"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Posgrado en Matemáticas

Cálculo de Frölicher-Nijenhuis en la Teoría de Algebroides de Lie

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Doctora en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Cynthia Dennise García Beltrán

Director de Tesis: Dr. Yury Vorobev, UniSon
Co-Director de Tesis: Dr. José Antonio Vallejo, UASLP

Hermosillo, Sonora, México, 9 de Octubre de 2015

SINODALES

Dr. Misael Avendaño Camacho
Universidad de Sonora

Dr. Fausto Antonio Ongay Larios
Centro de Investigación en Matemáticas

Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Dr. Yury Vorobev
Universidad de Sonora

Dr. Gregor Weingart
Instituto de Matemáticas, UNAM

UNIVERSIDAD DE SONORA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

"El Saber de Mis Hijos Hará Mi Grandeza"

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, siendo las 17:00 horas del día 9 de octubre de 2015, se reunieron en el Auditorio del Departamento de Física de la Universidad de Sonora, los integrantes del jurado:

DR. MISAEL AVENDAÑO CAMACHO
DR. YURY VOROBEV
DR. FAUSTO ANTONIO ONGAY LARIOS
DR. JOSE ANTONIO VALLEJO RODRIGUEZ

bajo la presidencia del primero y fungiendo como secretario el último, para realizar el examen de grado del programa de Doctor en Ciencias Matemáticas, a:

CYNTHIA DENNISE GARCIA BELTRAN

quien de acuerdo a la opción de examen de grado presentó un trabajo de investigación titulado

"Cálculo de Frolicher-Nijenhuis en la Teoria de Algebroides de Lie"

El saber de mis hijos hará mi grandeza

CYNTHIA DENNISE GARCIA BELTRAN
212290264

El jurado, después de debatir entre sí reservada y libremente, emitió el siguiente dictamen:

APROBADA POR UNANIMIDAD

y para constancia se levantó la presente acta.

Acta: 10
Foja: 10
Libro: 1

DR. MISAEL AVENDAÑO CAMACHO
Presidente

DR. JOSE ANTONIO VALLEJO RODRIGUEZ
Secretario

DR. YURY VOROBEV
Sinodal

DR. FAUSTO ANTONIO ONGAY LARIOS
Sinodal

DR. JESUS ADOLFO MINJAREZ SOSA, Coordinador del Programa de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Sonora, hace constar que las firmas que anteceden corresponden al jurado que intervino en el examen de grado.

Hermosillo, Sonora, a 9 de octubre de 2015

Adolfo Minjarez

DR. JESUS ADOLFO MINJAREZ SOSA
Coordinador de programa

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, COORDINACIÓN POSGRADO EN MATEMÁTICAS

Folio: 7570

A la memoria de Blanca Torres.
Gracias por todo abuelita, siempre estás en mi corazón.

Resumen

Este trabajo esta dedicado a algunos aspectos de la teoría de algebroides de Lie, que es actualmente un tema activo de investigación ya que aparece en varias ramas de Geometría Diferencial, y tiene varias aplicaciones en Mecánica Lagrangiana y Mecánica Hamiltoniana.

Presentamos un enfoque algebraico para construir algebroides de Lie basado en el cálculo de Frölicher-Nijenhuis y la correspondencia que existe entre algebroides de Lie y operadores de cohomología, es decir, derivaciones D del álgebra exterior $\Omega(M)$ con $\mathbb{Z}$-grado 1 y tales que $D^2 = 0$. Nuestros resultados principales tienen relación con la construcción de nuevos algebroides de Lie asociados a endomorfismos idempotentes del haz tangente. En particular, construimos algebroides de Lie generados por estructuras geométricas como foliaciones regulares, estructuras complejas, estructuras tangente, estructuras producto y semisprays. Como aplicación de estos resultados, describimos los algebroides de Lie inducidos por algunos sistemas Lagrangianos.

Contenido

Introducción

Los algebroides de Lie pueden pensarse como álgebras de Lie infinito-dimensionales de “tipo geométrico”, o como haces tangentes generalizados. De hecho, los ejemplos más simples (finito-dimensionales) son álgebras de Lie y haces tangentes de variedades, y hay muchos ejemplos naturales provenientes de foliaciones, variedades de Poisson, acciones infinitesimales de álgebras de Lie en variedades, y otros contextos.

La definición de algebroide de Lie que se usa actualmente fue formulada en 1962 por Pradines. Sin embargo, este concepto apareció por primera vez en un trabajo de E. Cartan en 1904 definido mediante el uso de coordenadas locales. Y la noción algebraica análoga fue estudiada por Rinehart en 1963.

En la actualidad, los algebroides de Lie son un tema activo de investigación con aplicaciones en diversas ramas de las matemáticas [5, 6, 13, 20, 21, 31, 33], más específicamente, los algebroides de Lie tienen aplicaciones en Mecánica [4, 24, 34].

Entre las principales investigaciones y aportaciones recientes en la teoría de algebroides de Lie, podemos mencionar las siguientes. K. Mackenzie realizó un amplio estudio de algebroides de Lie en [21, 22]. La noción de conexiones en algebroides de Lie para el estudio de estructuras geométricas singulares fue introducido en [13, 33]. Por otro lado, A. Weinstein [34] desarrolló una teoría generalizada de Mecánica Lagrangiana en algebroides de Lie, y obtuvo las ecuaciones de movimiento usando la estructura de Poisson en el haz dual y la transformada de Legendre. Además E. Martinez en [23], desarrolló el formalismo de Klein en algebroides de Lie utilizando la noción de prolongación de un algebroide de Lie y propuso una versión modificada del formalismo simpléctico, en el cual los haces base y su tangente son reemplazados por sus respectivas prolongaciones.

El estudio de los algebroides de Lie proporciona un entorno natural para el desarrollo de la teoría de operadores diferenciales tales como la diferencial exterior de formas y la derivada de Lie con respecto a un campo vectorial.

En este trabajo, presentamos un enfoque algebraico del estudio de la relación entre algebroides de Lie y operadores de cohomología basado en el cálculo de Frölicher-Nijenhuis [15]. Varios enfoques de este tema se pueden encontrar, por ejemplo, en [6, 17, 20, 19, 22, 25]. Nuestro enfoque es motivado por la relación entre la diferencial exterior y el corchete de Lie de campos vectoriales en una variedad M. Como operador diferencial de primer orden en las secciones del álgebra exterior, $\Omega_M = \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$, la diferencial exterior se puede caracterizar mediante su acción en generadores

$$\begin{cases} \mathrm{d}f(X) = Xf, \\ \mathrm{d}\alpha(X,Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]), \end{cases}$$

donde $f \in \mathcal{C}^\infty_M$, $\alpha \in \Omega^1_M$ y $X, Y \in \mathfrak{X}_M$ arbitrarios. La acción se extiende a todo Ω_M como derivación de $\mathbb{Z}$-grado 1. Notemos que la propiedad de cohomología $\mathrm{d}^2 = 0$ es equivalente a la identidad de Jacobi para el corchete de Lie $[\,,\,]$. Este procedimiento nos permite invertir las definiciones. Empezando con la diferencial exterior d en Ω_M, podemos definir el corchete de Lie de la siguiente manera: para dados $X, Y \in \mathfrak{X}_M$, su corchete es el único elemento $[X,Y] \in \mathfrak{X}_M$ tal que

$$\alpha([X,Y]) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \mathrm{d}\alpha(X,Y),$$

para todo $\alpha \in \Omega^1_M$. En particular, si $\alpha = \mathrm{d}f$ para $f \in \mathcal{C}^\infty$, la fórmula anterior junto con $\mathrm{d}^2 = 0$ nos da

$$[X,Y]f = X(\mathrm{d}f(Y)) - Y(\mathrm{d}f(X)) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

así, el corchete definido, ciertamente, coincide con el corchete de Lie. Nuevamente, es fácil ver que la identidad de Jacobi es equivalente a la condición de cofrontera $\mathrm{d}^2 = 0$.

Dicha correspondencia, entre corchetes de Lie y operadores de cohomología se puede extender al contexto de algebroides de Lie. En este trabajo abordaremos esta idea.

De manera formal, un algebroide de Lie es un triple $(E, q, [\![\,,\,]\!])$ donde E es un haz vactorial, q es un morfismo de $\mathcal{C}^\infty$-módulos $q : E \to TM$ llamado aplicación ancla y $[\![\,,\,]\!]$ un corchete de Lie en ΓE compatible con su estructura de $\mathcal{C}^\infty$-módulo y con el ancla mediante la regla de Leibniz; y un operador de cohomología D es una derivación de grado 1 del álgebra exterior $\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$ que satsiface la condición de cofrontera, es decir, es de cuadrado cero $D^2 = 0$.

Nuestro trabajo se basa en las siguientes ideas. El primer hecho fundamental es la existencia de la correspondencia ya mencionada entre algebroides de Lie y operadores de cohomología. Dado un haz vectorial $\pi : E \to M$, podemos asociar a cada algebroide de Lie $(E, q, [\![\,,\,]\!])$ un operador diferencial D, que es operador de cofrontera y derivación de grado 1 del álgebra exterior $\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$. El complejo cocadena correspondiente nos da la cohomología del algebroide de Lie E y el operador D se llama diferencial de De Rham de E. En el caso particular en que $E = TM$ es el haz tangente y $(E, q, [\![\ ,\ ]\!]) = (TM, id, [\ ,\ ])$ es el algebroide de Lie tangente, D es la diferencial de De Rham usual de formas en M. Otro ejemplo importante no trivial es el algebroide de Lie cotangente de una variedad de Poisson que induce la noción de cohomología de Poisson [33]. Recíprocamente, dado un operador diferencial D podemos construir un algebroide de Lie de manera natural, definiendo la aplicación ancla $q : E \to TM$ y el corchete de Lie en ΓE en términos de D. Aquí la identidad de Jacobi y la regla de Leibniz para el corchete son consecuencia de la condición de cofrontera para D y de la propiedad para D de ser derivación de grado 1. Una de nuestras principales aportaciones es describir algebroides de Lie no triviales en el haz tangente y sus diferenciales de De Rham. Aquí, por algebroides de Lie no triviales nos referimos a que su corchete es distinto al corchete de Lie de campos vectoriales y su diferencial es distinta a la diferencial de De Rham. El punto clave de nuestro trabajo para parametrizar dichos algebroides es utilizar la descomposición de Frölicher-Nujenhuis para la diferencial $D = \mathcal{L}_q + \imath_L$, donde $\mathcal{L}$ es la derivada de Lie e $\imath$ la inserción de de formas valuadas vectoriales, $q : TM \to TM$ es una 1-forma valuada vectorial (endomorfismo) y $L : TM \times TM \to TM$ es una 2-forma valuada vectorial en M, que determinan el ancla y un corchete deformado respectivamente. Entonces la idea es pensar finalmente en el par (q, L) como parámetro de los algebroides de Lie en TM, satisfaciendo las ecuaciones de cohomología que involucran los corchetes de Frölicher-Nijenhuis y Richardson-Nijenhuis. Mostramos que para haces tangentes algunas soluciones de las ecuaciones de cohomología se pueden describir en términos geométricos mediante el uso de endomorfismos idempotentes (foliaciones regulares, estructuras complejas, estructuras producto y estructuras tangente). Además mostramos que nuestro enfoque se puede extender a haces arbitrarios usando una versión generalizada de la descomposición de Froliche-Nijenhuis por medio de conexiones en algebroides de Lie llamadas E-conexiones [13, 33]. Y finalmente aplicamos nuestros resultados para construir algebroides de Lie asociados a sistemas mecánicos en el contexto de la teoría de semisprays [8, 10, 27].

A continuación presentamos los principales resultados de esta tesis.

Algebroides de Lie asociados a endomorfismos idempotentes

Teorema. Sea M una variedad conexa y sea $N \in \Omega^1(M; TM)$ un endomorfismo idempotente, $N^2 = N$ tal que su imagen $\operatorname{Im} N \subset TM$ es involutiva. Entonces, existe una estructura de algebroide de Lie $(TM, q, [\![\ ,\ ]\!])$ definido por

$$q = N \tag{1}$$

$$[\![X, Y]\!] = [X, Y]_N + T_N(X, Y), \tag{2}$$

donde $[\,,\,]_N$ denota el corchete deformado inducido por N y $[\,,\,]_{FN}$ es el corchete de Frölicher-Nijenhuis para formas valuadas vectoriales en M.

La prueba de este teorema es básicamente verificar que N y T_N satisfacen las ecuaciones de cohomología, que son las ecuaciones que nos permiten decir cuándo un operador parametrizado por su descomposición de Frölicher-Nijenhuis es o no de cohomología. Y después construir el algebroide de Lie asociado a dicho operador de cohomología.

Observemos que la propiedad de idempotencia del endomorfismo N implica que la distribución $\operatorname{Im} N$ tiene rango constante [18]. El segundo término en (2) conincide precisamente con la torsión de Nijenhuis $T_N \in \Omega^2(M;TM)$ de N. El primer término en (2) esta determinado por el corchete deformado [17], que en general no es corchete de Lie. Esto sucede sólo cuando la torsión de Nijenhuis de N es cero. Notemos también que el operador de cohomología D del algebroide definido por (1) y (2) tiene la siguiente descomposición de Frölicher-Nijenhuis

$$D = \mathcal{L}_N - \imath_{T_N}.$$

Aplicaremos este resultado general a algunas situaciones para construis algebroides de Lie asociados a varias estructuras geométricas como folicaciones regulares, estructuras complejas, estructuras producto y estructuras tangente.

Algebroides de Lie y semisprays

La noción de semispray conduce a una clase de sistemas dinámicos que desempeñan un papel importante en varios problemas de Mecánica Hamiltoniana y Lagrangiana [8, 10, 27]. Aquí, la herramienta principal es la noción de conexión no lineal en el haz tangente TM [10]. Por conexión no lineal nos referimos a un endomorfismo $\Gamma \in \Omega^1(TM;TTM)$ que satiface $\Gamma^2 = Id_{TTM}$ y tal que el núcleo de $Id_{TTM} + \Gamma$ coincide con el subhaz vertical $\mathbb{V}$ de TTM. Como consecuencia, $\mathbb{H} := \operatorname{Ker}(Id_{TTM} + \Gamma)$ es el haz horizontal, esto es, $TTM = \mathbb{V} + \mathbb{H}$. Afirmamos lo siguiente.

Teorema. Cada conexión no lineal $\Gamma \in \Omega^1(TM;TTM)$ en TM induce una algebroide de Lie $(TTM, q, [\![\,,\,]\!])$ con

$$q = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_{TTM} - \Gamma)$$

$$[\![A,B]\!]_\Gamma = \frac{1}{2}\left([A,B] - [A,B]_\Gamma\right) + \frac{1}{4}T_\Gamma(A,B).$$

Para probar este teorema construimos un endomorfismo idempotente a partir de la conexión no lineal $\tilde{\Gamma}$ y después aplicamos el teorema anterior.

Un campo vectorial S en TM se llama semispray si $J \circ S = C$, donde $J : TTM \to TTM$ es la estructura tangente canónica en TM y C es el campo vectorial de Euler. Existe una correspondencia entre semisprays y conexiones no lineales: cada semispray S induce una conexión no lineal Γ_S en TM definida por $\Gamma_S = -\mathcal{L}_S J$, y cada conexión no lineal Γ tiene una semispray asociado ξ_Γ. Dado un semispray S, se dice que una conexión no lineal es *adaptada* si S es tangente al subhaz horizontal. Estas definiciones provienen de motivaciones dinámicas. El hecho de que Γ_S no sea una conexión adaptada a S , en general, da lugar a cuestionarnos la existencia de una conexión adaptada. Aquí damos la respuesta.

Teorema. Un semispray S admite una conexión adaptada $\tilde{\Gamma}$ si y sólo si S se anula a lo largo de la sección cero $M \hookrightarrow TM$. Dicha conexión es de la forma $\tilde{\Gamma} = \Gamma_S + \Delta$, donde Δ es una 1-forma semibásica.

Usando el teorema enunciado anteriormente describimos algunas propiedades de los algebroides de Lie asociados a conexiones no lineales adaptadas a semisprays. En particular, calculamos la forma normal local [11, 12] de este tipo de algebroides. Como ilustración y aplicación de estos resultados, consideramos algunos sistemas Lagrangianos que decriben la dinámica de partículas de variedades Riemannianas en campos magnéticos [27].

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 incluimos un recordatorio de algebroides de Lie y su forma normal. También se incluye un breve resumen del cálculo de Frölicher-Nijenhuis para derivaciones del álgebra exterior de una variedad ([19]). Por último, se discuten algunas propiedades de estructuras tangente, conexiones no lineales y semisprays, herramientas necesarias para desarrollar el Capítulo 4.

En el Capítulo 2 recordamos cómo construir un operador de cohomología en $\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$ a partir de un algebroide de Lie (Teorema 2.2), y estudiamos su descomposición de Frölicher-Nijenhuis siguiendo su enfoque original expuesto en [29, 15]. En la Proposición 2.6, lo hacemos en un haz fibrado $E = TM$ y después abordamos el caso más general de un fibrado E arbitrario en el Teorema 2.10. Después hacemos el camino inverso, partimos de un operador de cohomología $D \in Der(\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$ y definimos a partir de él, un algebroide de Lie en E. Resultado que se encuentra en el Teorema 2.11, y como caso particular analizamos lo que sucede cuando $E = TM$ en el Teorema 2.13, nuevamente nuestra principal herramienta es la descomposición de Frölicher-Nijenhuis.

En el Capítulo 3 planteamos las ecuaciones de cohomología (3.1.1) y (3.1.2), que son ecuaciones claves para saber cuándo un operador es de cohomología, y con ellas obtenemos el resultado principal, el Teorema 3.5, que nos dice que cada enfomorfismo idempotente cuya imagen es involutiva induce un operador de cohomología, y por tanto, un algebroide de Lie. Luego, construimos ejemplos de algebroides de Lie aplicando el resultado anterior a casos particulares de endomorfismos indempotentes, obteniendo algebroides complejos (Teorema 3.11), algebroides asociados a estructuras producto (Teorema 3.12) y algebroides asociados a estructuras tangente y a una conexión no lineal (Teorema 3.13). En este capítulo, en la Subsección 3.2.1, también revisamos la relación que existe entre el algebroide de Lie que induce una conexión de Ehresmann y la diferencial exterior foliada.

Finalmente, en el capítulo 4 vemos cuándo un semispray induce una estructura de algebroide, resultado enunciado en el Teorema 4.2. Después, en la Subsección 4.4, aplicamos este resultado a una variedad Riemanniana y a un sistema Lagrangiano de magnetismo.

Algunos resultados principales de esta tesis se encuentran publicados en *Lie algebroids generated by cohomology operators* (with J. A. Vallejo and Y. Vorobiev), Journal of Geometric Mechanics **7** 3 (2015) 295–315.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos algunas definiciones y propiedades de los algebroides de Lie y del cálculo de Frolicher-Nijenhuis, temas fundamentales para el desarrollo del trabajo y para la obtención de los resultados principales. Para más detalles ver [11, 15, 21, 22, 25].

1.1 Algebroides de Lie y su forma normal

Sea M una variedad diferencial. Recordemos la siguiente definición.

Definición 1.1. *Un algebroide de Lie es un triple $(E, q, [,])$ que consiste en un haz vectorial E sobre la variedad M, junto con un corchete de Lie $[,]$ en el módulo de secciones $\Gamma(E)$ y un morfismo de haces vectoriales $q : E \to TM$ llamado aplicación ancla, tales que satisfacen la regla de Leibniz:*

$$[X, fY] = q(X)fY + f[X, Y] \tag{1.1}$$

para todo $X, Y \in \Gamma(E)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Una consecuencia es que la aplicación ancla es un morfismo de álgebras de Lie, para verlo, necesitamos introducir algunas definiciones y resultados previos. Para empezar, vamos a introducir la siguiente notación.

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, se tiene el morfismo multiplicación, $\mu_f : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, que existe por ser $\Gamma(E)$ un $\mathcal{C}^\infty(M)-$módulo:

$$\mu_f(X) := f.X, \quad \forall\, X \in \Gamma(E).$$

Un operador $D \in End_{\mathbb{R}}(\Gamma(E))$ se dice que es una quasi-derivación si dada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, existe $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con

$$[D, \mu_f] = \mu_g$$

donde [,] es el conmutador de endomorfismos.

El conjunto de todas las quasi-derivaciones de $\Gamma(E)$, $QDer_{\mathbb{R}}(\Gamma(E))$, con las operaciones obvias es un $\mathbb{R}$-módulo, y se tiene la siguiente propiedad.

Lema 1.2. *$QDer_{\mathbb{R}}(\Gamma(E))$ es una subálgebra de Lie de $End_{\mathbb{R}}(\Gamma(E))$.*

Demostración. Lo único que hay que probar es que el corchete es cerrado. Sean $D_1, D_2 \in QDer_{\mathbb{R}}(\Gamma(E))$, así que dada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\exists\, g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con

$$[D_1, \mu_f] = \mu_{g_1} \quad \text{y} \quad [D_2, \mu_f] = \mu_{g_2}.$$

Por tanto ,

$$\begin{aligned} [\,[D_1, D_2], \mu_f] &= -[\,[\mu_f, D_1], D_2] - [\,[D_2, \mu_f], D_1] \\ &= [\,[D_1, \mu_f], D_2] - [\,[D_2, \mu_f], D_1] \\ &= [\mu_{g_1}, D_2] - [\mu_{g_2}, D_1] \\ &= -[D_2, \mu_{g_1}] + [D_1, \mu_{g_2}]. \end{aligned}$$

Pero también, dados g_1, g_2, existen $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con

$$[D_2, \mu_{g_1}] = \mu_{h_1} \quad \text{y} \quad [D_1, \mu_{g_2}] = \mu_{h_2},$$

así que

$$[\,[D_1, D_2], \mu_f] = \mu_{h_2} - \mu_{h_1} = \mu_{h_2 - h_1},$$

lo que nos dice que $[D_1, D_2] \in QDer_{\mathbb{R}}(\Gamma(E))$. □

También nos será útil el siguiente teorema.

Lema 1.3. *Existe una aplicación $\mathbb{R}-$lineal $\widehat{\ }: QDer_{\mathbb{R}}(\Gamma(E)) \to Der_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(M)) \simeq \mathfrak{X}_M$ tal que*

$$[D, \mu_f] = \mu_{\widehat{D}(f)}.$$

Demostración. Por definición de D como quasi-derivación, dadas $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, existen $\widehat{D}(f)$, $\widehat{D}(g) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tales que

$$[D, \mu_f] = \mu_{\widehat{D}(f)} \ , \ [D, \mu_g] = \mu_{\widehat{D}(g)},$$

y también existe $\widehat{D}(fg) \in \mathcal{A}$ con

$$[D, \mu_{fg}] = \mu_{\widehat{D}(fg)}.$$

Lo que queremos probar, es que $\widehat{D}$ es derivación, es decir,

$$\widehat{D}(fg) = \widehat{D}(f)g + f\widehat{D}(g).$$

Ahora bien, como $\mu_{\widehat{D}(f)} = D \circ \mu_f - \mu_f \circ D$, por una parte, calculamos (con $X \in \Gamma(E)$)

$$D(fgX) = D((fg).X) = fg.D(X) + \widehat{D}(fg).X \tag{1.2}$$

Por otra

$$\begin{aligned} D(fgX) &= D(f.(g.X)) \\ &= f.D(g.X) + \widehat{D}(f).(g.X) \\ &= f.(g.D(X) + \widehat{D}(g).X) + \widehat{D}(f).(g.X) \\ &= fg.D(X) + (f.\widehat{D}(g) + \widehat{D}(f).g).X. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Igualando las ecuaciones (1.2) y (1.3), obtenemos que

$$\widehat{D}(fg).X = (f.\widehat{D}(g) + \widehat{D}(f).g).X,$$

$\forall X \in \Gamma(E)$, es decir, $\widehat{D}$ es derivación. □

Y como consecuencia inmediata, tenemos

Lema 1.4. *El morfismo $\mathbb{R}-$lineal $\widehat{\ }$ es también un morfismo de álgebras de Lie:*

$$\widehat{[D_1, D_2]} = [\widehat{D_1}, \widehat{D_2}]\ ,\ \ \forall\ D_1, D_2 \in QDer_{\mathbb{R}}(\Gamma(E)).$$

Demostración. Por definición, si $D_1, D_2 \in QDer_{\mathbb{R}}(\Gamma(E))$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $X \in \Gamma(E)$:

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](f.X) &= D_1(D_2(f.X)) - D_2(D_1(f.X)) \\ &= D_1(f.D_2(X) + \widehat{D_2}(f).X) - D_2(f.D_1(X) + \widehat{D_1}(f).X) \\ &= f.D_1(D_2(X)) + \widehat{D_1}(f).D_2(X) + \widehat{D_2}(f).D_1(X) \\ &\quad + \widehat{D_1}(\widehat{D_2}(f)).X - f.D_2(D_1(X)) - \widehat{D_2}(f).D_1(X) \\ &\quad - \widehat{D_1}(f).D_2(X) - \widehat{D_2}(\widehat{D_1}(f)).X \\ &= f[D_1, D_2](X) + [\widehat{D_1}, \widehat{D_2}](f).X. \end{aligned}$$

Esto nos dice que $[D_1, D_2]$ es quasi-derivación, pues lo anterior es equivalente a

$$\mu_{[\widehat{D_1}, \widehat{D_2}](f)}(X) = [D_1, D_2] \circ \mu_f(X) - \mu_f \circ [D_1, D_2](X) = [\ [D_1, D_2], \mu_f](X),$$

y que, además,

$$\widehat{[D_1, D_2]}(f).X = [\widehat{D_1}, \widehat{D_2}](f).X \ , \ \ \forall\, f \in \mathcal{C}^\infty(M), \ \ \forall\, X \in \Gamma(E)$$

□

Una vez que tenemos todo listo, probemos el siguiente resultado.

