{E_1^-}{E_1^+} \quad (2.15a)$$

$$t_{TE} = \frac{E_2^+}{E_1^+} \quad (2.15b)$$

la ec. (2.12b) se escribe

$$\begin{bmatrix} t_{TE} \\ 0 \end{bmatrix} = M_{TE} \begin{bmatrix} 1 \\ r_{TE} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

esta ecuación matricial define el sistema ecuaciones

$$\begin{aligned} t_{TE} &= m_{TE,11} + m_{TE,12} r_{TE} \\ 0 &= m_{TE,21} + m_{TE,22} r_{TE} \end{aligned} \quad (2.17)$$

de donde se obtienen los coeficientes de Fresnel

$$r_{TE} = -\frac{m_{TE,21}}{m_{TE,22}} \quad (2.18a)$$

$$t_{TE} = m_{TE,11} - \frac{m_{TE,12}m_{TE,21}}{m_{TE,22}} \quad (2.18b)$$

Sustituyendo los elementos de la matriz M_{TE} obtenemos los coeficientes de reflexión y transmisión en función de los vectores de onda

$$r_{TE} = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}} \quad (2.19a)$$

$$t_{TE} = \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + k_{2z}} \quad (2.19b)$$

b) Polarización Transversal Magnética (TM)

Para la polarización transversal magnética, los campos se presentan como se ilustra en la figura 2.4

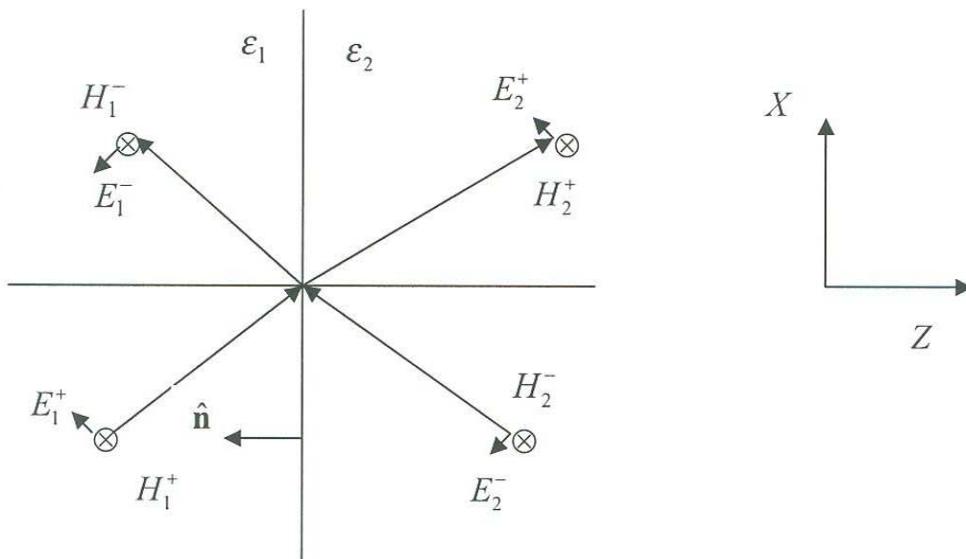


Figura 2.4 Campos eléctricos y magnéticos en la Polarización TM

Las componentes del campo eléctrico que se ilustran en la Fig. 2.4 se escriben

$$H_y(z,t) = \begin{cases} \left(H_1^+ e^{ik_{1z}z} + H_1^- e^{-ik_{1z}z} \right) e^{ik_x x - i\omega t} & -\infty < z < 0 \\ \left(H_2^+ e^{ik_{2z}z} + H_2^- e^{-ik_{2z}z} \right) e^{ik_x x - i\omega t} & 0 < z < \infty \end{cases} \quad (2.20)$$

Se aplican las ecuaciones de Maxwell y podemos expresar esta misma componente del campo magnético en términos del campo eléctrico

$$H_y(z,t) = \begin{cases} -\sqrt{\varepsilon_1} (E_1^+ e^{ik_{1z}z} - E_1^- e^{-ik_{1z}z}) e^{ik_x x - i\omega t} \\ -\sqrt{\varepsilon_2} (E_2^+ e^{ik_{2z}z} - E_2^- e^{-ik_{2z}z}) e^{ik_x x - i\omega t} \end{cases} \quad (2.21)$$

los campos eléctricos relacionados son

$$E_x(z,t) = \begin{cases} \frac{ck_{1z}}{\omega\sqrt{\varepsilon_1}} (E_1^+ e^{ik_{1z}z} + E_1^- e^{-ik_{1z}z}) e^{ik_x x - i\omega t} \\ \frac{ck_{2z}}{\omega\sqrt{\varepsilon_2}} (E_2^+ e^{ik_{2z}z} + E_2^- e^{-ik_{2z}z}) e^{ik_x x - i\omega t} \end{cases} \quad (2.22)$$

aplicando las condiciones de frontera en $z=0$ obtenemos

$$\begin{aligned} -\sqrt{\varepsilon_1} (E_1^+ - E_1^-) &= -\sqrt{\varepsilon_2} (E_2^+ - E_2^-) \\ \frac{ck_{1z}}{\omega\sqrt{\varepsilon_1}} (E_1^+ + E_1^-) &= \frac{ck_{2z}}{\omega\sqrt{\varepsilon_2}} (E_2^+ + E_2^-) \end{aligned} \quad (2.23)$$

estas dos ecuaciones pueden escribirse en forma matricial

$$M_1 \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

en donde las matrices dinámicas M_1 y M_2 son

$$M_j = \begin{bmatrix} -\sqrt{\varepsilon_j} & \sqrt{\varepsilon_j} \\ \frac{ck_{jz}}{\omega\sqrt{\varepsilon_j}} & \frac{ck_{jz}}{\omega\sqrt{\varepsilon_j}} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2 \quad (2.25)$$

los campos en el medio 2 se conocen mediante la relación

$$\begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = M_2^{-1} M_1 \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} \quad (2.26a)$$

$$\begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = M_{TM} \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} \quad (2.26b)$$

la matriz M_{TM} es

$$M_{TM} = \begin{bmatrix} (\varepsilon_1 k_{2z} + \varepsilon_2 k_{1z}) / 2\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2} k_{2z} & (\varepsilon_2 k_{1z} - \varepsilon_1 k_{2z}) / 2\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2} k_{2z} \\ (\varepsilon_2 k_{1z} - \varepsilon_1 k_{2z}) / 2\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2} k_{2z} & (\varepsilon_1 k_{2z} + \varepsilon_2 k_{1z}) / 2\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2} k_{2z} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Los coeficientes de Fresnel se obtienen considerando el caso en que el campo $E_2^- = 0$, es decir, cuando no existe campo que viaje hacia la izquierda en el medio 2 y proponiendo la normalización de campos

$$r_{TM} = \frac{E_1^-}{E_1^+} \quad (2.28a)$$

$$t_{TM} = \frac{E_2^+}{E_1^+} \quad (2.28b)$$

la ec. 2.26b se escribe

$$\begin{bmatrix} t_{TM} \\ 0 \end{bmatrix} = M_{TM} \begin{bmatrix} 1 \\ r_{TM} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

esta ecuación define las ecuaciones

$$\begin{aligned} t_{TM} &= m_{TM,11} + m_{TM,12} r_{TM} \\ 0 &= m_{TM,21} + m_{TM,22} r_{TM} \end{aligned} \quad (2.30)$$

de donde se obtienen los coeficientes de Fresnel

$$r_{TM} = -\frac{m_{TM,21}}{m_{TM,22}} \quad (2.31a)$$

$$t_{TM} = m_{TM,11} - \frac{m_{TM,12} m_{TM,21}}{m_{TM,22}} \quad (2.31b)$$

Sustituyendo los elementos de la matriz M_{TM} obtenemos los coeficientes de reflexión y transmisión en función de los vectores de onda

$$r_{TM} = \frac{\epsilon_1 k_{2z} - \epsilon_2 k_{1z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}} = \frac{n_1^2 k_{2z} - n_2^2 k_{1z}}{n_2^2 k_{1z} + n_1^2 k_{2z}} \quad (2.32a)$$

$$t_{TM} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}\sqrt{\epsilon_2}k_{1z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}} = \frac{2n_1 n_2 k_{1z}}{n_2^2 k_{1z} + n_1^2 k_{2z}} \quad (2.32b)$$

c) Reflexión y transmisión en una interfase

Como un ejemplo de la aplicación de las relaciones de Fresnel vamos a considerar el caso de la reflexión entre el aire ($n_1=1$) y vidrio ($n_2=1.5$). La reflectividad (transmitividad) está definida como la razón entre la energía reflejada (transmitida) sobre la energía incidente:

$$R_{TE(TM)} = |r_{TE(TM)}|^2 \quad (2.33)$$

$$T_{TE(TM)} = \frac{k_{2z}}{k_{1z}} |t_{TE(TM)}|^2 \quad (2.34)$$

En la Fig. 2.5 mostramos la reflexión en función del ángulo de incidencia para el caso TE. Se observa que a medida que el ángulo se incrementa la reflexión aumenta. En la Fig. 2.6 tenemos la reflexión para el caso TM. Se observa que existe un cierto ángulo en el cual la reflexión es cero. Este ángulo se llama *ángulo de Brewster*.

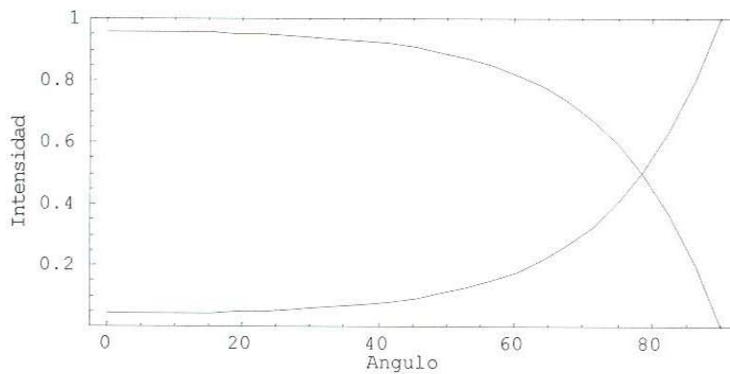


Figura 2.5 Reflectancia y Transmitancia interfase aire-vidrio polarización TE

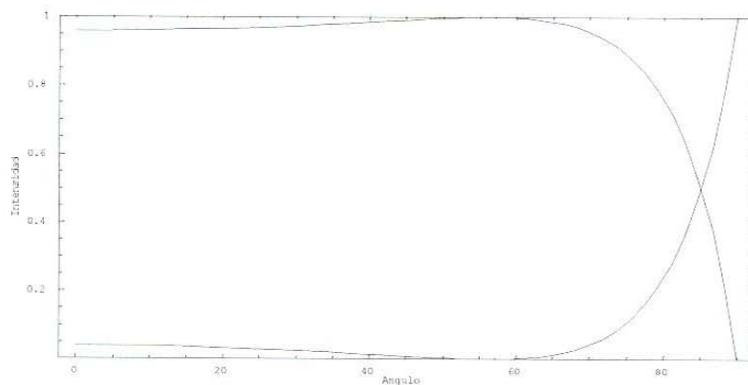


Figura 2.6 Reflectancia y Transmitancia interfase aire-vidrio polarización TM

2.4 Reflexión y transmisión en una película delgada

En esta sección mostramos el tratamiento electromagnético para la obtención de los coeficientes de Fresnel para una película delgada en el caso unidimensional, como un paso previo a la exposición del MMT. Consideramos un sistema de tres medios como se ilustra en la Figura 2.7 y definido por una función dieléctrica de la forma

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1 & -\infty < z < 0 \\ \varepsilon_2 & 0 < z < d \\ \varepsilon_3 & d < z < \infty \end{cases} \quad (2.35)$$

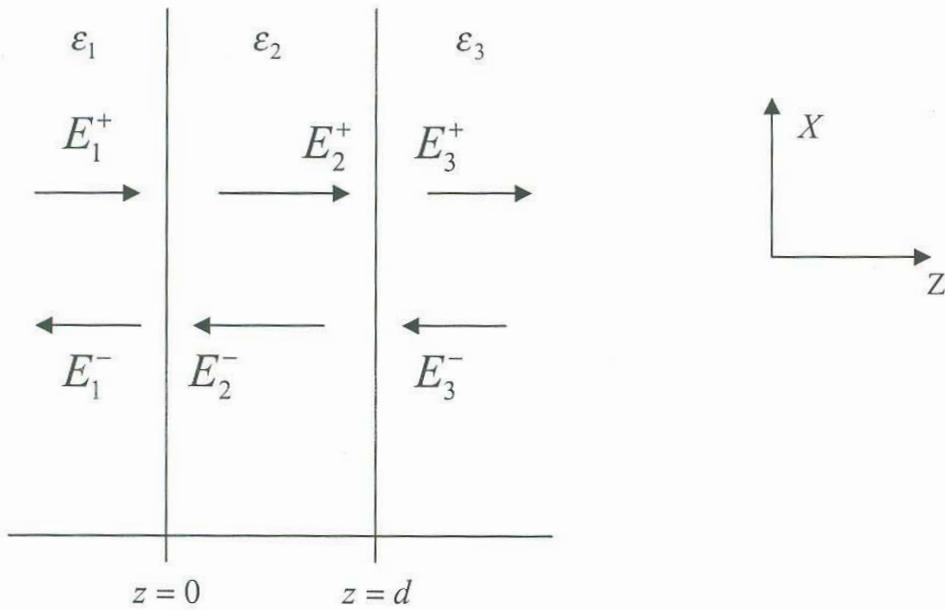


Figura 2.7 Representación de los campos en una película delgada para polarización TE

Consideremos el campo eléctrico a incidencia normal

$$E_y(z,t) = \begin{cases} \left(E_1^+ e^{ik_1 z} + E_1^- e^{-ik_1 z} \right) e^{-i\omega t} & -\infty < z < 0 \\ \left(E_2^+ e^{ik_2 z} + E_2^- e^{-ik_2 z} \right) e^{-i\omega t} & \text{si } 0 < z < d \\ \left(E_3^+ e^{ik_3(z-d)} + E_3^- e^{-ik_3(z-d)} \right) e^{-i\omega t} & d < z < \infty \end{cases} \quad (2.36)$$

ahora escribimos la componente tangencial del campo magnético en cada uno de los medios

$$H_x(z,t) = \begin{cases} \frac{k_1 c}{\omega} \left(E_1^+ e^{ik_1 z} - E_1^- e^{-ik_1 z} \right) e^{-i\omega t} & -\infty < z < 0 \\ \frac{k_2 c}{\omega} \left(E_2^+ e^{ik_2 z} - E_2^- e^{-ik_2 z} \right) e^{-i\omega t} & \text{si } 0 < z < d \\ \frac{k_3 c}{\omega} \left(E_3^+ e^{ik_3(z-d)} - E_3^- e^{-ik_3(z-d)} \right) e^{-i\omega t} & d < z < \infty \end{cases} \quad (2.37)$$

Aplicamos las condiciones de frontera en $z=0$, tal como se hizo en la ec. (2.9)

$$\begin{aligned} E_1^+ + E_1^- &= E_2^+ + E_2^- \\ \frac{k_1 c}{\omega} (E_1^+ - E_1^-) &= \frac{k_2 c}{\omega} (E_2^+ - E_2^-) \end{aligned} \quad (2.38)$$

mientras que las condiciones de frontera aplicadas en $z = d$

$$\begin{aligned} \frac{k_{2z}c}{\omega} (E_2^+ e^{ik_{2z}d} - E_2^- e^{-ik_{2z}d}) &= \frac{k_{3z}c}{\omega} (E_3^+ - E_3^-) \\ E_2^+ e^{ik_{2z}d} + E_2^- e^{-ik_{2z}d} &= E_3^+ + E_3^- \end{aligned} \quad (2.39)$$

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial

$$M_1 \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$M_2 F_{2,d} \begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} E_3^+ \\ E_3^- \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

donde las matrices dinámicas están definidas como

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{k_{iz}c}{\omega} & -\frac{k_{iz}c}{\omega} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.42)$$

y la matriz de fase es

$$F_{2,d} = \begin{bmatrix} e^{ik_{2z}d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{2z}d} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Podemos relacionar los campos en el medio 3 y el medio 1 mediante la identidad

$$\begin{bmatrix} E_3^+ \\ E_3^- \end{bmatrix} = M_3^{-1} M_2 F_{2,d} M_2^{-1} M_1 \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

En donde definimos la matriz de transferencia de la película delgada como

$M = M_3^{-1} M_2 F_{2,d} M_2^{-1} M_1$ de manera que

$$\begin{bmatrix} E_3^+ \\ E_3^- \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Para el cálculo de la reflexión consideramos que el campo $E_3^- = 0$, ya que no existe campo que viaje a la izquierda en el medio 3. Normalizando los campos incidente y reflejado tenemos

$$r = \frac{E_1^-}{E_1^+} \quad (2.46)$$

$$t = \frac{E_3^+}{E_1^+} \quad (2.47)$$

La ecuación matricial se escribe

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Despejando los coeficientes de reflexión y transmisión y manipulando los elementos de matriz podemos escribir

$$r = -\frac{m_{21}}{m_{22}} \quad (2.49)$$

$$t = m_{11} - \frac{m_{12}m_{21}}{m_{22}} \quad (2.50)$$

2.5 Sistema multicapa

Consideremos un sistema multicapa que en general puede ser no periódico como se ilustra en la Fig. 2.8. Cada capa interna esta definida por un espesor d_j y un índice de refracción n_j , supuesto constante en toda la capa. Este sistema multicapa es unidimensional, ya que la variación de los parámetros materiales y/o geométricos solo se presenta en la dirección z , permaneciendo constantes en las otras dos direcciones.

