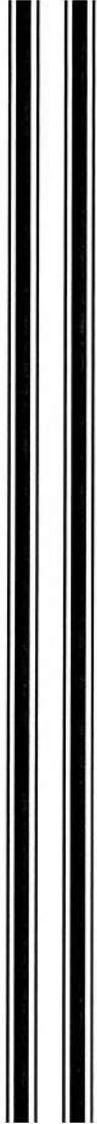




"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Comportamiento Frontera de Familias de Funciones
Suaves en el Disco

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Daniel Ivan Ramirez Montaña

Directora de Tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, Mayo de 2016

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

QA322.4
.R34

R. T170081

SINODALES

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

M.C. Carolina Espinoza Villalva
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dra. Marysol Navarro Burruel
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

A mis abuelos, Isabel y Rubén.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, Jaime y Laura. Sin ellos simplemente no sería nada de lo que hoy soy. A mis hermanos, Jaime A. y Joel, con los que he compartido todo en esta vida. A mis abuelos: Cruz y Lola, por siempre alentarme a seguir preparandome, e Isabel y Rubén, por el enorme apoyo que me han brindado, sobre todo en estos últimos 5 años.

A los profesores del Departamento de Matemáticas que contribuyeron en mi formación. De manera especial menciono a los profesores Agustín Brau, Carlos Robles, Daniel Olmos y Martín García, quienes siempre mostraron la disponibilidad para brindarme su consejo y ayuda cuando así lo necesité.

A mi directora de tesis, Martha Guzmán, por guiarme en la realización de este trabajo y por la paciencia que me tuvo y ayuda que me brindó a pesar de nunca haberme dado clase y apenas conocerme. De igual manera agradezco a mis sinodales: Carlos Robles, Carolina Espinoza y Marysol Navarro, por el tiempo dedicado a revisar este trabajo y por sus sugerencias y comentarios.

A mis compañeros de generacion(es) y carrera. En especial a Arturo, César, Diana, Gabriel, Jorge, José y Luis. Junto a ellos, las matemáticas no son tan complicadas. Diana: de nada.

Por último quiero expresar mi gratitud hacia la Olimpiada Sonorense de Matemáticas y todos los que han colaborado en ella. A través de ésta es que muchos jóvenes descubrimos un nuevo y emocionante mundo que explorar.

Contenidos

Introducción	xi
1 Espacios de Hilbert	1
2 Series Trigonómicas	11
2.1 El Sistema Trigonómico	12
2.2 Series de Fourier	18
3 Valores Frontera de Algunas Funciones Analíticas en el Disco	29
3.1 El Espacio de Hardy H^2	29
3.2 Teorema de Fatou	47
4 Espacios de Hilbert con Núcleo Reproductor	55
4.1 Espacios Funcionales de Hilbert	56
4.2 Núcleos Reproductores	60
4.3 El Símbolo de Berezin	64
5 Comportamiento Frontera de Clases Especiales de Funciones	
C^∞ en el Disco	69
5.1 Valores Frontera de Símbolos de Berezin	69
5.2 Una Función Analítica sin Límites Radiales	75

Conclusiones	79
A La Función Maximal de Poisson	81
B Operadores Compactos	85

Introducción

No es extraño encontrarnos con la frase “propiedad deseable” dentro del contexto matemático. Con esto entendemos que hay ciertas cualidades que hacen que sea más agradable lidiar con un objeto matemático que con otro. Por ejemplo, en cuanto a funciones reales definidas sobre un intervalo $[a, b]$, muchos coincidirán en que es preferible trabajar con funciones continuas, que con discontinuas. Similarmente, muchas veces preferiremos al conjunto de los reales \mathbb{R} sobre el de los racionales \mathbb{Q} , pues en el primero a diferencia del segundo, toda sucesión de Cauchy es convergente dentro del mismo conjunto. Lo que sugerimos con estos ejemplos es que propiedades como la continuidad o la completez son consideradas deseables.