Proposición 1.5. *Sea $(E, q, [\![,]\!])$ un algebroide de Lie. Entonces, la aplicación ancla es un morfismo de álgebras de Lie, es decir,*

$$q([\![X, Y]\!]) = [q(X), q(Y)]$$

para todos $X, Y \in \Gamma(E)$.

Demostración. Si $X \in \Gamma(E)$, denotemos por ad_X el siguiente endomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} ad_X : \Gamma(E) & \rightarrow & \Gamma(E) \\ Y & \mapsto & [\![X, Y]\!]. \end{array}$$

Notemos que, dados $X, Y \in \Gamma(E)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, la regla de Leibniz se traduce en

$$\begin{array}{rcl} [\![X, fY]\!] - f[\![X, Y]\!] & = & q(X)fY \\ ad_X \circ \mu_f(Y) - \mu_f \circ ad_X(Y) & = & \mu_{q(X)(f)}(Y) \\ .[ad_X, \mu_f](Y) & = & \mu_{q(X)(f)}(Y), \end{array}$$

lo cual nos lleva a que $q(X)(f) = \widehat{ad_X}(f)$.
Ahora, sea $Z \in \Gamma(E)$, y evaluemos $[ad_X, ad_Y]$,

$$\begin{array}{rcl} [ad_X, ad_Y](Z) & = & ad_X(ad_Y(Z)) - ad_Y(ad_X(Z)) \\ & = & [\![X, [\![Y, Z]\!]\,]\!] - [\![Y, [\![X, Z]\!]\,]\!] \\ & = & [\![\,[\![X, Y]\!], Z]\!] + [\![Y, [\![X, Z]\!]\,]\!] - [\![Y, [\![X, Z]\!]\,]\!] \\ & = & [\![\,[\![X, Y]\!], Z]\!] \\ & = & ad_{[\![X,Y]\!]}(Z), \end{array}$$

aquí hemos usado la identidad de Jacobi. Y como esto es válido para toda $Z \in \Gamma(E)$ se tiene que $[ad_X, ad_Y] = ad_{[\![X,Y]\!]}$. Finalmente, el Teorema 1.4 nos asegura que

$$[q(X), q(Y)] = [\widehat{ad_X}, \widehat{ad_Y}] = \widehat{[ad_X, ad_Y]} = \widehat{ad_{[\![X,Y]\!]}} = q([\![X, Y]\!]).$$

□

Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 1.6. *Dada una variedad M consideremos su haz tangente, éste tiene una estructura trivial de algebroide de Lie,* $(TM, Id, [,])$.

Otro ejemplo menos trivial es el siguiente.

Ejemplo 1.7. *Sea $(M, \{,\})$ una variedad de Poisson, es decir, una variedad M equipada con un corchete de Lie en $\mathcal{C}^\infty(M)$ que además cumple la regla de Leibniz,*

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

para todo $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Esta variedad induce un algebroide de Lie $(\Omega^1(M), q, [\![\,,\,]\!])$, con

$$q(df) = ad_f,$$

donde $ad : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathfrak{X}_M$ se define por $ad(f)(g) := \{f, g\}$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Cabe mencionar que es suficiente saber cómo actúa q en 1-formas de la forma df para $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, pues cualquier otra será combinación de éstas y funciones. Y el corchete es dado por

$$[\![\alpha, \beta]\!] = \imath_{q(\alpha)} d\beta - \imath_{q(\beta)} d\alpha + d(\beta(q(\alpha)))$$

para $\alpha, \beta \in \Omega^1 M$ (ver [12]).

El siguiente teorema, llamado *Splitting Theorem*, nos dice cuál es la estructura local de un algebroide de Lie y apareció primero en una versión más débil, en [13] y en [35], y después fue mejorado en [11], nosotros citamos la versión que aparece en [12].

Teorema 1.8. *Sea $(E, q, [,])$ un algebroide de Lie sobre M. Entonces, para cada punto de M existe un entorno tal que el algebroide E se puede descomponer localmente como el producto directo de un algebroide tangente y otro cuyo rango en el origen es 0. Más precisamente, si el rango de q en el punto $z \in M$ es r, entonces, existe un sistema de coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ en M centrado en z, y una base local de secciones $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_t)$ de E sobre un entorno de z, tales que satisfacen las siguientes condiciones para todos los índices posibles:*

$$[\alpha_i, \alpha_j] = 0, \quad q(\alpha_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad [\beta_i, \alpha_j] = 0,$$

$$q(\beta_i)(x_j) = 0, \quad \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} q(\beta_i) = 0, \quad [\beta_i, \beta_j] = \Sigma_k f_{ij}^k(y)\beta_k,$$

donde f_{ij}^k son funciones que dependen únicamente de las variables $y = (y_1, \ldots, y_s)$.

Este teorema, que se puede ver como una generalización del local splitting theorem para variedades de Poisson debido a Weinstein [32], implica que, para estudiar la estructura local de un algebroide de Lie, es suficiente considerar el caso en que la aplicación ancla se anula en un punto.

1.2 Descomposición de Frölicher-Nijenhuis

El propósito de ésta sección, como su nombre lo indica, es formular y probar el teorema de descomposición de Frölicher-Nijenhuis clásico. Ponemos enfásis en este resultado porque es parte importante para el desarrollo y la obtención de los resultados principales de esta tesis. Para lograr nuestro objetivo introducimos algunas definiciones y resultados necesarios.

Definición 1.9. *Una aplicación lineal* $L : \Omega(M) \to \Omega(M)$ *se dice que es un endomorfismo* $\mathbb{Z}-$*graduado homogéneo de grado* $p \in \mathbb{Z}$ *si* $L(\Omega^k(M)) \subset \Omega^{k+p}(M)$*.*

Si $\alpha \in \Omega^k(M)$, se puede considerar como un endomorfismo $\alpha : \Omega(M) \to \Omega(M)$ que simplemente actúa sobre $\beta \in \Omega(M)$ mediante

$$\alpha(\beta) = \alpha \wedge \beta,$$

claramente es de grado k.

Definición 1.10. *Si* $L_1, L_2 : \Omega(M) \to \Omega(M)$ *son enodmorfismos graduados, su conmutador graduado se define como*

$$[L_1, L_2] = L_1 \circ L_2 - (-1)^{|L_1||L_2|} L_2 \circ L_1$$

donde $|L_1|$*,* $|L_2|$ *denota el grado de* L_1*,* L_2*, respectivamente.*

El conjunto de todos los endomorfismos $\mathbb{Z}-$graduados con el conmutador graduado forman un álgebra de Lie (graduada).

Definición 1.11. *Un endomorfismo graduado* $D : \Omega(M) \to \Omega(M)$ *se dice que es un operador diferencial (sobre* $\Omega(M)$*) de orden* k *con (*$k \in \mathbb{N}$*) si*

$$[\dots[[D, \alpha_0], \alpha_1], \dots \alpha_k]$$

para cualesquiera $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega(M)$*.*

Un resultado conocido nos dice que cualquier operador diferencial de orden k está determinado por su actuación sobre formas diferenciales de grado menor o igual que su orden.

Definición 1.12. *Una derivación de grado* $l \in \mathbb{Z}$ *es un* $\mathbb{R}-$*endomorfismo de* $\Omega(M)$ *tal que*

$$D : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+l}(M),$$

y, para cualesquiera formas α *homogénea y* β *arbitraria,*

$$D(\alpha \wedge \beta) = D(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{l|\alpha|} \alpha \wedge D(\beta),$$

donde $|\alpha|$ *denota el grado de* α*.*

El espacio vectorial (y $\mathcal{C}^\infty(M)-$módulo) de dichas derivaciones se denota $\operatorname{Der}^l \Omega(M)$, y entonces $\operatorname{Der}\Omega(M) = \oplus_{l\in\mathbb{Z}} \operatorname{Der}^l \Omega(M)$ es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie graduada de endomorfismos graduados. Y resulta que las derivaciones son los operadores diferenciales de orden 1 que se anulan sobre las constantes. Cualquier $(k+1)-$forma valuada vectorial $K \in \Omega^{k+1}_{\mathbb{C}}(M;TM)$, define una derivación de grado k, llamada inserción de K y denotada $\imath_K$.

Definición 1.13. *Si $K \in \Omega^{k+1}(M;TM)$, $\omega \in \Omega^p(M)$ y $Z_j \in \Gamma(TM \oplus iTM)$, con $j = 1, ..., k+p$, entonces la inserción de K en ω es*

$$\begin{aligned} &\imath_K\omega(Z_1, \cdots, Z_{k+p}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_{k+1,p-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega(K(Z_{\sigma(1)}, \cdots, Z_{\sigma(k+1)}), Z_{\sigma(k+2)}, \cdots, Z_{\sigma(k+p)}), \end{aligned}$$

donde $S_{k+1,p-1}$ son las permutaciones de barajar y sgn *denota el signo de la permutación.*

Definición 1.14. *Una derivación $D \in \operatorname{Der}\Omega(M)$ que se anula en funciones, $D(f) = 0$ para todo $f \in \Omega^0(M)$, se llama derivación tensorial (o algebraica).*

Todas las derivaciones tensoriales son inserciones.

Proposición 1.15. *Sea $D \in \operatorname{Der}^k \Omega(M)$ una derivación tensorial. Entonces, existe una única forma valuada vectorial $K \in \Omega^{k+1}(M;TM)$ tal que*

$$D = \imath_K.$$

Demostración. Si D es una derivación algebraica, se anula sobre funciones. Por otra parte es un operador diferencial cuya acción queda determinada por lo que hace sobre 1-formas. Es decir, basta con conocer $D : \Omega(M)^1 \to \Omega(M)^{k+1}$. Pero de la tensorialidad se deduce que esta aplicación es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal, luego (por el lema de localización para campos tensoriales) determina un $K \in \Omega^{k+1}(M;TM)$ tal que

$$\begin{aligned} (D\alpha)(Z_1, \ldots, Z_{k+1}) &= K(Z_1, \ldots, Z_{k+1}; \alpha) \\ &= \alpha(K(Z_1, \ldots, Z_{k+1})) \\ &= (\imath_K\alpha)(Z_1, \ldots, Z_{k+1}) \end{aligned}$$

con $\alpha \in \Omega^1(M)$ y $Z_1, \ldots, Z_{k+1} \in \mathfrak{X}_M$. Luego $D = \imath_K$. □

Si $K \in \Omega^{k+1}(M;TM)$ y $L \in \Omega^{l+1}(M;TM)$, sus inserciones correspondientes son $\imath_K \in \operatorname{Der}^k \Omega(M)$, $\imath_L \in Der^l(\Omega(M))$, por lo que su conmutador graduado es de nuevo una derivación $[\imath_K, \imath_L] \in \operatorname{Der}^{k+l} \Omega(M)$. Además, ésta nueva derivación también es tensorial, luego, aplicando la Proposición 1.15, existe una única $(k+l+1)-$forma valuada vectorial determinada por ella, lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 1.16. *Dadas $K \in \Omega^{k+1}(M;TM)$, $L \in \Omega^{l+1}(M;TM)$, su corchete de Richardson-Nijenhuis se define como el elemento $[K,L]_{RN} \in \Omega^{k+l+1}(M;TM)$ tal que*

$$[\imath_K, \imath_L] = \imath_{[K,L]_{RN}}.$$

Observación 1. *El corchete de Richardson-Nijenhuis no es una extensión del corchete de Lie sobre $\mathfrak{X}_M$, de hecho $[Z_1, Z_2]_{RN} = 0$ para $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}_M$.*

Dada $K \in \Omega^{k+1}(M;TM)$, como $\imath_K \in Der^k\,\Omega(M)$ y $\mathrm{d} \in Der^1\,\Omega(M)$, su conmutador graduado será nuevamente una derivación, hecho que nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.17. *Dada $K \in \Omega^{k+1}(M;TM)$, la derivada de Lie a lo largo de K se define como*

$$\mathcal{L}_K := [\imath_K, \mathrm{d}] = \imath_K \circ \mathrm{d} - (-1)^{k-1}\mathrm{d} \circ \imath_K.$$

Como consecuencia de la identidad de Jacobi para el conmutador de derivaciones graduadas, y de la nilpotencia de d, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.18. *Para cualquier $K \in \Omega(M;TM)$, el conmutador graduado de las derivaciones $\mathcal{L}_K$ y d se anula.*

Demostración. Sea $K \in \Omega(M;TM)$, tenemos

$$[\mathcal{L}_K, \mathrm{d}] = [[\imath_K, \mathrm{d}], \mathrm{d}] = [\imath_K, [\mathrm{d}, \mathrm{d}]] + (-1)^1[[\imath_K, \mathrm{d}], \mathrm{d}] = -[\mathcal{L}_K, \mathrm{d}],$$

luego, $[\mathcal{L}_K, \mathrm{d}] = 0$. □

Así, existen derivaciones tensoriales de tipo $\imath_K$ para $K \in \Omega^k(M;TM)$, y derivaciones que conmutan con la diferencial exterior d, como las derivadas de Lie. El teorema de descomposición de Frölicher-Nijenhuis establece que cualquier otra derivación es suma de estos dos tipos.

Teorema 1.19 (Frölicher-Nijenhuis)**.** *Sea $D \in Der^k\,\Omega(M)$. Entonces, existe una única pareja (K, L), $K \in \Omega^k(M;TM)$ y $L \in \Omega^{k+1}(M;TM)$, tal que*

$$D = \mathcal{L}_K + \imath_L.$$

Demostración. Sean $Z_i \in \mathfrak{X}_M$, $1 \leq i \leq k$ y definamos $H : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ poniendo

$$H(f) := (Df)(Z_1, \ldots, Z_k).$$

Esta aplicación es derivación de $\mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} H(fg) &= (D(fg))(Z_1,\ldots,Z_k) \\ &= ((Df)g + fD(g))(Z_1,\ldots,Z_k) \\ &= (Df)(Z_1,\ldots,Z_k)g + f(D(g))(Z_1,\ldots,Z_k) \\ &= H(f)g + fH(g). \end{aligned}$$

Por lo tanto, H puede verse como un campo vectorial que, por depender de los $Z_1,\ldots,Z_k$ elegidos, lo denotaremos por $K(Z_1,\ldots,Z_k) \in \mathfrak{X}_M$.

Veamos que la correspondencia

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_M \times \cdots \times \mathfrak{X}_M &\to \mathfrak{X}_M \\ (Z_1,\ldots,Z_k) &\mapsto K(Z_1,\ldots,Z_k) \end{aligned}$$

es, de hecho, una k-forma valuada vectorial. Por el lema de localización basta con que sea $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal, lo cual es obvio, pues si $1 \leq i \leq k$:

$$\begin{aligned} K(Z_1,\ldots,fZ_i,\ldots,Z_k)(g) &= (Dg)(Z_1,\ldots,fZ_i,\ldots,Z_k) \\ &= f(Dg)(Z_1,\ldots,Z_i,\ldots,Z_k) \end{aligned}$$

ya que la k-forma $Dg \in \Omega^k(M)$ es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en cada argumento. Por tanto, $K \in \Omega^k(M;TM)$, siendo

$$K(Z_1,\ldots,Z_k)(f) = H(f) = (Df)(Z_1,\ldots,Z_k).$$

Si $K \in \Omega^k(M;TM)$, es $\mathcal{L}_K \in Der^k\Omega^k(M)$. Consideremos la diferencia $D-\mathcal{L}_K$, que también es una derivación de grado k. Si la hacemos actuar sobre una $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} ((D-\mathcal{L}_K)(f))(Z_1,\ldots,Z_k) &= (Df)(Z_1,\ldots,Z_k) - \mathcal{L}_K)(f)(Z_1,\ldots,Z_k) \\ &= (Df)(Z_1,\ldots,Z_k) - (\imath_K)(df)(Z_1,\ldots,Z_k) \\ &= (Df)(Z_1,\ldots,Z_k) - df(K(Z_1,\ldots,Z_k)) \\ &= (Df)(Z_1,\ldots,Z_k) - K(Z_1,\ldots,Z_k)(f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 1.15, existe una única $k+1$-forma valuada vectorial, $L \in \Omega^{k+1}(M;TM)$ tal que $D - \mathcal{L}_K = \imath_L$. □

Una útil consecuencia es el siguiente resultado.

Corolario 1.20. *Sea $D \in \mathrm{Der}^k\,\Omega(M)$. Entonces*

1. *D es tensorial si y sólo si $K = 0$.*
2. *D conmuta con d si y sólo si $L = 0$.*

Demostración. 1. Si D es tensorial, entonces existe una única $k+1$-forma valuada vectorial, $L \in \Omega^{k+1}(M;TM)$ tal que $D = \imath_L$, luego $K = 0$. Si $K = 0$, claramente D es tensorial.

2. Si D conmuta con d, se tiene que

$$0 = [\mathcal{L}_K + \imath_L, \mathrm{d}] = [\mathcal{L}_K, \mathrm{d}] + [\imath_L, \mathrm{d}] = [\imath_L, \mathrm{d}].$$

Luego, si fijamos $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, se sigue que

$$0 = [\imath_L, \mathrm{d}](f) = \imath_L(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}f \circ L,$$

es decir, para cualesquiera $Z_1, \ldots, Z_{k+1} \in \mathfrak{X}_M$ se cumple

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}f(L)(Z_1, \ldots, Z_{k+1}) \\ &= L(Z_1, \ldots, Z_{k+1})(f), \end{aligned}$$

lo cual implica que $L = 0$. Recíprocamente, si $L = 0$, es claro que D conmuta con d.

□

Ejemplo 1.21. *La descomposición de Frölicher-Nijenhuis de la diferencial exterior es*

$$\mathrm{d} = \mathcal{L}_{\mathrm{Id}},$$

(donde $\mathrm{Id} : TM \to TM$ *es el morfismo identidad) como debe ser para una derivación que conmuta con* d.

En efecto, como d *es una derivación de grado* 1 *y conmuta con* d*, por el teorema anterior sabemos que* $L = 0$ *y que existe una* $K \in \Omega^1(M;TM)$ *tal que* $\mathrm{d} = \mathcal{L}_K$*. Si hacemos actuar esta derivación sobre* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *tenemos que*

$$df = \mathcal{L}_K(f) = [\imath_K, \mathrm{d}](f) = \imath_K(\mathrm{d}f) = df \circ K,$$

es decir, $K = Id$.

Si $K \in \Omega^k(M;TM)$ y $L \in \Omega^l(M;TM)$, entonces $[\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_L]$ es de nuevo una derivación y comuta con d, debido a la identidad de Jacobi. Así, según el Corolario 1.20, debe ser de la forma $\mathcal{L}_R \in Der^{k+l}(\Omega(M;TM))$ para una única $R \in \Omega^{k+l}(M;TM)$.

Definición 1.22. *Dada* $K \in \Omega^k(M;TM)$ *y* $L \in \Omega^l(M;TM)$*, su corchete de Frölicher-Nijenhuis es el único elemento* $[K,L]_{FN} \in \Omega^{k+l}(M;TM)$ *tal que*

$$[\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_L] = \mathcal{L}_{[K,L]_{FN}}.$$

Junto con el corchete de Frölicher-Nijenhuis, tenemos la noción de torsión de Nijenhuis.

Definición 1.23. *Si $N \in \Omega^1(M;TM)$ es una 1−forma valuada vectorial, su torsión de Nijenhuis se define como la 2−forma valuada vectorial $T_N = \frac{1}{2}[N,N]_{FN}$.*

Explicitamente, tenemos

$$T_N(X,Y) = [NX,NY] - N[NX,Y] - N[X,NY] + N^2[X,Y], \tag{1.4}$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}_M$.

En el álgebra graduada $\Omega(M;TM)$ hemos definido dos corchetes, $[\,,\,]_{RN}$ y $[\,,\,]_{FN}$. Estos corchetes se definen a partir de

$$[\imath_K, \imath_L] = \imath_{[K,L]_{RN}}, [\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_L] = \mathcal{L}_{[K,L]_{FN}},$$

respectivamente, y nos podemos preguntar si surge algún corchete nuevo al estudiar $[\mathcal{L}_K, \imath_L]$. El siguiente resultado nos dice que la respuesta es negativa.

Proposición 1.24. *Sean $K \in \Omega^k(M;TM)$ y $L \in \Omega^{l+1}(M;TM)$. Entonces*

$$[\mathcal{L}_K, \imath_L] = \imath_{[K,L]_{FN}} - (-1)^{kl}\mathcal{L}_{\imath_L K}. \tag{1.5}$$

Para la prueba de la proposición y más propiedades de los corchetes de Frölicher-Nijenhuis y Richardson-Nijenhuis consultar [19, 25, 30].

1.2.1 Descomposición de Frölicher-Nijenhuis en caso complejo

En la Subsección 3.2.2 haremos uso del teorema de descomposicón de Frölicher-Nijenhuis en el caso complejo, razón por la cuál queremos mencionar que se puede generalizar el resultado ya enunciado en el caso clásico.

Sea M una variedad diferencial con haz tangente TM. Su haz complejificado es entonces $T_{\mathbb{C}}M = TM \oplus iTM$. Los campos vectoriales complejos son de la forma $Z = X + iY$, con $X, Y \in \Gamma TM$. Al conjunto de ellos lo denotaremos $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$, y las 1−formas complejas se construyen como los duales $\Omega^1_{\mathbb{C}}(M) = \Gamma(T^*_{\mathbb{C}}M) \simeq (\Gamma T^*M) \oplus i(\Gamma T^*M) \simeq \Omega^1(M) \oplus i\Omega^1(M)$. Tomando productos exteriores obtenemos las k−formas complejas $\Omega^k_{\mathbb{C}}(M) = \Gamma(\Lambda^k T^*_{\mathbb{C}}M) \simeq \Omega^k(M) \oplus i\Omega^k(M)$, y haciendo producto tensorial con $T_{\mathbb{C}}M$ obtenemos las p−formas complejas valuadas vectoriales, $\Omega^p_{\mathbb{C}}(M;TM) = \Gamma(\Lambda^p T^*_{\mathbb{C}}M \otimes T_{\mathbb{C}}M)$. Denotaremos $\Omega_{\mathbb{C}}(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k_{\mathbb{C}}(M)$.

Con estas nociones, las definiciones de endomorfismo graduado, su conmutador, operador diferencial, derivación, inserción, corchete de Richardson-Nijenhuis y sus resultados dados en la sección anterior se pueden generalizar. Además, el corchete de Lie de campos vectoriales en M puede extenderse por $\mathbb{C}-$linealidad a campos vectoriales complejos; lo mismo ocurre con la diferencial exterior d, la cual puede extenderse por $\mathbb{C}-$linealidad a una derivación $\mathrm{d} \in Der^1\, \Omega_{\mathbb{C}}(M)$, con esto, también la definición de derivada de Lie , el corchete de Frölicher-Nijenhuis y la torsión de Nijenhuis se generalizan al caso complejo y lo que nos interesa enunciar es el siguiente resultado:

Teorema 1.25 (Frölicher-Nijenhuis complejo)**.** *Sea $D \in Der^k\, \Omega_{\mathbb{C}}(M)$. Entonces, existe una única pareja (K, L), $K \in \Omega^k_{\mathbb{C}}(M; TM)$ y $L \in \Omega^{k+1}_{\mathbb{C}}(M; TM)$, tal que*

$$D = \mathcal{L}_K + \imath_L.$$

La prueba es análoga a la del Teorema 1.19.

1.3 Estructuras tangente en TM

Introduciremos el concepto de estructuras tangente y estructura tangente canónica, la cual nos será útil para construir algebroides de Lie en la Subsección 3.2.4. Sea M una variedad $2n$-dimensional.

Definición 1.26. *Una estructura casi-tangente en M es un endomorfismo de haces $J : TM \to TM$, tal que $\forall p \in M$, $rangJ(p) = n$ y $J^2 = 0$.*

Si J es una estructura casi-tangente en M entonces $ImJ(p) = KerJ(p)$ es un subhaz n-dimensional de TM.

Una estructura casi-tangente J se dice que es integrable si su torsión de Nijenhuis es cero,

$$T_J = 0. \tag{1.6}$$

En este caso se dice que J es una estructura tangente.

Consideremos ahora la variedad TM, en toda variedad de esta forma hay una estructura tangente canónica. Para definirla, se debe introducir la noción levantamiento vertical.

Sea $v \in TM$ y $\pi : TM \to M$ la proyección canónica con $\pi(v) = p$. Denotemos $\mathbb{V}_v = Ker\pi_{*v} \subset T_v(TM)$ con $\pi_{*v} : T_v(TM) \to T_{\pi(v)=p}M$. A $\mathbb{V}_v$ se le llama subespacio vertical a TM en $v \in TM$.

Definición 1.27. *El haz vertical de TM se define por*

$$\mathbb{V} := \bigcup_{v \in TM} \mathbb{V}_v.$$

.

Como $\pi : TM \to M$ submersión, π_* es sobreyectiva y $dim\mathbb{V}_v = n = dimM$. Luego, el haz vertical de TM es un haz vectorial de rango constante.