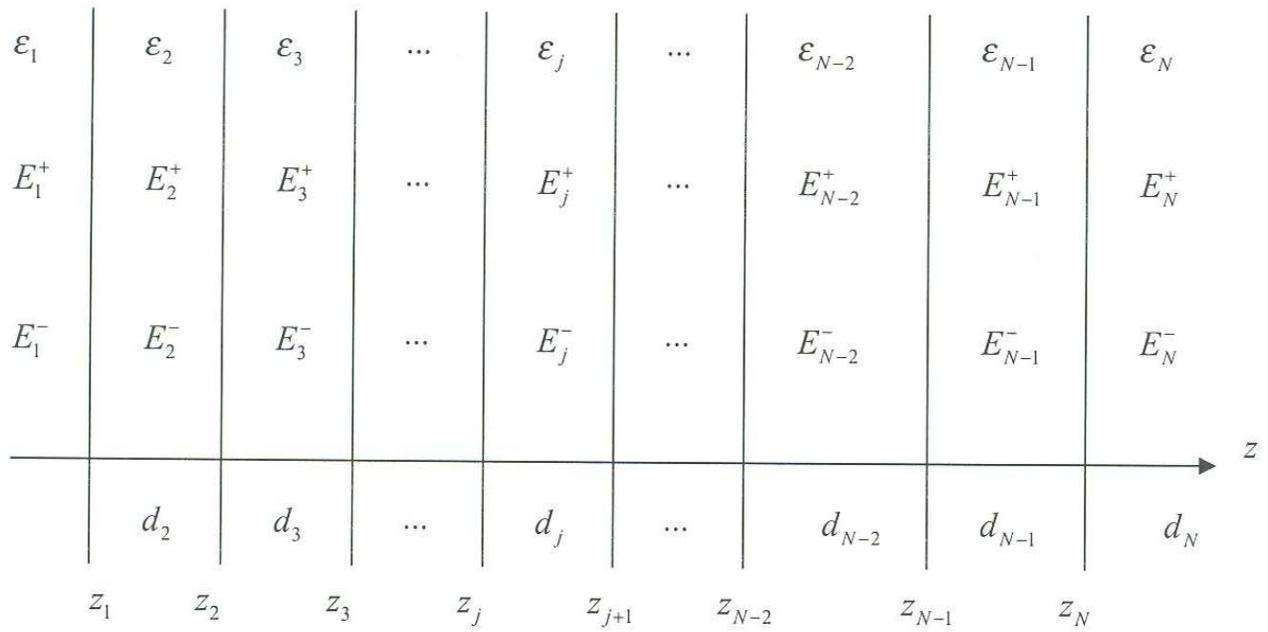


Figura 2.8 Distribución de los campos en una multicapa dieléctrica unidimensional.

La función dieléctrica es

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1 & z \leq z_1 \\ \varepsilon_2 & z_1 < z \leq z_2 \\ \vdots & \\ \varepsilon_j & z_{j-1} < z \leq z_j \\ \vdots & \\ \varepsilon_{N-1} & z_{N-1} < z \leq z_N \\ \varepsilon_N & z_N < z \end{cases} \quad (2.51)$$

el tamaño de las capas esta determinado por la relación entre sus coordenadas

$$d_j = z_{j+1} - z_j \quad 2 < j \leq N-1 \quad (2.52)$$

Para una onda electromagnética que incide normalmente y se propaga a través de la multicapa, el campo eléctrico se puede expresar como

$$E = E(z)e^{-i\omega t} \quad (2.53)$$

donde la distribución del campo eléctrico $E(z)$ se puede escribir

$$E(z) = \begin{cases} E_1^+ e^{-ik_{1z}(z-z_1)} + E_1^- e^{-ik_{1z}(z-z_1)} & z \leq z_1 \\ E_2^+ e^{-ik_{2z}(z-z_2)} + E_2^- e^{-ik_{2z}(z-z_2)} & z_1 < z \leq z_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_j^+ e^{-ik_{jz}(z-z_j)} + E_j^- e^{-ik_{jz}(z-z_j)} & z_{j-1} < z \leq z_j \\ \vdots & \vdots \\ E_{N-1}^+ e^{-ik_{N-1z}(z-z_{N-1})} + E_{N-1}^- e^{-ik_{N-1z}(z-z_{N-1})} & z_{N-1} < z \leq z_N \\ E_N^+ e^{-ik_{Nz}(z-z_N)} + E_N^- e^{-ik_{Nz}(z-z_N)} & z_N < z \end{cases} \quad (2.54)$$

los campos magnéticos asociados son

$$H(z) = \begin{cases} \frac{k_{1z}c}{\omega} (E_1^+ e^{-ik_{1z}(z-z_1)} + E_1^- e^{-ik_{1z}(z-z_1)}) & z \leq z_1 \\ \frac{k_{2z}c}{\omega} (E_2^+ e^{-ik_{2z}(z-z_2)} + E_2^- e^{-ik_{2z}(z-z_2)}) & z_1 < z \leq z_2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{k_{jz}c}{\omega} (E_j^+ e^{-ik_{jz}(z-z_j)} + E_j^- e^{-ik_{jz}(z-z_j)}) & z_{j-1} < z \leq z_j \\ \vdots & \vdots \\ \frac{k_{(N-1)z}c}{\omega} (E_{N-1}^+ e^{-ik_{N-1z}(z-z_{N-1})} + E_{N-1}^- e^{-ik_{N-1z}(z-z_{N-1})}) & z_{N-1} < z \leq z_N \\ \frac{k_{Nz}c}{\omega} (E_N^+ e^{-ik_{Nz}(z-z_N)} + E_N^- e^{-ik_{Nz}(z-z_N)}) & z_N < z \end{cases} \quad (2.55)$$

Las ecuaciones anteriores expresan que el campo en cada capa se puede considerar como la resultante de dos ondas que viajan en direcciones contrarias, las amplitudes E_i^+ y E_i^- son constantes, y k_i es la magnitud del vector de onda en la dirección de propagación.

Si aplicamos las condiciones de frontera a la j -ésima interfase, los campos a ambos lados cumplen con la relación

$$\begin{aligned} E_j^+ + E_j^- &= E_{j+1}^+ e^{ik_{j+1}d_{j+1}} + E_{j+1}^- e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} \\ \frac{k_j c}{\omega} (E_j^+ - E_j^-) &= \frac{k_{j+1} c}{\omega} (E_{j+1}^+ e^{ik_{j+1}d_{j+1}} - E_{j+1}^- e^{-ik_{j+1}d_{j+1}}) \end{aligned} \quad (2.56)$$

que se pueden expresar en la forma matricial

$$M_j \begin{bmatrix} E_j^+ \\ E_j^- \end{bmatrix} = M_{j+1} F_{j+1} \begin{bmatrix} E_{j+1}^+ \\ E_{j+1}^- \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

27

$$r = -\frac{m_{21}}{m_{22}} \quad (2.64)$$

$$t = m_{11} - \frac{m_{21}m_{12}}{m_{22}} \quad (2.65)$$

por lo que la Reflectancia y Transmitancia resultan ser

$$R = |r|^2 \quad (2.66)$$

donde

$$M_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{k_j c}{\omega} & -\frac{k_j c}{\omega} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$F_j = \begin{pmatrix} e^{ik_j d_j} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j d_j} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Los campos a cada lado de las interfases se encuentran efectuando la operación matricial

$$\begin{bmatrix} E_{j+1}^+ \\ E_{j+1}^- \end{bmatrix} = F_{j+1}^{-1} M_{j+1}^{-1} M_j \begin{bmatrix} E_j^+ \\ E_j^- \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

para un sistema de N capas tenemos

$$\begin{bmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{bmatrix} = \prod_{j=2}^{j=N-1} F_j^{-1} M_j^{-1} M_{j-1} \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

definiendo la matriz de transferencia

$$M = \prod_{j=2}^{j=N-1} F_j^{-1} M_j^{-1} M_{j-1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

tenemos

$$\begin{bmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Ahora bien, si consideramos que no hay campo transmitido que viaje hacia la izquierda, o sea $E_N^- = 0$, los coeficientes de reflexión y transmisión quedan

$$r = -\frac{m_{21}}{m_{22}} \quad (2.64)$$

$$t = m_{11} - \frac{m_{21} m_{12}}{m_{22}} \quad (2.65)$$

por lo que la Reflectancia y Transmitancia resultan ser

$$R = |r|^2 \quad (2.66)$$

$$T = \frac{k_N}{k_1} |t|^2 \quad (2.67)$$

2.6 Implementación del Método de Matriz de Transferencia para obtener la transmisión y reflexión de un sistema multicapa.

Para ejemplificar el uso del método de matriz de transferencia, utilizaremos un sistema formado por 32 capas alternadas de aire ($n_1 = 1.0$) y vidrio ($n_2 = 1.5$) de 50 Ångstroms de espesor cada una, hacia las cuales hacemos incidir una onda electromagnética y obtenemos sus graficas de transmisión y reflexión utilizando el programa que se presenta en el Apéndice P-2. En las siguientes figuras, mostramos los resultados

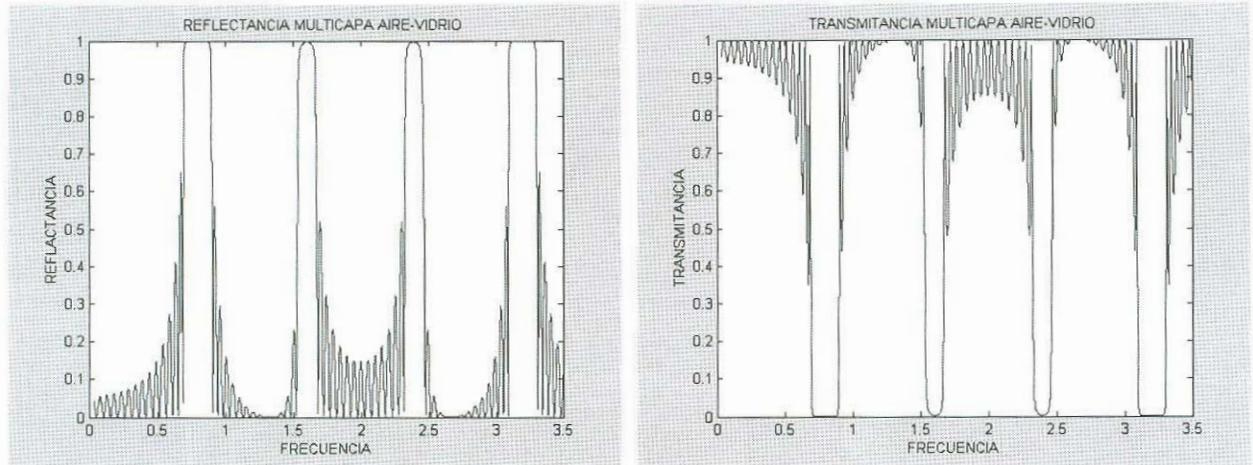


Figura 2.9 Graficas de Reflexión y transmisión para una multicapa formada por 16 celdas unitarias de cristal fotonico (aire-vidrio), obtenidas mediante el MMT.

CAPITULO 3

El Método de Ondas Planas.*

3.1 Introducción

Es conocido que en sólidos cristalinos la periodicidad atómica impide la propagación de los electrones que tienen una energía situada en la llamada Brecha de Energías Prohibidas. La existencia de zonas de conducción o zonas de no conducción determina las propiedades de los llamados semiconductores. Para la determinación de las características físicas de estos cristales atómicos se han desarrollado diversos métodos de cálculo.

En 1987 E. Yablonovitch⁷ propuso inhibir la propagación de luz mediante la fabricación de materiales dieléctricos. La idea es construir de forma artificial estructuras que tengan una periodicidad similar a los cristales atómicos pero unas 1000 veces más grande. Esta estructura difracta a los fotones (luz) de la misma forma que los cristales atómicos difractan electrones. Por esta razón, se les ha llamado Cristales Fotónicos (CF) y asimismo nació el concepto de Brecha de Energía Prohibida (BEP) para fotones. Los CF abren vías de investigación muy prometedoras para la manipulación de fotones en la industria de las telecomunicaciones. En particular es de gran relevancia la integración de dispositivos fotónicos y electrónicos.

El estudio de las propiedades tecnológicamente más importantes para CF probablemente estará ligado a las heteroestructuras, es decir, la superposición de dos diferentes redes cristalinas que den lugar a fenómenos de interés tecnológico. La idea de juntar dos diferentes redes cristalinas ha probado ser una vía exitosa en cristales atómicos, en donde la conjunción de diferentes redes cristalinas dió lugar al invento del transistor, génesis de la revolución electrónica.

Después de que en 1987 los CF fueron propuestos, comenzaron los primeros estudios experimentales.¹⁵ Los primeros cálculos de bandas fónicas fueron realizados por los especialistas en bandas de energía electrónicas utilizando el método de ondas planas.¹⁶⁻¹⁸ Sin embargo, estos primeros resultados no estaban en concordancia con los

* Artículo enviado a la Revista Mexicana de Física para su publicación en el Área de Enseñanza

resultados experimentales, ya que los cálculos predecían BEP en lugares en donde el experimento no las detectaba.¹⁶ El problema venía de la utilización de una teoría de campo escalar. Los cálculos imitaban el caso de BEP electrónicas, en donde se buscan los eigenvalores de las eigenfunciones de la ecuación de onda de Schrödinger.¹⁵⁻¹⁸ Pero utilizar una teoría escalar no es el procedimiento correcto. Para BEP fotónicas es necesario resolver las ecuaciones de Maxwell. El cálculo de bandas fotónicas necesita ser planteado como la solución vectorial del campo electromagnético para obtener resultados correctos.¹⁹⁻²²

3.2 La Serie de Fourier para la Función Dieléctrica

Comenzamos nuestro análisis planteando la ecuación de onda en 1D

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z,t) + \varepsilon(z) \frac{\omega^2}{c^2} E(z,t) = 0. \quad (3.1)$$

Consideramos que la función dieléctrica forma una red periódica infinita como ilustra la Figura 3.1a. Todo cristal está conformado por una red y una base. En la Figura 3.1b se muestra la base o *celda unitaria* que está constituida por los materiales de constantes dieléctricas ε_1 y ε_2 cuyos espesores son a y b , respectivamente. La longitud de la celda unitaria es $d=a+b$.

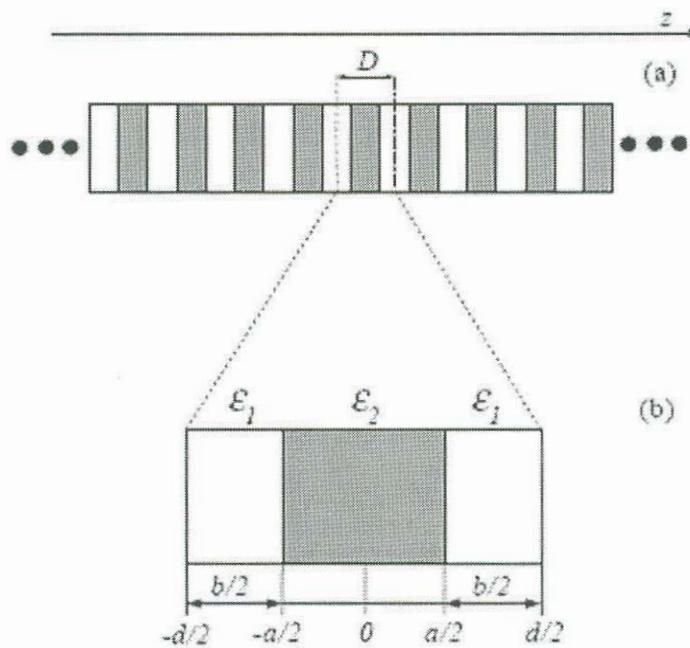


Figura 3.1 Representación de la función dieléctrica en una multicelda y celda unitaria.