Para las funciones de variable compleja, una propiedad deseable es la analiticidad. Así, las funciones ideales en este caso serían las enteras, pues son analíticas en todo \mathbb{C} . Sin embargo, no todas las funciones analíticas son enteras, y algunas ven restringido su dominio de analiticidad a un subconjunto $G \subset \mathbb{C}$. En particular, nos interesa el caso $G = D$, el disco unitario. Es aquí donde surge la pregunta, ¿Qué ocurre en la frontera de D ? ¿Es posible extender estas características deseables a la frontera, o hay algo que nos lo impida? Estas cuestiones han sido ampliamente estudiadas, y hoy sabemos que el comportamiento de una función puede diferir mucho entre D y su frontera. Resultados notables al respecto han sido obtenidos por Hadamard,

Ostrowski, Lohwater o Binnmore, sólo por mencionar algunos.

En el afán de encontrar respuestas a este tipo de preguntas, dedicamos esta tesis a estudiar, mediante herramientas de la teoría de espacios de Hilbert, el comportamiento frontera de funciones suaves y analíticas en el disco. El texto consta de cinco capítulos distribuidos de la siguiente manera:

El primer capítulo está dedicado a dar un breve resumen de la teoría general de espacios de Hilbert. En él abarcamos los conceptos y herramientas que habremos de utilizar a lo largo de todo el trabajo.

En el segundo capítulo estudiamos el espacio $L^2(T)$ como espacio de Hilbert y encontramos una base ortonormal para éste. Introducimos los conceptos de coeficientes y serie de Fourier para una función f , y utilizamos dicha base ortonormal para obtener expresiones concretas para éstos en el caso $f \in L^2(T)$. De este análisis, deducimos la respuesta en el sentido positivo al problema de la convergencia de la serie de Fourier bajo el contexto de $L^2(T)$. También damos solución a este problema para el caso $C(T)$, pero en esta ocasión de manera negativa.

En el tercer capítulo estudiamos un espacio de Hilbert de funciones analíticas en el disco, el espacio de Hardy H^2 . Damos una definición para éste en términos de coeficientes de Taylor y demostramos que es equivalente a la definición usada tradicionalmente. Obtenemos también al subconjunto de los núcleos reproductores de H^2 , los cuales nos ayudan a describir los demás elementos del espacio, y que utilizamos para probar varios resultados. Entre ellos, las fórmulas integrales de Poisson y de Cauchy. Finalizamos este capítulo demostrando el teorema de Fatou, el cual nos garantiza la existencia de límites radiales para funciones en H^2 .

En el capítulo 4 exponemos ejemplos de espacios de Hilbert de funciones que toman valores en los complejos en los que el mapeo que asigna a cada

función su evaluación en un punto fijo resulta una transformación continua. Esta característica nos asegura que podemos encontrar núcleos reproductores en estos espacios, tal y como lo hicimos para H^2 . Calculamos las expresiones de estos núcleos para algunos de los ejemplos presentados. Posteriormente, usamos estos núcleos para definir el símbolo de Berezin y demostramos algunas de sus propiedades. Entre éstas, demostramos que a través del símbolo de Berezin podemos obtener funciones infinitamente diferenciables en el disco a partir de operadores que actúan en el espacio de Hilbert correspondiente.

Finalmente, en el último capítulo examinamos el comportamiento frontera de funciones suaves en el disco dadas mediante el símbolo de Berezin de un operador en $\mathcal{L}(H^2)$. En este sentido, demostramos que el símbolo de Berezin inducido por un operador compacto es igual a cero en la frontera y exhibimos un operador acotado en el que los límites radiales ni siquiera existen. También damos condiciones suficientes y necesarias en términos de símbolos de Berezin para garantizar un buen comportamiento frontera para cierto espacio de funciones analíticas. Concluimos el capítulo presentando el ejemplo de una función que es analítica en el disco y carece de límites radiales en todos los puntos del círculo unitario.

Hemos además agregado dos breves apéndices en los que incluimos material relacionado a la función maximal de Poisson y a la teoría de operadores compactos, con el objetivo de que éstos puedan complementar lo visto dentro del cuerpo de la tesis.