Definición 1.28. *Un campo vertical en TM es una sección $\mathcal{C}^\infty$ del haz vertical $\mathbb{V}$,*

$$X : TM \to \mathbb{V}.$$

Sean $p \in M$ y $v \in T_pM$ fijos. Definimos

$$\begin{array}{rcl} \ell_v : T_pM & \to & \mathbb{V}_v \subset TTM \\ \omega & \mapsto & \ell_v(\omega) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(v + t\omega) \end{array}$$

Veamos cómo levantar campos. Si $X \in \mathfrak{X}_M$, queremos definir el *levantamiento vertical*, $ver(X) \in \Gamma\mathbb{V}$

$$\begin{array}{rcl} ver : \Gamma(TM) & \to & \Gamma\mathbb{V} \\ X & \mapsto & ver(X), \end{array}$$

el cual es caracterizado por

$$ver(X)(df) = (X(f)) \circ \pi$$

para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, y donde df es considerada como función en TM. Localmente, para $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ con $\{x^i\}_{i=1}^n$ coordenadas locales en un abierto $U \subset M$ y $(x, y) = \{x^i, y^i\}$ las coordenadas adaptadas en $\tilde{U} = U \times \mathbb{R}^n \subset TM$, el levantamiento vertical de X es

$$ver(X) = (X^i \circ \pi)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Nos será útil recordar que si $\{\tilde{x}^i\}$ son coordenadas en $V \subset M$ y $\{\tilde{x}^i, \tilde{y}^i\}$ las coordenadas inducidas en $\tilde{V} = V \times \mathbb{R}^n \subset TM$ con $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, la regla de transición es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} &= T_i^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}, \\ \frac{\partial}{\partial y^i} &= T_i^j \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde $T_i^j(x) := \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}$.

Recordemos además que en TM tenemos un campo vectorial privilegiado, el *campo de Euler*,

$$C : TM \to TTM,$$

$$C_v := \ell_v(v), \tag{1.8}$$

que, en términos locales es $C_v = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ para $v \in T_pM$.

La estructura tangente canónica en TM, $J : TTM \to TTM$, se define mediante

$$\begin{aligned} J_v &: T_v(TN) \to \mathbb{V}_v, \\ J_v(w) &:= ver(\pi_{*v} w). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Y tiene la propiedad se ser la única estructura que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} TTM \arrow[d, "\pi_*"'] \arrow[dr, dashed, "J"] & \\ TM \arrow[r, "ver"'] & \mathbb{V}. \end{tikzcd}$$

En coordenadas locales es: $J = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$, es decir

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= \frac{\partial}{\partial y^i}, \\ J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Es claro que $J^2 = 0$, $RangJ = n$ e $ImJ = KerJ$. Probemos ahora que

$$T_J = 0. \tag{1.11}$$

Sean $X = A_i \frac{\partial}{\partial x^i} + B_j \frac{\partial}{\partial y^j}$ y $Y = C_p \frac{\partial}{\partial x^p} + D_q \frac{\partial}{\partial y^q}$. Calculemos la torsión de Nijenhuis de J actuando sobre ellos.

$$\begin{aligned} T_J(X,Y) &= J^2[X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY] + [JX,JY] \\ &= 0 - J[A_i \tfrac{\partial}{\partial y^i}, C_p \tfrac{\partial}{\partial x^p} + D_q \tfrac{\partial}{\partial y^q}] \\ &\quad -J[A_i \tfrac{\partial}{\partial x^i} + B_j \tfrac{\partial}{\partial y^j}, C_p \tfrac{\partial}{\partial y^p}] + [A_i \tfrac{\partial}{\partial y^i}, C_p \tfrac{\partial}{\partial y^p}] \\ &= -J[A_i \tfrac{\partial}{\partial y^i}, C_p \tfrac{\partial}{\partial x^p}] - J[A_i \tfrac{\partial}{\partial y^i}, D_q \tfrac{\partial}{\partial y^q}] \\ &\quad -J[A_i \tfrac{\partial}{\partial x^i}, C_p \tfrac{\partial}{\partial y^p}] - J[B_j \tfrac{\partial}{\partial y^j}, C_p \tfrac{\partial}{\partial y^p}] \\ &\quad +[A_i \tfrac{\partial}{\partial y^i}, C_p \tfrac{\partial}{\partial y^p}] \\ &= -J\left(A_i \tfrac{\partial C_p}{\partial y^i} \tfrac{\partial}{\partial x^p} - C_p \tfrac{\partial A_i}{\partial x^p} \tfrac{\partial}{\partial y^i} + A_i \tfrac{\partial D_q}{\partial y^i} \tfrac{\partial}{\partial y^q} - D_q \tfrac{\partial A_i}{\partial y^q} \tfrac{\partial}{\partial y^i}\right) \\ &\quad -J\left(A_i \tfrac{\partial C_p}{\partial x^i} \tfrac{\partial}{\partial y^p} - C_p \tfrac{\partial A_i}{\partial y^p} \tfrac{\partial}{\partial x^i} + B_j \tfrac{\partial C_p}{\partial y^j} \tfrac{\partial}{\partial y^p} - C_p \tfrac{\partial B_j}{\partial y^p} \tfrac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &\quad +A_i \tfrac{\partial C_p}{\partial y^i} \tfrac{\partial}{\partial y^p} - C_p \tfrac{\partial A_i}{\partial y^p} \tfrac{\partial}{\partial y^i} \\ &= -A_i \tfrac{\partial C_p}{\partial y^i} \tfrac{\partial}{\partial y^p} + C_p \tfrac{\partial A_i}{\partial y^p} \tfrac{\partial}{\partial y^i} + +A_i \tfrac{\partial C_p}{\partial y^i} \tfrac{\partial}{\partial y^p} - C_p \tfrac{\partial A_i}{\partial y^p} \tfrac{\partial}{\partial y^i} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, J es una estructura tangente en TTM.

1.4 Conexiones no lineales en TM

En esta sección comenzaremos con la definición de una conexión no lineal, veremos algunas propiedades y finalmente daremos las condiciones que debe cumplir una 1-forma valuada vectorial para que al sumarla a una conexión, el resultado vuelva a ser una conexión no lineal.

Definición 1.29. *Una conexión no lineal en TTM es una estructura casi-producto Γ (es decir, un morfismo de haces $\Gamma : TTM \to TTM$ que cumple $\Gamma^2 = Id$), tal que $\mathbb{V} = Ker(Id + \Gamma)$.*

Se tiene un resultado que es útil (ver, por ejemplo [10]).

Lema 1.30. *Γ es una conexión no lineal en TTM si y sólo si*

$$J \circ \Gamma = J \text{ y } \Gamma \circ J = -J,$$

donde J es la estructura tangente canónica (1.9).

Definición 1.31. *Si Γ es una conexión no lineal en TTM, entonces*

$$\mathbb{H} := Ker(Id - \Gamma) \tag{1.12}$$

es el haz horizontal asociado a Γ, es decir,

$$TTM = \mathbb{V} \oplus \mathbb{H}.$$

Luego, cada $X \in \Gamma(TTM)$ puede escribirse como $X = X^h + X^v$ donde X^h y X^v son secciones en los haces horizontal y vertical, respectivamente. Si $X^h = 0$, entonces X se llama *vertical* y si $X^v = 0$, entonces X se llama *horizontal*. Una conexión induce dos proyectores

$$h : TTM \to TTM, \ \ v : TTM \to TTM,$$

$$h = \frac{1}{2}(Id + \Gamma), \ \ v = \frac{1}{2}(Id - \Gamma) \tag{1.13}$$

los cuales satisfacen

$$h(X) = X^h, \ \ v(X) = X^v,$$

$$h^2 = h, \ \ v^2 = v, \ \ h \circ v = 0,$$

$$Kerh = Imv = \mathbb{V}, \ \ Imh = Kerv = \mathbb{H},$$

De manera local, si $\{x^i\}$ son coordenadas en un abierto $U \subset M$ y $\{x^i, y^i\}$ las coordenadas inducidas en TM, $\mathbb{H}$ se puede definir como

$$\mathbb{H} = span\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}\right\}, \tag{1.14}$$

donde

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\Gamma_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \tag{1.15}$$

$$\Gamma = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} - dy^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{1.16}$$

Es claro que $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ es base de $\Gamma(TTM)$ y su base dual es $\left\{dx^i, \delta y^j\right\}$, donde

$$\delta y^j := dy^j - \frac{1}{2}\Gamma_i^j dx^i.$$

Con esto, la conexión Γ toma la siguiente forma:

$$\Gamma = dx^i \otimes \frac{\delta}{\delta x^i} - \delta y^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{1.17}$$

En efecto,

$$\begin{array}{rcl} dxi \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} & = & dxi \otimes \frac{\delta}{\delta x^i} - \frac{1}{2}\Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}, \\ dy^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} & = & \delta y^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} + \frac{1}{2}\Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}, \end{array}$$

luego

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & = & dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} - dy^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} \\ & = & dx^i \otimes \frac{\delta}{\delta x^i} - \frac{1}{2}\Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} + \Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} \\ & & -\delta y^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} - \frac{1}{2}\Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} \\ & = & dx^i \otimes \frac{\delta}{\delta x^i} - \Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} + \Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} - \delta y^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} \\ & = & dx^i \otimes \frac{\delta}{\delta x^i} - \delta y^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}. \end{array}$$

Sea Γ una conexión no lineal en TTM y $\Delta \in \Omega^1(TM;TTM)$ una 1-forma valuada vectorial. Para que el endomorfismo de haces $\tilde{\Gamma} = \Gamma + \Delta$ sea una conexión no lineal, Δ debe satisfacer

$$Im\Delta \subseteq \mathbb{V} \text{ y } \mathbb{V} \subseteq Ker\Delta. \tag{1.18}$$

Veamos por qué. En coordenadas, Δ será

$$\Delta = A_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + B_j^\beta dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta} + C_k^\gamma dy^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^\gamma},$$

luego

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\Gamma} & = & dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + (\Gamma_i^j + B_i^j) dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} - dy^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} \\ & & +A_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + C_k^\gamma dy^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^\gamma}, \end{array}$$

por tanto, $A_i^\alpha = 0$, $C_k^\gamma = 0$ y $\Delta = B_j^\beta dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta}$, o equivalentemente,

$$\Delta = \Delta_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \tag{1.19}$$

Definición 1.32. *Una 1-forma vectorial, $\Delta \in \Omega^1(TM;TTM)$, se llama* 1-forma semibásica vectorial *si satisface* (1.18).

1.4.1 Conexiones y semisprays

Debido a que toda conexión induce un semispray, nos interesa saber cuándo para una conexión fija existe un semispray que la induzca.

Definición 1.33. *Un campo vectorial $S \in \mathfrak{X}_{TM}$ se llama semispray si*

$$J \circ S = C,$$

donde J es la estructura tangente canónica (1.9) *y C es el campo de Euler* (1.8)*.*

En coordenadas locales, un semispray tiene la siguiente expresión

$$S(x,y) = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + S^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Cada semispray S está asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, definidos por el sistema dinámico de S:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^i &= y^i \\ \dot{y}^i &= S^i(x,y) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \ddot{x} = S^i(x,\dot{x}).$$

El siguiente lema nos será de mucha utilidad.

Lema 1.34. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Todo semispray, S, induce una conexión definida por $\Gamma_S = -\mathcal{L}_S J$.*
2. *Toda conexión, Γ, tiene un semispray asociado ξ_Γ, definido por la condición $\xi_\Gamma = h(S)$, para cualquier semispray arbitrario S. Aquí h es el proyector definido por Γ en* (1.13)*.*

Para la prueba de la primera parte ver [10] y para la segunda [31].

Observación 2. *En el punto 2, S puede tomarse como $S_0 = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, un semispray local en un abierto $U \subset M$.*

Notemos que $\xi_\Gamma \in \Gamma(\mathbb{H})$ y que si $S = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} + S^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$, entonces Γ_S en coordenadas tiene la siguiente forma

$$\Gamma_S = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial S^\alpha}{\partial y^i} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} - dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{1.20}$$

Una primera pregunta natural es: Dado un semispray S, le asociamos una conexión, Γ_S, y a esa conexión le asociamos un semispray, ξ_{Γ_S}, ¿cuándo ξ_{Γ_S} y S coinciden?.

Un cálculo simple nos muestra el siguiente resultado.

Lema 1.35. *Dado un semispray S se tiene*

$$\xi_{\Gamma_S} = \frac{1}{2}(S - [S, C]).$$

Demostración. Sabemos que ξ_{Γ_S} es $h(S)$ con $h = \frac{1}{2}(Id + \Gamma_S)$. Así,

$$\begin{aligned} h(S) &= \tfrac{1}{2}(Id + \Gamma_S)(S) = \tfrac{1}{2}\left(Id - \mathcal{L}_S\right)(S) = \tfrac{1}{2}\left(S - \mathcal{L}_S(S)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(S - [S, J \circ S] + J[S, S]\right) = \tfrac{1}{2}\left(S - [S, C]\right). \end{aligned}$$

□

De este lema se sigue que $\xi_{\Gamma_S} = S$ si y sólo si $S = -[S, C]$, es decir, si y sólo si S es homogéneo de grado 2. De manera que es claro que esto no siempre sucede. La siguiente pregunta es: Dado S un semispray fijo, ¿cuándo existe una conexión no lineal $\tilde{\Gamma}$ en TTM tal que $\xi_{\tilde{\Gamma}} = S$?. La respuesta aparece en el siguiente resultado.

Teorema 1.36. *Dado un semispray S, existe una conexión no lineal $\tilde{\Gamma}$ en TTM tal que*

$$\xi_{\tilde{\Gamma}} = S \tag{1.21}$$

si y sólo si $S|_M = 0$.

Demostración. Por (1.19), sabemos que, de existir dicha conexión, será $\tilde{\Gamma} = \Gamma_S + \Delta$ con Δ una 1-forma semibásica.

Consideremos $S_0 = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, luego

$$\begin{aligned} \xi_{\tilde{\Gamma}} &= h(S_0) = \tfrac{1}{2}(Id + \tilde{\Gamma})(S_0) = \tfrac{1}{2}(Id + \Gamma_S + \Delta)(S_0) \\ &= \tfrac{1}{2}(Id + \Gamma_S)(S_0) + \tfrac{1}{2}\Delta(S_0) = \xi_{\Gamma_S} + \tfrac{1}{2}\Delta(S_0) = \tfrac{1}{2}(S - [S, C] + \Delta(S_0)). \end{aligned}$$

Como queremos $\xi_{\tilde{\Gamma}} = S$, entonces Δ debe cumplir:

$$\Delta(S_0) = S + [S, C]. \tag{1.22}$$

Sabemos que $\Delta(S_0) = \Delta_i^\alpha y^i \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ y como $S = S_0 + S^\alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ y $C = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, tenemos que

$$\begin{aligned} [S, C] &= [S_0, C] + [S, C] \\ &= [y^i \tfrac{\partial}{\partial x^i}, y^j \tfrac{\partial}{\partial y^j}] + [S^\alpha \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}, y^i \tfrac{\partial}{\partial y^i}] \\ &= -y^j \tfrac{\partial}{\partial x^j} + S^\alpha \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha} - y^j \tfrac{\partial S^\alpha}{\partial y^j} \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ &= -S_0 + S^\alpha \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha} - y^j \tfrac{\partial S^\alpha}{\partial y^j} \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S + [S, C] &= S_0 + S^\alpha \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha} - S_0 + S^\alpha \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha} - y^j \tfrac{\partial S^\alpha}{\partial y^j} \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ &= 2S^\alpha \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha} - y^j \tfrac{\partial S^\alpha}{\partial y^j} \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}, \end{aligned}$$

así que, Δ debe satisfacer

$$\Delta_i^\alpha y^i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = 2S^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} - y^j \frac{\partial S^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

o equivalentemente

$$\Delta_i^\alpha y^i = 2S^\alpha - y^j \frac{\partial S^\alpha}{\partial y^j}. \tag{1.23}$$

Ahora, notemos que $(S+[S,C])|_M = 2S^\alpha(x,0)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}|_M$ y $(\Delta(S_0))|_M = 0$, y deben coincidir, luego, debe ser $S^j(x,0) = 0$, es decir, $S|_M = 0$.

Usando la regla de transición para los coeficientes de la conexión no lineal definida por (1.21), se puede verificar que Δ es global. Por tanto $\tilde{\Gamma}$ está bien definida globalmente. □

Definición 1.37. *La conexión $\tilde{\Gamma}$ que satisface (1.21) se llama conexión adaptada a S.*

Veamos la forma que tiene la conexión adaptada $\tilde{\Gamma}$ en coordenadas. Como $S|_M = 0$, entonces

$$S^\alpha = y^j S_j^\alpha(x,y), \tag{1.24}$$

así que (de (1.23)):

$$\Delta_i^\alpha = S_i^\alpha - y^j \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial y^j} \text{ y } S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j S_j^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \tag{1.25}$$

además, la conexión asociada a S, dada por (1.20), es:

$$\Gamma_S = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + (S_i^\alpha + y^j \frac{\partial S_j^\alpha}{\partial y^i}) dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} - dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

De esta forma

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma_S + \Delta = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + (S_i^\alpha + y^j \frac{\partial S_j^\alpha}{\partial y^i} + S_i^\alpha - y^j \frac{\partial S_j^\alpha}{\partial y^i}) dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} - dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$$

y finalmente, la conexión adaptada a S toma la forma

$$\tilde{\Gamma} = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + 2S_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} - dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{1.26}$$

Observación 3. *Notemos que la conexión adaptada, $\tilde{\Gamma}$, a un semispray fijo S, tiene la siguiente interpretación geométrica: S es tangente a la distribución horizontal $\widetilde{\mathbb{H}}$ asociada a $\tilde{\Gamma}$, $S \in \Gamma\widetilde{\mathbb{H}}$. En particular, $\widetilde{\mathbb{H}}$ es invariante con respecto al flujo de S.*

Entonces se puede reformular el Teorema 1.36 de la siguiente manera.

Teorema 1.38. *Dado un semispray S, existe una conexión $\tilde{\Gamma}$ tal que S es tangente a la distribución horizontal $\tilde{\mathbb{H}}$ asociada a $\tilde{\Gamma}$ si y sólo si $S|_M = 0$.*

Capítulo 2

Correspondencia entre algebroides de Lie y operadores de cohomología

En este capítulo presentamos la correspondencia que existe entre algebroides de Lie y operadores de cohomología. Primero construiremos un operador de cohomología a partir de un algebroide de Lie dado y después haremos la construcción recíproca, es decir, empezaremos con un operador de cohomología y a partir de él diremos cómo son el ancla y el corchete del algebroide correspondiente.

2.1 De algebroides de Lie a operadores de cohomología

Empezaremos con un algebroide de Lie dado, con ayuda de su aplicación ancla y del corchete de secciones en el fibrado correspondiente definiremos un operador que probaremos que es de cohomología, llamado diferencial de De Rham del algebroide. Como ejemplo veremos que en el caso de que el algebroide de Lie es el trivial $(TM, Id, [\ ,\ ])$, entonces dicho operador es la diferencial exterior. Y finalmente nos ocuparemos de la descomposición de Frölicher-Nijenhuis de la diferencial de De Rham de un algebroide tanto en el caso general de un algebroide en un fibrado vectorial arbitrario E, como en el caso particular de $E = TM$.

2.1.1 Diferencial de De Rham del algebroide de Lie

Sea M una variedad diferencial y sea $E \to M$ un fibrado vectorial sobre M. Recordemos la siguiente definción.

Definición 2.1. *Un operador de cohomología en $E \to M$ es una derivación de grado 1 $D \in Der^1(\Gamma(\Lambda^\bullet E^*))$ tal que $D^2 = 0$.*

Supongamos que $(E, q, [\![,]\!])$ es un algebroide de Lie. Definimos un operador $D : \Gamma(\Lambda^p E^*) \to \Gamma(\Lambda^{p+1} E^*)$ mediante

$$\begin{cases} Df(A) = qA(f) \\ D\alpha(A,B) = qA(\alpha(B)) - qB(\alpha(A)) - \alpha([\![A,B]\!]), \end{cases} \tag{2.1.1}$$

para cualesquiera $f \in \mathcal{C}^\infty(M), \alpha \in \Gamma(\Lambda^1 E^*), A, B \in \Gamma E$. Veamos que estas ecuaciones son compatibles en el sentido de que queremos extenderlas para obtener una derivación. Sean $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^1 E^*)$ y $A, B \in \Gamma E$

$$\begin{aligned} D(f\alpha)(A,B) &= q(A)(f\alpha(B)) - q(B)(f\alpha(A)) - f\alpha([\![A,B]\!]) \\ &= q(A)(f)\alpha(B) + fq(A)(\alpha(B)) - q(B)(f)\alpha(A) \\ &\quad + fq(B)(\alpha(A)) - f\alpha([\![A,B]\!]) \\ &= Df \wedge \alpha(A,B) + fD\alpha(A,B), \end{aligned}$$

una vez comprobado esto, extendemos su acción a $\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$ como derivación de $\mathbb{Z}-$grado 1.

Una forma alternativa de definir el operador anterior es mediante la fórmula de Cartan:

$$\begin{aligned} D\alpha(X_1, \ldots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} q(X_i)(\alpha(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([\![X_i, X_j]\!], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1}) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

para $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k(E^*))$ y $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \Gamma E$.

Teorema 2.2. *El operador D (2.1.1) es un operador de cohomología en $E \to M$.*

Demostración. Primero que nada notemos que D^2 es derivación, luego, operador diferencial de primer orden, y como tal, es determinado por su acción en formas de grado menor o igual a 1. Sean $f \in \Lambda^0 E^*$ y $A, B \in \Gamma E$. De la fórmula (2.1.1) se sigue que

$$\begin{aligned}(D^2f)(A,B) &= D(Df)(A,B)\\ &= qA(Df(B)) - qB(Df(A)) - Df([\![A,B]\!])\\ &= qA(qB(f)) - qB(qA(f)) - Df([\![A,B]\!])\\ &= [qA,qB](f) - q([\![A,B]\!])(f)\\ &= ([qA,qB] - q([\![A,B]\!]))(f)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Análogamente, si $\alpha \in \Lambda^1 E^*$ y $A, B, C \in \Gamma E$, obtenemos la suma cíclica

$$(D^2\alpha)(A,B,C) = \underset{A,B,C}{\circlearrowleft} (qA((D\alpha)(B,C)) - (D\alpha)([\![A,B]\!],C)),$$

y otro cálculo largo pero sencillo nos muestra que esto se reduce a la identidad de Jacobi para $[\![\,,\,]\!]$:

$$\begin{aligned}D^2\alpha(A,B,C) &= q(A)(q(B)(\alpha(C)) - q(C)(\alpha(B)) - \alpha([\![B,C]\!]))\\ &\quad -q(B)(q(A)(\alpha(C)) - q(C)(\alpha(A)) - \alpha([\![A,C]\!]))\\ &\quad +q(C)(q(A)(\alpha(B)) - q(B)(\alpha(A)) - \alpha([\![A,B]\!]))\\ &\quad -(q([\![A,B]\!])(\alpha(C)) - q(C)(\alpha([\![A,B]\!])) - \alpha([\![[\![A,B]\!],C]\!]))\\ &\quad +q([\![A,C]\!])(\alpha(B)) - q(B)(\alpha([\![A,C]\!])) - \alpha([\![[\![A,C]\!],B]\!])\\ &\quad -(q([\![B,C]\!])(\alpha(A)) - q(A)(\alpha([\![B,C]\!])) - \alpha([\![[\![B,C]\!],A]\!]))\\ &= q(A)(q(B)(\alpha(C))) - q(A)(q(C)(\alpha(B)))\\ &\quad -q(B)(q(A)(\alpha(C))) + q(B)(q(C)(\alpha(A)))\\ &\quad +q(C)(q(A)(\alpha(B))) - q(C)(q(B)(\alpha(A)))\\ &\quad -q([\![A,B]\!])(\alpha(C)) + \alpha([\![[\![A,B]\!],C]\!]))\\ &\quad +q([\![A,C]\!])(\alpha(B)) - \alpha([\![[\![A,C]\!],B]\!]))\\ &\quad -q([\![B,C]\!])(\alpha(A)) + \alpha([\![[\![B,C]\!],A]\!]))\\ &= [q(A),q(B)](\alpha(C)) + [q(B),q(C)](\alpha(A)) + [q(C),q(A)](\alpha(B))\\ &\quad -q([\![A,B]\!])(\alpha(C)) - q([\![B,C]\!])(\alpha(A)) - q([\![C,A]\!])(\alpha(B))\\ &\quad +\alpha([\![[\![A,B]\!],C]\!])) - \alpha([\![[\![A,C]\!],B]\!])) + \alpha([\![[\![B,C]\!],A]\!]))\\ &= \alpha([\![[\![A,B]\!],C]\!] + [\![[\![B,C]\!],A]\!] + [\![[\![C,A]\!],B]\!])\\ &= \alpha(0) = 0\end{aligned}$$

□

La derivación D definida en el fibrado vectorial $E \to M$ por las fórmulas (2.1.1) es bien conocida (ver, por ejemplo, capítulo 7 en [22]), y llamada algunas veces diferencial de De Rham del algebroide de Lie. El siguiente ejemplo nos muestra el por qué de este nombre.

Ejemplo 2.3. *Sea $(TM, Id, [,])$ el algebroide de Lie trivial en TM. Por la Proposición 2.2, sabemos que éste induce un operador de cohomología D, utilizando la fórmula (2.1.2), obtenemos*

$$\begin{aligned} D\alpha(X_1,\ldots,X_{k+1}) =&(-1)^{i+1}X_i(\alpha(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{k+1})) \\ &+(-1)^{i+j}\alpha([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1}) \\ =&\mathrm{d}\alpha(X_1,\ldots,X_{k+1}), \end{aligned}$$

para $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $X_1,\ldots,X_{k+1} \in \mathfrak{X}_M$. Así que es claro que hemos recuperado la diferencial exterior, que da lugar a la cohomología de De Rham.