La forma de la función dieléctrica puede expresarse matemáticamente en el intervalo $-\frac{d}{2} \leq z \leq +\frac{d}{2}$ como²³

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \Theta\left(\frac{a}{2} - |z|\right) \quad (3.2)$$

donde

$$\Theta(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

La función dieléctrica periódica puede expresarse en términos de una serie de Fourier,¹⁴

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varepsilon(G_z) e^{iG_z z} \quad (3.4)$$

donde $G_z = n \frac{2\pi}{d}$. Para conocer los coeficientes de la serie de Fourier

$\varepsilon(G_z)$ multiplicamos por $e^{-iG_z z}$ e integramos ambos lados de la ecuación

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG_z z} dz = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sum_{G_z} \varepsilon(G_z) e^{iG_z z} e^{-iG_z z} dz \quad (3.5)$$

la integral del lado derecho se desarrolla en el Apéndice A-1, el resultado es

$$\varepsilon(G_z) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG_z z} dz \quad (3.6)$$

Para calcular estos coeficientes primero planteamos el caso en que $G_z = 0$.

Sustituimos la ec. 3.2 en la ec. 3.6 para obtener

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \left(\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \Theta\left(\frac{a}{2} - |z|\right) \right) dz \quad (3.7)$$

separamos los intervalos en donde la función dieléctrica permanece constante

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{-\frac{a}{2}} \varepsilon_1 dz + \frac{1}{d} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \varepsilon_2 dz + \frac{1}{d} \int_{+\frac{a}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon_1 dz \quad (3.8)$$

el coeficiente de Fourier es entonces

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_1 + f(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (3.9)$$

donde la fracción de llenado f se define como $f = \frac{a}{d}$.

Ahora consideramos el caso cuando $G_z \neq 0$, los coeficientes de Fourier son

$$\varepsilon(G_z) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \left(\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \Theta\left(\frac{a}{2} - |z|\right) \right) e^{-iG_z z} dz \quad (3.10)$$

separamos una vez más la integral en los intervalos en los cuales la función dieléctrica se conserva constante,

$$\varepsilon(G_z) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{-\frac{a}{2}} \varepsilon_1 e^{-iG_z z} dz + \frac{1}{d} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \varepsilon_2 e^{-iG_z z} dz + \frac{1}{d} \int_{+\frac{a}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon_1 e^{-iG_z z} dz \quad (3.11)$$

resolvemos cada integral y obtenemos

$$\varepsilon(G_z) = \frac{\varepsilon_1}{-iG_z d} \left[e^{+iG_z \frac{a}{2}} - e^{+iG_z \frac{d}{2}} \right] + \frac{\varepsilon_2}{-iG_z d} \left[e^{-iG_z \frac{a}{2}} - e^{+iG_z \frac{a}{2}} \right] + \frac{\varepsilon_1}{-iG_z d} \left[e^{-iG_z \frac{d}{2}} - e^{-iG_z \frac{a}{2}} \right] \quad (3.12)$$

factorizando los términos comunes tenemos la expresión

$$\varepsilon(G_z) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{a}{d} \left(\frac{1}{\frac{G_z a}{2}} \right) \left(\frac{e^{+iG_z \frac{a}{2}} - e^{-iG_z \frac{a}{2}}}{2i} \right) \quad (3.13)$$

la cual se puede reducir a

$$\varepsilon(G_z) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) f \left(\frac{\text{Sen}\left(\frac{G_z a}{2}\right)}{\frac{G_z a}{2}} \right) \quad (3.14)$$

Los coeficientes de Fourier pueden expresarse en forma compacta mediante la expresión

$$\varepsilon(G_z) = \{\varepsilon_1 + f(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\} \delta_{G_z,0} + \left\{ f(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{\text{Sen}\left(\frac{G_z a}{2}\right)}{\left(\frac{G_z a}{2}\right)} \right\} (1 - \delta_{G_z,0}) \quad (3.15)$$

Como un ejemplo de la representación de la función dieléctrica en términos de la serie de Fourier consideramos una celda unitaria de espesor $d = 100 \times 10^{-10} \text{ m}$ y $f = 0.5$. Las funciones dieléctricas son $\epsilon_1 = 5.52$ y $\epsilon_2 = 2.13$. Presentamos en la Figura 3.2 los coeficientes de Fourier (parte a) y la serie de Fourier de la función dieléctrica (parte b) para los casos en que $N = 15, 30$ y 100 , respectivamente. Se observa que a medida que el número de ondas aumenta, los coeficientes de Fourier (parte a) tienden al valor cero. Por su parte la función dieléctrica (parte b) converge mejor a medida que se ocupan más valores de N , es decir, más ondas planas. En el Apéndice P-3 incluimos un programa en Matlab que realiza estas gráficas para diferentes valores de N .

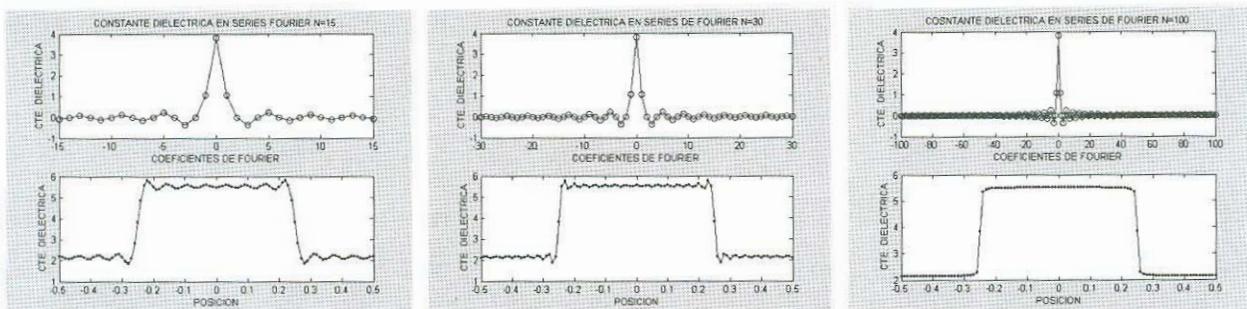


Figura 3.2 Coeficientes de Fourier y representación de la Constante dieléctrica para los casos de 15, 30 y 100 ondas planas.

3.3 Ecuación de valores propios

Para resolver la ecuación de onda en términos de la serie de Fourier es más conveniente expresar la ecuación dividiendo sobre la función dieléctrica²³

$$\frac{1}{\epsilon(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y(z) + \frac{\omega^2}{c^2} E_y(z) = 0 \quad (3.16)$$

En forma similar a la serie para $\epsilon(z)$, es posible obtener una serie de Fourier¹³ del inverso de la función dieléctrica de la forma

$$\mu(z) \equiv \frac{1}{\epsilon(z)} = \sum_{G_z} \mu(G_z) e^{iG_z z} \quad (3.17)$$

cuyos coeficientes de Fourier son

$$\mu(G_z) = \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1} + f \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \right\} \delta_{G_z,0} + \left\{ f \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \frac{\text{Sen} \left(\frac{G_z a}{2} \right)}{\left(\frac{G_z a}{2} \right)} \right\} (1 - \delta_{G_z,0}) \quad (3.18)$$

El campo eléctrico en la celda unitaria también puede expresarse en términos de serie de Fourier en la forma

$$E(z) \equiv E_0 e^{ik_z z} = \sum_{G_z} E(G_z) e^{iG_z z} e^{ik_z z} \quad (3.19)$$

sustituyendo las expresiones en serie de $\mu(z)$ y $E(z)$ en la ec. (3.16) tenemos

$$\sum_{G_z} \mu(G_z) e^{iG_z z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum_{G'_z} E(G'_z) e^{iG'_z z} e^{ik_z z} = -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{G_z} E(G_z) e^{i(k_z + G_z)z} \quad (3.20)$$

En el lado izquierdo las funciones periódicas $\mu(z)$ y $E(z)$ son descritas por las sumatorias que corren sobre G_z y G'_z , respectivamente. Realizando las derivadas correspondientes tenemos

$$\sum_{G_z} \sum_{G'_z} \mu(G_z) E(G'_z) (k_z + G'_z)^2 e^{i(G'_z + G_z)z} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{G_z} E(G_z) e^{iG_z z} \quad (3.21)$$

donde hemos eliminado en ambos lados la exponencial $e^{ik_z z}$. Para igualar las series en ambos lados de la igualdad multiplicamos por $e^{iG'_z z}$ e integramos sobre la celda unitaria

$$\int_{-d/2}^{+d/2} \left\{ \sum_{G_z} \sum_{G'_z} \mu(G_z) E(G'_z) (k_z + G'_z)^2 e^{i(G'_z + G_z)z} \right\} e^{iG'_z z} dz = \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-d/2}^{+d/2} \left\{ \sum_{G_z} E(G_z) e^{iG_z z} \right\} e^{iG'_z z} dz \quad (3.22)$$

como hemos aprendido en el Apéndice A-1, identificamos las funciones delta

$$\sum_{G_z} \sum_{G'_z} \mu(G_z) (k_z + G'_z)^2 E(G'_z) \delta_{G'_z, G'_z + G_z} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{G_z} E(G_z) \delta_{G'_z, G_z} \quad (3.23)$$

aplicando la función delta tenemos

$$\sum_{G'_z} \mu(G_z - G'_z) (k_z + G'_z)^2 E(G'_z) = \frac{\omega^2}{c^2} E(G_z) \quad (3.24)$$

cambiamos el índice mudo $G'_z \rightarrow G_z$ para obtener

$$\sum_{G_z} \mu(G_z - G_z) (k_z + G_z)^2 E(G_z) = \frac{\omega^2}{c^2} E(G_z) \quad (3.25)$$

Esta ecuación de valores propios, es susceptible de resolverse numéricamente, desarrollando la términos de la igualdad en función de los valores que pueden tomar las cantidades G_z y G'_z . Para ello, debemos encontrar una representación matricial.

3.4 Representación matricial de la ecuación de valores propios

La estrategia para resolver la ecuación de eigenvalores es plantear una ecuación matricial. Para obtenerla desarrollamos el lado izquierdo de la ec. 3.25

$$\begin{aligned}
 \sum_{G'_z} \mu(G_z - G'_z) E(G'_z) (k_z + G'_z)^2 &= \mu \left(G_z - \left[-n \frac{2\pi}{d} \right] \right) \left[k_z + (-n) \frac{2\pi}{d} \right]^2 E \left(-n \frac{2\pi}{d} \right) \\
 &+ \mu \left(G_z - \left[(-n+1) \frac{2\pi}{d} \right] \right) \left[k_z + (-n+1) \frac{2\pi}{d} \right]^2 E \left((-n+1) \frac{2\pi}{d} \right) \\
 &+ \dots \\
 &+ \mu \left(G_z - \left[-1 \frac{2\pi}{d} \right] \right) \left[k_z + (-1) \frac{2\pi}{d} \right]^2 E \left(-1 \frac{2\pi}{d} \right) \\
 &+ \mu (G_z - [0]) [k_z]^2 E(0) \\
 &+ \mu \left(G_z - \left[+1 \frac{2\pi}{d} \right] \right) \left[k_z + (+1) \frac{2\pi}{d} \right]^2 E \left(+1 \frac{2\pi}{d} \right) \\
 &+ \dots \\
 &+ \mu \left(G_z - \left[(n-1) \frac{2\pi}{d} \right] \right) \left[k_z + (n-1) \frac{2\pi}{d} \right]^2 E \left((n-1) \frac{2\pi}{d} \right) \\
 &+ \mu \left(G_z - \left[n \frac{2\pi}{d} \right] \right) \left[k_z + (n) \frac{2\pi}{d} \right]^2 E \left(n \frac{2\pi}{d} \right) \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

esta larga sumatoria puede escribirse como una multiplicación de un vector renglón por un vector columna

$$\left[V(G_z, -n) \cdots V(G_z, -1) V(G_z, 0) V(G_z, +1) \cdots V(G_z, +n) \right] \begin{bmatrix} E(-n) \\ \cdot \\ \cdot \\ E(-1) \\ E(0) \\ E(+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ E(+n) \end{bmatrix} = \frac{\omega^2}{c^2} E(G_z) \quad (3.27)$$

donde el elemento j -ésimo en el renglón es

$$V\left(G_z, \left[j \frac{2\pi}{d} \right]\right) = \mu\left(G_z - \left[j \frac{2\pi}{d} \right]\right) \left[k_z + (j) \frac{2\pi}{d} \right] \quad (3.28)$$

La ec. 3.27 es válida para cualquier valor de G_z . Para lograr un sistema cuadrado es necesario plantear esta ecuación para todos los valores dependientes de n que pueden tomar G_z y G'_z . Procediendo de esta forma obtenemos

$$\begin{bmatrix} V(-N, -N) & \cdots & V(-N, -1) & V(-N, 0) & V(-N, +1) & \cdots & V(-N, +N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V(-1, -N) & \cdots & V(-1, -1) & V(-1, 0) & V(-1, +1) & \cdots & V(-1, +N) \\ V(0, -N) & \cdots & V(0, -1) & V(0, 0) & V(0, +1) & \cdots & V(0, +N) \\ V(+1, -N) & \cdots & V(+1, -1) & V(+1, 0) & V(+1, +1) & \cdots & V(+1, +N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V(+N, -N) & \cdots & V(+N, -1) & V(+N, 0) & V(+N, +1) & \cdots & V(+N, +N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(-N) \\ \cdots \\ E(-1) \\ E(0) \\ E(+1) \\ \cdots \\ E(+N) \end{bmatrix} = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{bmatrix} E(-N) \\ \cdots \\ E(-1) \\ E(0) \\ E(+1) \\ \cdots \\ E(+N) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Así se plantea el sistema de ecuaciones

$$\vec{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{X}} = \lambda \vec{\mathbf{X}} \quad (3.30)$$

donde

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} V(-N,-N) & \dots & V(-N,-1) & V(-N,0) & V(-N,+1) & \dots & V(-N,+N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V(-1,-N) & \dots & V(-1,-1) & V(-1,0) & V(-1,+1) & \dots & V(-1,+N) \\ V(0,-N) & \dots & V(0,-1) & V(0,0) & V(0,+1) & \dots & V(0,+N) \\ V(+1,-N) & \dots & V(+1,-1) & V(+1,0) & V(+1,+1) & \dots & V(+1,+N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V(+N,-N) & \dots & V(+N,-1) & V(+N,0) & V(+N,+1) & \dots & V(+N,+N) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\vec{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} E(-N) \\ \dots \\ E(-1) \\ E(0) \\ E(+1) \\ \dots \\ E(+N) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.33)$$

La solución que obtenemos al resolver numéricamente la ecuación de onda, nos proporciona las frecuencias propias del sistema y con ello los estados accesibles de propagación de la onda electromagnética al interior del cristal. Obtenemos la relación de dispersión y con ella la estructura de bandas de Energía.

En la Figura 3.3 presentamos la estructura de bandas del sistema descrito en la Figura. 3.1, cuyo factor de llenado es $f=0.5$. En el eje x graficamos el vector de onda reducido $k_z^{red} = \frac{k_z d}{2\pi}$ y en el eje y la frecuencia reducida $\omega^{red} = \frac{\omega d}{2\pi c}$. Observamos que existen 3 bandas prohibidas en el intervalo de energía entre 0 y 1. Las ondas electromagnéticas con valores de energía dentro de la BEP no pueden propagarse en el interior del cristal. En el Apéndice P-4 mostramos el programa que hemos usado para realizar esta figura.