Capítulo 1

Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert ocupan un lugar de enorme importancia dentro del conocimiento matemático. Esto no debería causarnos ninguna sorpresa, pues fue el estudio de sus propiedades lo que en su momento guió a los matemáticos hacia la generalización. Usaremos estas propiedades en el desarrollo de los demás capítulos, por lo que destinamos este primero a recordar las definiciones y resultados básicos de la teoría de espacios de Hilbert.

Definición 1.0.1 Sea H espacio vectorial sobre un campo \mathbb{K} (ya sea \mathbb{R} o \mathbb{C}) y sean $x, y, z \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$. A una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ que satisface:

$$i) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle ,$$

$$ii) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} ,$$

$$iii) \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle ,$$

$$iv) \langle x, x \rangle \geq 0 ,$$

$$v) \langle x, x \rangle = 0 \text{ si y sólo si } x = 0,$$

se le llama producto interno en H , y se dice que H es un espacio con producto interno o un espacio pre-Hilbert.

Algunas consecuencias inmediatas de las cinco condiciones anteriores son:

- i) y ii) implican la distributividad en la segunda componente:

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

- ii) y iii) muestran que $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$.

- iii) implica $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$.

- iv) nos permite definir

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

la cual resulta ser una norma en H . Nótese que v) garantiza que el vector cero en H es el único con norma igual a cero.

A la norma que queda definida de esta manera se le conoce como la norma inducida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 1.0.2 Sea H espacio con producto interno. Decimos que H es espacio de Hilbert si es completo con respecto a la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$, donde $\| \cdot \|$ es la norma inducida por el producto interno.

Con el fin de ilustrar las definiciones anteriores, damos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.0.3 Espacio Euclidiano \mathbb{K}^n

El espacio euclidiano n -dimensional $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$ es espacio de Hilbert, pues la norma euclidiana $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$, con la cual sabemos que es completo, es inducida por el producto interno

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

Ejemplo 1.0.4 Espacio ℓ^2

Consideremos

$$\ell^2 = \left\{ \mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\},$$

el cual es un espacio de Banach con la norma $\|\mathbf{x}\|_{\ell^2} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$ (ver [11], pág. 35). Para cada pareja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2$ consideremos

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$

el cual por la desigualdad de Hölder está bien definido. Así $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno en ℓ^2 que induce a $\|\cdot\|_{\ell^2}$. Por lo tanto, ℓ^2 es espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.0.5 Espacio de Lebesgue $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$

Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida, y consideremos

$$L^2(X, \mathcal{F}, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \|f\|_2 = \int_X |f|^2 d\mu < \infty \right\}.$$

Por la desigualdad de Hölder sabemos que $f\bar{g} \in L^1$. Así podemos definir

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\bar{g} d\mu.$$

De esta forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, e induce la norma $\|\cdot\|_2$:

$$\langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int f\bar{f} d\mu \right)^{1/2} = \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} = \|f\|_2.$$

Sabemos que L^2 es completo con esta norma (ver [5], pág. 183), así $(L^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.0.6 Espacio de Bergman $L_a^2(G)$

Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ abierto. El espacio de Bergman para G se define como

$$L_a^2(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ analítica, } \int \int_G |f(x + iy)|^2 dx dy < \infty \right\} .$$

Nótese que esta integral se toma con respecto a la medida de Lebesgue bidimensional. Además, dado que $L_a^2(G) \subset L^2(\eta)$, donde η es la medida de Lebesgue en G , tenemos que $L_a^2(G)$ hereda de manera natural el producto interno y la norma de $L^2(\eta)$.

A continuación presentamos un par de resultados que nos ayudarán a demostrar que $L_a^2(G)$ es espacio de Hilbert.