Veamos otro ejemplo un poco menos trivial.

Ejemplo 2.4. *Recordemos que toda variedad de Poisson, $(M, \{,\})$, induce un algebroide de Lie $(\Omega^1 M, q, [\![\,,\,]\!])$, con*

$$q(df) = ad_f,$$

donde $ad : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathfrak{X}_M$ y $ad(f)(g) = \{f,g\}$ para cualesquiera $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Y el corchete es dado por

$$[\![\alpha,\beta]\!] = \imath_{q(\alpha)}d\beta - \imath_{q(\beta)}d\alpha + d(\beta(q(\alpha)))$$

para $\alpha,\beta \in \Omega^1 M$.
El operador de cohomología dado por (2.1.2) será entonces:

$$\begin{aligned} DX(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+1}) =&(-1)^{i+1}q(\alpha_i)(X(\alpha_1,\ldots,\hat{\alpha}_i,\ldots,\alpha_{k+1})) \\ &+(-1)^{i+j}X([\![\alpha_i,\alpha_j]\!],\alpha_1,\ldots,\hat{\alpha}_i,\ldots,\hat{\alpha}_j,\ldots,\alpha_{k+1}) \end{aligned}$$

para $X \in \Gamma(\Lambda^k TM)$ y $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+1} \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$. En particular, si $X \in \Gamma(\Lambda^1 TM) = \mathfrak{X}_M$ y $\alpha_1 = df$, $\alpha_2 = dg$ con $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, tenemos

$$DX(df,dg) = \{f, X(g)\} - \{g, X(f)\} - X(\{f,g\}).$$

Notemos que el operador D (2.1.1) es una derivación de $\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$, así que puede descomponerse a la Frölicher-Nijenhuis. En la siguiente subsección veremos cómo es esta descomposición en un caso particular, pero instructivo.

2.1.2 Caso $E = TM$

Supongamos $E = TM$ y sea $(TM, q, [\![\,,\,]\!])$ un algebroide de Lie. Recordemos lo siguiente (ver [17]).

Definición 2.5. *Dada una operación bilineal $\circ$ en las secciones de un fibrado vectorial E , y un morfismo de fibrados $\varphi : \Gamma E \to \Gamma E$, el corchete deformado de la operación es dado por $A \circ_\varphi B := \varphi(A) \circ B + A \circ \varphi(B) - \varphi(A \circ B)$, para $A, B \in \Gamma E$.*

En nuestro caso, la operación bilineal en ΓTM es $[\![\, ,]\!]$ y el morfismo q, así que el corchete deformado del corchete de Lie por la aplicación ancla del algebroide es

$$[X,Y]_q = [qX,Y] + [X,qY] - q[X,Y], \tag{2.1.3}$$

para $X, Y \in \Gamma(TM)$.

El siguiente resultado es consecuencia directa de la descomposición de Frölicher-Nijenhuis para D.

Proposición 2.6. *Sea $(TM, q, [\![\, ,]\!])$ un algebroide de Lie. Su diferencial de De Rham D (2.1.1) se puede expresar de la forma*

$$D = \mathcal{L}_q + \imath_L$$

donde

$$L(X,Y) = [X,Y]_q - [\![X,Y]\!]. \tag{2.1.4}$$

Demostración. Ciertamente, tenemos que K (dado por el Teorema 1.19) es

$$KX(f) = Df(X) = qX(f),$$

para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}_M$, y también

$$(D - \mathcal{L}_q)(\alpha)(X,Y) = (i_L\alpha)(X,Y) = \alpha(L(X,Y)). \tag{2.1.5}$$

Esto es suficiente para caracterizar $\imath_L$, porque es determinado por su acción en $1-$formas . Desarrollemos el lado izquierdo de (2.1.5),

$$(D\alpha)(X,Y) = qX(\alpha(Y)) - qY(\alpha(X)) - \alpha([\![X,Y]\!]).$$

De la definición de $\mathcal{L}_q\alpha$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_q\alpha)(X,Y)\\
&= qX(\alpha(Y)) - \alpha([qX,Y]) - qY(\alpha(X)) + \alpha([qY,X]) + \alpha(q[X,Y])\\
&= qX(\alpha(Y)) - qY(\alpha(X)) - \alpha([qX,Y]) - \alpha([Xq,Y]) + \alpha(q[X,Y]).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha(L(X,Y)) &= qX(\alpha(Y)) - qY(\alpha(X)) - \alpha([\![X,Y]\!]) - qX(\alpha(Y))\\
&\quad + qY(\alpha(X)) + \alpha([qX,Y]) + \alpha([Xq,Y]) - \alpha(q[X,Y])\\
&= \alpha([qX,Y] + [X,qY] - q[X,Y] - [\![X,Y]\!]).
\end{aligned}$$

Como esto es válido para $\alpha \in \Omega^1(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}_M$ arbitrarios, tenemos (2.1.4). $\square$

Veamos un ejemplo de esta descomposición.

Ejemplo 2.7. *Sea $(TM, Id, [,])$ el algebroide de Lie trivial en TM. Por la Proposición 2.6, la descomposición de su diferencial de De Rham (Teorema 1.19) está caracterizada por*

$$K = Id,$$

y

$$L(X,Y) = [X,Y]_{Id} - [X,Y] = 0,$$

es decir $D = \mathcal{L}_{Id}$. Lo cual era de esperarse, pues ya vimos que, en este caso, D es la diferencial exterior d.

2.1.3 Descomposición de Frölicher-Nijenhuis de un operador de cohomología en haces vectoriales arbitrarios

Sea $E \to M$ un haz vectorial sobre una variedad diferencial M. La cuestión ahora es cómo obtener un resultado análogo al de la subsección anterior para un algebroide de Lie arbitrario $(E, q, [\![,]\!])$, donde $D \in Der\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$. El problema con el que nos enfrentamos es que no tenemos un operador como la derivada de Lie a nuestra disposición, para resolverlo procederemos fijando una conexión lineal ∇ en E.

Sea $\{s_a\}_{a=1}^r$ (con $r = \text{rank}E$) una base de secciones de ΓE y sea $\{\eta^b\}_{b=1}^r$ la base dual. También sea $\{\partial_i\}_{i=1}^m$ una base local de campos vectoriales en M (con $\dim M = m$). Entonces, todo $K \in \Gamma(\Lambda E^* \otimes TM)$ se puede expresar como $K = K_c^j \eta^c \otimes \partial_j$. Rcordemos que, podemos definir $\nabla_K : \Gamma(\Lambda E^*) \to \Gamma(\Lambda E^*)$ mediante

$$\nabla_K = \nabla_{K_c^j \eta^c \otimes \partial_j} := K_c^j \eta^c \wedge \nabla_{\partial_j}. \tag{2.1.6}$$

El siguiente resultado nos será útil para cálculos posteriores.

Lema 2.8. *Sea $K : E \to TM$ un morfismo de fibrados vectoriales sobre M, y sea ∇ una conexión en E. Si $\alpha \in \Gamma E^*$ y $A, B \in \Gamma E$, entonces,*

$$(\nabla_K \alpha)(A,B) = KA(\alpha(B)) - \alpha(\nabla_{KA} B) - KB(\alpha(A)) + \alpha(\nabla_{KB} A).$$

Demostración. Consideremos una base de secciones de ΓE, $\{s_a\}_{a=1}^r$ (con $r = \text{rank}E$), y sea $\{\eta^b\}_{b=1}^r$ la base dual. También sea $\{\partial_i\}_{i=1}^m$ una base local de campos vectoriales en M (con $\dim M = m$). Entonces, tenemos expresiones locales $A = A^a s_a$, $B = B^b s_b$, y $K = K_c^j \eta^c \otimes \partial_j$. Podemos escribir

$$\nabla_K = \nabla_{K_c^j \eta^c \otimes \partial_j} = K_c^j \eta^c \wedge \nabla_{\partial_j},$$

y calcular

$$\begin{aligned}
(\nabla_K \alpha)(A,B) &= (K^j_c \eta^c \wedge \nabla_{\partial_j}\alpha)(A,B) \\
&= K^j_c(\eta^c(A)(\nabla_{\partial_j}\alpha)(B) - \eta^c(B)(\nabla_{\partial_j}\alpha)(A)) \\
&= K^j_c(A^c(\nabla_{\partial_j}(\alpha(B)) - \alpha(\nabla_{\partial_j}B)) - B^c(\nabla_{\partial_j}(\alpha(A)) - \alpha(\nabla_{\partial_j}A))) \\
&= \nabla_{K^j_c A^c \partial_j}(\alpha(B)) - K^j_c A^c \alpha(\nabla_{\partial_j}B) - \nabla_{K^j_c B^c \partial_j}(\alpha(A)) + K^j_c B^c \alpha(\nabla_{\partial_j}A).
\end{aligned}$$

Notemos que $KA = K^j_c A^c \partial_j$, por lo que podemos reacomodar la expresión anterior, usando también la $\mathcal{C}^\infty(M)-$linealidad de α, como

$$\begin{aligned}
(\nabla_K \alpha)(A,B) &= \nabla_{KA}(\alpha(B)) - \alpha(\nabla_{KA}B) - \nabla_{KB}(\alpha(A)) - \alpha(\nabla_{KB}A) \\
&= KA(\alpha(B)) - KB(\alpha(A)) + \alpha(\nabla_{KB}A - \nabla_{KA}B).
\end{aligned}$$

□

Una prueba análoga a la del teorema clásico de Frölicher-Nijenhuis clásico (Teorema 1.19), nos da el siguiente resultado.

Teorema 2.9. *Sea $\pi : E \to M$ un haz vectorial sobre la variedad M. Sea $D \in \mathrm{Der}^k\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$, y sea ∇ una conexión lineal en E. Entonces, existen unos únicos campos tensoriales $K \in \Gamma(E^* \otimes TM)$ y $L \in \Gamma(\Lambda^{k+1}E^* \otimes E)$, tales que*

$$D = \nabla_K + \imath_L. \tag{2.1.7}$$

Demostración. Supongamos que D es una derivación de grado k. Sean $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in \Gamma(E)$ secciones. La aplicación

$$f \to (Df)(\alpha^1, \ldots, \alpha^k),$$

con $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, es una derivación del álgebra de funciones en M. Por lo que define un campo vectorial en M, que denotaremos por

$$K(\alpha^1, \ldots, \alpha^k).$$

Ahora, la aplicación de $\Gamma(E) \times \cdots \times \Gamma(E)$ a $\mathfrak{X}(M)$ definida por

$$(\alpha^1, \ldots, \alpha^k) \to K(\alpha^1, \ldots, \alpha^k)$$

es $\mathcal{C}^\infty(M)-$lineal y antisimétrica, por lo tanto $K \in \Gamma(\Lambda^k F \otimes TM)$, la cual satisface

$$\nabla_K f = Df$$

para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. De esta forma, el operador $D - \nabla_K$ es una derivación de grado k que actúa trivialmente en $\mathcal{C}^\infty(M)$. Por lo cual es un endomorfismo

$\mathcal{C}^\infty(M)-$lineal de $\Gamma(\Lambda E^*)$ que es determinado por su acción en secciones de grado 1. Entonces, si $s \in \Gamma(E^*)$, la aplicación

$$s \to (D - \nabla_K)s$$

define un morfismo de $\Gamma(E^*)$ en $\Gamma(\Lambda^{k+1}E^*)$ así que existe una sección $L \in \Gamma(\Lambda^{k+1}E^* \otimes E)$ tal que $(D - \nabla_K)s = \imath_L s$. El operador $\imath_L$ es una derivación de grado k que se anula en $\mathcal{C}^\infty(M)$ y que actúa como $D - \nabla_K$ en las secciones de F. Entonces,

$$D = \nabla_K + \imath_L.$$

□

Notemos que, cuando tenemos un algebroide de Lie $(E, q, [\![\ ,\ ]\!])$, $K : \Gamma E \to \Gamma TM$ es tal que, para cualesquiera $A \in \Gamma E$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$K(A)(f) = Df(A) = qA(f), \tag{2.1.8}$$

así $K = q$, como antes.

Observación 4. *En el caso particular de $E = TM$, tenemos dos descomposiciones, una proveniente del Teorema 1.19, que es $D = \mathcal{L}_{\tilde{K}} + \imath_{\tilde{L}}$, para algunos $\tilde{K} \in \Omega^k(M;TM)$, $\tilde{L} \in \Omega^{k+1}(M;TM)$, y otra proveniente del Teorema 2.9, $D = \nabla_K + \imath_L$, donde, otra vez $K \in \Omega^k(M;TM)$, $L \in \Omega^{k+1}(M;TM)$. Es fácil ver que ambas están relacionadas mediante*

$$\nabla_K = \mathcal{L}_K - \imath_{\nabla_K},$$

así $\tilde{K} = K$ y $\tilde{L} = L - \nabla_K$.

Ahora, podemos conocer a L en la descomposición (2.1.7). Empecemos con:

$$(D - \nabla_q)(\alpha)(A, B) = (\imath_L \alpha)(A, B) = \alpha(L(A, B)).$$

Usando la ecuación (2.1.1),

$$(D\alpha)(A, B) = qA(\alpha(B)) - qB(\alpha(A)) - \alpha([\![A, B]\!]),$$

Por el Lema 2.8

$$\nabla_q \alpha(A, B) = qA(\alpha(B)) - \alpha(\nabla_{qA} B) - qB(\alpha(A)) + \alpha(\nabla_{qB} A).$$

Así,

$$\alpha(L(A, B)) = (D - \nabla_q)(\alpha)(A, B) = \alpha(\nabla_{qA} B - \nabla_{qB} A - [\![A, B]\!]).$$

Por lo tanto:

$$L(A,B) = \nabla_{qA}B - \nabla_{qB}A - [\![A,B]\!]. \tag{2.1.9}$$

Recordemos ahora la noción de E-conexiones. Sea $(E, q, [\![\, , \,]\!])$ un algebroide de Lie sobre M. Sea $V \to M$ otro haz vectorial sobre M. Una $E-$conexión en V es una aplicación $\mathbb{R}-$bilineal $\delta : \Gamma E \times \Gamma V \to \Gamma V$, cuya acción se denota $\delta(A,s) = \delta_A s$, tal que, para cualquier $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\delta_{fA}s = f\delta_A s,$$
$$\delta_A(fs) = (qA)(f)s + f\delta_A s.$$

Una $E-$conexión es simplemente una $E-$conexión en E mismo (ver [13, 22, 2] para referencias de conexiones en algebroides de Lie y sus aplicaciones). En este caso, es posible definir la torsión de δ como la $2-$forma $E-$valuada $\mathrm{Tor}\delta \in \Omega^2(E; E)$ dada por la expresión usual[1], pero usando el corchete del algebroide de Lie en lugar del corchete de Lie:

$$\mathrm{Tor}\,\delta(A,B) := \delta_A B - \delta_B A - [\![A,B]\!].$$

Notemos que cada conexión lineal ∇ en E determina una $E-$conexión δ^∇. Simplemente definiendo

$$\delta^\nabla_A B := \nabla_{qA}B. \tag{2.1.10}$$

La torsión de esta conexión es entonces

$$\mathrm{Tor}\,\delta^\nabla(A,B) = \nabla_{qA}B - \nabla_{qB}A - [\![A,B]\!],$$

que es precisamente nuestra expresión (2.1.9).

Resumimos los cálculos anteriores en el siguiente resultado.

Teorema 2.10. *Sea $(E, q, [\![\, , \,]\!])$ un algebroide de Lie y $D \in \mathrm{Der}\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$ su diferencial de De Rham, definida en (2.1.1). Entonces, dada una conexión lineal ∇ en E, D admite la siguiente descomposición*

$$D = \nabla_q + \imath_{L^\nabla},$$

donde q es el ancla del algebroide y $L^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2 E^* \otimes E)$ es la torsión de la $E-$conexión δ^∇ (2.1.10), dada por

$$L^\nabla(A,B) = \nabla_{qA}B - \nabla_{qB}A - [\![A,B]\!],$$

para $A, B \in \Gamma E$.

---

[1] Recordemos que cuando se tiene una conexión lineal $\nabla : \Gamma TM \times \Gamma TM \to \Gamma TM$, dados $A, B \in \Gamma TM$ se define $Tor\nabla(A,B) := \nabla_A B - \nabla_B A - [A,B]$.

En el caso particular de un algebroide de Lie en el haz tangente, se puede reescribir el resultado anterior, y nos ofrece una interpretación alternativa del corchete deformado $[X,Y]_q$ en términos de la torsión de la $TM-$conexión δ^∇ en (2.1.10). Para esto, observemos que si $E = TM$, entonces, dada cualquier conexión lineal simétrica ∇ en TM, la torisón de la $TM-$conexión correspondiente, δ^∇, es dada por

$$\begin{aligned}\operatorname{Tor}\delta^\nabla =& L^\nabla(X,Y)\\ =& \nabla_{qX}Y - \nabla_{qY}X - [\![X,Y]\!]\\ =& [X,Y]_q + (\nabla_Y q)(X) - (\nabla_X q)(Y) - [\![X,Y]\!],\end{aligned}$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}_M$.

2.2 De operadores de cohomología a algebroides de Lie

Empezaremos con un operador de cohomología en las secciones del álgebra exterior del dual de un haz vectorial arbitrario, a partir de él definiremos una aplicación de las secciones del haz con el que iniciamos al haz tangente de la variedad base, y un corchete en las secciones del haz inicial, que será un corchete de Lie y que junto con la aplicación anterior conformarán una estructura de algebroide de Lie. Después nos enfocaremos en la estructura de dicho algebroide cuando el haz inicial es un haz tengente. Y finalmente veremos algunos ejemplos.

2.2.1 Resultado principal

Supongamos que tenemos un haz vectorial $\pi : E \to M$, y una derivación $D \in \operatorname{Der}\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$ tal que $D^2 = 0$. Entonces, podemos definir una aplicación $q : \Gamma E \to \Gamma TM$ de la siguiente manera,

$$q(A)(f) := Df(A), \tag{2.2.1}$$

para cualesquiera $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $A \in \Gamma E$.

Definimos un corchete en las secciones de E de la siguiente forma: si $A, B \in \Gamma E$, entonces su corchete $[\![A,B]\!]$ es la única sección de E que satisface

$$\alpha([\![A,B]\!]) = D(\alpha(B))(A) - D(\alpha(A))(B) - D\alpha(A,B), \tag{2.2.2}$$

para cualquier $\alpha \in \Gamma E^*$. De manera que se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.11. *El triple* $(E, q, [\![\ ,\ ]\!])$*, definido por* (2.2.1) *y* (2.2.2) *es un algebroide de Lie.*

Demostración. Probemos que q es un morfismo de $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulos que satisface $q([\![A,B]\!]) = [q(A), q(B)]$ $\forall A, B \in \Gamma E$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
q([\![A,B]\!])(f) &= Df([\![A,B]\!]) \\
&= D(Df(B))(A) - D(Df(A))(B) - D(Df)(A,B) \\
&= D(q(B)(f))(A) - D(q(A)(f))(B) \\
&= q(A)(q(B)(f)) - q(B)(q(A)(f)) \\
&= [q(A), q(B)](f).
\end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

La $\mathbb{R}-$bilinealidad y la antisimetría del corchete son claras. Sólo resta probar la identidad de Jacobi. Teniendo en cuenta que D es un operador de cohomología y usando la propiedad probada anteriormente, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= D^2\alpha(A,B,C) \\
&= \underset{A,B,C}{\circlearrowleft} (D\alpha(A, ([\![B,C]\!]) + D(D\alpha(B,C))(A)) \\
&= \underset{A,B,C}{\circlearrowleft} (D(D\alpha(B,C))(A)) - D\alpha(([\![B,C]\!], A)) \\
&= \underset{A,B,C}{\circlearrowleft} (D(D(\alpha(C))(B))(A) - D(D(\alpha(B))(C))(A) - D(\alpha([\![B,C]\!]))(A) \\
&= -D(\alpha(C))([\![A,B]\!]) + D(\alpha([\![A,B]\!]))(C) + \alpha([\![([\![A,B]\!], C]\!])) \\
&= q(A)(q(B)(\alpha(C))) - q(A)(q(C)(\alpha(B))) - q(A)(\alpha([\![B,C]\!])) \\
&\quad -q([\![A,B]\!])(\alpha(C)) + q(C)(\alpha([\![A,B]\!])) + \alpha([\![[\![A,B]\!], C]\!]) \\
&\quad +q(B)(q(C)(\alpha(A))) - q(B)(q(A)(\alpha(C))) - q(B)(\alpha([\![C,A]\!])) \\
&\quad -q([\![B,C]\!])(\alpha(A)) + q(A)(\alpha([\![B,C]\!])) + \alpha([\![[\![B,C]\!], A]\!]) \\
&\quad +q(C)(q(A)(\alpha(B))) - q(C)(q(B)(\alpha(A))) - q(C)(\alpha([\![A,B]\!])) \\
&\quad -q([\![C,A]\!])(\alpha(B)) + q(B)(\alpha([\![C,A]\!])) + \alpha([\![[\![C,A]\!], B]\!]) \\
&= [q(A), q(B)](\alpha(C)) + [q(B), q(C)](\alpha(A)) + [q(C), q(A)](\alpha(C)) \\
&\quad -q([\![A,B]\!])(\alpha(C)) - q([\![B,C]\!])(\alpha(A)) - q([\![C,A]\!])(\alpha(B)) \\
&\quad +\alpha([\![[\![A,B]\!], C]\!] + \alpha([\![[\![B,C]\!], A]\!] + \alpha([\![[\![C,A]\!], B]\!] \\
&= \underset{A,B,C}{\circlearrowleft} \alpha([\![[\![A,B]\!], C]\!]).
\end{aligned}$$

Así $(\Gamma E, [\![\ ,\ ]\!])$ es álgebra de Lie. Adicionalmente, con respecto a la estructura de $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo se cumple la regla de Leibniz, es decir, si $A, B \in \Gamma E$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$[\![A, fB]\!] = q(A)(f)B + f[\![A,B]\!]$$

Esto es así, pues para toda $\alpha \in \Gamma E^*$ se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha([\![A, fB]\!]) &= D(\alpha(fB))(A) - D(\alpha(A))(fB) - D\alpha(A, fB) \\
&= D(f\alpha(B))(A) - fD(\alpha(A))(B) - fD\alpha(A, B) \\
&= Df(A)\alpha(B) + fD(\alpha(A))(B) - fD(\alpha(A))(B) - fD\alpha(A, B) \\
&= q(A)(f)\alpha(B) + f\alpha([\![A, B]\!]) \\
&= \alpha(q(A)(f)B + f[\![A, B]\!]).
\end{aligned}$$

□

Se sigue de los teoremas 2.2 y 2.11 la siguiente consecuencia importante

Corolario 2.12. *Existe una correspondencia uno a uno entre algebroides de Lie en E y operadores de cohomología en $\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$.*

Para distintas versiones de este resultado ver [20] y [6].

2.2.2 Caso $E = TM$

Vamos a profundizar en la estructura de este algebroide de Lie cuando $E = TM$. En este caso, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.13. *Sea D una derivación, $D \in \mathrm{Der}\Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$, tal que $D^2 = 0$, luego, tiene una descomposición de Frölicher-Nijenhuis $D = \mathcal{L}_K + \imath_L$, donde $K \in \Omega^1(M; TM)$ y $L \in \Omega^2(M; TM)$. Entonces, el triple $(TM, q, [\![\,,\,]\!])$ es un algebroide de Lie con*

$$q = K$$

y

$$[\![X, Y]\!] = [X, Y]_K - L(X, Y), \tag{2.2.3}$$

Demostración. Por la definición de la aplicación ancla tenemos

$$\begin{aligned}
Df(X) &= (\mathcal{L}_K + \imath_L)(f)(X) \\
&= \mathcal{L}_K(f)(X) \\
&= K(f)(X)
\end{aligned}$$

para $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}_M$, luego $q = K$.

La fórmula (2.2.3) puede ser deducida observando que D es precisamente el operador asociado al algebroide de Lie mediante la construcción en la Proposición 2.6. □

2.2.3 Ejemplos

En esta sección veremos algunos ejemplos de algebroides de Lie construidos a partir de operadores de cohomología con algunas características particulares.

Notemos que, como la aplicación ancla de un algebroide de Lie $(E, K, [\![\ ,\ ]\!])$ es, en particular, un morfismo de álgebras de Lie, la distribución que induce es involutiva, pues $[KX, KY] = K[\![X, Y]\!] \in ImK$ para todo $X, Y \in \Gamma E$.

Tensor de Nijenhuis

Cuando la torsión de Nijenhuis de K es nula, entonces $[\ ,\ ]_K$ es un corchete de Lie (ver, por ejemplo, [16]). Tomando la acción de K en ambos lados de (2.2.3), obtenemos

$$KL(X, Y) = K[KX, Y] + K[X, KY] - K^2[X, Y] - K[\![X, Y]\!].$$

Pero, como ya sabemos, $K = q$ es un morfismo de álgebras de Lie, luego

$$[KX, KY] - K[KX, Y] - K[X, KY] + K^2[X, Y] = -KL(X, Y),$$

que, en términos de la torsión de Nijenhuis de K, significa

$$T_K(X, Y) = -KL(X, Y). \tag{2.2.4}$$

Esta expresión nos permite probar el siguiente resultado.