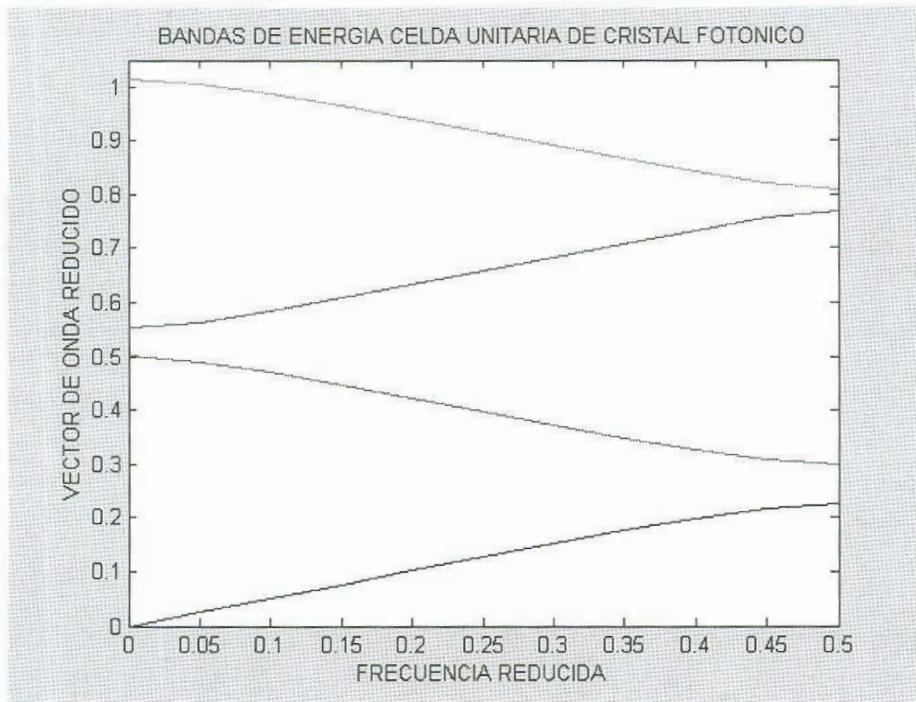


Figura 3.3 Bandas de Energía para la Celda Unitaria de Cristal Fotónico.

En general la existencia de bandas prohibidas en el cristal varía de acuerdo al factor de llenado, f . En la Fig. 3.4 mostramos la relación de dispersión para diferentes factores de llenado, variando desde 0 hasta 1.

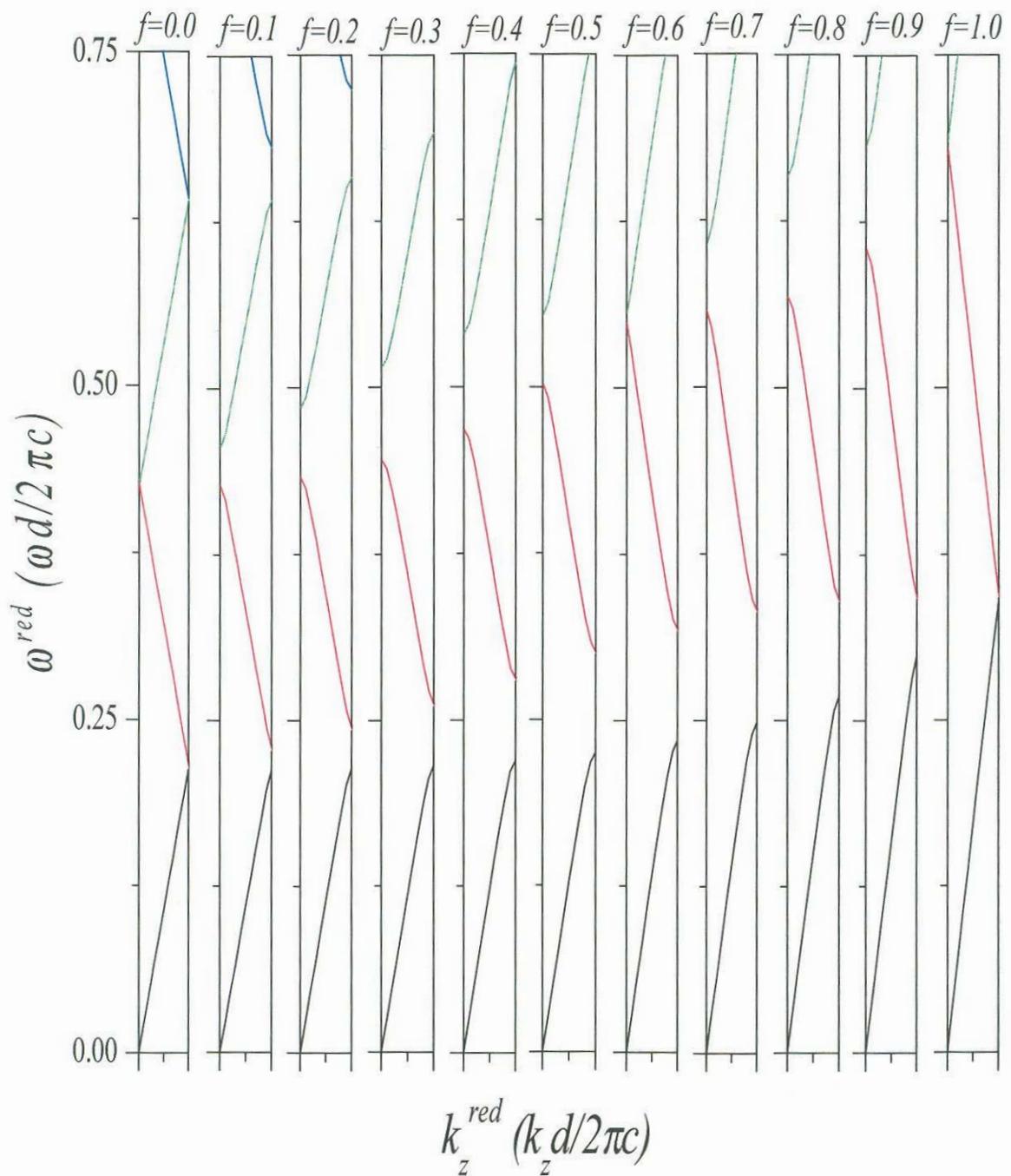


Figura 3.4 Bandas de Energía para diferentes factores de llenado de la celda unitaria.

En la Fig. 3.5 se ilustra la variación de las BEP en función del factor de llenado.

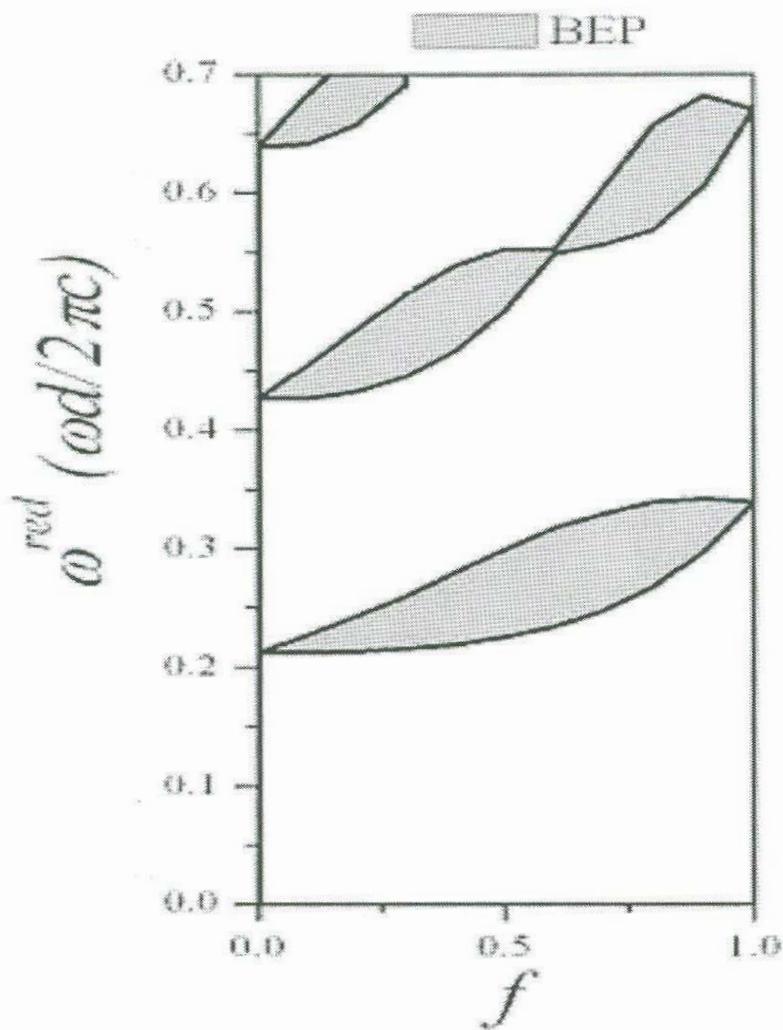


Figura 3.5 Variación de las Bandas de Energía Prohibidas según el factor de llenado.

Es de observarse de que existe un cierto valor de f en donde la primer BEP alcanza su máximo valor. Por otra parte, la segunda BEP se cierra a un cierto valor de f y luego vuelve a abrirse, lo que nos indica que la localización de brechas de energía prohibida es sensible a la proporción existente de la cantidad y tipo de material con la cual estemos formando nuestro sistema y además, es sensible a la frecuencia de la onda electromagnética.

Para diversas aplicaciones, es necesario encontrar los valores óptimos para la localización de frecuencias y ancho de la BEP. Estos resultados pueden ser de utilidad para investigadores experimentales que realizan diferentes estudios de aplicación de cristales fotónicos. Por ejemplo, para realizar amplificación de señal luminiscente en la

presencia un cristal fotónico unidimensional es necesario optimizar los parámetros de red de oxido de silicio,²⁴ ya que el tamaño de la BEP esta directamente relacionada con la razón $n_L / n_H = 1.3 / 2.3$, en este caso, si mantenemos constante el período, o bien con la variación del período si mantenemos constante el contraste de índices. La búsqueda de la amplificación de la señal luminiscente puede ser un camino para la elaboración de láseres basados en cristales fotónicos.

3.5 Conclusiones

Hemos realizado una exposición detallada de algunos puntos importantes del Método de Ondas Planas para la obtención de Bandas de Energía Prohibida en cristales fotónicos con periodicidad unidimensional. En primer lugar, mostramos la utilización de series de Fourier para describir una función periódica. En segundo lugar, tomamos la ecuación de onda definida en el espacio real y mediante la sustitución de las series de Fourier del inverso de la función dieléctrica y el campo electromagnético obtenemos una ecuación de valores propios definida en el espacio de Fourier. En tercer lugar, ilustramos la obtención de una ecuación matricial mediante la expansión de la ecuación de valores propios. Por último, presentamos códigos computacionales en lenguaje Matlab que permiten tomar confianza en el cálculo de expansión de series de Fourier y cálculo de bandas.

A nuestro conocimiento no existe otro reporte en donde se detalle el Método de Ondas Planas de la forma en que hemos enfocado este trabajo. Consideramos que nuestra exposición es de utilidad a quienes inician en el estudio de Bandas de Energía Prohibida no solamente para cristales fotónicos, sino también para el estudio de otros medios periódicos.

CAPITULO 4

Velocidad de Grupo.*

4.1 Introducción

Actualmente existe un gran interés en controlar pulsos de luz modificando su velocidad de propagación, a tal grado que se plantea la posibilidad de detener por completo la luz utilizando cristales fotónicos.²⁵ La investigación en cristales fotónicos ha llegado a un punto tal de maduración que ya se busca el control totalmente óptico de la información en un circuito,²⁶ con la idea de desarrollar novedosas aplicaciones tecnológicas. Los dispositivos ópticos basados en cristales fotónicos tendrán grandes ventajas sobre los dispositivos electrónicos convencionales. Ellos ofrecerán una mayor velocidad de operación, mayor vida media y una tasa más alta de repetición de procesos. Por su naturaleza, los dispositivos fotónicos son extremadamente compactos, lo cual los hace especialmente aptos a la miniaturización en circuitos.

Recientemente, diversos estudios experimentales presentan sólidos resultados en donde se observa el fenómeno de superprisma,²⁷ el cual existe debido a la forma anómala de la velocidad de grupo en el borde de la banda, concepto que definiremos mas adelante. Resulta de gran interés práctico que la velocidad de grupo sea sensible a las variaciones de la celda unitaria, es decir, los cambios en índices de refracción, tamaño de la celda y fracción de llenado. Esta característica puede ser empleada para sintonizar la estructura de bandas²⁸ y realizar dispositivos activos que varíen su respuesta óptica en función de un parámetro externo.²⁹

En el análisis de estos fenómenos y aplicaciones relacionadas, resulta de capital importancia la determinación de la velocidad de grupo en el cristal fotónico. Es notable que recientes resultados publicados en la literatura científica demuestran que este concepto y su cálculo aún está sujeto a debate.³⁰⁻³⁴ En este capítulo presentamos una discusión sobre un reporte teórico reciente,³⁰⁻³¹ en donde se considera en forma errónea

* Este material se esta terminando de preparar para enviarlo a publicación.

que la velocidad de grupo es negativa en la segunda banda. Este controversial resultado rápidamente dió lugar a varios reportes en donde se discutía esta situación.^{32,33} Sin embargo, aún existe la posibilidad que algunos argumentos no sean completamente comprendidos.³⁴

Más adelante presentaremos una derivación de la velocidad de grupo a partir de la estructura de bandas en la representación de zona extendida, que es presentar las bandas de energía de la relación de dispersión, como una función univaluada del vector de onda. Asimismo, para entender el comportamiento físico de la velocidad de grupo, variamos el factor de llenado de la celda unitaria hasta llegar a la situación en donde la Referencia [31] plantea la velocidad de grupo negativa, para presentar entonces los argumentos que contradigan esa hipótesis.

4.2 Estructura de bandas: Zona reducida y Zona extendida

El cálculo de la estructura de bandas en cristales fotónicos en una dimensión es extensamente estudiado en la Referencia [31] y es correcto en su planteamiento. En la Figura 4.1 presentamos el sistema multicapa unidimensional compuesto por los medios $n_a = 1$ y $n_b = 2.3$, con espesores a y b respectivamente. La fracción de llenado se define como $f=b/d$ y se relaciona con la cantidad de material n_b en la celda unitaria.

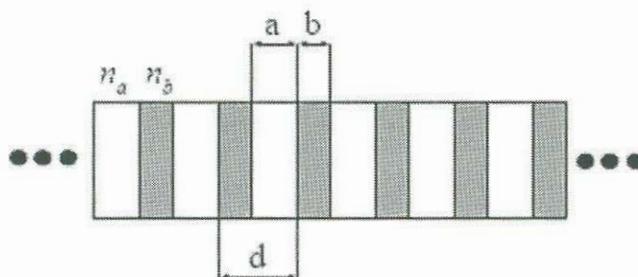


Figura 4.1. Cristal fotónico unidimensional compuesto por los medios n_a y n_b , con espesores a y b , respectivamente. El periodo de la celda unitaria es $d=a+b$.

En la Referencia [31] se realizó un cálculo de la velocidad de grupo de este sistema. El resultado de su cálculo se muestra en la Figura 4.2. Se observa que la

segunda banda tiene un valor negativo de la velocidad de grupo. Sin embargo es erróneo ya que la velocidad de grupo no puede ser negativa, como se verá mas adelante.

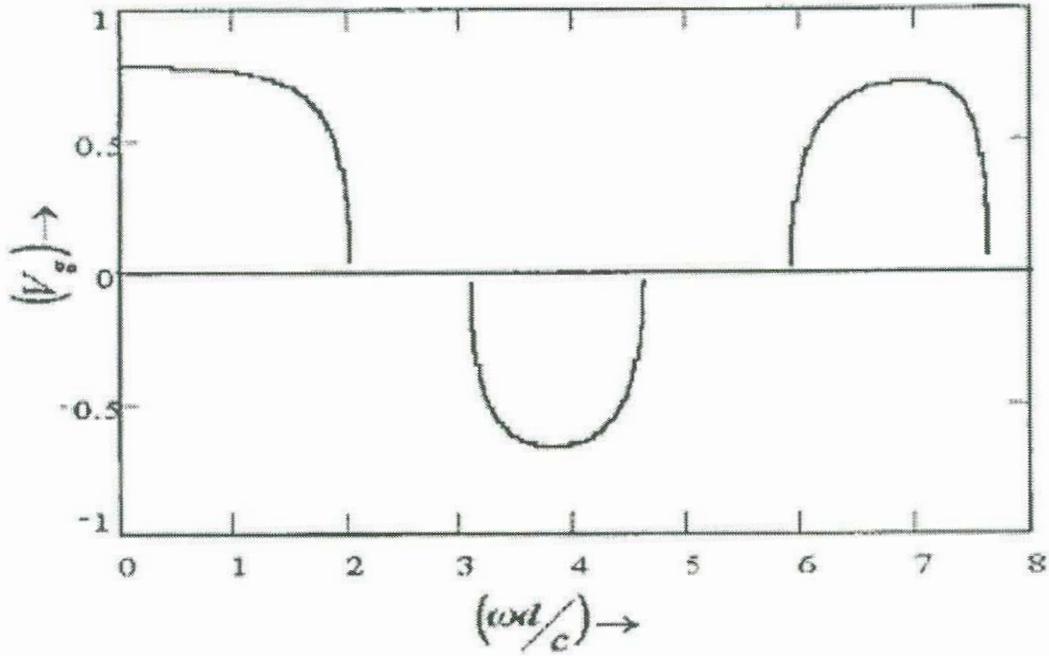


Figura 4.2 Duplicado de la figura de la Referencia [31] donde se calcula una velocidad de grupo negativa con los parámetros $n_1 = 1.0$, $n_2 = 2.3$, $d_1 = 0.85d$ y $d_2 = 0.15d$

En la Figura 4.3a mostramos la estructura de bandas en el esquema de la zona reducida para una fracción de llenado $f=0.15$. Se observa que existen 4 bandas en el rango de 0 a 1.6. La Figura 4.3b presenta la estructura de bandas en el esquema extendido.³⁵ Esta representación esta más adecuada al cálculo de la velocidad de grupo.