Lema 1.0.7 *Sea f analítica en una vecindad de $\overline{B_r(z_0)}$. Entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int \int_{B_r(z_0)} f(x, y) dx dy .$$

Demostración: Haciendo el cambio de coordenadas rectangulares a polares y usando la propiedad del valor medio para funciones analíticas tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \int \int_{B_r(z_0)} f(x, y) dx dy &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + te^{i\theta}) t d\theta dt \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r t \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + te^{i\theta}) d\theta \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi r^2} 2\pi f(z_0) \int_0^r t dt \\ &= \frac{2}{r^2} f(z_0) \frac{t^2}{2} \Big|_0^r = f(z_0) . \end{aligned}$$

■

Corolario 1.0.8 *Si $f \in L_a^2(G)$, $z_0 \in G$ y $0 < r < d(z_0, \partial G)$, entonces*

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_2 .$$

Demostración: Como $r < d(z_0, \partial G)$ entonces $\overline{B_r(z_0)} \subseteq G$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el lema anterior tenemos:

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{\pi r^2} \left| \int \int_{B_r(z_0)} f \cdot 1 \, dx dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \left[\int \int_{B_r(z_0)} |f|^2 \, dx dy \right]^{1/2} \left[\int \int_{B_r(z_0)} 1^2 \, dx dy \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \|f\|_2 (\pi r^2)^{1/2} = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_2. \end{aligned}$$

■

Proposición 1.0.9 $L_a^2(G)$ es espacio de Hilbert.

Demostración: Sea η la medida de Lebesgue en G . Sabemos que $L_a^2(G) \subseteq L^2(\eta)$ y que $L^2(\eta)$ es Hilbert. Por lo tanto bastará con demostrar que $L_a^2(G)$ es cerrado en $L^2(\eta)$.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ sucesión en $L_a^2(G)$ convergente a una función $f \in L^2(\eta)$, es decir, $\int |f_n - f|^2 \, d\eta \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Queremos demostrar que $f \in L_a^2(G)$.

Sea $\overline{B_r(z_0)}$ un disco cerrado en G y $z \in \overline{B_r(z_0)}$. Entonces como $d(\overline{B_r(z_0)}, \partial G) \leq d(z, \partial G)$, para cualquier $0 < \delta \leq d(\overline{B_r(z_0)}, \partial G)$ se tiene $0 < \delta \leq d(z, \partial G)$. Usando esto y el corolario anterior:

$$|f_n(z) - f_m(z)| = |(f_n - f_m)(z)| \leq \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \|f_n - f_m\|_2.$$

Así $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente de Cauchy en cualquier disco cerrado en G . De la teoría estándar de funciones analíticas se sigue que existe una función g analítica en G tal que $f_n \rightarrow g$ uniformemente en discos cerrados de G . Además como $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\eta)$, sabemos que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tal que $f_{n_k}(z) \rightarrow f(z)$ para casi toda $z \in G$. Luego, $f = g$ casi en todo punto de G , y por lo tanto $f \in L_a^2(G)$.



Al surgir los espacios de Hilbert de manera natural como una generalización a dimensión infinita de los espacios euclidianos, éstos preservan muchas de sus características deseables. Una de estas características, es la del concepto de ortogonalidad.

Definición 1.0.10 *Sea H espacio de Hilbert. Decimos que dos vectores $x, y \in H$ son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$, y lo denotamos por $x \perp y$.*

Asimismo un conjunto $V \subseteq H$ es ortogonal, si $\langle u, v \rangle = 0$ para todos $u, v \in V$.

Definición 1.0.11 *Sea $\{u_\alpha\}$ un subconjunto de vectores en H , donde α varía sobre un conjunto I de índices. Decimos que $\{u_\alpha\}$ es ortonormal si*

$$\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} .$$

Dicho de otra forma, $\{u_\alpha\}$ es ortonormal si es ortogonal y $\|u_\alpha\| = 1$ para todo $\alpha \in I$.

Exponemos a continuación un par de resultados que son de utilidad dentro de este contexto.

Teorema 1.0.12 Desigualdad de Bessel

Sea H de Hilbert y $\{u_\alpha : \alpha \in I\}$ un subconjunto ortonormal. Entonces para cada $x \in H$ se tiene

$$\sum_{\alpha \in I} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Demostración: Ver [3], página 15.

Teorema 1.0.13 Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto linealmente independiente de un espacio de Hilbert H . Entonces existe un subconjunto ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ el subespacio generado por $\{u_1, \dots, u_k\}$ es el mismo que el generado por $\{x_1, \dots, x_k\}$.