Proposición 2.14. *Sea $K \in \Omega^1(M; TM)$. Entonces, la derivación $D = \mathcal{L}_K$ induce una estructura de algebroide de Lie en TM con aplicación ancla $q = K$ y corchete*

$$[X, Y]_K = [KX, Y] + [X, KY] - K[X, Y],$$

si y sólo si K es integrable (i.e, $T_K = 0$).

Demostración. Por el Teorema 2.11, lo que tenemos que probar es que $D = \mathcal{L}_K$ es un operador de cohomología si y sólo si K es integrable.

La condición $T_K = 0$ se sigue de (2.2.4). Por otro lado, la suficiencia es garantizada por

$$D^2 \quad = \quad \tfrac{1}{2}[D, D] = \tfrac{1}{2}[\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K] = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_{[K,K]_{FN}} = \mathcal{L}_{T_K} = 0.$$

□

Observación 5. *La parte 'si' de esta Proposición está dada como Teorema 3.7 en [17] y como ejercicio 40 en [5].*

Recordemos que, dado un morfismo de haces $N : TM \to TM$, cuando $T_N = 0$, N se llama tensor de Nijenhuis. Por la Proposición 2.14, sabemos que todo tensor de Nijenhuis induce un algebroide de Lie, luego, cualquier estructura compleja ($K^2 = -I$), estructura tangente ($K^2 = 0$) o estructura producto ($K^2 = I$), define un algebroide de Lie en TM con aplicación ancla K y corchete $[\ ,\ ]_K$.

Endomorfismo invertible

Veamos qué sucede cuando el término $L \neq 0$ no es trivial. Seguiremos pidiendo que $D = \mathcal{L}_K + \imath_L$ sea de cuadrado cero. Lo haremos en dos pasos, primero asumiendo que K es invertible.

Si $K : \Gamma TM \to \Gamma TM$ es un endomorfismo invertible, definimos la $2-$forma valuada vectorial $L \in \Omega^2(M; TM)$ mediante

$$L(X, Y) := -K^{-1}T_K(X, Y), \tag{2.2.5}$$

para cualesquiera $X, Y \in \Gamma TM$, y el corchete $[\![\ ,\ ]\!] : \Gamma TM \to \Gamma TM$ como

$$[\![X, Y]\!] := [X, Y]_K + K^{-1}T_K(X, Y), \tag{2.2.6}$$

para $X, Y \in \Gamma TM$.

Lema 2.15. *El corchete* (4.1.3) *satisface*

$$[\![X, Y]\!] = K^{-1}[KX, KY].$$

Demostración. Es un cálculo sencillo:

$$\begin{aligned}
[\![X, Y]\!] =& [X, Y]_K + K^{-1}T_K(X, Y) \\
=& [KX, Y] + [X, KY] - K[X, Y] \\
& + K^{-1}([KX, KY] - K[KX, Y] - K[X, KY] + K^2[X, Y]) \\
=& K^{-1}[KX, KY].
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.16. *El triple* $(TM, K, [\![\ ,\ ]\!])$*, con el corchete definido en* (2.2.6)*, es un algebroide de Lie.*

Demostración. Que $(\Gamma TM, [\![\ ,\ ]\!])$ es un álgebra de Lie es inmediato, (la identidad de Jacobi resulta de aplicar el Lema 2.15), y K es un morfismo de $\mathcal{C}^\infty(M)-$móodulos, así que sólo necesitamos probar la regla de Leibniz:

$$\begin{aligned}
[\![X, fY]\!] &= [X, fY]_K + K^{-1}T_K(fX, Y) \\
&= [KX, fY] + [X, fKY] - K[X, fY] + fK^{-1}T_K(X, Y) \\
&= f[X, Y]_K + KX(f)Y + X(f)KY - X(f)KY + fK^{-1}T_K(X, Y) \\
&= f[\![X, Y]\!] + KX(f)Y.
\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición nos dice que todo algebroide de Lie inducido por una endomorfismo invertible es isomorfo al algebroide trivial.

Proposición 2.17. *Los algebroides de Lie* $(TM, K, [\![\ ,\ ]\!])$ *(dados por la proposición 2.16) y el trivial* $(TM, Id, [\ ,\ ])$ *son isomorfos.*

Demostración. El isomorfismo deseado es $\phi = K^{-1} : \Gamma TM \to \Gamma TM$, porque

$$K \circ \phi = K \circ K^{-1} = Id\,,$$

y

$$\phi([X, Y]) = K^{-1}([X, Y]) = K^{-1}([K \circ K^{-1}(X), K \circ K^{-1}(Y)]) = [\![\phi(X), \phi(Y)]\!]$$

por el Lema 2.15. □

Resumiendo, obtenemos el siguiente resultado que, en particular, puede ser aplicado a estructuras casi-complejas o casi-producto.

Teorema 2.18. *Sea* $K : TM \to TM$ *un morfismo invertible de haces vectoriales. Entonces, una derivación de la forma*

$$D = \mathcal{L}_K + \imath_L \in \mathrm{Der}^1\Omega(M),$$

(con $L \in \Omega^2(M; TM)$*) es de cohomología si y sólo si*

$$L = -K^{-1}T_K.$$

Mas aún, la estructura de algebroide de Lie en TM *determinada por* D *es isomorfa a la trivial.*

Capítulo 3

Algebroides de Lie asociados a endomorfismos idempotentes

En el siguiente paso, consideraremos la situación general de una derivación de $\Omega(M)$ de $\mathbb{Z}-$grado 1, $D = \mathcal{L}_K + \imath_L$, donde K no necesariamente es invertible. Trataremos de ver cuando D es un operador de cohomología para después estudiar la estructura de algebroide de Lie inducida por el.

3.1 Ecuaciones de cohomología

Sea D una derivación de $\mathbb{Z}-$grado 1, con descomposición de Frölicher-Nijenhuis $D = \mathcal{L}_K + \imath_L$ donde K es un endomorfismo de ΓTM y L una 2-forma valuada vectorial. El propósito es encontrar bajo qué condiciones para L y K la derivación define un algebroide de Lie. Como ya se mencionó, lo haremos viendo cuándo D es un operador de cohomología.

Teorema 3.1. *Sean K un endomorfismo de ΓTM y L una 2-forma valuada vectorial. Entonces la derivación $D = \mathcal{L}_K + \imath_L$ es un operador de cohomología (i.e $D^2 = 0$) si y sólo si K y L satisfacen las siguientes ecuaciones*

$$\frac{1}{2}[K, K]_{FN} + \imath_L K = 0, \tag{3.1.1}$$

$$[K, L]_{FN} + \frac{1}{2}[L, L]_{RN} = 0. \tag{3.1.2}$$

Demostración. Por las definiciones de los corchetes de Frölicher-Nijenhuis y Richardson-Nijenhuis, la linealidad del conmutador graduado de endomorfismos y la Proposición 1.24 tenemos

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{2}[D, D] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}_K + \imath_L, \mathcal{L}_K + \imath_L] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_{[K,K]_{FN}} + \imath_{[K,L]_{FN}} + \mathcal{L}_{\imath_L K} + \frac{1}{2}\imath_{[L,L]_{RN}} \\ &= \mathcal{L}_{\frac{1}{2}[K,K]_{FN} + \imath_L K} + \imath_{[K,L]_{FN} + \frac{1}{2}[L,L]_{RN}}, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a (3.1.1) y (3.1.2). □

La primera de estas condiciones (3.1.1) ya la conocíamos, viene de imponer que el corchete del algebroide de Lie debe ser de la forma $[\![X, Y]\!] = [X, Y]_K - L(X, Y)$ y no es más que la ecuación (2.2.4). Un cálculo sencillo muestra que, de hecho, también es equivalente a $D^2 f = 0$, para cualquier $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

$$\begin{aligned} D(Df) &= (\mathcal{L}_K + \imath_L)(\mathcal{L}_K + \imath_L(f)) \\ &= (\mathcal{L}_K + \imath_L)(\mathcal{L}_K(f)) \\ &= (\mathcal{L}_K + \imath_L)([\imath_K, \mathrm{d}](f)) \\ &= (\mathcal{L}_K + \imath_L)(\imath_K(\mathrm{d}f)) \\ &= \imath_K(\mathrm{d}(\imath_K(\mathrm{d}f))) - \mathrm{d}(\imath_K(\imath_K(\mathrm{d}f))) + \imath_L(\imath_K(\mathrm{d}f)), \end{aligned}$$

y haciendo actuar esto sobre $A, B \in \mathfrak{X}_M$, obtenemos

$$\begin{aligned} D^2(f)(A,B) &= \mathrm{d}(\imath_K \mathrm{d}f)(KA, B) - \mathrm{d}(\imath_K \mathrm{d}f)(KB, A) \\ &\quad - A(\imath_K(\imath_K(\mathrm{d}f))(B)) + B(\imath_K(\imath_K(\mathrm{d}f))(A)) \\ &\quad + \imath_K(\imath_K(\mathrm{d}f))([A,B]) + (\imath_K(\mathrm{d}f))(L(A,B)) \\ &= KA(\imath_K(\mathrm{d}f)(B)) - B(\imath_K(\mathrm{d}f)(KA)) - \imath_K(\mathrm{d}f)([KA, B]) \\ &\quad - KB(\imath_K(\mathrm{d}f)(A)) + A(\imath_K(\mathrm{d}f)(KB)) \\ &\quad + \imath_K(\mathrm{d}f)([KB, A]) - A(\mathrm{d}f(KB)) + B(\mathrm{d}(K^2(A))) \\ &\quad + \mathrm{d}f K^2([A,B]) + \mathrm{d}f(K(L(A,B))) \\ &= KA(\mathrm{d}f(KB)) - B(\mathrm{d}f(K^2 A)) - \mathrm{d}f(K[KA, B]) \\ &\quad - KB(\mathrm{d}f(KA)) + A(\mathrm{d}f(K^2 B)) + \mathrm{d}f(K[KB, A]) \\ &\quad - A((K^2 B)(f)) + B(K^2 A(f)) + K^2[A,B](f) + K(L(A,B))(f) \\ &= ([KA, KB] - K[KA, B] - K[A, KB] + K^2[A,B])(f) \\ &= T_K(A,B) + K(L(A,B))(f). \end{aligned}$$

La segunda condición (3.1.1) es mucho más difícil de satisfacer. En lo que sigue construiremos algunas soluciones en el haz tangente de una variedad M con relevancia geométrica.

3.2 Resultado principal

Aquí probaremos un resultado muy importante, pues nos dice cómo, a partir de un endomorfismo idempotente podemos contruir un algebroide de Lie.

Sea $TM \to M$ el haz tangente sobre una variedad conexa M, y sea $N : TM \to TM$ un endomorfismo idempotente ($N^2 = N$). El siguiente resultado nos dice que N tiene rango localmente constante.

Lema 3.2. *Sea $N : TM \to TM$ un endomorfismo idempotente. Entonces, el conjunto de $m \in M$ tales que $rank(N_m) = q$ es abierto y cerrado en M.*

Demostración. Como en cada fibra la identidad es la suma de dos proyectores complementarios $Id = N_m + (Id - N_m)$, tenemos que $rank(N_m) + rank(Id - N_m) = n = dimM$. Ahora, el conjunto de todos los puntos $m \in M$ tales que $rank(N_m) = q$ es al mismo tiempo el conjunto de todos los $m \in M$ con $rank(N_m) \leq q$ y $rank(Id - N_m) \leq n - q$, el cual es un conjunto cerrado, y el conjunto de todos los puntos $m \in M$ tales que $rank(N_m) \geq q$ y $rank(Id - N_m) \geq n - q$, el cual es un conjunto abierto. □

Recordemos que si $N : TM \to TM$ es un morfismo de haces vectoriales y $rank(N_m)$ es localmente constante, entonces los espacios vectoriales Ker$N$ e ImN son haces vectoriales. (ver [18]).

Lema 3.3. *Sea $N : TM \to TM$ un endomorfismo idempotente con* ImN *distribución involutiva, entonces se cumple lo siguiente:*

$$N[NX, NY] = [NX, NY]. \tag{3.2.1}$$

Demostración. Como ImN es involutiva, existe $Z \in \Gamma TM$ tal que $[NX, NY] = NZ$, y aplicando N a ambos lados de esta ecuación,

$$N[NX, NY] = N^2 Z = NZ = [NX, NY]$$

□

Consideremos la torsión de Nijenhuis de N. En nuestro caso, se puede reescribir como

$$T_N(X, Y) = [NX, NY] - N[NX, Y] - N[X, NY] + N[X, Y].$$

Aplicando N a ambos lados, obtenemos

$$NT_N(X, Y) = N[NX, NY] - N^2[NX, Y] - N^2[X, NY] + N^2[X, Y].$$

Usando el Lema 3.3 junto con la propiedad $N^2 = N$, tenemos

$$NT_N(X,Y) = [NX,NY]-N[NX,Y]-N[X,NY]+N[X,Y] = T_N(X,Y). \quad (3.2.2)$$

Por tanto, $K = N$ y $L = -T_N$ es solución de las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.2).

Proposición 3.4. *Si $N : TM \to TM$ es un endomorfismo idempotente del haz tangente de M tal que $N^2 = N$ y que $\operatorname{Im} N$ es un subhaz involutivo de TM, entonces*

$$NT_N = T_N, \;\; [N,T_N]_{FN} = 0 \quad y \quad [T_N,T_N]_{RN} = 0$$

donde T_N es la torsión de Nijenhuis de N.

Demostración. La primera afirmación es una consecuencia directa de la definición de torsión de Nijenhuis,

$$\begin{aligned} NT_N(X,Y) &= N([NX,NY] - N[NX,Y] - N[X,NY] + N^2[X,Y]) \\ &= [NX,NY] - N[NX,Y] - N[X,NY] + N^2[X,Y] \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}_M$.

Como $L = -\frac{1}{2}[N,N]_{FN}$, y $(\Omega^*(M;TM), [\ ,\ ]_{FN})$ es un álgebra de Lie graduada(ver [25]), tenemos

$$[N,L]_{FN} = -\frac{1}{2}[N,[N,N]_{FN}]_{FN} = 0.$$

Además, como $L \in \Omega^2(M;TM)$, se sigue que $[L,L]_{RN} \in \Omega^3(M;TM)$, $i_L \in Der^1\Omega(M)$, y $i_{[L,L]_{RN}} \in Der^2\Omega(M)$; por tanto, $i_{[L,L]_{RN}}$ es completamente caracterizada por su acción en $0-$formas (funciones diferenciables) y $1-$formas. Pero $i_{[L,L]_{RN}}$ es una derivación tensorial, luego se anula en $\mathcal{C}^\infty(M)$. Ahora, dada $\alpha \in \Omega^1(M)$ tenemos $i_{[L,L]_{RN}}\alpha \in \Omega^3(M)$. Así, para cualesquiera $X, Y, Z \in \Gamma TM$,

$$\begin{aligned} (i_{[L,L]_{RN}}\alpha)(X,Y,Z) &= \alpha([L,L]_{RN}(X,Y,Z)) = 2i_L^2\alpha(X,Y,Z) \\ &= 2 \circlearrowright i_L\alpha(L(X,Y),Z) \\ &= 2 \circlearrowright \alpha(L(L(X,Y),Z)) \\ &= 2 \circlearrowright \alpha(T_N(T_N(X,Y),Z)) = 0, \end{aligned}$$

(aquí $\circlearrowright$ denota la suma cíclica en (X,Y,Z)) porque

$$\begin{aligned} &T_N(T_N(X,Y),Z) \\ =&[NT_N(X,Y),NZ] - N[NT_N(X,Y),Z] - N[T_N(X,Y),NZ] + N^2[T_N(X,Y),Z] \\ =&N[NT_N(X,Y),NZ] - N[T_N(X,Y),Z] - N[T_N(X,Y),NZ] + N[T_N(X,Y),Z] \\ =&N[T_N(X,Y),NZ] - N[T_N(X,Y),Z] - N[T_N(X,Y),NZ] + N[T_N(X,Y),Z] \\ =&0, \end{aligned}$$

hemos usado el Lema 3.3, la ecuación (3.2.2), y la propiedad $N^2 = N$. □

Combinando (3.1.1) y (3.1.2) con la Proposición 3.4, llegamos al siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Sea $N \in \Omega^1(M;TM)$ tal que $N^2 = N$ y $\operatorname{Im} N$ es involutiva. Entonces, las derivaciones $\mathcal{L}_N + \imath_{-T_N}$ e $\imath_{-T_N}$ son operadores de cohomología.*

Demostración. Para la primer derivación, basta con hacer $K = N$ y $L = -T_N$ y sustituir en las ecuaciones 3.1.1 y 3.1.2, para obtener:

$$\frac{1}{2}[N,N]_{FN} - \imath_{T_N} N = T_N - NT_N = 0,$$

$$[N,T_N]_{FN} + \frac{1}{2}[T_N,T_N]_{RN} = 0.$$

Y para la segunda es un cálculo análogo haciendo $K = 0$ y $L = -T_N$. □

Notemos que cuando N es un tensor de Nijenhuis, automáticamente ImN es involutiva, pues en este caso $[N(X),N(Y)] = N([N(X),Y]+[X,N(Y)]-N([X,Y]))$ para todo $X,Y \in \Gamma TM$. Y si se tiene que $\operatorname{Ker} N$ y $\operatorname{Im} N$ son involutivas, se sigue que N es un tensor de Nijenhuis.

Corolario 3.6. *Sea $N \in \Omega^1(M;TM)$ tal que $N^2 = N$ y $T_N = 0$. Entonces, la derivación dada por $D = \mathcal{L}_{Id-N} \in \mathrm{Der}^1\Omega(M)$ es un operador de cohomología, esto es $D^2 = 0$.*

Demostración. Primero observemos que $(Id-N)^2 = Id - N$. Además, si $X,Y \in \mathfrak{X}_M$, tenemos

$$\begin{aligned}
[(Id-N)(X),(Id-N)(Y)] &= [X,Y]-[NX,Y]-[X,NY]+[NX,NY] \\
&= [X,Y]-[NX,Y]-[X,NY] \\
&\quad +N([X,NY]+[NX,Y]-[X,Y]) \\
&= (Id-N)([X,Y]-[NX,Y]-[X,NY]),
\end{aligned}$$

es decir, $Im(Id-N)$ es involutiva. Por útlimo, usando la identidad $[Id,N]_{FN} = -[N,Id]_{FN}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
T_{\mathrm{Id}-N} =&[Id-N,Id-N]_{FN} \\
=&[Id,Id]_{FN} - [N,Id]_{FN} - [Id,N]_{FN} + [N,N]_{FN} \\
=&0,
\end{aligned}$$

El resultado se sigue del Teorema 3.5. □

Aplicando los resultados del Capítulo 2 (ecuación (2.2.3)), podemos definir un algebroide de Lie inducido por el operador $D = \mathcal{L}_N - \imath_{T_N}$ como sigue.

Teorema 3.7. *Sea $N \in \Omega^1(M;TM)$ tal que $N^2 = N$ y $\operatorname{Im} N$ es involutiva. Entonces, existe una estructura de algebroide de Lie $(TM, q, [\![\, , \,]\!])$ con aplicación ancla $q = N$ y corchete*

$$[\![X, Y]\!] = [X, Y]_N + T_N(X, Y),$$

donde $[\, , \,]_N$ denota el corchete deformado (Definición 2.5).

Notemos que, este resultado es válido también en el tangente complexificado y que, el corchete en TM construido de esta manera es dado por la suma del corchete deformado $[\, , \,]_N$ y la torsión T_N. Otra expresión útil para este corchete es

$$[\![X, Y]\!] = [NX, NY] + (\mathrm{Id} - N)([NX, Y] + [X, NY])\,. \tag{3.2.3}$$

3.2.1 Relación con la diferencial exterior foliada

Sea $\mathcal{F}$ una foliación regular en una variedad M y $T\mathcal{F} \subset TM$ su haz tangente. Denotemos por $j : T\mathcal{F} \hookrightarrow TM$ la inyección canónica. A cualquier foliación podemos asociarle un algebroide de Lie de dos maneras.

(a) El espacio de las secciones tangentes $\Gamma(T\mathcal{F})$ es cerrado con respecto al corchete de campos vectoriales en M, por la integrabilidad de $\mathcal{F}$, luego, tiene un corchete (foliado) natural $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{F}}$, que es justo la restricción del corchete de Lie a $\mathcal{F}$. Entonces,

$$(E = T\mathcal{F}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{F}}, q = j : T\mathcal{F} \hookrightarrow TM)\,,$$

es un algebroide de Lie, llamado el algebroide de Lie de la foliación $\mathcal{F}$. En este caso, el operador de cohomología correspondiente es la diferencial exterior foliada $\mathrm{d}_{\mathcal{F}} : \Gamma(\Lambda^p T^*\mathcal{F}) \to \Gamma(\Lambda^{p+1} T^*\mathcal{F})$, que da lugar a la cohomología de De Rham foliada

(b) Sea $\mathbb{H}$ una conexión de Ehresmann en M complementaria a la distribución $T\mathcal{F}$ ([26]), esto es, $TM = \mathbb{H} \oplus T\mathcal{F}$. Denotemos por γ la proyección asociada $\mathcal{F}$, $\gamma : \mathbb{H} \oplus T\mathcal{F} \to T\mathcal{F}$, $\mathbb{H} = \ker\gamma$ y $T\mathcal{F} = \mathrm{Im}\gamma$. Se sigue que γ es una $1-$forma valuada vectorial tal que $\gamma^2 = \gamma$, y entonces la curvatura de la conexión se define como la torsión de Nijenhuis

$$R = \frac{1}{2}[\gamma, \gamma]_{FN} = T_\gamma\,.$$

En TM podemos construir el algebroide de Lie dado por el Teorema 3.7. En este caso, la expresión explícita del corchete puede ser calculada:

$$\begin{aligned}
&[X, X']_\gamma = 0\,, \text{ para todo } X, X' \in \mathbb{H},\\
&[X, Y]_\gamma = [X, Y] - \gamma[X, Y]\,, \text{ para todo } X \in \mathbb{H}, Y \in \Gamma(T\mathcal{F}),\\
&[Y, X]_\gamma = [Y, X] - \gamma[Y, X]\,, \text{ para todo } X \in \mathbb{H}, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})\\
&[Y, Y']_\gamma = [Y, Y']\,, \text{ para todo } Y, Y' \in \Gamma(T\mathcal{F})\,.
\end{aligned}$$

La aplicación ancla, es dada por $q = \gamma$. Esta estructura coincide con la anterior si la restringimos a $\Gamma(T\mathcal{F})$, independiente de la elección de la conexión γ.

La escisión inducida por γ, $TM = \mathbb{H} \oplus T\mathcal{F}$, define una bigradación en $\Omega(M)$. Una forma diferencial ω en una variedad foliada se dice de tipo (p, q) si tiene grado $p+q$ y $\omega(X_1, \dots, X_{p+q}) = 0$ siempre que los argumentos contengan más de q campos vectoriales en $\Gamma(T\mathcal{F})$, o más de p en $\mathbb{H}$. De acuerdo a esta bigradación, tenemos una descomposición de la diferencial exterior en M,

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}_{1,0} + \mathrm{d}_{2,-1} + \mathrm{d}_{0,1}\,, \tag{3.2.4}$$

donde $\mathrm{d}_{i,j} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+i,q+j}(M)$.

Observación 6. *Denotemos por* $h : \Gamma(\Lambda T^*\mathcal{F}) \to \Gamma(\Lambda \mathbb{H}^0)$ *la identificación natural, notemos que* $\mathrm{d}_{0,1}$ *es una extensión* $\gamma-$*dependiente de la diferencial exterior foliada, esto es,*

$$(\mathrm{d}_{0,1} \circ h)\,\omega = (h \circ \mathrm{d}_{\mathcal{F}})\,\omega\,,$$

para todo $\omega \in \Gamma(\Lambda T^*\mathcal{F})$.

La descomposición de Frölicher-Nijenhuis de los operadores que aparecen en (3.2.4) se pueden calcular.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{1,0} &= \mathcal{L}_{\mathrm{Id}-\gamma} + \imath_{2R},\\
\mathrm{d}_{0,1} &= \mathcal{L}_\gamma - \imath_R,\\
\mathrm{d}_{2,-1} &= -\imath_R\,.
\end{aligned}$$

De (3.2.4) y $\mathrm{d}^2 = 0$, se sigue que

$$\mathrm{d}_{0,1}^2 = 0 = \mathrm{d}_{2,-1}^2\,.$$

Además, la derivación $\mathrm{d}_{1,0}$ es operador de cohomología si y sólo si la curvatura de la conexión γ es nula.

Teorema 3.8. *El operador de cohomología asociado al algebroide de Lie en TM descrito en (b), es dado por*

$$D = \mathrm{d}_{0,1}\,.$$

Además, el algebroide de Lie de la foliación $\mathcal{F}$ y la restricción a $T\mathcal{F}$ de el algebroide de Lie asociado a la conexión γ en TM, coinciden. Consecuentemente, los complejos asociados a los operadores de cohomología $\mathrm{d}_{\mathcal{F}}$ y $\mathrm{d}_{0,1}|_{\Gamma(\Lambda\mathbb{H}^0)}$ son isomorfos.

Demostración. La primera afirmación es una consecuencia del Teorema 2.2 y de la Sección 2.1.2. La segunda de los resultados precedentes junto con la Observación 6. □

3.2.2 Algebroides de Lie complejos asociados a estructuras complejas

Construiremos un endomorfismo idempotente a partir de una estructura compleja para después aplicar el Teorema 3.5 y obtener un algebroide complejo.