La velocidad de grupo esta definida por la relación

$$v_g = d\omega / dk \tag{4.1}$$

Es posible obtener la velocidad de grupo directamente de la relación de dispersión si planteamos la derivada en forma discreta

$$v_g(\omega_i) \cong \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{k_{i+1} - k_i} \tag{4.2}$$

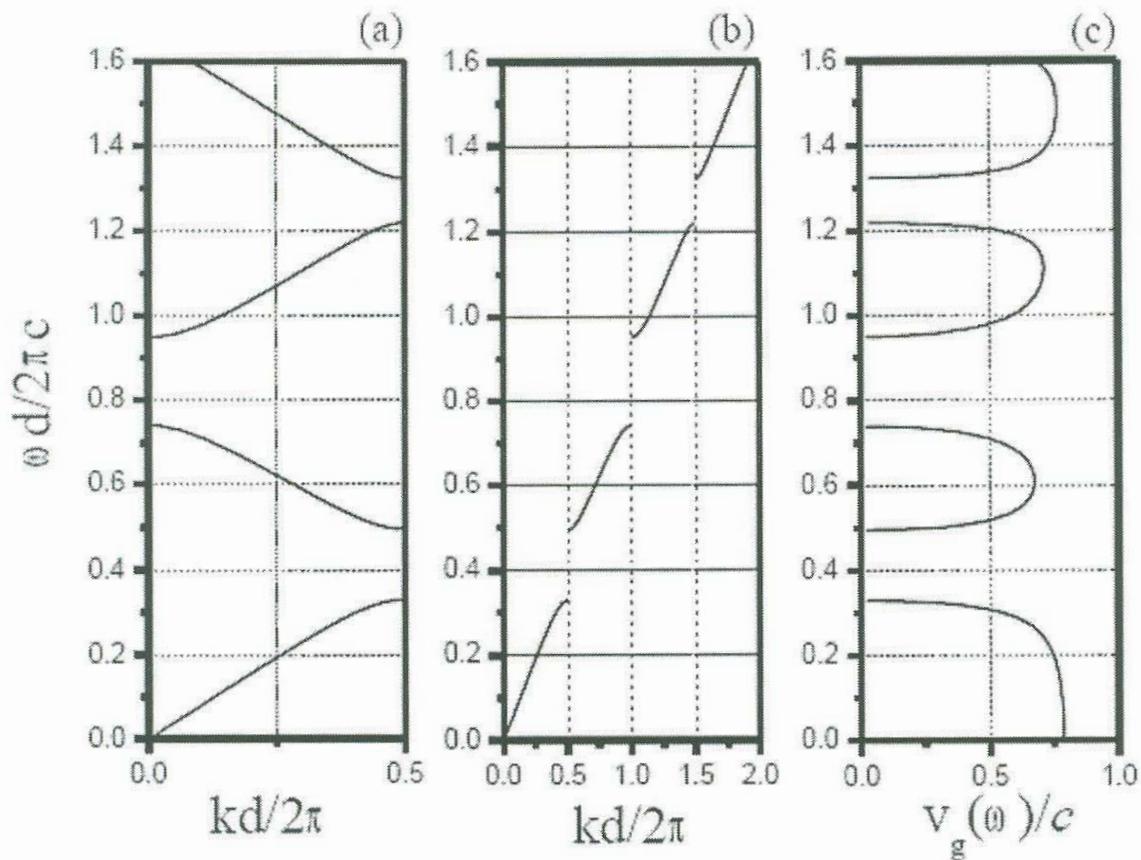


Figura 4.3 Estructura de bandas en la zona reducida (a), en la zona extendida (b) y velocidad de grupo (c) para el caso en que la fracción de llenado es $f=0.15$.

En la Figura 4.3c presentamos el resultado de nuestro cálculo de v_g . Observamos que en la segunda banda la pendiente es positiva (Figura 4.3b) y por ello la velocidad de grupo es positiva. En diferencia, si se considera la derivada en la zona reducida (Figura 4.3a) la velocidad de grupo sería negativa. Sin embargo, es erróneo proceder en función de la zona reducida para el cálculo de v_g , como discutiremos a continuación.

4.3 Variación paulatina del factor de llenado

Para entender el valor positivo de la velocidad de grupo en la segunda banda, que es donde se centra la discusión de $v_g < 0$, debido a la forma que adquiere la pendiente de ésta banda cuando se representa en la PZB, analizaremos la variación sistemática de la velocidad de grupo en función de f .

En la Figura 4.5a mostramos la variación de la estructura de bandas en la zona extendida para los casos en donde $f = 0, f = 0.05, f = 0.1, f = 0.15$ y $f = 1$.

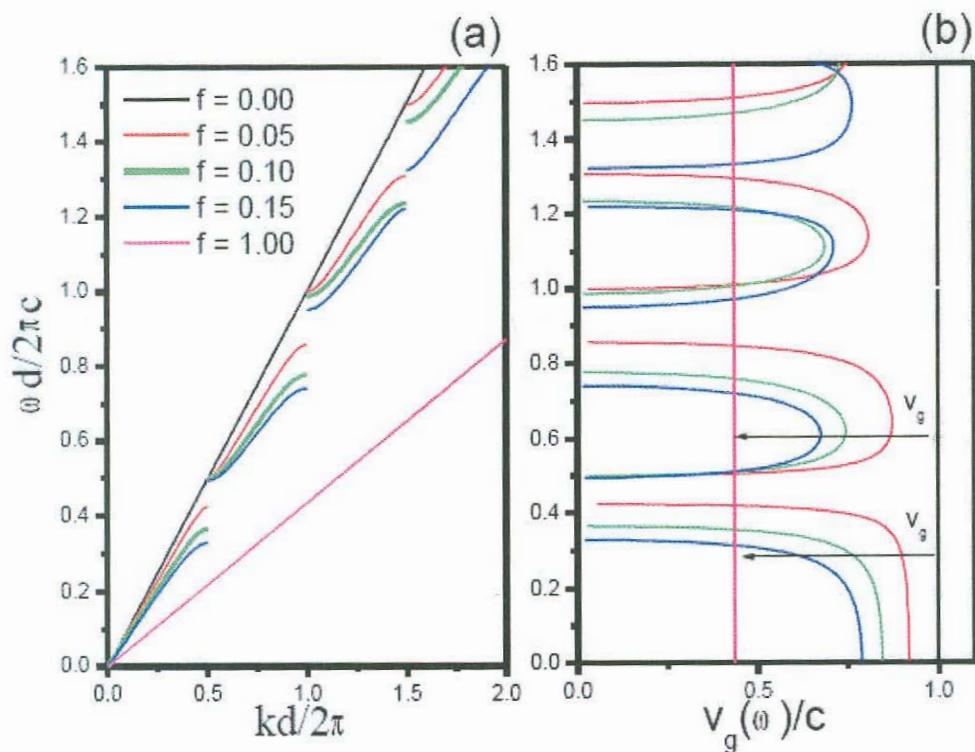


Figura 4.5 (Color) Estructura de bandas (a) y velocidad de grupo (b) para diferentes fracciones de llenado. Se grafica $f=0, f=0.05, f=0.10, f=0.15$ y $f=1$ con los colores negro, rojo, verde, azul y morado, respectivamente. Se observa una disminución gradual de la velocidad de grupo en las primeras dos bandas en función de f .

El primer caso es el de red vacía, es decir, un sistema en donde solamente existe aire. A medida que aumenta la fracción de llenado tenemos más material n_b . En la Figura 4.5b mostramos la correspondiente v_g . En el caso de $f=0$, el pulso se propaga sin dispersión y a la velocidad de la luz c . En los casos intermedios, se observa que cuando f aumenta, v_g disminuye gradualmente. Este comportamiento, por definición, está directamente relacionado con la forma de la pendiente de las bandas de energía presentes en la relación de dispersión.

4.4 Índice efectivo a bajas concentraciones.

Para lograr un claro entendimiento de las implicaciones físicas que involucra el planteamiento de una velocidad negativa en la segunda banda, consideremos una fracción de llenado de $f = 0.01$. En este caso el sistema tiene el 1% de n_b . Es de esperarse que este medio altamente diluído tenga propiedades ópticas similares al aire. Ha sido reportado³⁶ que la propiedades ópticas de un medio pueden ser obtenidas a partir del *índice de refracción efectivo de grupo* ($n_{eff,g}$), el cual se define como

$$n_{eff,g}(\omega) = \frac{c}{v_g(\omega)} \quad (4.3)$$

Observamos que en la mayoría de las frecuencias $n_{eff,g} \approx 1$ excepto en las frecuencias prohibidas, en donde $n_{eff,g}$ tiende a valores muy grandes, debido a que la velocidad de grupo en esas frecuencias es prácticamente nula o cero.

Supongamos que la luz incide desde el aire a este medio altamente diluído, el coeficiente de reflexión es

$$r = \frac{1 - n_{eff,g}}{1 + n_{eff,g}} \quad (4.4)$$

En la Figura 4.6b mostramos la reflexión como función de la frecuencia. La reflexión es prácticamente cero, excepto en las resonancias de la red, o sea las BEP. El valor del índice efectivo en el valor medio de la segunda banda, Figura 4.6a es $n_{eff,g} = 1.008$. Este valor es ligeramente mayor que el del aire, pero positivo, lo cual predice una reflexión casi nula, como era de esperarse para este sistema. En cambio, si consideráramos que este valor es negativo, ya que $n_{eff,g}(\omega) = \frac{c}{v_g(\omega)} < 0$ si $v_g(\omega) < 0$ como lo plantea la Referencia [31], habría una reflexión total sobre este sistema altamente diluido, lo cual no es físicamente aceptable.

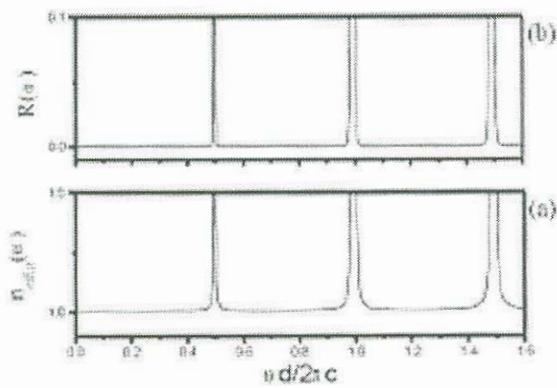


Figura 4.6 Índice de refracción efectivo de grupo (a) y reflectancia (b) como una función de la frecuencia.

4.5 Conclusiones

Hemos presentado una forma al parecer correcta de calcular la velocidad de grupo a partir de la derivada numérica de la relación de dispersión en la zona extendida. Observamos que la velocidad de grupo es una función que varía gradualmente con la fracción de llenado. Partiendo de la red vacía, en donde la velocidad de grupo es c , observamos que v_g disminuye proporcionalmente como una función de f . En un cristal fotónico unidimensional, formado por dos materiales dieléctricos se observa que los valores de v_g permanecen positivos debido a que la pendiente de la relación de dispersión en la zona extendida siempre es positiva para este sistema. La representación en zona reducida es útil para presentar en forma compacta el mapa de energías permitidas del sistema, pero hay que ser cuidadoso para calcular la v_g a partir de esta representación.

Hemos presentado un análisis de las propiedades ópticas de un sistema altamente diluido donde, mediante la derivación de un índice de refracción efectivo, calculamos la reflexión. Como es de esperarse, la reflexión es prácticamente cero para cualquier energía permitida, en diferencia con el resultado que se obtendría al considerar $v_g < 0$.

CAPITULO 5

Bandas Prohibidas Gigantes en Heteroestructuras de Cristales Fotónicos.*

5.1 Introducción

La más simple y común característica utilizada en el diseño de dispositivos ópticos es el fenómeno de reflexión total, es decir, la característica de espejo. Existen dos tipos principales de espejos: los metálicos y los basados en estructuras periódicas multicapas de dieléctricos (CF-1D). Los espejos metálicos son buenos reflectores omnidireccionales, sin embargo, se vuelven inoperantes en el infrarrojo a causa de la absorción. Por su parte, los espejos basados en CF-1D no presentan problemas debido a la absorción ya que son hechos de dieléctricos, pero son altamente unidireccionales, y debido al ángulo de Brewster se vuelven transparentes para cierto ángulo de incidencia.³⁸

Es necesario diseñar espejos omnidireccionales con bandas prohibidas gigantes, o sea, grandes regiones de frecuencias donde no se propague de la luz, y que no presenten absorción. Los cristales fotónicos basados en ópalo son estructuras tridimensionales que han sido investigados como buenos candidatos para lograr bandas fotónicas omnidireccionales. Son especialmente interesantes porque su período es del orden de la longitud de onda de la luz, con lo cual se obtienen estructuras operantes en el visible.³⁹ Sin embargo, la presencia de desorden estructural ligado al método de fabricación destruye la banda fotónica prohibida.⁴⁰

Ha sido posible obtener espejos omnidireccionales utilizando CF-1D.⁴¹ El problema de la existencia del ángulo de Brewster ha sido resuelto considerando estructuras de alto contraste en el índice de refracción para aumentar el rango de operación en la zona radiativa, o sea, aumentar el rango de frecuencias con alta reflectividad. El problema es que en la práctica, los materiales de alto índice de refracción son semiconductores y estos materiales tienen diversos mecanismos internos que dan

* Este material se prepara su terminación para enviarlo a publicar.

donde

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \left[(k_y + G_y)^2 + (k_z + G_z)^2 \right] & -(k_y + G_y)(k_x + G_x) & -(k_z + G_z)(k_x + G_x) \\ -(k_x + G_x)(k_y + G_y) & \left[(k_x + G_x)^2 + (k_z + G_z)^2 \right] & -(k_z + G_z)(k_y + G_y) \\ -(k_x + G_x)(k_z + G_z) & -(k_y + G_y)(k_z + G_z) & \left[(k_x + G_x)^2 + (k_y + G_y)^2 \right] \end{bmatrix}$$

lugar a una absorción óptica,²⁸ la cual es una característica indeseable, como en el caso de los espejos metálicos.

Para lograr espejos omnidireccionales con bandas prohibidas gigantes existe una vía alterna, la cual esta basada en la superposición de dos cristales fotónicos distintos.⁴² Recientemente se ha propuesto la utilización de heteroestructuras de ópalo⁴³ con la idea de lograr un gap omnidireccional en el visible. La idea es sumamente interesante, ya que actualmente se tiene un gran control en la fabricación de películas delgadas de ópalo, las cuales por si solas no logran una banda prohibida completa.