Demostración: Ver [11], página 157.

Al agregar a los conjuntos ortonormales la condición adicional de maximalidad, obtenemos una familia de subconjuntos que nos es de especial interés: las bases ortonormales. Su relevancia radica en el hecho de que nos permiten describir a cualquier elemento del espacio, así como también nos proveen de fórmulas explícitas para expresar la norma y el producto interno.

Definición 1.0.14 Diremos que un subconjunto $\mathcal{E} = \{e_i : i \in I\}$ de un espacio de Hilbert H es un sistema ortonormal completo o una base ortonormal, si \mathcal{E} es ortonormal y es maximal con respecto a la ortogonalidad.

Esta última condición de ser maximal se puede reescribir como: \mathcal{E} tiene la propiedad de que si existe algún $x \in H$ tal que $\langle x, e_i \rangle = 0$ para toda $i \in I$, entonces $x = 0$.

Teorema 1.0.15 Caracterización de Bases Ortonormales

Sea $\mathcal{E} = \{e_i : i \in I\}$ un subconjunto ortonormal de H . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) \mathcal{E} es una base ortonormal.
- b) El subespacio generado por \mathcal{E} , $\langle \mathcal{E} \rangle$, es denso en H .
- c) Para cada $x \in H$ se tiene $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.
- d) Para cada $x \in H$ se tiene $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$.
- e) Si $x, y \in H$ entonces $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$.

Demostración: Ver [3], página 16.

La igualdad en c) es llamada la representación en Serie de Fourier de x , mientras que la igualdad en e) es conocida como la Identidad de Parseval.

De manera similar a muchas otras ramas de la matemática, nos interesa saber cuando dos espacios preserven la misma estructura básica, y por ende, son esencialmente el mismo. Para nuestro interés, dicha estructura es la del producto interno, y las transformaciones que lo preservan son las isometrías. El resultado que enseguida mostramos nos brinda una identificación de este tipo, ya que nos afirma que todos los espacios de Hilbert con una base ortonormal numerable son, desde nuestro punto de vista, el mismo.

Teorema 1.0.16 Caracterización de Espacios de Hilbert Separables

Sea H espacio de Hilbert con base ortonormal numerable $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $H \cong \ell^2$ isométricamente, con la isometría dada por

$$\varphi : H \rightarrow \ell^2$$

$$\varphi(x) = \{\langle x, e_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$$

Demostración: Ver [17], página 169.

Para concluir este capítulo presentamos una última definición: el complemento ortogonal. En particular, haremos uso de esta nueva herramienta para demostrar el bien conocido Teorema de Representación de Riesz. Este teorema nos permite hacer una identificación entre los funcionales lineales acotados definidos en un espacio de Hilbert con los elementos del espacio mismo.

Definición 1.0.17 Sea $A \subseteq H$. Definimos el complemento ortogonal de A como $A^\perp := \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0 \ \forall a \in A\}$

A partir de esta definición no es difícil comprobar que A^\perp es un subespacio lineal cerrado de H , y que si A es subespacio cerrado propio de H , entonces $A^\perp \neq \{0\}$.

Teorema 1.0.18 Teorema de Representación de Riesz

Sea $L : H \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal acotado. Entonces, existe un único $x_0 \in H$ tal que $L(x) = \langle x, x_0 \rangle$ para cada $x \in H$. Más aún, $\|L\| = \|x_0\|$.