Recordemos que una estructura casi-compleja en una variedad M es una $1-$forma $J \in \Omega^1(M;TM)$ tal que $J^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$. Para poder diagonalizar el endomorfismo J, trabajaremos en el haz tangente complexificado $T^{\mathbb{C}}M$, y extendemos por $\mathbb{C}-$linealidad todos los endomorfismos reales y operadores diferenciales en TM (con abuso de notación, denotaremos estas extensiones con los mismos símbolos que sus análogos reales). El corchete de Lie de campos vectoriales también puede extenderse por $\mathbb{C}-$linealidad.

La estructura casi-compleja J se dice integrable si su torsión de Nijenhuis es cero, esto es, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}_M$,

$$T_J(X,Y) = \frac{1}{2}[J,J]_{FN}(X,Y) = [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y] = 0.$$

El Teorema de Newlander-Nirenberg establece que esto pasa si y sólo si M tiene estructura de variedad compleja.

De la condición $J^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$, sabemos que J tiene eigenvalores $\pm i$. Si definimos los operadores de proyección

$$p^{\pm} := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} \mp iJ) : T^{\mathbb{C}}M \to T^{\mathbb{C}}M,$$

obtenemos las propiedades usuales

$$\begin{aligned} (p^{\pm})^2 &= p^{\pm}, \\ p^+ + p^- &= \mathrm{Id}_{T^{\mathbb{C}}M}, \\ p^+ \circ p^- &= 0 = p^- \circ p^+\,, \end{aligned}$$

que determinan una descomposición $T^{\mathbb{C}}M = T^+M \oplus T^-M$, donde

$$\Gamma T^{\pm}M = \{Z \in \Gamma T^{\mathbb{C}}M : JZ = \pm iZ\}.$$

Notemos que $\mathrm{Im}p^{\pm} = T^{\pm}M$, y $\ker p^{\pm} = T^{\mp}M$, y que si $Z \in \Gamma T^+M$, entonces su conjugado complejo $\bar{Z} \in \Gamma T^-M$ (y viceversa).

Necesitaremos los siguientes resultados técnicos.

Lema 3.9. *Sea $J \in \Omega^1(M; TM)$ una estructura casi-compleja en M, y sea T_J su torsión de Nijenhuis. Si $T_J = 0$, entonces su extensión compleja también satisface $\mathcal{T}_J = 0$.*

Demostración. Sea $Z = X + iY, W = X' + iY'$. Un cálculo sencillo nos muestra que

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_J(Z, W) &= [JZ, JW] - J[JZ, W] - J[Z, JW] - [Z, W]\\ &= T_J(X, X') - T_J(Y, Y') + i(T_J(Y, X') + T_J(X, Y')).\end{aligned}$$

□

Proposición 3.10. *Una estructura casi-compleja $J \in \Omega^1(M; TM)$ es integrable si y sólo si $[T^+M, T^+M] \subset T^+M$, esto es, la distribución definida por ΓT^+M es involutiva.*

Demostración. Consideremos primero el caso de $J \in \Omega^1(M; TM)$ integrable. Por el lema 3.9, si $T_J = 0$, entonces también $\mathcal{T}_J = 0$. Si $Z, W \in \Gamma T^+M$, tenemos $JZ = iZ$ y $JW = iW$, así

$$\begin{aligned}0 = \mathcal{T}_J(Z, W) &= [iZ, iW] - J[iZ, W] - J[Z, iW] - [Z, W]\\ &= -[Z, W] - iJ[Z, W] - iJ[Z, W] - [Z, W]\\ &= -2([Z, W] + iJ[Z, W]),\end{aligned}$$

esto es $J[Z, W] = -\frac{1}{i}[Z, W] = i[Z, W]$, luego $[Z, W] \in \Gamma T^+M$.

Recíprocamente, si asumimos que $[Z, W]$ es un campo vectorial en T^+M siempre que Z, W lo son. Dados campos vectoriales arbitarios $X, Y \in \Gamma TM$, podemos reescribirlos en la forma $X = Z + \bar{Z}$, $Y = W + \bar{W}$ para algunos $Z, W \in \Gamma T^+M$. Entonces, se demuestra fácilmente que $\mathcal{T}_J(Z, \bar{W}) = \mathcal{T}_J(\bar{Z}, W) = 0$, y

$$T_J(X, Y) = \mathcal{T}_J(Z, W) + \mathcal{T}_J(\bar{Z}, \bar{W}).$$

Para campos vectoriales en ΓT^+M sabemos que $\mathcal{T}_J(Z, W) = -2([Z, W] + iJ[Z, W])$, y, como $[Z, W]$ es holomorfo por hipótesis, $J[Z, W] = i[Z, W]$. Por tanto $\mathcal{T}_J(Z, W) = -2([Z, W] + i^2[Z, W]) = 0$. Un cálculo similar muestra que $\mathcal{T}_J(\bar{Z}, \bar{W}) = 0$, y concluimos que J es integrable. □

Ahora estamos listos para construir un algebroide de Lie canónico asociado a una variedad compleja. Recordemos (ver [36]) que un algebroide de Lie complejo sobre la variedad M es dado por un haz vectorial complejo E sobre M dotado con una estructura de álgebra de Lie compleja en el espacio de secciones ΓE, junto con una aplicación de haces $q : E \to T^{\mathbb{C}}M$ (aplicación ancla) que satisfacen la regla de Leibniz

$$[A, fB] = f[A, B] + (qA)(f)B,$$

para cualesquiera $A, B \in \Gamma E$, y $f : M \to \mathbb{C}$ diferenciable. El principal ejemplo de algebroide de Lie complejo es dado por la inclusión $q : T^+M \hookrightarrow T^{\mathbb{C}}M$ del subhaz ΓT^+M en una variedad compleja. Notemos que el haz vectorial en este caso es $E = T^+M$, no $T^{\mathbb{C}}M$.

Observación 7. *Nosotros queremos usar la propiedad $(p^+)^2 = p^+$ del operador de proyección $p^+ = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - iJ)$, y los resultados anteriores para construir un algebroide en el cual p^+ será la aplicación ancla, y todo $T^{\mathbb{C}}M$ el haz correspondiente.*

Sin embargo, como $\mathrm{Im}p^+$ debe ser involutiva, la Proposición 3.10 nos restringe a variedades complejas.

Nuestro resultado principal entonces, es el siguiente.

Teorema 3.11. *Sea $J \in \Omega^1(M; TM)$ una estructura compleja en una variedad M. Entonces existe una estructura de algebroide de Lie complejo en M, $(T^{\mathbb{C}}M, q, [\![\, , \,]\!])$, donde la aplicación ancla es $q = p^+ = \frac{1}{2}(Id - iJ)$, y el corchete*

$$[\![Z, W]\!] = [Z, W]_{p^+} = \frac{1}{2}([Z, W] - i[Z, W]_J).$$

Demostración. Primero probemos que

$$\mathcal{T}_{p^+} = -\frac{1}{4}\mathcal{T}_J,$$

Sean $Z, W \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{p^+}(Z, W) &= [p^+Z, p^+W] - p^+[p^+Z, W] - p^+[Z, p^+W] + (p^+)^2[Z, W] \\
&= [\tfrac{1}{2}(Id - iJ)Z, \tfrac{1}{2}(Id - iJ)W] - \tfrac{1}{2}(Id - iJ)[\tfrac{1}{2}(Id - iJ)Z, W] \\
&\quad -\tfrac{1}{2}(Id - iJ)[Z, \tfrac{1}{2}(Id - iJ)W] + (\tfrac{1}{2}(Id - iJ))^2[Z, W] \\
&= \tfrac{1}{4}\big([Z, W] - [ZiJ(W)] - [iJ(Z), W] + [iJ(z), iJ(W)] \\
&\quad -[Z, W] + [iJ(Z), W] + iJ([Z, W]) - iJ([iJ(Z), W]) \\
&\quad -[Z, W] + [Z, iJ(W)] + iJ([Z, W]) - iJ([Z, J(W)]) \\
&\quad +[Z, W] - iJ([Z, W]) - iJ([Z, W]) - (iJ)^2([Z, w])\big) \\
&= -\tfrac{1}{4}\big([J(Z), J(W)] - J([J(Z), W]) - J([Z, J(W)] + J^2([Z, W]))\big) \\
&= -\tfrac{1}{4}\mathcal{T}_J(Z, W)
\end{aligned}$$

De acuerdo con el Teorema 3.7, el endomorfismo idempotente p^+ induce un algebroide de Lie $T^{\mathbb{C}}M \to T^{\mathbb{C}}M$ donde la aplicación ancla es precisamente $q = p^+$, y el corchete $[\![Z, W]\!] = [Z, W]_{p^+} + \mathcal{T}_{p^+}$. Pero, lo dicho en la Observación 7 implica que $\mathcal{T}_{p^+} = 0$, así el corchete es simplemente

$$[\![Z, W]\!] = [Z, W]_{p^+}.$$

Un cálculo sencillo muestra además que

$$[Z, W]_{p^+} = \frac{1}{2}([Z, W] - i[Z, W]_J).$$

□

Notemos que, este algebroide es diferente al que se obtiene aplicando la Proposición 2.14, donde el corchete resultante es $[\![Z, W]\!] = [Z, W]_J$ (esto es, la extensión $\mathbb{C}-$lineal de $[\ ,\ ]_J$ a $T^{\mathbb{C}}M$).

Observación 8. *La prueba se extiende de manera trivial al caso de un endomorfismo $J \in \Omega^1(M; TM)$ tal que $J^2 = -\epsilon^2 Id_{TM}$ con $\epsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$.*

3.2.3 Algebroides asociados a estructuras producto

Aquí construiremos un endomorfismo idempotente a partir de una estructura producto, para después poder aplicar el Teorema 3.5 y obtener un algebroide de Lie.

Consideremos ahora una estructura casi-producto en una variedad M, esto es, un endomorfismo de haces vectoriales $P : TM \to TM$ tal que $P^2 = \mathrm{Id}_{TM}$. Este define dos operadores de proyección asociados a sus eigenvalores $\lambda = \pm 1$, $p^{\pm} := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} \pm P)$. Tenemos una descomposición del haz tangente análogo al caso complejo, $TM = T^+M \oplus T^-M$, donde, esta vez, $T^{\pm}M = \mathrm{Im} p^{\pm}$.

Un resultado básico es que las distribuciones complementarias $T^{\pm}M$ son integrables si y sólo si P es integrable, en el sentido de tener torsión de Nijenhuis nula (ver [10]), esto es, $T^{\pm}M$ son integrables si y sólo si P es una estructura producto. En este caso, ambos $T^{\pm}M$ son involutivos. Un cálculo simple muestra que

$$T_{p^{\pm}} = \frac{1}{4} T_P,$$

en efecto, sean $X, Y \in \mathfrak{X}_M$, se tiene

$$\begin{array}{rcl} T_{p^\pm}(X,Y) & = & [p^\pm X, p^\pm Y] - p^\pm[p^\pm X, Y] - p^\pm[X, p^\pm Y] + (p^\pm)^2[X,Y] \\ & = & [\frac{1}{2}(Id \pm P)X, \frac{1}{2}(Id \pm P)Y] - \frac{1}{2}(Id \pm P)[\frac{1}{2}(Id \pm P)X, Y] \\ & & -\frac{1}{2}(Id \pm P)[X, \frac{1}{2}(Id \pm P)Y] + (\frac{1}{2}(Id \pm P))^2[X,Y] \\ & = & \frac{1}{4}\left([X,Y] \pm [X,P(Y)] \pm [P(X),Y] + [P(X),P(Y)]\right. \\ & & -[X,Y] \mp [P(X),Y] \mp P([X,Y]) - P([P(X),Y]) \\ & & -[X,Y] \mp [X,P(Y)] \mp P([X,Y]) - P([X,P(Y)]) \\ & & \left.+[X,Y] \pm P([X,Y]) \pm P([X,Y]) + P^2([X,Y])\right) \\ & = & \frac{1}{4}\big([P(X),P(Y)] - P([P(X),Y])P([X,P(Y)] + P^2([X,Y]))\big) \\ & = & \frac{1}{4}T_P(X,Y), \end{array}$$

por lo tanto, en el caso de una estructura producto tenemos $T_{p^-} = 0$.

Por la Proposición 2.14, dada una estructura producto en M podemos construir un agebroide de Lie inducido por el operador $D = \mathcal{L}_P$. El corchete es entonces el corchete deformado,

$$[\![X,Y]\!] = [X,Y]_P.$$

Como ya sabemos, el algebroide de Lie obtenido de esta manera es isomorfo al algebroide trivial en TM (recordemos la Proposición 2.17). Sin embargo, es posible definir otra estructura de algebroide de Lie.

Teorema 3.12. *Sea $P \in \Omega^1(M;TM)$ una estructura producto en una variedad M. Entonces existe una estructura de algebroide de Lie en M, $(TM, q, [\![\ ,\ ]\!])$, donde la aplicación ancla es $q = p^- = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - P)$, y el corchete*

$$[\![X,Y]\!] = [X,Y]_{p^-} = \frac{1}{2}([X,Y] - [X,Y]_P).$$

Demostración. Esta afirmación no es más que un corolario del Teorema 3.7. La última ecuación es un cálculo sencillo, pues sabemos que, para $X, Y \in \mathfrak{X}_M$, el corchete es $[\![X,Y]\!] = [X,Y]_{p^-} + T_{p^-}(X,Y)$, pero ya vimos que $T_{p^-}(X,Y) = 0$, y desarrollando el otro término obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} [X,Y]_{p^-} & = & [p^-(X),Y] + [X,p^-(Y)] - p^-[X,Y] \\ & = & \frac{1}{2}\left([X,Y] - [PX,Y] + [X,Y] - [X,PY] - [X,Y] + P[X,Y]\right) \\ & = & \frac{1}{2}\left([X,Y] - [X,Y]_P\right). \end{array}$$

□

Observación 9. *El teorema aplica también al caso de un operador $P \in \Omega^1(M;TM)$ tal que $P^2 = \epsilon^2\mathrm{Id}_{TM}$, con $\epsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$.*

3.2.4 Algebroide de Lie asociado a la estructura tangente canónica y a una conexión

Recordemos que, como hemos visto en la Sección 1.3, en una variedad del tipo TM, tenemos una estructura tangente canónica, denotada J , y además también tenemos el campo vectorial de Euler, denotado C.

Recordemos también que una conexión (no lineal) Γ en TM es una forma valuada vectorial $\Gamma \in \Omega^1(TM; TTM)$ tal que

$$J \circ \Gamma = J = -\Gamma \circ J.$$

Una propiedad básica de una conexión es que ésta define una estructura casi-producto en TM, esto es,

$$\Gamma^2 = \mathrm{Id}_{TTM},$$

de tal manera que el eigenhaz correspondiente al eigenvalor $\lambda = -1$ es precisamente la distribución vertical. En otras palabras, si definimos los proyectores

$$h = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_{TTM} + \Gamma),$$
$$v = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_{TTM} - \Gamma),$$

tenemos $\mathbb{V}TM = \mathrm{Im}v$, y $TTM = \mathrm{Im}v \oplus \mathrm{Im}h$. Ver Sección 1.4.

Notemos que la distribución vertical es integrable ($\mathrm{Im}v$ es involutiva), mientras que, en general, la distribución horizontal no lo es, como es bien conocido, una condición necesaria y suficiente para que esto suceda es que la curvatura de la conexión sea nula.

Por lo tanto, esperamos ser capaces de aplicar los resultados de 2.2 para construir un algebroide de Lie donde el haz vectorial sea $E = TTM$, y la aplicación ancla v.

Teorema 3.13. *Sea M una variedad y J la estructura tangente canónica en TM. Sea $\Gamma \in \Omega^1(TM; TTM)$ una conexión en TM. Entonces, existe una estructura de algebroide de Lie en TM, $(TTM, q, [\![\,,\,]\!])$, donde la aplicación ancla es $q = v = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_{TTM} - \Gamma)$ y el corchete*

$$[\![A, B]\!]_\Gamma = \frac{1}{2}\left([A, B] - [A, B]_\Gamma\right) + \frac{1}{4} T_\Gamma(A, B). \tag{3.2.5}$$

Demostración. Este resultado es consecuencia directa del Teorema 3.7, haciendo $N = v$. Sólo hay que probar que $T_v(A, B) = \frac{1}{4} T_\Gamma(A, B)$ para todo $A, B \in \mathfrak{X}_{TM}$.

Lo cual se sigue de cálculos directos.

$$\begin{array}{rcl} T_v(A,B) & = & [v(A),v(B)]-v([v(A),B])-v([A,v(B)])+v^2([A,B]) \\ & = & [\frac{1}{2}(Id-\Gamma)A,\frac{1}{2}(Id-\Gamma)B]-\frac{1}{2}(Id-\Gamma)[\frac{1}{2}(Id-\Gamma)A,B] \\ & & -\frac{1}{2}(Id-\Gamma)[A,\frac{1}{2}(Id-\Gamma)B]+(\frac{1}{2}(Id-\Gamma))^2[A,B] \\ & = & \frac{1}{4}\big([A,B]-[A,\Gamma(B)]-[\Gamma(A),B]+[\Gamma(A),\Gamma(B)] \\ & & -[B,A]+[\Gamma(A),B]+\Gamma([A,B])-\Gamma([\Gamma(A),B]) \\ & & -[A,B]+[A,\Gamma(B)]+\Gamma([A,B])-\Gamma([A,\Gamma(B)]) \\ & & +[A,B]-\Gamma([A,B])-\Gamma([A,B])+\Gamma^2([A,B])\big) \\ & = & \frac{1}{4}\big([\Gamma(A),\Gamma(B)]-\Gamma([\Gamma(A),B])-\Gamma([A,\Gamma(B)]+\Gamma^2([A,B]))\big) \\ & = & \frac{1}{4}T_\Gamma(A,B), \end{array}$$

y

$$\begin{aligned} [A,B]_v =& [vA,B]+[A,vB]-v[A,B] \\ =& \frac{1}{2}([A-\Gamma A,B]+[A,B-\Gamma B]-[A,B]+\Gamma[A,B]) \\ =& \frac{1}{2}([A,B]-[\Gamma A,B]-[A,\Gamma B]+\Gamma[A,B]) \\ =& \frac{1}{2}([A,B]-[A,B]_\Gamma). \end{aligned}$$

□

Un método fácil para obtener conexiones en TM es eligiendo un semispray. Recordemos que un semispray (o ecuación diferencial de segundo orden, ver [1]) en M es un campo vectorial $S \in \mathfrak{X}_{TM}$, tal que

$$J \circ S = C, \tag{3.2.6}$$

donde J es la estructura tangente canónica (1.9) y C el campo de Euler (1.8).

Para cualquier semispray S, el endomorfismo $\Gamma = -\mathcal{L}_S J$ es una conexión en TM, con proyectores asociados

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_{TTM} - \mathcal{L}_S J) \\ v &= \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_{TTM} + \mathcal{L}_S J). \end{aligned}$$

para más detalles consultar (ver [1, 10]) .

Observación 10. *Esta relación entre semisprays y conexiones se ha utilizado en física para estudiar el problema inverso de la dinámica Lagrangiana [7], sistemas Lagrangianos degenerados [3], o la mecánica y geometría de haces tangentes de orden superior [9].*

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.14. *Sea M una variedad y J la estructura tangente canónica en TM. Sea $S \in \mathfrak{X}_{TM}$ un semispray en M. Entonces, existe una estructura de algebroide de Lie en TM, $(TTM, q, [\![\,,\,]\!])$, donde la aplicación ancla es $q = v = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_{TTM} + \mathcal{L}_S J)$ y el corchete*

$$[\![A, B]\!] = \frac{1}{2}\left([A, B] - [A, \mathcal{L}_S B]_J - [B, \mathcal{L}_A S]_J + [S, [A, B]_J]\right) + \frac{1}{4} T_{\mathcal{L}_S J}(A, B) \tag{3.2.7}$$

para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{X}_{TM}$.

Demostración. Tengamos en cuenta (3.2.6) y recordemos que para cualquier $X \in \mathfrak{X}_{TM}$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_S J)X =& [S, JX] - J[S, X] \\ =& [S, X]_J - [JS, X] \\ =& [S, X]_J - [C, X], \end{aligned}$$

esto es, $\Gamma X = [C, X] - [S, X]_J$.
Ahora calculemos $-[A, B]_\Gamma$ para $A, B \in \mathfrak{X}_{TM}$, pues lo que sigue es sustituir lo que resulta en (3.2.5),

$$\begin{aligned} -[A, B]_\Gamma \quad = \quad & [\Gamma(A), B] + [A, \Gamma(B)] - \Gamma[A, B] \\ & -[[C, A], B] + [[JS, A] + [S, JA] - J[S, A], B] \\ & -[[B, C], A] + [A, [JS, B] + [S, JB] - J[S, B]] \\ & -[[A, B], C] - [JS, [A, B]] - [S, J[A, B]] + J[S, [A, B]] \\ = \quad & -[JB, [A, S]] + [S, [A, JB]] + [S, [JA, B]] - [B, J[A, S]] \\ & +[A, [JS, B]] + [A, [S, JB]] - [A, J[S, B]] \\ & -[JS, [A, B]] - [S, J[A, B]] + J[B, [A, S]] + J[A, [S, B]] \\ = \quad & -[A, \mathcal{L}_S B]_J - [B, \mathcal{L}_A S]_J + [S, [A, B]_J]. \end{aligned}$$

Así, finalmente tenemos

$$\begin{aligned} [\![A, B]\!] &= \frac{1}{2}\left([A, B] - [A, B]_\Gamma\right) + \frac{1}{4} T_\Gamma(A, B) \\ &= \frac{1}{2}\left([A, B] - [A, \mathcal{L}_S B]_J - [B, \mathcal{L}_A S]_J + [S, [A, B]_J]\right) + \frac{1}{4} T_{\mathcal{L}_S J}(A, B). \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 4

Aplicaciones

En esta capítulo aplicaremos los resultados obtenido a lo largo del trabajo a algunos sistemas Lagrangianos y con esto, obtendremos los algebroides de Lie correspondientes.

4.1 Conexiones y algebroides de Lie

Recordemos que, dado un corchete de Lie, $[\ ,\ ]$, y un endomorfismo, N, en ΓE se define el corchete deformado por N mediante

$$[X,Y]_N = [N(X),Y] + [X,N(Y)] - N([X,Y]) \tag{4.1.1}$$

para $X, Y \in \Gamma E$.

Recordemos también el siguiente resultado (Teorema 3.13): Cada conexión $\Gamma \in \Omega^1(TM; TTM)$ en TM induce una estructura de algebroide de Lie en TM,

$$(TTM, q, [\![,]\!]_\Gamma), \tag{4.1.2}$$

donde la aplicación ancla es $q = v = \frac{1}{2}(Id_{TTM} - \Gamma)$ y el corchete

$$[\![A,B]\!]_\Gamma = \frac{1}{2}([A,B] - [A,B]_\Gamma) + \frac{1}{4}T_\Gamma(A,B). \tag{4.1.3}$$

Más aún, se tiene que el algebroide (4.1.2) es regular y el álgebra de Lie de isotropía, $\mathfrak{g}_z = kerq_z$, es conmutativa para todo $z \in TM$. Para probar esta última afirmación, veremos el siguiente lema.

Sea $U \subset M$ un abierto con coordenadas locales $\{x^i\}$ y denotemos $\{x^i, y^i\}$ las coordenadas inducidas en TM. Consideremos $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right\}$ la base de $\Gamma(TTM)$ definida por (1.15).

Lema 4.1. *Sea Γ una conexión. En la base local $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right\}$, el corchete (4.1.3) está dado por:*

$$\begin{aligned} \left[\!\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right]\!\right]_\Gamma &= 0, \\ \left[\!\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\right]_\Gamma &= 0, \\ \left[\!\left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\right]_\Gamma &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Donde $\frac{\delta}{\delta x^i}$ se define mediante (1.15). Además, se tiene que

$$q\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = 0, \qquad q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{4.1.5}$$

Demostración. Recordemos que en la base local $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right\}$, la conexión Γ, tiene la forma (1.17). Luego

$$\Gamma\left(\tfrac{\delta}{\delta x^i}\right) = \tfrac{\delta}{\delta x^i}, \qquad \left[\tfrac{\delta}{\delta x^i}, \tfrac{\delta}{\delta x^j}\right] = 0, \qquad \left[\Gamma\left(\tfrac{\delta}{\delta x^i}\right), \tfrac{\delta}{\delta x^j}\right] = 0,$$

$$\left[\tfrac{\delta}{\delta x^i}, \tfrac{\delta}{\delta x^j}\right]_\Gamma = 0, \qquad T_\Gamma\left(\tfrac{\delta}{\delta x^i}, \tfrac{\delta}{\delta x^j}\right) = 0,$$

de donde

$$\left[\!\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right]\!\right]_\Gamma = 0.$$

Análogamente

$$\begin{array}{lll} \Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y^i} & \left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 0 & \left[\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right]_\Gamma = 0 & T_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0, & \end{array}$$

lo cual implica que

$$\left[\!\left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\right]_\Gamma = 0.$$

Y finalmente

$$\begin{array}{ll} \left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma_i^r}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^r} & \left[\Gamma\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right), \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma_i^r}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^r}, \\ \left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma_i^r}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^r}, & \Gamma\left(\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma_i^r}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^r}, \\ \left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right]_\Gamma = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma_i^r}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^r}, & T_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0, \end{array}$$

y así concluimos que

$$\left[\!\!\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\!\right]_\Gamma = 0.$$

Obsérvese que

$$ker q_x = \mathbb{H}_x = span\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}\right\} \text{ e } Im q_x = \mathbb{V}_x = span\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}.$$

De esto se siguen las afirmaciones (4.1.5). □

Observación 11. *Por el "local splitting theorem"(Teorema 1.8), cada algebroide de Lie tiene localmente una forma normal, es decir, alrededor de un punto dado es isomorfo al producto de un algebroide tangente y otro algebroide cuyo rango en el origen es 0 . En el caso de un algebroide inducido por una conexión fija (Teorema 3.13), las relaciones* (4.1.4) *y* (4.1.5) *presentan una realización del "local splitting theorem"para el algebroide* (4.1.2).