5.2 El Método de Ondas Planas para la Heteroestructura.

La estructura de bandas dentro del cristal fotónico se describe por medio de la ecuación de onda

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(\vec{r})) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\vec{r}) \mu(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (5.1)$$

Vamos a considerar estructuras no magnéticas $\mu = 1$. Usando análisis de Fourier,⁴⁴ es posible obtener la ecuación de onda

$$-\left[\vec{k} + \vec{G}\right] \times \left(\left[\vec{k} + \vec{G}\right] \times \vec{E}(\vec{G})\right) = \sum_{\vec{G}'} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\vec{G} - \vec{G}') \vec{E}(\vec{G}') \quad (5.2)$$

esta ecuación es de la forma

$$\vec{A}\vec{x} = \lambda\vec{B}\vec{x} \quad (5.3)$$

donde

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \left[(k_y + G_y)^2 + (k_z + G_z)^2 \right] & -(k_y + G_y)(k_x + G_x) & -(k_z + G_z)(k_x + G_x) \\ -(k_x + G_x)(k_y + G_y) & \left[(k_x + G_x)^2 + (k_z + G_z)^2 \right] & -(k_z + G_z)(k_y + G_y) \\ -(k_x + G_x)(k_z + G_z) & -(k_y + G_y)(k_z + G_z) & \left[(k_x + G_x)^2 + (k_y + G_y)^2 \right] \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \varepsilon(\vec{\mathbf{G}} - \vec{\mathbf{G}}') & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(\vec{\mathbf{G}} - \vec{\mathbf{G}}') & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon(\vec{\mathbf{G}} - \vec{\mathbf{G}}') \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} E_{0x}(\vec{\mathbf{G}}) \\ E_{0y}(\vec{\mathbf{G}}) \\ E_{0z}(\vec{\mathbf{G}}) \end{bmatrix}$$

Consideremos una estructura unidimensional periódica en la dirección z , como lo ilustramos en la Figura 5.1a y tomando un campo eléctrico con polarización paralela al eje x la ecuación de eigenvalores se reduce a

$$-\hat{\mathbf{k}}[k_z + G_z] \times (\hat{\mathbf{k}}[k_z + G_z] \times \hat{\mathbf{i}}E_x(G_z)) = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{G'_z} \varepsilon(G_z - G'_z) (\hat{\mathbf{i}}E_x(G'_z)) \quad (5.4)$$

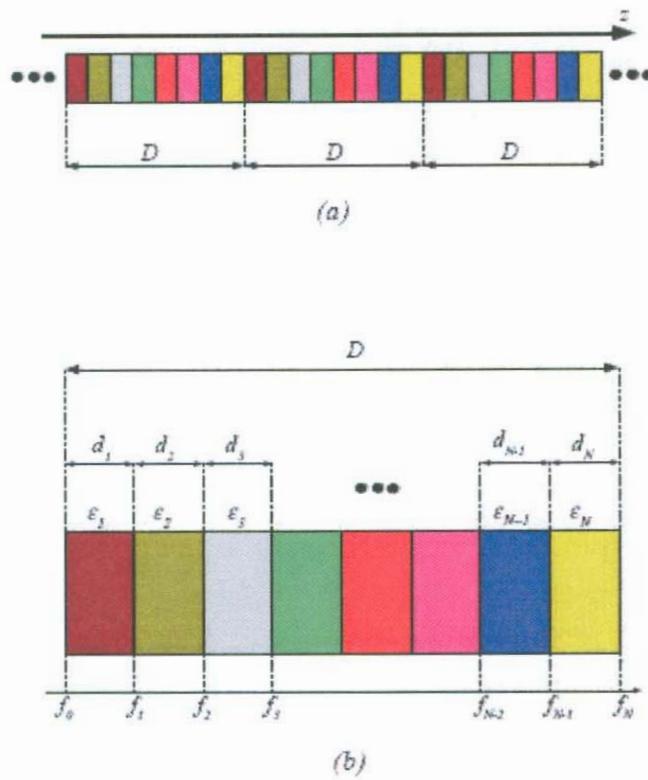


Figura 5.1 Representación de una estructura multicapa.

En la Figura 5.1b ilustramos que el CF puede ser descrito mediante una supercelda, es decir, puede tener una base que contenga N materiales y cuya periodicidad es D. Matemáticamente la constante dieléctrica de esta estructura se describe como

$$\varepsilon(z) = \sum_{i=1}^{i=N} \varepsilon_i \{ \Theta[z - f_i] - \Theta[z - f_{i-1}] \} \quad (5.5)$$

donde la Función de Heaviside define $\Theta(x) = 1$ solo cuando $x > 0$.

La función dieléctrica se describe en términos de la serie de Fourier

$$\varepsilon(z) = \sum_{G_z} \varepsilon(G_z) e^{iG_z z} \quad (5.6)$$

donde los coeficientes de Fourier son

$$\varepsilon(G_z) = \frac{1}{D} \int_0^D \varepsilon(z) e^{-iG_z z} dz \quad (5.7)$$

integrando sobre la celda unitaria se obtiene

$$\varepsilon(G_z) = \frac{1}{D} \left[\sum_{i=1}^{i=N} d_i \varepsilon_i \right] \delta_{G_z, 0} - \frac{1}{D} \frac{1}{iG_z} \left[\sum_{i=1}^{i=N} \varepsilon_i (e^{-iG_z d_i} - e^{-iG_z d_{i-1}}) \right] (1 - \delta_{G_z, 0}) \quad (5.8)$$

Este coeficiente de Fourier se introduce en la ecuación de eigenvalores para realizar el cálculo numérico de manera estándar.⁴⁴

5.3 Bandas en una Heteroestructura Homogénea.

Un cristal está definido como la repetición infinita de una unidad estructural (*base*) en una en una distribución de sitios equidistantes (*red*). Existen diferentes combinaciones de bases y redes que reproducen un cristal. En la Figura 5.2 mostramos un ejemplo de esta situación para el caso 1D. La Fig. 5.2a muestra la celda unitaria irreducible para un cristal de dos materiales (2M) cuyo espesor es D_{2M} . La red recíproca correspondiente se muestra en la Fig. 5.2b y está compuesta por la repetición del vector

$G_{2M} = 2\pi / D_{2M}$. La Fig. 5.2c muestra una celda unitaria compuesta por cuatro capas de material (4M) y cuyo espesor es $D_{4M} = 2D_{2M}$. Esta celda tiene una red recíproca formada a partir del vector $G_{4M} = 2\pi / D_{4M}$ que se ilustra en la Fig. 5.2d. Finalmente, en la Fig. 5.2e tenemos una celda unitaria compuesta por seis medios y que tiene un espesor $D_{6M} = 3D_{2M}$. La red recíproca correspondiente a esta base está compuesta por la repetición del vector $G_{6M} = 2\pi / D_{6M}$, el cual se ilustra en la Fig. 5.2f.

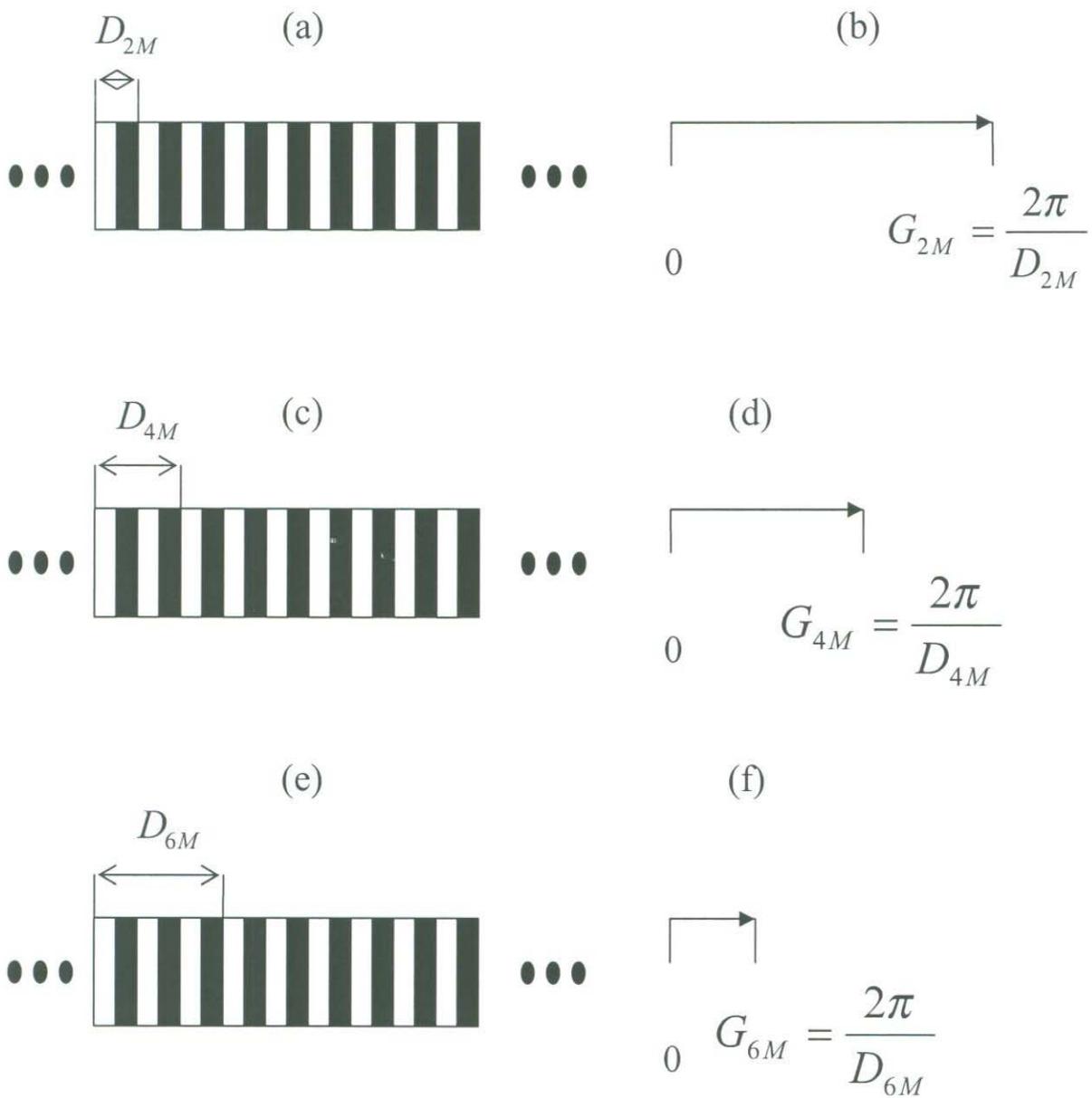


Figura 5.2 Heteroestructura homogénea, para diferentes valores del vector de la red recíproca.

En la Figura 5.3 mostramos las relaciones de dispersión para celdas unitarias compuestas por dos medios (a), cuatro medios (b) y seis medios (c). Observamos que las curvas no tienen la misma apariencia, aunque corresponden al mismo sistema físico. En primera instancia parece haber algo inconsistente, sin embargo las soluciones son equivalentes. Las Figs. 5.3b y 5.3c contienen líneas que no aparecen en las bandas de la figura 5.3a. No obstante los valores de inicio y final de las bandas son los mismos. La razón de este doblamiento de bandas se debe a que estamos proyectando la estructura de bandas en una zona de Brillouin dos (b) y tres (c) veces más corta. Las primeras zonas de Brillouin para las Figs. 5.3(a), 5.3(b) y 5.3(c) son $K_{2M} = \frac{\pi}{D_{2M}}$, $K_{4M} = \frac{\pi}{D_{4M}} = \frac{1}{2}K_{2M}$ y $K_{6M} = \frac{\pi}{D_{6M}} = \frac{1}{3}K_{2M}$, respectivamente. Observamos que el efecto de definir una celda unitaria de N veces dos medios $[N(2M)]$ es doblar N veces la estructura de bandas.

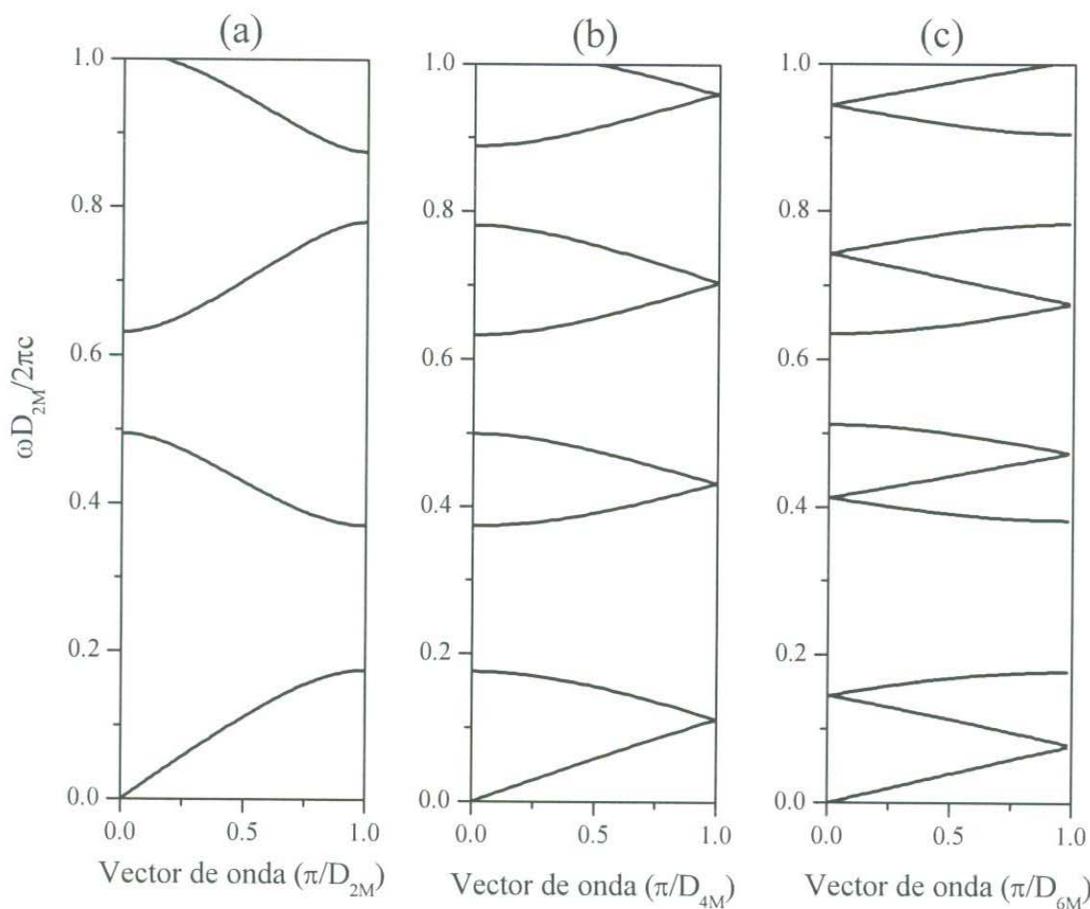


Figura 5.3 Relación de Dispersión para dos medios (a), cuatro medios (b) y seis medios (c).

5.4 Heteroestructuras Binarias.

Como un primer ejemplo de heteroestructura binaria, consideramos la estructura de bandas para dos diferentes celdas unitarias (CU), ambas de un tamaño d . En la Figura 5.4a mostramos la CU_a que esta compuesta por los materiales $n_1 = 1$ y $n_2 = \sqrt{13}$, cuyos espesores son $d_1 = d_2 = d/2$. El factor de llenado de la celda unitaria f_{CU} se define como el espacio ocupado por el material de alto índice de refracción sobre el tamaño total de la celda, en este caso para la CU_a tenemos $f_{CU_a} = 1/2$. En la Figura 5.4b mostramos la CU_b que esta compuesta por los mismos materiales, pero en donde los espesores son diferentes. Ahora $d'_1 = 0.68d$ y $d'_2 = 0.32d$. El factor de llenado en este caso es $f_{CU_b} = 0.32$.

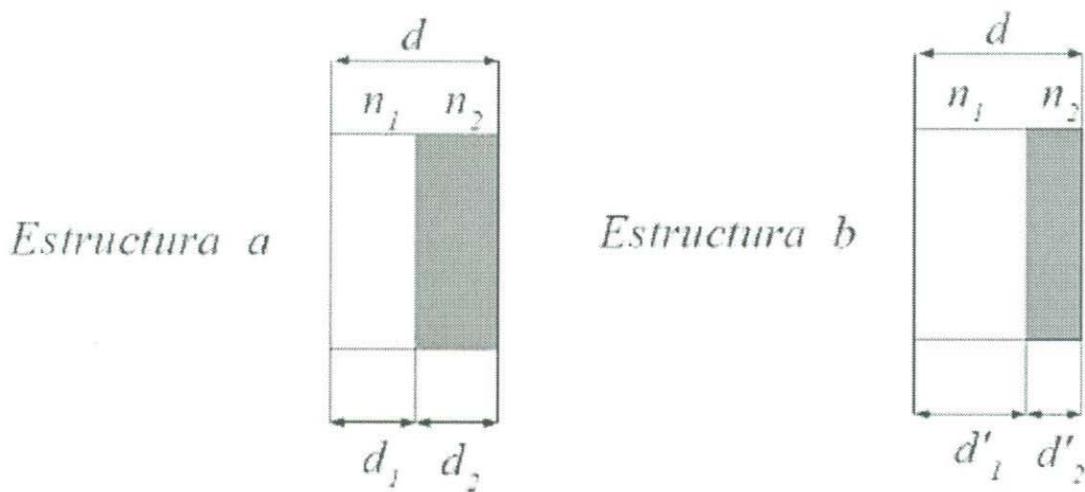


Figura 5.4 Celdas unitarias de las estructuras a y b

En la figura 5.5 presentamos estructuras de bandas y velocidad de grupo para la CU_a (con líneas) y para la CU_b (con puntos). En la Figura 5.5a se muestra la Estructura de Bandas en la Zona Reducida (EBZR). La estructura a presenta 5 bandas en el rango de la gráfica. La estructura b, por su parte, presenta 4. En la Figura 5.5b presentamos la Estructura de Bandas en la Zona Extendida (EBZE). La primera banda de las estructuras a y b es similar. A continuación de un gap en donde no hay propagación de estados para ninguna de las dos estructuras, las siguientes bandas de cada sistema se superponen en forma consecutiva, una después de otra. Después de $\omega d / 2\pi c = 0.25$ en la mayoría de las frecuencias siempre existe un estado permitido para alguna de las dos estructuras. En

la Figura 5.5c mostramos la $v_g(\omega)$ para cada estructura la cual indica que si hay propagación de energía a través de estos cristales finitos.

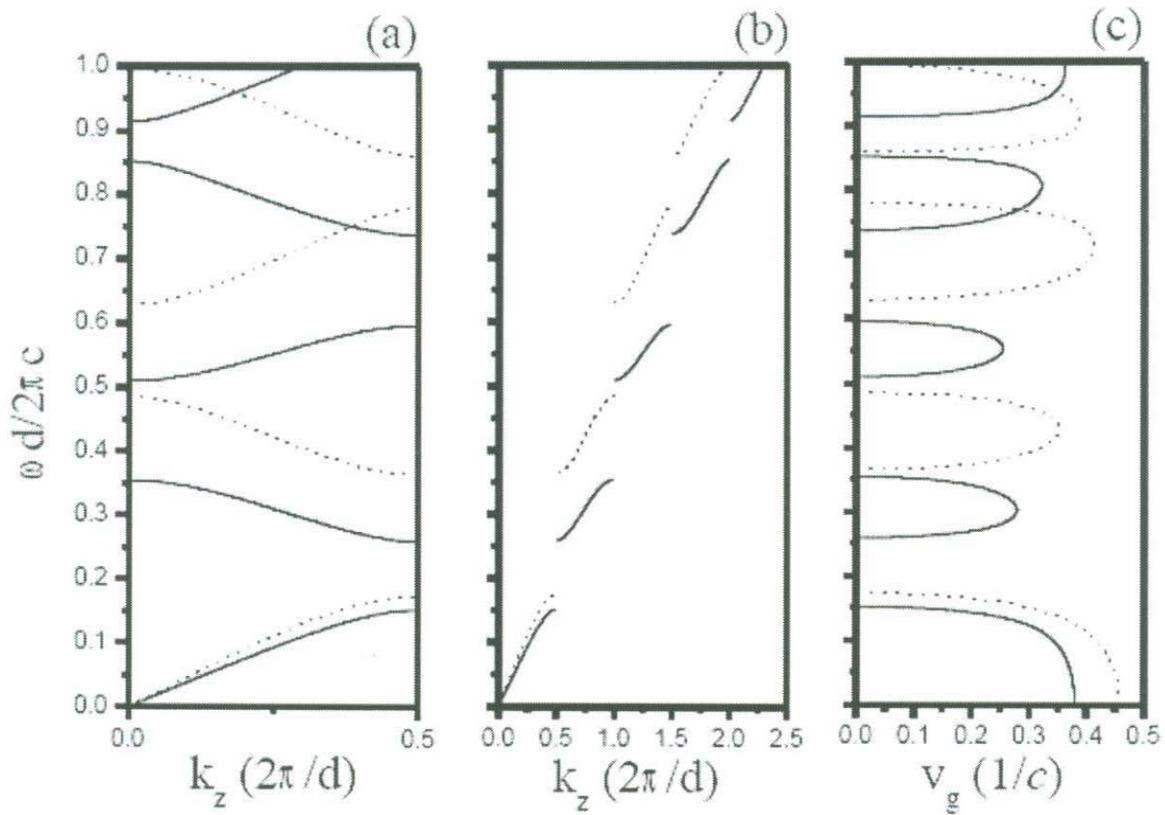


Figura 5.5 Comparativo de las Bandas de Energía y Velocidad de Grupo para las Estructuras a y b.

En la Figura 5.6 mostramos una heteroestructura compuesta por CU_a (Figura 5.6a) y CU_b (Figura 5.6b), ambas de espesor d . El factor de llenado de la heteroestructura f_H lo definimos como el espacio ocupado por las CU_a sobre el espacio total de la supercelda $D=10d$. En el caso de la Figura 5.6c tenemos que toda la heteroestructura esta compuesta por estructuras a , así que el factor de llenado es $f_H=1$ En la Figura 5.6d tenemos que existen dos CU_b , así que $f_H=4/5$. A continuación tenemos la Figura 5.6e y 5.6f, que ilustran los factores de llenado $f_H=3/5$ y $f_H=2/5$ La Figura 5.6g ilustra la situación en donde solo existen dos CU_a , así que $f_H=1/5$. Por último, la Figura 5.6h

muestra una heteroestructura compuesta únicamente de CU_b , así que el factor de llenado es $f_H=0$.

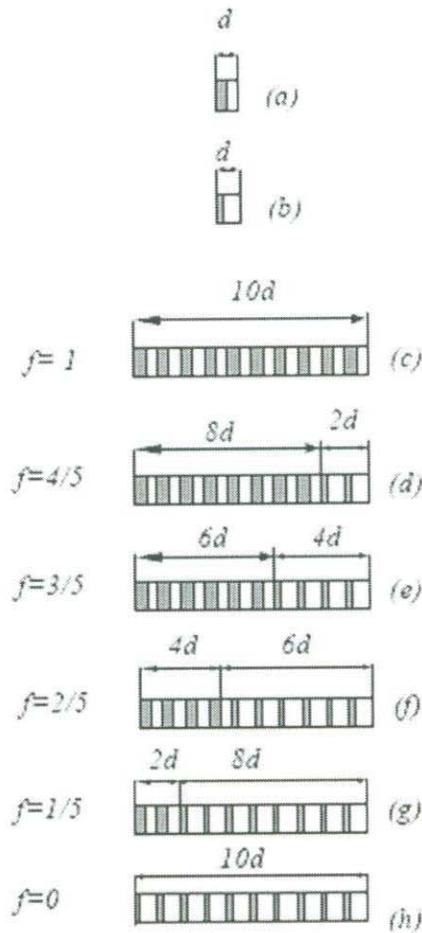


Figura 5.6 Heteroestructuras con diferente factor de llenado.

En la Fig. 5.7 mostramos la Estructura de Bandas en la Zona Reducida de la Supercelda (EBZRSC) y la $v_g(\omega)$ para diferentes f_H . En los paneles (a)-(b), (c)-(d), (e)-(f), (g)-(h), (i)-(j) y (k)-(l) presentamos nuestros resultados para $f_H = 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ y 0 , respectivamente. Se observa que partiendo de una SC con $f_H = 1$ [paneles (a)-(b)] compuesta en su totalidad de CU_a , a medida que se incrementa el número de CU_b la EBZRSC y la $v_g(\omega)$ se modifican. En general, en los paneles (c), (e), (g) e (i), las EBZRSC presentan una gran cantidad de bandas planas, es decir, que sus

pendientes son cada vez menores. La disminución de la derivada en la relación de dispersión afecta a la $v_g(\omega)$ [paneles (d), (f), (h) y (j)] haciendo disminuir o desaparecer la $v_g(\omega)$. Nuestra propuesta es que mediante la identificación de las regiones donde $v_g(\omega)$ sea pequeña o cero, podamos identificar las regiones en donde no exista transmisión de luz. De particular importancia es el par de paneles (e)-(f) y (g)-(h) correspondientes a $f_H = 3/5$ y $f_H = 2/5$. En estas figuras se ilustra la situación en donde a pesar de que la estructura de bandas [paneles (e) y (g)] muestran una gran cantidad de estados de energía permitidos, la v_g en los paneles (f) y (h) predicen una región de BEP desde $\omega d / 2\pi c = 0.195$ a $\omega d / 2\pi c = 0.78$.

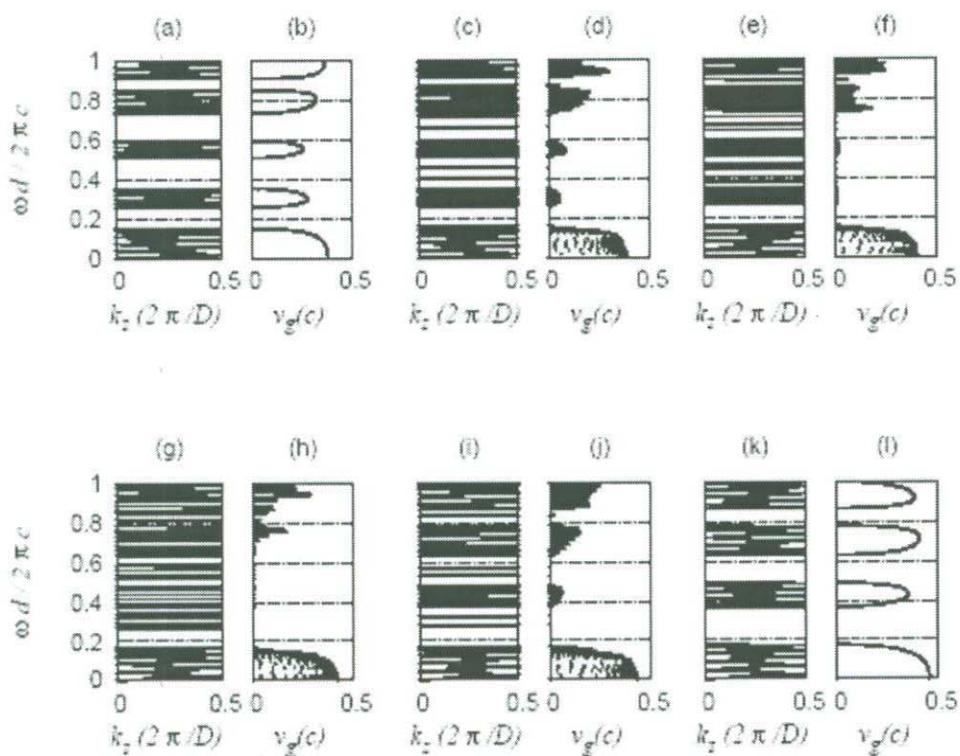


Figura 5.7 Estructura de Bandas en la Zona Reducida de la Supercelda y $v_g(\omega)$ para diferentes f_H .

Para comprobar la baja transmisión que presentan las bandas planas en la heteroestructura, en la Figura 5.8 paneles (a) al (f), mostramos la transmisión de luz calculada con el Método de la Matriz de Transferencia (MMT) para los diferentes factores de llenado $f_H = 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ y 0 . Se observa que la heteroestructura mixta

con factores de llenado $f_H = \frac{3}{5}$ y $f_H = \frac{2}{5}$ correspondientes a los paneles (c) y (d), presentan la mas baja transmisión, como es predicho por el cálculo de la velocidad de grupo.

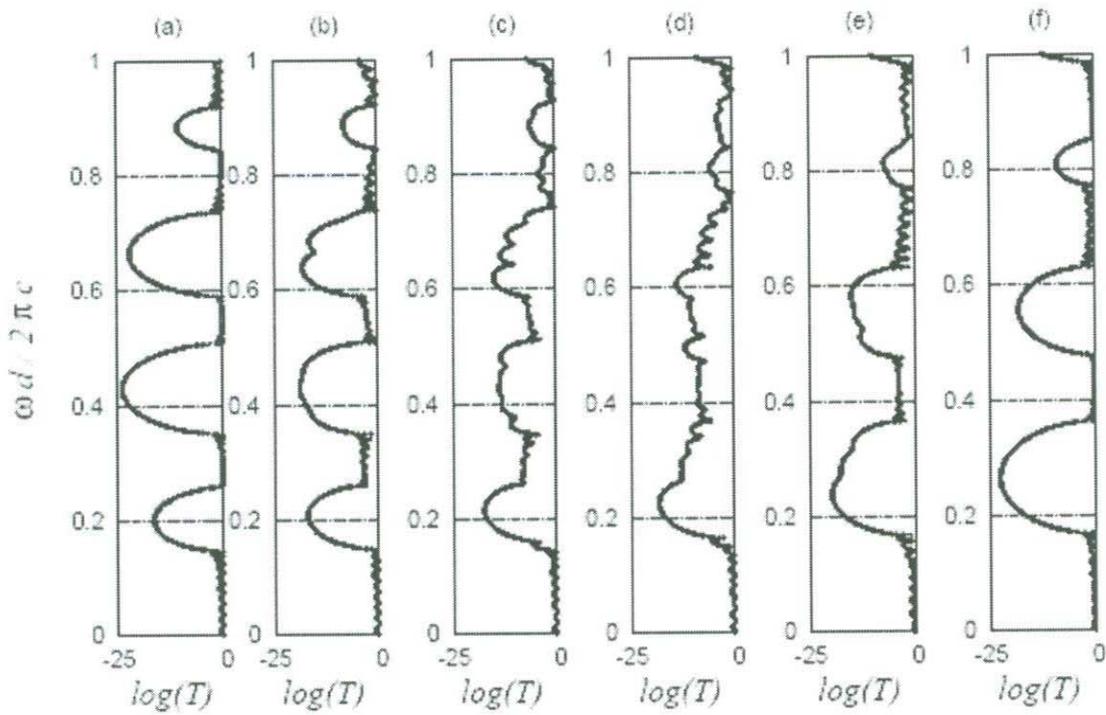


Figura 5.8 Transmisión de luz calculada con el Método de la Matriz de Transferencia (MMT) para diferentes factores de llenado

5.5 Conclusiones

Hemos presentado una forma novedosa de identificar bandas prohibidas gigantes en heteroestructuras a partir del cálculo de la velocidad de grupo. Esta estrategia es sumamente útil para el diseño de estructuras basadas en cristal fotónico con bandas prohibidas gigantes. En particular, nuestro método basado en el cálculo de estructuras de bandas puede ser aplicado a sistemas en dos y tres dimensiones. A partir de nuestro análisis, concluimos que es posible utilizar la unión de cristales fotónicos de modestas

propiedades ópticas para lograr espejos con rangos gigantes de frecuencia de operación y se abre el camino para la utilización tecnológica de las estructuras de bajo índice de refracción.

Conclusiones Generales.

En este trabajo presentamos las herramientas numéricas que hemos desarrollado para el estudio de Heteroestructuras. Primero, desarrollamos el Método de la Matriz de Transferencia, aplicándolo de forma gradual para obtener los coeficientes de Fresnel en una interfase, una película delgada y una multicapa de material dieléctrico y con ello calcular la Reflectancia y Transmitancia en heteroestructuras de cristal fotónico.

Segundo, hemos realizado una exposición detallada de puntos importantes del Método de Ondas Planas para la obtención de Bandas de Energía Prohibida en cristales fotónicos con periodicidad unidimensional. Mostramos la utilización de las Series de Fourier para describir una función periódica. Tomamos la ecuación de onda definida en el espacio real y mediante la sustitución de las series de Fourier del inverso de la función dieléctrica y el campo electromagnético obtenemos una ecuación de valores propios definida en el espacio de Fourier. Ilustramos la obtención de una ecuación matricial mediante la expansión de la ecuación de valores propios. Presentamos códigos computacionales en lenguaje Matlab que permiten tomar confianza en el cálculo de expansión de series de Fourier y cálculo de bandas.

Tercero, presentamos una forma al parecer correcta de calcular la velocidad de grupo a partir de la derivada numérica de la relación de dispersión en la zona extendida, los valores de v_g permanecen positivos debido a que la pendiente de la relación de dispersión en la zona extendida siempre es positiva para este sistema. Observamos que la velocidad de grupo es una función que varía gradualmente con la fracción de llenado ya que partiendo de la red vacía, en donde la velocidad de grupo es c , observamos que v_g disminuye proporcionalmente como una función de f . La representación en zona reducida es útil para presentar en forma compacta el mapa de energías permitidas del sistema, pero hay que ser cuidadoso para calcular la v_g a partir de esta representación.

En la última parte, hemos presentado una forma novedosa de identificar bandas prohibidas gigantes en heteroestructuras a partir del cálculo de la velocidad de grupo. Esta estrategia es sumamente útil para el diseño de estructuras basadas en cristal fotónico con bandas prohibidas gigantes. A partir de nuestro análisis, concluimos que es posible utilizar la unión de cristales fotónicos de modestas propiedades ópticas para lograr

espejos con rangos gigantes de frecuencia de operación abriéndose el camino para la utilización tecnológica de las estructuras de bajo índice de refracción. . Nuestro método basado en el cálculo de estructuras de bandas y velocidad de grupo puede ser aplicado a sistemas en dos y tres dimensiones.