4.2 Algebroide de Lie inducido por conexiones adaptadas

Como consecuencia de los Teoremas 1.36 y 3.13, tenemos el siguiente resultado que nos será útil más adelante.

Teorema 4.2. *Sea S un semispray tal que $S|_M = 0$. Entonces, existe una estructura de algebroide de Lie $(TTM, q, [\![,]\!]_{\tilde{\Gamma}})$ con $q = v = \frac{1}{2}(Id - \tilde{\Gamma})$ y corchete*

$$\begin{aligned} [\![X,Y]\!]_{\tilde{\Gamma}} &= [\![X,Y]\!]_{\Gamma_S} - \frac{1}{2}[X,Y]_\Delta + \frac{1}{4}T_\Delta(X,Y) \\ &- \frac{1}{4}\left(\Delta[X,Y]_{\Gamma_S} + \Gamma_S([X,Y]_\Delta - [\Gamma_S(X), \Delta(Y)] - [\Delta(X), \Gamma_S(Y)]\right). \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Donde $\tilde{\Gamma}$ es una conexión tal que $\xi_{\tilde{\Gamma}} = S$ y $[\![X,Y]\!]_{\Gamma_S}$ es

$$[\![X,Y]\!]_{\Gamma_S} = \frac{1}{2}\left([A,B] - [A,B]_{\Gamma_S}\right) + \frac{1}{4}T_{\Gamma_S}(A,B)$$

(por (3.2.5)*).*

Demostración. La conexión $\tilde{\Gamma}$ existe por el Teorema 1.36, y es de la forma $\tilde{\Gamma} = \Gamma_S + \Delta$ con Δ una 1-forma semibásica, y el Teorema 3.13 nos da la estructura del algebroide.

Es claro que la aplicación ancla es $q = v = \frac{1}{2}(Id - \tilde{\Gamma})$. Para el corchete necesitamos algunos cálculos.
Sean $X, Y \in \mathfrak{X}_{TM}$, debido a que $\tilde{\Gamma} = \Gamma_S + \Delta$, tenemos que

$$\begin{aligned}
T_{\tilde{\Gamma}}(X,Y) &= [\tilde{\Gamma}(X), \tilde{\Gamma}(Y)] - \tilde{\Gamma}([\tilde{\Gamma}(X), Y]) - \tilde{\Gamma}([X, \tilde{\Gamma}(Y)]) + (\tilde{\Gamma})^2([X,Y]) \\
&= [(\Gamma_S + \Delta)(X), (\Gamma_S + \Delta)(Y)] - (\Gamma_S + \Delta)([(\Gamma_S + \Delta)(X), Y]) \\
&\quad -(\Gamma_S + \Delta)([X, (\Gamma_S + \Delta)(Y)]) + (\Gamma_S + \Delta)^2([X,Y]) \\
&= [\Gamma_S(X), \Gamma_S(Y)] + [\Gamma_S(X), \Delta(Y)] + [\Delta(X), \Gamma_S(Y)] \\
&\quad +[\Delta(X), \Delta(Y)] - \Gamma_S([\Gamma_S(X), Y]) - \Gamma_S([\Delta(X), Y]) \\
&\quad -\Delta([\Gamma_S(X), Y]) - \Delta([\Delta(X), Y]) - \Gamma_S([X, \Gamma_S(Y)]) \\
&\quad -\Gamma_S([X, \Delta(Y)]) - \Delta([X, \Gamma_S(Y)]) - \Delta([X, \Delta(Y)]) \\
&\quad +\Gamma_S^2([X,Y]) + \Gamma_S(\Delta([X,Y])) + \Delta(\Gamma_S([X,Y])) + \Delta^2([X,Y]) \\
&= T_{\Gamma_S}(X,Y) + T_\Delta(X,Y) + [\Gamma_S(X), \Delta(Y)] \\
&\quad +[\Delta(X), \Gamma_S(Y)] - \Gamma_S([X,Y]_\Delta) - \Delta([X,Y]_{\Gamma_S}).
\end{aligned}$$

Y como $[X,Y]_{\tilde{\Gamma}} = [X,Y]_{\Gamma_S} + [X,Y]_\Delta$, al final,

$$\begin{aligned}
[\![X,Y]\!] &= \tfrac{1}{2}\left([X,Y] - [X,Y]_{\tilde{\Gamma}}\right) + \tfrac{1}{4}T_{\tilde{\Gamma}}(X,Y) \\
&= \tfrac{1}{2}\left([X,Y] - [X,Y]_{\Gamma_S} - [X,Y]_\Delta\right) \\
&\quad +\tfrac{1}{4}\left(T_{\Gamma_S}(X,Y) + T_\Delta(X,Y) + [\Gamma_S(X), \Delta(Y)]\right. \\
&\quad \left.+[\Delta(X), \Gamma_S(Y)] - \Gamma_S([X,Y]_\Delta) - \Delta([X,Y]_{\Gamma_S})\right) \\
&= [\![X,Y]\!]_{\Gamma_S} - \tfrac{1}{2}[X,Y]_\Delta + \tfrac{1}{4}T_\Delta(X,Y) - \tfrac{1}{4}\Delta[X,Y]_{\Gamma_S} \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\left(\Gamma_S([X,Y]_\Delta - [\Gamma_S(X), \Delta(Y)] - [\Delta(X), \Gamma_S(Y)]\right).
\end{aligned}$$

□

4.3 Semispray asociado a sistemas Lagrangianos

Comenzaremos con algunas definiciones. Sea $U \subset M$ un abierto con coordenadas locales $\{x^i\}$ y denotemos $\{x^i, y^i\}$ las coordenadas inducidas en TM.

Un Lagrangiano diferencial es una aplicación $L : TM \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en TM.

El Hessiano de un Lagrangiano diferencial, con respecto a y^i, tiene los elementos

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}.$$

El conjunto de funciones $g_{ij}(x,y)$ son componentes de un tensor simétrico covariante de orden 2.

Un Lagrangiano L se llama regular si $rank(g_{ij}) = n$ en $\widetilde{TM} = TM \setminus \{0\}$.

Es decir, si $det(g_{ij}) \neq 0$, por tanto, si un Lagrangiano es regular, la matriz (g_{ij}) es invertible y a los elementos de la matriz inversa los denotaremos por g^{ij}.

Un espacio Lagrangiano es un par $(M, L(x, y))$, donde M es una variedad n-dimensional y L un Lagrangiano regular para el cual el tensor g_{ij} tiene signatura constante en $\widetilde{TM}$.

En un espacio Lagrangiano el tensor (g_{ij}) se llama tensor métrico.

A continuación veremos dos maneras (equivalentes) de definir el semispray asociado a un sistema Lagrangiano.

4.3.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son las condiciones bajo las cuales cierto tipo de problema variacional alcanza un extremo. Aparecen sobre todo en el contexto de la mecánica clásica en relación con el principio de mínima acción aunque también aparecen en teoría clásica de campos (electromagnetismo, teoría general de la relatividad).

Cosnideremos un espacio Lagrangiano $(M, L(x, y))$. Se llama operador de Euler-Lagrange a

$$E_i := \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son entonces

$$E_i(L) = 0, \quad \frac{dx^i}{dt} = y^i.$$

Tenemos un resultado importante, para su prueba consultar [27].

Teorema 4.3. *Si $L^n = (M, L(x, y))$ es un espacio Lagrangiano, entonces el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$g^{ij}E_j(L) = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}$$

se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}$$

donde

$$E_i(L) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^i},$$

$$2G^i(x, y) = \frac{1}{2}g^{ij}\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^k}y^k - \frac{\partial L}{\partial x^j}\right\}.$$

Este Teorema nos dice que las ecuaciones de Euler-Lagrange para un espacio Lagrangiano están dadas por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Dichas ecuaciones son curvas integrales de:

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

es decir, determinan un semispray, llamado *semispray canónico* del espacio Lagrangiano y explícitamente es:

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} g^{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^k} y^k\right)\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{4.3.1}$$

Este semispray es global.

Corolario 4.4. *Si $L^n = (M, L(x,y))$ es un espacio Lagrangiano, entonces existe un semispray intrínseco asociado a L, localmente definido por (4.3.1).*

4.3.2 Forma simpléctica

Sea $L \in \mathcal{C}^\infty_{TM}$. Se define la siguiente 2-forma en TM

$$\omega_L = -d\mathcal{L}_J L, \tag{4.3.2}$$

donde J es la estructura tangente canónica (1.9). Se tiene el siguiente resultado (ver [10])

Proposición 4.5. *La forma ω_L es una forma simpléctica en TM si y sólo si para cualquier sistema de coordenadas (x^i, y^i), la matriz Hessiana $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}\right)$ es de rango máximo.*

La demostración es consecuencia de la siguiente representación local para ω_L.

$$\omega_L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} dy^i \wedge dx^j,$$

Ahora, sea $L^n = (M, L(x,y))$ un espacio Lagrangiano, entonces L es regular, luego, por la proposición anterior, ω_L es simpléctica, en particular no degenerada y se sigue que la ecuación

$$\imath_S \omega_L = dE_L \tag{4.3.3}$$

admite una única solución S_L, i.e, $\imath_{S_L}\omega_L = dE_L$, donde $E_L = C(L) - L$ es la *función de energía* asociada a L . Además se tiene lo siguiente.

Proposición 4.6. *El campo Hamiltoniano S_L definido por (4.3.3) es un semispray.*

Para la prueba de esta Proposición consultar [10].

Ahora, si S_L es el semispray dado por (4.3.3), localmente tenemos

$$S_L = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + S^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

luego

$$\imath_{S_L}\omega_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^j} y^j - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} y^j - \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} S^j \right) dx^i + \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} y^j dy^i,$$

por otro lado

$$E_L = y^j \frac{\partial L}{\partial y^j} - L,$$

y por tanto

$$dE_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^j} y^j - \frac{\partial L}{\partial x^i} \right) dx^i + \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} y^j dy^i,$$

como $\imath_{S_L}\omega_L = dE_L$, obtenemos que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} S^j = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} y^j$$

para $1 \leq i \leq n$. Y como $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} \right)$ es invertible, resulta que podemos conocer los coeficientes de S_L:

$$S^j = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial y^i} y^k \right)$$

$1 \leq i \leq n$,
y entonces, el semispray S_L tiene la siguiente forma

$$S_L = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial y^i} y^k \right) \frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{4.3.4}$$

Queremos saber cuándo para este semispray existe una conexión no lineal $\tilde{\Gamma}$ tal que $\xi_{\tilde{\Gamma}} = S_L$, y de acuerdo con el Teorema 1.36, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.7. *Sea S_L el semispray definido por (4.3.3). Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *S_L tiene una conexión adaptada $\tilde{\Gamma}$*

2. *$S_L|_M = 0$*

3. *$dL|_M = 0 = \imath^*(dL) = 0$. Donde $\imath : M \hookrightarrow TM$ denota la sección cero del haz tangente.*

Demostración. Como

$$S_L|_M = \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}\right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial y^j}\right)|_M,$$

se tiene que $S_L|_M = 0$ si y sólo si $\frac{\partial L}{\partial x^i}|_M = dL|_M = 0$.

□

Observación 12. *Notemos que el semispray definido de manera global por la forma simpléctica ω_L, (4.3.4), coincide con el semispray canónico del sistema Lagrangiano, (4.3.1).*

4.3.3 Generalizaciones

Sea $L \in \mathcal{C}^\infty_{TM}$ regular y denotemos π la proyección $TM \to M$. Definimos la siguiente 2-forma en TM

$$\omega_L = -d\mathcal{L}_J L.$$

Sabemos ω_L es una forma simpléctica y que la ecuación

$$\imath_S \omega_L = dE_L, \tag{4.3.5}$$

donde $E_L = C(L) - L$, admite una única solución S_L. Ahora definimos

$$\Omega_L(\sigma, L) := \pi^*(\sigma) + \omega_L,$$

para cualquier $\sigma \in \Omega^2_M$ cerrada. En términos locales

$$\Omega_L = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} y^i dx^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} dy^i \wedge dx^j.$$

Resulta que también es una forma simpléctica y tenemos además lo siguiente.

Proposición 4.8. *Para cualquier $u \in \mathcal{C}^\infty_M$, el campo Hamiltoniano, S, definido por*

$$\imath_S \Omega_L = d(E_L + \pi^*(u)) \tag{4.3.6}$$

es semispray y tiene la siguiente forma

$$S = S_L + Z \tag{4.3.7}$$

donde S_L la solución de (4.3.5), Z es un campo vertical solución de

$$\imath_Z \omega_L = d(\pi^*(u)) - \psi_\sigma \tag{4.3.8}$$

y $\psi_\sigma = \imath_{S_L}\pi^*(\sigma)$.

Demostración. Por las Proposiciones 4.5 y 4.6 se tiene que (4.3.6) tiene una única solución y dicha solución es un semispray. Ahora, desarrollando el lado izquierdo de (4.3.6)

$$\begin{aligned} \imath_S\Omega &= \imath_{S_L}\pi^*(\sigma) + \imath_{S_L}\omega_L + \imath_Z\pi^*(\sigma) + \imath_Z\omega_L \\ &= \psi_\sigma + dE_L + \imath_Z\omega_L, \end{aligned}$$

así que, Z es solución de

$$\imath_Z\omega_L = d\pi^*(u) - \psi_\sigma.$$

Dicha solución existe debido a que ω_L es una 2-forma no degenerada. □

Nos interesa conocer una fórmula explícita para el semispray S. Sea $Z = Z^k \frac{\partial}{\partial y^k}$, luego

$$\imath_Z\omega_L = -\frac{\partial^2}{\partial y^i y^j} Z^j dx^i.$$

Por otro lado, como $S_L = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + S^j(x,y)\frac{\partial}{\partial y^j}$ y $\pi^*\sigma = \frac{1}{2}\sigma_{ij}dx^i \wedge dx^j$, se tiene que

$$\psi_\sigma = \imath_{S_L}\pi^*(\sigma) = \sigma_{ij}y^i dx^j.$$

Y así, de (4.3.8), llegamos a que

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} Z^j dx^i = \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} - \sigma_{ji}y^i \right) dx^i,$$

es decir, podemos conocer los coeficientes de Z mediante

$$Z^j = -\frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} - \sigma_{qi}y^q \right), \tag{4.3.9}$$

donde g^{ij} es el inverso del Hessiano de L definido por $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}$.

Finalmente, la forma explícita del semispray $S = S_L + Z$ es

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^k} y^k - \frac{\partial u}{\partial x^j} + \sigma_{qj}y^q \right) \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{4.3.10}$$

Observación 13. *Para este semispray, la conexión adaptada a S, $\tilde{\Gamma}$, existe si y sólo si $du = 0$, pues del Teroema 1.36 sabemos que $\tilde{\Gamma}$ existe si y sólo si $S|_M = 0$.*

4.4 Ejemplos

4.4.1 Variedad Riemanniana

Consideremos ahora una variedad Riemanniana $(M, g_{ij}(x))$ y la función $L(x,y) = g_{ij}(x)y^i y^j$, $L \in \mathcal{C}^\infty_{TM}$. El semispray asociado a (4.3.3) es

$$\begin{aligned} S &= y^i \tfrac{\partial}{\partial x^i} - \left(\tfrac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}\right)^{-1}\left(\tfrac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^k} y^k - \tfrac{\partial L}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^i} \\ &= y^i \tfrac{\partial}{\partial x^i} - \tfrac{1}{2} g^{ij}\left(\left[2\tfrac{\partial g_{jq}(x)}{\partial x^p} - \tfrac{\partial g_{pq}(x)}{\partial x^j}\right] y^p y^q\right)\tfrac{\partial}{\partial y^i} \\ &= y^i \tfrac{\partial}{\partial x^i} - \tfrac{1}{2} g^{ij}\left(\left[\tfrac{\partial g_{jp}(x)}{\partial x^q} + \tfrac{\partial g_{jq}(x)}{\partial x^p} - \tfrac{\partial g_{pq}(x)}{\partial x^j}\right] y^p y^q\right)\tfrac{\partial}{\partial y^i} \\ &= y^i \tfrac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^i_{pq} y^p y^q \tfrac{\partial}{\partial y^i}, \end{aligned}$$

donde g^{ij} es la inversa de g_{ij} y Γ^i_{pq} son los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita asociada a g_{ij}. Con esto, la conexión no lineal $\tilde{\Gamma}$ tal que $\xi_{\tilde{\Gamma}} = S$ (conexión no lineal adaptada a S) es (por (1.26))

$$\tilde{\Gamma} = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - 2\Gamma^i_{pq} y^q dx^p \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} - dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Esta conexión no lineal induce una descomposición $TTM = \tilde{\mathbb{H}} \oplus \tilde{\mathbb{V}}$, donde $\tilde{\mathbb{H}} := span\left\{\frac{\tilde{\delta}}{\delta x^i}\right\}$ y

$$\frac{\tilde{\delta}}{\delta x^i} = \tilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}^j_i \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^s_{ij} y^j \frac{\partial}{\partial y^s}. \tag{4.4.1}$$

Resulta que la conexión no lineal adaptada al semispray S_L, $\tilde{\Gamma}$, coincide con la conexión homogénea de Eheresmann asociada a la conexión de Levi-Civita, es decir, $\mathbb{H}^\nabla = \tilde{\mathbb{H}}$, o equivalentemente, $\frac{\tilde{\delta}}{\delta x^i} = hor^\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$.

Ahora veamos la estructura del algebroide de Lie inducido por $\tilde{\Gamma}$.

En la base usual, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$, veamos cómo actúa la conexión,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}\right) &= \tfrac{\partial}{\partial x^i} - 2\tilde{\Gamma}^k_{ir} y^r \tfrac{\partial}{\partial y^k}, \\ \tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right) &= -\tfrac{\partial}{\partial y^j}, \end{aligned}$$

con esto, la aplicación ancla, $=\frac{1}{2}(Id_{TTM}-\tilde{\Gamma})$, sobre elementos de la base es,

$$\begin{aligned} q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{\partial}{\partial x^i}+2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k}\right)\\ &= \tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k},\\ q\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}+\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y^j}, \end{aligned}$$

y el corchete lo calcularemos también sobre elementos de la base. Empezaremos con $[[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}]]_{\tilde{\Gamma}}$, para esto, calculemos la torsión de Nijenhuis,

$$\begin{aligned} T_{\tilde{\Gamma}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \left[\tilde{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),\tilde{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right]-\tilde{\Gamma}\left(\left[\tilde{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),\frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right)\\ &\quad -\tilde{\Gamma}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\tilde{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right]\right)+\tilde{\Gamma}^2\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right)\\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x^i}-2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial x^j}-2\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\frac{\partial}{\partial y^s}\right]-\tilde{\Gamma}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}-2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]\\ &\quad -\tilde{\Gamma}\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}-2\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\frac{\partial}{\partial y^s}\right]\\ &= 2\left(-\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\frac{\partial}{\partial y^s}\right]-\left[\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]+2\left[\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k},\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\frac{\partial}{\partial y^s}\right]\right.\\ &\quad \left.+\tilde{\Gamma}\left(\left[\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right)+\tilde{\Gamma}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\frac{\partial}{\partial y^s}\right]\right)\right)\\ &= 2\left(-\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^s}\right]-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\right)\frac{\partial}{\partial y^s}-\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\left[\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right.\\ &\quad +\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\right)\frac{\partial}{\partial y^k}+2\left(\tilde{\Gamma}^k_{ir}\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^py^r\left[\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^s}\right]+\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k}\left(\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\right)\frac{\partial}{\partial y^s}\right.\\ &\quad \left.\left.-\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\frac{\partial}{\partial y^s}\left(\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\right)\frac{\partial}{\partial y^k}\right)-\tilde{\Gamma}\left(-\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\left[\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\right)\frac{\partial}{\partial y^k}\right)\right.\\ &\quad \left.-\tilde{\Gamma}\left(-\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^s}\right]+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\right)\frac{\partial}{\partial y^s}\right)\right)\\ &= 2\left(\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}+\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^k}+2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^s}\right.\\ &\quad \left.-2\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial y^s}\frac{\partial}{\partial y^k}-\tilde{\Gamma}\left(\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^k}-\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}\right)\right)\\ &= 2\left(-\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}+\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^k}+2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^s}\right.\\ &\quad \left.-2\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial y^s}\frac{\partial}{\partial y^k}+\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^k}-\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}\right)\\ &= 4\left(-\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}+\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^k}+\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^s}-\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial y^s}\frac{\partial}{\partial y^k}\right)\\ &= 4\left(y^r\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^k}-y^p\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}+y^r\tilde{\Gamma}^k_{ir}\tilde{\Gamma}^s_{jk}\frac{\partial}{\partial y^s}-y^p\tilde{\Gamma}^r_{jp}\tilde{\Gamma}^k_{ir}\frac{\partial}{\partial y^k}\right)\\ &= 4\left(y^p\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{ip}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^s}-y^p\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}+y^p\tilde{\Gamma}^k_{ip}\tilde{\Gamma}^s_{jk}\frac{\partial}{\partial y^s}-y^p\tilde{\Gamma}^r_{jp}\tilde{\Gamma}^s_{ir}\frac{\partial}{\partial y^s}\right)\\ &= 4y^p\left(\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{ip}}{\partial x^j}-\frac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}}{\partial x^i}+\tilde{\Gamma}^k_{ip}\tilde{\Gamma}^s_{jk}-\tilde{\Gamma}^r_{jp}\tilde{\Gamma}^s_{ir}\right)\frac{\partial}{\partial y^s},\\ &= 4y^pR^s_{pji}\frac{\partial}{\partial y^s}, \end{aligned}$$

donde R^s_{pji} es el tensor de curvatura de Riemann de la conexión de Levi-Civita inducida por g. Luego,

$$\begin{aligned}
[\![\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j}]\!]_{\tilde{\Gamma}} &= \tfrac{1}{2}\Big([\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}] - [\tfrac{\partial}{\partial x^i} - 2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\tfrac{\partial}{\partial y^k},\tfrac{\partial}{\partial x^j}] \\
&\quad -[\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j} - 2\tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\tfrac{\partial}{\partial y^s}] + \tilde{\Gamma}([\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j}])\Big) \\
&\quad +\tfrac{1}{4}\left(T_{\tilde{\Gamma}}(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j})\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(-2y^r\tfrac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}}{\partial x^j}\tfrac{\partial}{\partial y^k} + 2y^p\tfrac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}}{\partial x^i}\tfrac{\partial}{\partial y^s}\right) \\
&\quad +\tfrac{1}{4}\left(4y^pR^s_{pji}\tfrac{\partial}{\partial y^s}\right) \\
&= y^p\left(R^s_{pji} - \tfrac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{ip}}{\partial x^j} + \tfrac{\partial\tilde{\Gamma}^s_{jp}}{\partial x^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^s} \\
&= y^p\left(\tilde{\Gamma}^k_{ip}\tilde{\Gamma}^s_{jk} - \tilde{\Gamma}^r_{jp}\tilde{\Gamma}^s_{ir}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^s}.
\end{aligned}$$

Además, podemos calcular

$$\begin{aligned}
T_{\tilde{\Gamma}}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right) &= \left[\tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}\right),\tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right)\right] - \tilde{\Gamma}\left(\left[\tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}\right),\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) \\
&\quad -\tilde{\Gamma}\left(\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]\right) + \tilde{\Gamma}^2\left(\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) \\
&= \left[\tfrac{\partial}{\partial x^i} - 2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\tfrac{\partial}{\partial y^k}, -\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right] - \tilde{\Gamma}\left(\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i} - 2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\tfrac{\partial}{\partial y^k},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) \\
&\quad -\tilde{\Gamma}\left(\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},-\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) + \tilde{\Gamma}^2\left(\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) \\
&= -2\left(\tfrac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial y^j}\tfrac{\partial}{\partial y^k} + \tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial y^j}\tfrac{\partial}{\partial y^k}\right)\right) \\
&= -2\left(\tilde{\Gamma}^k_{ij}\tfrac{\partial}{\partial y^k} - \tilde{\Gamma}^k_{ij}\tfrac{\partial}{\partial y^k}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\left[\!\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\right]_{\tilde{\Gamma}} &= \tfrac{1}{2}\Big([\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}] - [\tfrac{\partial}{\partial x^i} - 2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\tfrac{\partial}{\partial y^k},\tfrac{\partial}{\partial y^j}] \\
&\quad -[\tfrac{\partial}{\partial x^i},-\tfrac{\partial}{\partial y^j}] + \tilde{\Gamma}([\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}])\Big) + \tfrac{1}{4}\Big(T_{\tilde{\Gamma}}(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j})\Big) \\
&= -\tfrac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r}{\partial y^j}\tfrac{\partial}{\partial y^k} \\
&= -\tilde{\Gamma}^k_{ij}\tfrac{\partial}{\partial y^k}.
\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
T_{\tilde{\Gamma}}\left(\tfrac{\partial}{\partial y^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right) &= \left[\tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial y^i}\right),\tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right)\right] - \tilde{\Gamma}\left(\left[\tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial y^i}\right),\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) \\
&\quad -\tilde{\Gamma}\left(\left[\tfrac{\partial}{\partial y^i},\tilde{\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]\right) + \tilde{\Gamma}^2\left(\left[\tfrac{\partial}{\partial y^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

implica que

$$\begin{aligned}
\left[\!\left[\tfrac{\partial}{\partial y^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\right]_{\tilde{\Gamma}} &= \tfrac{1}{2}\Big([\tfrac{\partial}{\partial y^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}]-[-\tfrac{\partial}{\partial y^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}]\\
&\quad -[\tfrac{\partial}{\partial y^i},-\tfrac{\partial}{\partial y^j}]+\tilde{\Gamma}([\tfrac{\partial}{\partial y^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}])\Big)+\tfrac{1}{4}\Big(T_{\tilde{\Gamma}}(\tfrac{\partial}{\partial y^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j})\Big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Resumiendo, el corchete del algebroide de Lie inducido por $\tilde{\Gamma}$, en la base mencionada esta dado por,

$$\begin{aligned}
[\![\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j}]\!]_{\tilde{\Gamma}} &= y^p\left(\tilde{\Gamma}^k_{ip}\tilde{\Gamma}^s_{jk}-\tilde{\Gamma}^r_{jp}\tilde{\Gamma}^s_{ir}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^s}\\
\left[\!\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\right]_{\tilde{\Gamma}} &= -\tilde{\Gamma}^k_{ij}\tfrac{\partial}{\partial y^k}\\
\left[\!\left[\tfrac{\partial}{\partial y^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\right]_{\tilde{\Gamma}} &= 0.
\end{aligned}$$

Y en la base $\left\{\frac{\tilde{\delta}}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$, donde $\frac{\tilde{\delta}}{\delta x^i}$ está dada por (4.4.1), el algebroide de Lie inducido por $\tilde{\Gamma}$ es $(TTM,q,[\![,]\!]_{\tilde{\Gamma}})$, con $q=\frac{1}{2}(Id_{TTM}-\tilde{\Gamma})$ y corchete definido por (4.1.4).