APENDICE ANALITICO

Apéndice A-1

La ec. 3.5 puede se puede escribir como

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG'_z z} dz = \sum_{G_z} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(G_z) e^{iG_z z} e^{-iG'_z z} dz \quad (\text{A1.1})$$

Podemos definir la integral I_1 en el lado derecho

$$I_1 = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} e^{i(G_z - G'_z)z} dz \quad (\text{A1.2})$$

Donde $G_z = \frac{2n\pi}{d}$ y $G'_z = \frac{2n'\pi}{d}$. Asociando las exponenciales la integral es

$$I_1 = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} e^{i(G_z - G'_z)z} dz \quad (\text{A1.3})$$

$$I_1 = \frac{1}{i(G_z - G'_z)} \left[e^{i(G_z - G'_z)z} \right]_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \quad (\text{A1.4})$$

$$I_1 = \frac{d}{\pi(n - n')} \left[\frac{e^{i\pi(n - n')} - e^{-i\pi(n - n')}}{2i} \right] \quad (\text{A1.5})$$

$$I_1 = d \frac{\sin[\pi(n - n')]}{\pi(n - n')} \quad (\text{A1.6})$$

La función I_1 se relaciona con la Función Delta de Dirac

$$\delta(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x} \quad (\text{A1.7})$$

De esta forma podemos escribir

$$I_1 = d \delta_{G_z, G'_z} \quad (\text{A1.8})$$

La ec. A1.1 puede escribirse como

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG'_z z} dz = \sum_{G_z} d \varepsilon(G_z) \delta_{G_z, G'_z} \quad (\text{A1.9})$$

Aplicando la función delta tenemos

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG'_z z} dz = d \varepsilon(G'_z) \quad (\text{A1.10})$$

Y finalmente llegamos a la expresión

$$\varepsilon(G_z) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG_z z} dz \quad (\text{A1.11})$$

APENDICE PROGRAMAS

APENDICE P-1

```
%test 1
clear;

co    = 3.0E08;          % velocidad de la luz

f     = 600.0E+12;      % frecuencia en seg**(-1)
w     = 2.0*pi*f;      % Frecuencia angular
e_r   = 1.0;           % epsilon relativa

lo    = co/f;          % longitud de onda en el espacio libre
kz    = sqrt(e_r)*(w/co); % vector de onda

N_z   = 200;           % numeros de particiones en z
N_t   = 40;           % pasos temporales

delta_z = lo / 50;     % particion espacial
delta_t = (delta_z)/(2*co); % particion temporal
Eo_p    = 1.0;         % Amplitud del campo que viaja a la derecha
Eo_m    = 1.0;

fig     = figure;
aviobj  = avifile('ex15.avi')

t= 0.0;
zf = N_z*delta_z/1E-9;

for n = 1 : N_t
    n;
    for k = 1 : N_z
        z      = (k-1)*delta_z;      % coordenada espacial
        v_z(k) = z/1.0E-9;           % vecor de coordenada espacial
        E_p(k) = Eo_p*exp(+i*kz*z-i*w*t); % campo electrico
        E_m(k) = Eo_m*exp(-i*kz*z-i*w*t); % campo electrico
        E_T(k) = E_p(k)+E_m(k);
    end
end
```

```

plot(v_z,real(E_p),'blue',v_z,real(E_m),'red',v_z,real(E_T),'green')

axis([0 zf -2.0 2.0])
xlabel('z(nm)')
ylabel('Campo electrico E')
title(['Variacion espacial del campo E(z,t)  t=',num2str(t/1.0e-
16,'%11.4f'),'E-16 segundos'])
frame = getframe(gca);
aviobj = addframe(aviobj,frame);
t = n*delta_t;

end

aviobj = close(aviobj);

```

APENDICE P-2

```

%APENDICE P.2a
%REFLECTANCIA DE UNA MULTICAPA AIRE-VIDRIO
%POLARIZACION TE
clear;

c = 3.0E8;
lo = 6.5E-07;
NM = 32;
theta = 0.0;

na = 1.0;
nb = 1.5;
nair = 1.0;

da = 0.5*lo;
db = 0.5*lo;

NP = 1000;
wo = 2*pi*c/lo;
w_fin = 3.5*pi * c /lo;
w_ini = 0.01 * w_fin;

```

```

periodo = 0;

a = [1 0;0 1];

for ic = 2 : 2 : NM-2
    n(ic) = na;
    n(ic+1) = nb;
    d(ic) = da + periodo;
    d(ic+1) = da + periodo + db;
    periodo = periodo + (da+db);

end
n(1) = nair;
n(NM)= nair;

for ic = 1 : NP ;

    w(ic) = w_ini + (w_fin - w_ini) * ( (ic - 1) / (NP - 1) );

    ki = n * (w(ic)/c);
    ky = sin(theta*(pi/180))*ki(1);
    kx = sqrt( ki.*ki - ky*ky);

    M = [1 1;c*kx(1)/w(ic) -c*kx(1)/w(ic)];
    Md = [1 1;c*kx(2)/w(ic) -c*kx(2)/w(ic)];
    IMd = inv(Md);
    aux = IMd * M;

    for j = 2:NM-1

        F = [exp(+i*kx(j)*(d(j)-d(j-1))) 0;0 exp(-i*kx(j)*(d(j)-d(j-1)))];
        M = [1 1;c*kx(j)/w(ic) -c*kx(j)/w(ic)];
        Md = [1 1;c*kx(j+1)/w(ic) -c*kx(j+1)/w(ic)];
        IMd = inv(Md);
        aux = IMd * M * F * aux;

    end

    r = -aux(2,1)/aux(2,2);
    t = (aux(1,1)-aux(1,2)*aux(2,1)/aux(2,2));
    R(ic)=real(r*conj(r));
    T(ic)=real((kx(NM)/kx(1))*t*conj(t));
    A(ic)=1-T(ic)-R(ic);
    ic=ic+1;
end

```

```
w = w* (lo / (c*pi));  
plot(w,R)
```

APENDICE P.2b

```
%APENDICE P.2b  
%REFLECTANCIA DE UNA MULTICAPA AIRE-VIDRIO  
%POLARIZACION TM
```

```
clear;
```

```
c = 3.0E8;  
lo = 6.5E-07;  
NM = 32;  
theta = 0.0;
```

```
na = 1.0;  
nb = 1.5;  
nair = 1.0;
```

```
da = 0.5*lo;  
db = 0.5*lo;
```

```
NP = 1000;  
wo = 2*pi*c/lo;  
w_fin = 3.5*pi * c /lo;  
w_ini = 0.01 * w_fin;
```

```
periodo = 0;
```

```
a = [1 0;0 1];
```

```
for ic = 2 : 2 : NM-2;  
    n(ic) = na;  
    n(ic+1) = nb;  
    d(ic) = da + periodo;  
    d(ic+1) = da + periodo + db;  
    periodo = periodo + (da+db);
```

```
end  
n(1) = nair;  
n(NM) = nair;
```

```

for ic = 1 : NP ;

    w(ic) = w_ini + (w_fin - w_ini) * ( (ic - 1) / (NP - 1) );

    ki = n * (w(ic)/c);
    ky = sin(theta*(pi/180))*ki(1);
    kx = sqrt( ki.*ki - ky*ky);

    M = [n(1) -n(1); c*kx(1)/(w(ic)*n(1)) c*kx(1)/(w(ic)*n(1))];
    Md = [n(2) -n(2); c*kx(2)/(w(ic)*n(2)) c*kx(2)/(w(ic)*n(2))];
    IMd = inv(Md);
    aux = IMd * M;

    for j = 2:NM-1

        F = [exp(+i*kx(j)*(d(j)-d(j-1))) 0;0 exp(-i*kx(j)*(d(j)-d(j-1)))];
        M = [n(j) -n(j); c*kx(j)/(w(ic)*n(j)) c*kx(j)/(w(ic)*n(j))];
        Md = [n(j+1) -n(j+1); c*kx(j+1)/(w(ic)*n(j+1)) c*kx(j+1)/(w(ic)*n(j+1))];
        IMd = inv(Md);
        aux = IMd * M * F * aux;

    end

    r = -aux(2,1)/aux(2,2);
    t = (aux(1,1)-aux(1,2)*aux(2,1)/aux(2,2));
    R(ic)=real(r*conj(r));
    T(ic)=real((kx(NM)/kx(1))*t*conj(t));
    A(ic)=1-T(ic)-R(ic);
    ic=ic+1;
end

w = w* (lo / (c*pi));
plot(w,R)

```

APENDICE P.3

PROGRAMA QUE GRAFICA LA SERIE DE FOURIER DE LA FUNCION DIELECTRICA

```

clear
ip = 15;
d = 100.0d-10;
a = d/2;
b = d/2;
f = a/d;

```

```

e2 = 5.52;
e1 = 2.1316;
G = 2*pi/d;

ic = 1;
for n = -ip:ip
    Gz = n*G;
    GzV(ic) = Gz;
    if n == 0
        epsiV(ic) = e1 + f*(e2-e1);
    else
        epsiV(ic) = f*(e2-e1)*(sin(GzV(ic)*a/2))/(GzV(ic)*a/2);

        end
    ic = ic + 1;
end

iz = 1;
for z = -d/2:d/100:d/2
    zV(iz) = z;
    epsi(iz) = 0;
    ic = 1;
    for n=-ip:ip
        epsi(iz) = epsi(iz) + epsiV(ic)*exp(i*GzV(ic)*z);
        ic = ic+1;
    end
    iz = iz+1;
end

subplot(2,1,1);plot(GzV*(d/(2*pi)),epsiV,'-ko')
subplot(2,1,2);plot(zV/d,epsi,'-k.')

```

APENDICE P-4

BANDAS DE ENERGIA CELDA UNITARIA

```

clear
ip = 20;
d = 100.0d-10;
a = 0.5*d;
b = d-a;
f = a/d;
e1 = 5.52;
e2 = 2.1316;
G = 2*pi/d;
ikz=1;
for kz = 0 : 0.1*(pi/d) : pi/d

```

```

ir=1;
ic=1;
for n=-ip:ip
    Gzn=G*n;
    for m=-ip:ip;
        Gzm=G*m;
        Gzn_m = Gzn - Gzm;
        if n == m
            mu = 1/e1+ f*(1/e2-1/e1);
        else
            mu = f*(1/e2-1/e1)*(sin(Gzn_m*a/2))/(Gzn_m*a/2);

        end
        A(ir,ic)=mu*(kz+Gzm)^2;
        ic=ic+1;
    end % m
    ic=1;
    ir=ir+1;
end % n
e    = eig(A);
w    = sort(e);
Vkz(ikz) = kz*(d/(2*pi));
Vw1(ikz) = sqrt(abs( w(1)))*(d/(2*pi));
Vw2(ikz) = sqrt(abs( w(2)))*(d/(2*pi));
Vw3(ikz) = sqrt(abs( w(3)))*(d/(2*pi));
Vw4(ikz) = sqrt(abs( w(4)))*(d/(2*pi));
Vw5(ikz) = sqrt(abs( w(5)))*(d/(2*pi));
ikz    = ikz+1;
end

plot(Vkz,Vw1,Vkz,Vw2,Vkz,Vw3, Vkz,Vw4,Vkz,Vw5)
axis([0 0.5 0 1.05])

```

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. T. Tsang, Appl. Phys. Lett. **40**, 217-219, (1982)
- [2] Hafez, W. and M. Feng, Appl. Phys. Lett. **86**, 152101, (2005)
- [3] Sakaki, H., Jpn. J. Appl. Phys., Part. 2 **21**, L381-L383, (1982)
- [4] Capasso, F., S. Sen, F. Beltram, L. M. Lunardi, A. S. Vengurlekar, P.R. Smith, N. J. Shah, R. J. Malik and A. Y. Cho, IEEE Trans. Electron Devices, **36**, 2065-2081, (1989)
- [5] Heiblum M. and M. V. Fischetti, IBM J. Res. Dev., **34**, 530-549, (1990)
- [6] John S., Phys. Rev. Lett., **58**, 2486-2489, (1987).
- [7] Yablonovitch E., Phys. Rev. Lett., **58**, 2059-2062, (1987)
- [8] Joannopoulos, J. D., R. D. Meade, and J. N. Winn, Princeton University Press, (1995)
- [9] Chang L. L., L. Esaki, and R. Tsu, Appl. Phys. Lett., **24**, 593,-595, (1974)
- [10] Esaki, L., IEEE J. Quantum Electron, **22**, 1611-1624, (1986)
- [11] Capasso F., et al., IEEE J. Quantum Electron, **38**, 511-532, (2002)
- [12] J.D. Jackson. Classical Electrodynamics. 3rd. ed. 1999.
- [13] G. B. Arfken y H. J. Weber, “*Mathematical Methods for Physicists*”, 5a Edición, Academic Press (New York, 2001).
- [14] Pochi Yeh, “*Optical Waves in Layered Media*”, 2 Rev. Ed., Wiley-Interscience, (2005).
- [15] E. Yablonovitch and T. J. Gmitter, Phys. Rev. Lett. **63**, 1950 (1989).
- [16] S. John, R. Rangarajan, Phys. Rev. B. **38**, 10101 (1988).
- [17] E. N. Economou and A. Zdetsis, Phys. Rev. B **40**, 1334 (1989).
- [18] S. Sapaty, Z. Zhang, and M. R. Salehpour, Phys. Rev. Lett. **64**, 1239 (1990).
- [19] K.M. Leung, Y. F. Liu, Phys. Rev. Lett. **65**, 2646 (1990).
- [20] Z. Zhang and S. Sapaty, Phys. Rev. Lett. **65**, 2646 (1990).
- [21] K. M. Ho, C. T. Chan, and C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **65**, 3152 (1990).
- [22] H. S. Sozuer and J. W. Haus, Phys. Rev. B **45**, 13962 (1992).
- [23] F. Ramos-Mendieta y P. Halevi, J. Opt. Soc. Am. B, **14**, 370 (1997)
- [24] V. Agarwal and J. A. del Rio, Appl. Phys. Lett. **82**, 1512 (2003), M. Cazzanelli *et al*, J. Appl. Phys. **96**, 3164 (2004).
- [25] M. F. Yanik, W. Suh, Z. Wang, and S. Fan, Phys. Rev. Lett. **93**, 233903 (2004).
- [26] A. Haché and M. Bourgeois, Appl. Phys. Lett. **77**, 4089 (2000).
- [27] Hideo Kosaka, Takayuki Kawashima, Akihisa Tomita, Masaya Notomi, Toshiaki Tamamura, Takashi Sato, and Shojiro Kawakami, Phys. Rev. B **58**, R10096 (1998)
- [28] J. Manzanares-Martínez, F. Ramos-Mendieta, and P. Halevi, Phys. Rev. B **72**, 035336 (2005)
- [29] J. Manzanares-Martinez, F. Ramos-Mendieta, and P. Halevi, Appl. Phys. Lett. **87**, 101110 (2005)
- [30] J. N. Munday and W. M. Robertson, Appl. Phys. Lett. **81**, 2127 (2002)
- [31] S. P. Ojha, Sanjeev K. Srivastava, Microwave and Optical Technology Letters, **42**, 82, 2004.
- [32] Alvaro Gómez, Angel Vegas, Miguel A. Solano, **44**, 94 (2005).
- [33] L. Poirer, R. I. Thompson y A. Haché, Opt. Comm. **250**, 258 (2005).
- [34] S. P. Ojha, Sanjeev K. Srivastava, **46**, 94 (2005)
- [35] C.Kittel, “*Introduction to Solid State Physics*”, John Wiley & Sons, 8 ed. New York, (2004)

- [36] Guido Torrese, Jason Taylor, Trevor J. Hall, and Patrice M egret , Phys. Rev. E **73**, 066616 (2006)
- [37] K. Yasumoto, Y. Yasumoto, CRC Press, (2005, New York).
- [38] B. Manzanares-Martínez and F. Ramos-Mendieta, Phys. Rev. B **61**, 12877-12881 (2000).
- [39] S. G. Romanov, T. Maka, C. M. Sotomayor Torres, M. Müller, R. Zentel, D. Cassagne, J. Manzanares-Martinez, and C. Jouanin, Phys. Rev. E **63**, 056603 (2001).
- [40] M. A. Kaliteevski, J. Manzanares-Martinez, D. Cassagne, and J. P. Albert. Phys. Rev. B **66**, 113101 (2002)
- [41] D. N. Chigrin, A. V. Lavrinenko, D. A. Yarotsky, and S. V. Gaponenko, Appl. Phys. A, vol. **68** (1999).
- [42] Jian Zi, Jun Wan y Chun Zhang, Appl. Phys. Lett. **75**, 2084 (1998).
- [43] M. Bardosova, M. E. Pemble, I. M. Povey, R. H. Tredgold, and D. E. Whitehead Appl. Phys. Lett. **89**, 093116 (2006)
- [44] Ramos-Mendieta F, Halevi, Phys. Rev. B. **59** (23): 15112(1999).