4.4.2 Lagrangiano de magnetismo

Sea (M,g_{ij}) una variedad pseudo-Riemanniana y consideremos $L(x,y)=mcg_{ij}(x)y^iy^j+\frac{2e}{m}A_i(x)y^i$, $L\in\mathcal{C}^\infty_{TM}$, donde m, c y e son constantes y $A=A_i(x)dx$ es una 1-forma, llamada potencial vectorial con $dA=\frac{1}{2}B_{ij}dx^i\wedge dj^j$ y $B_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^i}$.

De acuerdo a (4.3.1), el semispray asociado a (4.3.3) es

$$\begin{aligned}
S &= y^i\tfrac{\partial}{\partial x^i}+\tfrac{1}{2mc}g^{ij}\left(mc\tfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^i}y^py^q+\tfrac{2e}{m}\tfrac{\partial A_p(x)}{\partial x^i}y^p-2y^kmc\tfrac{g_{iq}}{\partial x^k}y^q-y^k\tfrac{2e}{m}\tfrac{\partial A_i(x)}{\partial x^k}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^j}\\
&= y^i\tfrac{\partial}{\partial x^i}+\tfrac{1}{2mc}g^{ij}\left(mc\left(\tfrac{\partial g_{kq}}{\partial x^i}y^ky^q-2\tfrac{g_{iq}}{\partial x^k}y^qy^k\right)+\tfrac{2e}{m}y^k\left(\tfrac{\partial A_k(x)}{\partial x^i}-\tfrac{\partial A_i(x)}{\partial x^k}\right)\right)\tfrac{\partial}{\partial y^j}\\
&= y^i\tfrac{\partial}{\partial x^i}+\tfrac{1}{2}g^{ij}\left(\tfrac{\partial g_{kq}}{\partial x^i}y^ky^q-2\tfrac{g_{iq}}{\partial x^k}\right)y^qy^k\tfrac{\partial}{\partial y^j}+\tfrac{e}{m^2c}g^{ij}\left(\tfrac{\partial A_k(x)}{\partial x^i}-\tfrac{\partial A_i(x)}{\partial x^k}\right)y^k\tfrac{\partial}{\partial y^j}\\
&= y^i\tfrac{\partial}{\partial x^i}-g^i_{pq}y^py^q\tfrac{\partial}{\partial y^i}+\tfrac{e}{m^2c}g^{ij}\left(\tfrac{\partial A_k(x)}{\partial x^i}-\tfrac{\partial A_i(x)}{\partial x^k}\right)y^k\tfrac{\partial}{\partial y^j}\\
&= y^i\tfrac{\partial}{\partial x^i}-\left(\Gamma^i_{pq}y^q-\tfrac{e}{m^2c}g^{ij}\left(\tfrac{\partial A_p(x)}{\partial x^j}-\tfrac{\partial A_j(x)}{\partial x^p}\right)\right)y^p\tfrac{\partial}{\partial y^i}\\
&= y^i\tfrac{\partial}{\partial x^i}-\left(\Gamma^i_{pq}y^q-\tfrac{e}{m^2c}g^{ij}B_{jp}\right)y^p\tfrac{\partial}{\partial y^i}
\end{aligned}$$

donde g^{ij} es la inversa de g_{ij} y Γ^i_{pq} son los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita asociada a g_{ij}. Notemos que este semispray es como el del ejemplo pasado, de una variedad Riemanniana, más el término $\frac{e}{m^2c}g^{ij}B_{jp}y^p\frac{\partial}{\partial y^i}$. Con esto, la conexión no lineal adaptada a S, $\tilde{\Gamma}$ es

$$\tilde{\Gamma}=dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}-2\left(\Gamma^i_{pq}y^q-\frac{e}{m^2c}g^{ij}B_{jp}\right)dx^p\otimes\frac{\partial}{\partial y^i}-dy^i\otimes\frac{\partial}{\partial y^i}$$

Nuevamente, la conexión adaptada a S es la misma que la del ejemplo Riemanniano más el término $2\frac{e}{m^2c}g^{ij}B_{jp}dx^p \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$.

Veamos la estructura del algebroide de Lie inducido por la conexión adaptada, $\tilde{\Gamma}$.

En la base usual, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$, la conexión sobre elementos de la base actúa de la siguiente manera,

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) & = & \frac{\partial}{\partial x^i} - 2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k} + 2\frac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\frac{\partial}{\partial y^a}, \\ \tilde{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) & = & -\frac{\partial}{\partial y^j}, \end{array}$$

con esto, la aplicación ancla, que es $= \frac{1}{2}(Id_{TTM} - \tilde{\Gamma})$, sobre elementos de la base es,

$$\begin{array}{rcl} q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) & = & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} + 2\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k} - 2\frac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\frac{\partial}{\partial y^a}\right) \\ & = & \tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k} - \frac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\frac{\partial}{\partial y^a}, \\ q\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) & = & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^j} + \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ & = & \frac{\partial}{\partial y^j}. \end{array}$$

Para calcular el corchete nos ayudaremos con los cálculos hechos en el ejemplo anterior.

$$\begin{array}{rcl} T_{\tilde{\Gamma}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) & = & 4y^pR^s_{pji}\frac{\partial}{\partial y^s} + 2\left[\frac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\frac{\partial}{\partial y^a}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \\ & & -4\left[\frac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\frac{\partial}{\partial y^a}, \tilde{\Gamma}^s_{jp}y^p\frac{\partial}{\partial y^s}\right] \\ & & +4\left[\frac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\frac{\partial}{\partial y^a}, 2\frac{e}{mc^2}g^{cd}B_{dj}\frac{\partial}{\partial y^c}\right] \\ & & +2\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{e}{mc^2}g^{cd}B_{dj}\frac{\partial}{\partial y^c}\right] - 4\left[\tilde{\Gamma}^k_{ir}y^r\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{e}{mc^2}g^{cd}B_{dj}\frac{\partial}{\partial y^c}\right] \\ & & -2\tilde{\Gamma}\left(\left[\frac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\frac{\partial}{\partial y^a}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right) - 2\tilde{\Gamma}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{e}{mc^2}g^{cd}B_{dj}\frac{\partial}{\partial y^c}\right]\right) \\ & = & 4y^pR^s_{pji}\frac{\partial}{\partial y^s} - 2\frac{e}{mc^2}\left(\frac{\partial g^{ab}}{\partial x^j}B_{bi} + g^{ab}\frac{\partial B_{bi}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^a} \\ & & -4\frac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\tilde{\Gamma}^s_{ja}\frac{\partial}{\partial y^s} + 2\frac{e}{mc^2}\left(\frac{\partial g^{cd}}{\partial x^i}B_{dj} + g^{cd}\frac{\partial B_{dj}}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^c} \\ & & +4\frac{e}{mc^2}g^{cd}B_{dj}\tilde{\Gamma}^k_{ic}\frac{\partial}{\partial y^k} \\ & & +2\tilde{\Gamma}\left(\frac{e}{mc^2}\left(\frac{\partial g^{ab}}{\partial x^j}B_{bi} + g^{ab}\frac{\partial B_{bi}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^a}\right) \\ & & -2\tilde{\Gamma}\left(\frac{e}{mc^2}\left(\frac{\partial g^{cd}}{\partial x^i}B_{dj} + g^{cd}\frac{\partial B_{dj}}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^c}\right) \\ & = & 4\left(y^pR^s_{pji}\frac{\partial}{\partial y^s} - \frac{e}{mc^2}\left(\frac{\partial g^{ab}}{\partial x^j}B_{bi} + g^{ab}\frac{\partial B_{bi}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^a}\right. \\ & & -\frac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\tilde{\Gamma}^s_{ja}\frac{\partial}{\partial y^s} + \frac{e}{mc^2}\left(\frac{\partial g^{cd}}{\partial x^i}B_{dj}\right. \\ & & \left.\left.+g^{cd}\frac{\partial B_{dj}}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^c} + \frac{e}{mc^2}g^{cd}B_{dj}\tilde{\Gamma}^k_{ic}\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \end{array}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\left[\!\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right]\!\right]_{\tilde\Gamma} &= \tfrac{1}{2}\Bigg(-2y^r\tfrac{\partial\tilde\Gamma^k_{ir}}{\partial x^j}\tfrac{\partial}{\partial y^k}+2y^p\tfrac{\partial\tilde\Gamma^s_{jp}}{\partial x^i}\tfrac{\partial}{\partial y^s}\\
&-\left[2\tfrac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\tfrac{\partial}{\partial y^a},\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right]-\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},2\tfrac{e}{mc^2}g^{cd}B_{dj}\tfrac{\partial}{\partial y^c}\right]\Big)\\
&+\tfrac{1}{4}\Big(4y^pR^s_{pji}\tfrac{\partial}{\partial y^s}-\tfrac{e}{mc^2}\left(\tfrac{\partial g^{ab}}{\partial x^j}B_{bi}+g^{ab}\tfrac{\partial B_{bi}}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^a}\\
&-\tfrac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\tilde\Gamma^s_{ja}\tfrac{\partial}{\partial y^s}+\tfrac{e}{mc^2}\left(\tfrac{\partial g^{cd}}{\partial x^i}B_{dj}+g^{cd}\tfrac{\partial B_{dj}}{\partial x^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^c}\\
&+\tfrac{e}{mc^2}g^{cd}B_{dj}\tilde\Gamma^k_{ic}\tfrac{\partial}{\partial y^k}\Big)\Big)\\
&= \tfrac{1}{2}\Bigg(-2y^r\tfrac{\partial\tilde\Gamma^k_{ir}}{\partial x^j}\tfrac{\partial}{\partial y^k}+2y^p\tfrac{\partial\tilde\Gamma^s_{jp}}{\partial x^i}\tfrac{\partial}{\partial y^s}\ +2\tfrac{e}{mc^2}\left(\tfrac{\partial g^{ab}}{\partial x^j}B_{bi}+g^{ab}\tfrac{\partial B_{bi}}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^a}\\
&-2\tfrac{e}{mc^2}\left(\tfrac{\partial g^{cd}}{\partial x^i}B_{dj}+g^{cd}\tfrac{\partial B_{dj}}{\partial x^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^c}\Bigg)+\tfrac{1}{4}\Big(4\Big(y^pR^s_{pji}\tfrac{\partial}{\partial y^s}\\
&-\tfrac{e}{mc^2}\left(\tfrac{\partial g^{ab}}{\partial x^j}B_{bi}+g^{ab}\tfrac{\partial B_{bi}}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^a}-\tfrac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\tilde\Gamma^s_{ja}\tfrac{\partial}{\partial y^s}\\
&+\tfrac{e}{mc^2}\left(\tfrac{\partial g^{cd}}{\partial x^i}B_{dj}+g^{cd}\tfrac{\partial B_{dj}}{\partial x^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^c}+\tfrac{e}{mc^2}g^{cd}B_{dj}\tilde\Gamma^k_{ic}\tfrac{\partial}{\partial y^k}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -y^r\tfrac{\partial\tilde\Gamma^k_{ir}}{\partial x^j}\tfrac{\partial}{\partial y^k}+y^p\tfrac{\partial\tilde\Gamma^s_{jp}}{\partial x^i}\tfrac{\partial}{\partial y^s}+\tfrac{e}{mc^2}\left(\tfrac{\partial g^{ab}}{\partial x^j}B_{bi}+g^{ab}\tfrac{\partial B_{bi}}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^a}\\
&-\tfrac{e}{mc^2}\left(\tfrac{\partial g^{cd}}{\partial x^i}B_{dj}+g^{cd}\tfrac{\partial B_{dj}}{\partial x^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^c}+y^pR^s_{pji}\tfrac{\partial}{\partial y^s}\\
&-\tfrac{e}{mc^2}\left(\tfrac{\partial g^{ab}}{\partial x^j}B_{bi}+g^{ab}\tfrac{\partial B_{bi}}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^a}-\tfrac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\tilde\Gamma^s_{ja}\tfrac{\partial}{\partial y^s}\\
&+\tfrac{e}{mc^2}\left(\tfrac{\partial g^{cd}}{\partial x^i}B_{dj}+g^{cd}\tfrac{\partial B_{dj}}{\partial x^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial y^c}+\tfrac{e}{mc^2}g^{cd}B_{dj}\tilde\Gamma^k_{ic}\tfrac{\partial}{\partial y^k}\\
&= \left(y^p\left(\tilde\Gamma^k_{ip}\tilde\Gamma^s_{jk}-\tilde\Gamma^k_{jp}\tilde\Gamma^s_{ik}\right)-\tfrac{e}{mc^2}\left(g^{ab}B_{bi}\tilde\Gamma^s_{ja}-g^{cd}B_{dj}\tilde\Gamma^s_{ic}\right)\right)\tfrac{\partial}{\partial y^s}.
\end{aligned}$$

De manera análoga calculamos

$$\begin{aligned}
T_{\tilde\Gamma}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right) &= \left[\tilde\Gamma\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}\right),\tilde\Gamma\left(\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]-\tilde\Gamma\left(\left[\tilde\Gamma\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}\right),\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\right)\\
&-\tilde\Gamma\left(\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tilde\Gamma\left(\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]\right)+\tilde\Gamma^2\left(\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\right)\\
&= 0+\left[2\tfrac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\tfrac{\partial}{\partial y^a},-\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]-\tilde\Gamma\left(\left[2\tfrac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\tfrac{\partial}{\partial y^a},-\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\right)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left[\!\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\right]_{\tilde\Gamma} &= \tfrac{1}{2}\Big([\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}]-[\tfrac{\partial}{\partial x^i}-2\tilde\Gamma^k_{ir}y^r\tfrac{\partial}{\partial y^k},\tfrac{\partial}{\partial y^j}]\\
&-[\tfrac{\partial}{\partial x^i},-\tfrac{\partial}{\partial y^j}]+\tilde\Gamma([\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j}])\Big)+\tfrac{1}{4}\left(T_{\tilde\Gamma}(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial y^j})\right)\\
&= -\tilde\Gamma^k_{ij}\tfrac{\partial}{\partial y^k}-\left[2\tfrac{e}{mc^2}g^{ab}B_{bi}\tfrac{\partial}{\partial y^a},\tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\\
&= -\tilde\Gamma^k_{ij}\tfrac{\partial}{\partial y^k}.
\end{aligned}$$

Para el último caso no hay nada que calcular. Así que, en resumen, el corchete del algebroide inducido por $\tilde{\Gamma}$ es

$$\begin{aligned}
[\![\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}]\!]_{\tilde{\Gamma}} &= \left(y^p\left(\tilde{\Gamma}^k_{ip}\tilde{\Gamma}^s_{jk} - \tilde{\Gamma}^k_{jp}\tilde{\Gamma}^s_{ik}\right) - \tfrac{e}{mc^2}\left(g^{ab}B_{bi}\tilde{\Gamma}^s_{ja} - g^{cd}B_{dj}\tilde{\Gamma}^s_{ic}\right)\right)\tfrac{\partial}{\partial y^s} \\
\left[\!\!\left[\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\!\right]_{\tilde{\Gamma}} &= -\tilde{\Gamma}^k_{ij}\tfrac{\partial}{\partial y^k} \\
\left[\!\!\left[\tfrac{\partial}{\partial y^i}, \tfrac{\partial}{\partial y^j}\right]\!\!\right]_{\tilde{\Gamma}} &= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, en este ejemplo

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \left(\Gamma^j_{iq}y^q - \frac{e}{m^2c}g^{jp}B_{pi}\right)\frac{\partial}{\partial y^j},$$

y el algebroide de Lie inducido por $\tilde{\Gamma}$, es $(TTM, q, [\![,]\!]_{\tilde{\Gamma}})$, con $q = \frac{1}{2}(Id_{TTM} - \tilde{\Gamma})$ y corchete definido por (4.1.4) en la base $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$.

4.4.3 Semispray generalizado en variedad Riemanniana

Sea $(M, g_{ij}(x))$ una variedad Riemanniana y la función $L(x,y) = g_{ij}(x)y^iy^j$, $L \in \mathcal{C}^\infty_{TM}$. Si $u \in \mathcal{C}^\infty$ es cualquier función diferenciable y σ una 2-forma en M que es cerrada, el campo Hamiltoniano asociado a $\Omega(\sigma, L)$, definido por (4.3.6) será

$$S = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \left(\Gamma^i_{pq}y^py^q + \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x^j} - \sigma_{qj}y^q\right)\right)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

donde Γ^i_{pq} son los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita asociada a g_{ij}.

Podemos separar este semispray en tres partes $S = S_L + A + B$, donde

$$S_L = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \left(\Gamma^i_{pq}y^py^q\right), \tag{4.4.2}$$

$$A = -\frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x^j}\right), \tag{4.4.3}$$

$$B = \frac{1}{2}g^{ij}\sigma_{qj}y^q. \tag{4.4.4}$$

Es fácil ver que $S_L = y^p hor^\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^p}\right)$ y que $A = -\frac{1}{2}(grad(u))^v$. Para conocer B, recordemos que, dado el tensor métrico g, se define $g^b : TM \to T^*M$ mediante

$$g^b(u)(v) = g(u,v)$$

para $v \in T^*M$, y análogamente para σ, se define σ^b. Afirmamos que $B = \frac{1}{2}C \circ (g^b)^{-1} \circ \sigma^b$, basta con hacer cálculos sencillos pero largos.

Así que, finalmente, podemos dar S como

$$S = y^p hor^{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial x^p}\right) - \frac{1}{2}(grad(u))^v + \frac{1}{2}C \circ (g^b)^{-1} \circ \sigma^b. \tag{4.4.5}$$

Bibliografía

[1] W. Ambrose, R. S. Palais y I. M. Singer, *Sprays*, An. Acad. Bras. Cie. **32** (1960), 163–178. Disponible en: http://vmm.math.uci.edu/PalaisPapers/Sprays(withAmbrose&Singer).pdf.

[2] A. D. Blaom, *Geometric structures as deformed infinitesimal symmetries*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 3651–3671.

[3] F. Cantrijn, J. Cariñena, J. Crampin y L. Ibort, *Reduction of degenerate Lagrangian systems*, J. Geom. Phys. **3** (1986), 353–400.

[4] J. Clemente-Gallardo, *Applications of Lie algebroids in mechanics and control theory*, "Nonlinear control in the Year 2000", Lect. Not. in Control and Inf. Sci. **258** (2001), 299–313.

[5] M. Crainic y R. L. Fernandes, *Lectures on integrability of Lie brackets*, Geometry and Topology Monographs, **17**, (2011), 1-107. Disponible en: http://msp.org/gtm/2011/17/gtm-2011-17-001s.pdf

[6] M. Crainic y I.Moerdijk, *Deformations of Lie brackets: cohomological aspects*, J. Eur. Math. Soc. **10** 4 (2008), 1037–1059 Disponible en: http://arxiv.org/pdf/math/0403434v2.pdf

[7] M. Crampin, *On the differential geometry of the Euler-Lagrange equations, and the inverse problem of Lagrangian dynamics*, J. Phys. A: Math. Gen. **14** (1981), 2567–2575.

[8] M. Crampin, *Tangent bundle geometry for Lagrangian dynamics*, J. Phys. A: Math. Gen. **16** (1983), 3755–3772.

[9] L. De Andrés, M. De León y P. R. Rodrigues, *Connections on tangent bundles of higher order associated to regular Lagrangians*, Geometriae Dedicata **39** 1 (1991), 17–28.

[10] M. De León y P. R. Rodrigues, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland Mathematics Studies **158**, Elsevier, Amsterdam, 1998.

[11] J. P. Dufor, *Normal forms of Lie algebroids*, Banach Center Publications, **54**, (2001), 35–41.

[12] J. P. Dufor y N. T. Zung, *Poisson structures and their normal forms*, Springer Science & Business Media, vol. 242, 2006.

[13] R. L. Fernandes, *Lie Algebroids, Holonomy and Characteristic Classes*, Adv. in Math. **170** 1 (2002), 119–179.

[14] A. Frölicher y A. Nijenhuis, *Invariance of vector form operations under mappings*, Communicationes Mathematicae Helveticae **34** (1960), 227–248

[15] A. Frölicher y A. Nijenhuis, *Theory of vector valued differential forms. Part I.*, Indagationes Math., **18** (1956), 338–359.

[16] J. Grabowski, *Courant-Nijenhuis tensors y generalized geometries*, in “Groups, geometry and physics”, Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza **29** (2006), 101–112. Disponible en: http://arxiv.org/abs/math/0601761.

[17] J. Grabowski, *Brackets*, Int. J. of Geom. Methods in Mod. Phys. **10** 8 (2013), 1360001 (45 pages).

[18] D. Husemöller, M. Joachim, B. Jurčo y M. Schottenloher, *Basic Bundle Theory and $K-$Cohomology Invariants*, Lecture Notes in Physics **726**, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[19] I. Kolář, P. W. Michor y J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1994.

[20] Y. Kosmann-Schwarzbach y F. Magri, *Possion-Nijenhuis structures*, Annales de l'I.P.H., section A, vol. 53, no 1, Elsevier (1990), p.35-81. Disponible en: http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AIHPA/AIHPA_1990__53_1/AIHPA_1990__53_1_35_0/AIHPA_1990__53_1_35_0.pdf

[21] K. C. H. Mackenzie, *Lie algebroids and Lie pseudoalgebras,*, Bull. London Math. Soc.**27**, (1995), 97–147.

[22] K. C. H. Mackenzie, *General Theory of Lie Groupoids and Lie algebroids*, London Math. Soc. Lec. Notes **213**, Cambridge UP, Cambridge, 2005.

[23] E. Martínez, *Lagrangian mechanics on Lie algebroids*, Acta Appl. Math. **67** (2001), 295–320.

[24] E. Martínez, *Lie Algebroids in Classical Mechanics and Optimal Control*, SIGMA **3** (2007), 050 (17 pages).

[25] P. W. Michor, *Remarks on the Frölicher-Nijenhuis bracket*, Proceedings of the Conference on Differential Geometry and its Applications, Brno (1986), Springer-Verlag, Berlin, 1987. Disponible en: http://www.mat.univie.ac.at/~michor/froe-nij.pdf.

[26] P. W. Michor, *Topics in differential geometry*, American Mathematical Soc., vol.93, 2008.

[27] R. Miron, *Lagrangian and Hamiltonian Geometries. Applications to Analytical Mechanics*, preprint arXiv:1203.4101, 2012

[28] J. Monterde y A. Montesinos, *Integral curves of derivations*, Ann. of Global Anal. and Geom. **6** 2, (1988), 177–189.

[29] A. Nijenhuis, *Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields I*, Indagationes Math., **17** (1955), 390–403.

[30] A. Nijenhuis and R. Richardson, *Deformation of Lie algebra structures*, J. Math. Mech. **17** (1967), 89–105.

[31] L. Popescu, *Geometrical structures on Lie algebroids*, Publ. Math. Debrecen, **72** (2007), 95–110.

[32] I. Vaisman, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom, **8**, (1983), 523–557.

[33] I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progress in Mathematics, **118**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[34] A. Weinstein, *Lagrangian Mechanics and Groupoids*, in “Mechanics Day”, Fields Inst. Comm. **7**, AMS Publishing (1996), 207–232. Disponible en: http://math.berkeley.edu/~alanw/Lagrangian.tex.

[35] A. Weinstein, *Almost invariant submanifolds for compact group actions*, J. Eur. Math. Soc., **2**, (2000), 53–86.

[36] A. Weinstein, *The Integration Problem for Complex Lie Algebroids*, in “From Geometry to Quantum Mechanics”, Progress in Mathematics **252**, 93–109, Birkhäuser, Boston, 2007.