Demostración: Si $L \equiv 0$, basta con tomar $x_0 = 0$. Supongamos entonces $L \neq 0$ y sea $M = \ker\{L\}$. Así $M \subsetneq H$. Además como L es continua, M es un subespacio lineal cerrado de H y por lo tanto $M^\perp \neq \{0\}$. Sea $z \in M^\perp$, $z \neq 0$. Para cada $x \in H$ consideremos el elemento $x - \frac{L(x)}{L(z)}z \in H$. Entonces

$$L\left(x - \frac{L(x)}{L(z)}z\right) = L(x) - \frac{L(x)}{L(z)}L(z) = 0.$$

De donde se sigue que $x - \frac{L(x)}{L(z)}z \in M$. Luego

$$0 = \left\langle x - \frac{L(x)}{L(z)}z, z \right\rangle = \langle x, z \rangle - \frac{L(x)}{L(z)}\|z\|^2,$$

lo que implica

$$\frac{L(x)}{L(z)}\|z\|^2 = \langle x, z \rangle.$$

Consecuentemente

$$L(x) = \left\langle x, \frac{\overline{L(z)}}{\|z\|^2}z \right\rangle.$$

Como esta igualdad se tiene para cada $x \in H$, tomando $x_0 = \frac{\overline{L(z)}}{\|z\|^2}z$ tenemos que $L(x) = \langle x, x_0 \rangle$.

Para la unicidad, supongamos que $x'_0 \in H$ tal que $L(x) = \langle x, x_0 \rangle = \langle x, x'_0 \rangle$. Luego $\langle x, x_0 - x'_0 \rangle = 0$ para toda x , en particular para $x = x_0 - x'_0$. Esto implica $\|x_0 - x'_0\| = 0$ y por ende $x'_0 = x_0$.

Por último, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle x, x_0 \rangle|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|\|x_0\|}{\|x\|} = \|x_0\|.$$

Para ver que se tiene la igualdad, basta tomar $x = x_0$.

■

Capítulo 2

Series Trigonométricas

En este segundo capítulo nos ocuparemos en desarrollar algunas aplicaciones de la teoría de espacios de Hilbert que presentamos en el primer capítulo. Estas aplicaciones estarán por el momento, dirigidas hacia el contexto de las series trigonométricas. Posterior a esto, emplearemos la teoría estudiada para dar solución al problema de la convergencia de la serie de Fourier de una función f a f en $L^2(T)$, para luego abordar el mismo problema de convergencia con f en $C(T)$. Para concluir, plantearemos diferentes tipos de convergencia de la serie de Fourier: casi en todas partes y en $L^p(T)$.

Sea $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circunferencia unidad en el plano complejo, y sea F una función definida en T que toma valores en \mathbb{C} , *i.e.*, $F : T \rightarrow \mathbb{C}$. Si definimos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ por $f(t) = F(e^{it})$, tendremos que f es una función de período 2π . Recíprocamente, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es de período 2π , entonces $F : T \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(e^{it}) = f(t)$ resulta una función compleja definida en T . Así obtenemos una identificación natural entre las funciones complejas definidas en T y las funciones complejas definidas en \mathbb{R} de período 2π . Para simplificar la notación, en ocasiones escribiremos $f(t)$ en vez de $f(e^{it})$, aún

cuando estemos considerando a f como una función definida en T .

Teniendo presente los convenios anteriores, para $1 \leq p < \infty$ definimos $L^p(T)$ como la clase de todas las funciones complejas, Lebesgue medibles y de período 2π definidas en \mathbb{R} para las cuales la norma

$$\|f\|_p = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right]^{1/p}$$

es finita. Dicho de otra forma, consideramos $L^p(\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue en $[-\pi, \pi]$ (o en T), multiplicada por el factor $\frac{1}{2\pi}$. Nótese que este factor se agrega solamente con el fin de simplificar el formalismo que se desarrollará, pues por ejemplo, hace que la norma L^p de la función constante 1 sea igual a 1.

Consideraremos también la clase $L^\infty(T)$ de las funciones de período 2π de $L^\infty(\mathbb{R})$, con la norma del supremo esencial:

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) = 0 \right\}.$$

Así como a la clase $C(T)$ de todas las funciones complejas continuas sobre T (o complejas continuas de período 2π sobre \mathbb{R}) con la norma del supremo¹

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in T} |f(t)|.$$

2.1 El Sistema Trigonométrico

Definición 2.1.1 *Un polinomio trigonométrico es una suma finita de la forma*

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde a_1, \dots, a_N y b_1, \dots, b_N son números complejos.

¹Para la norma del supremo usamos también la notación $\| \cdot \|_\infty$, pues para el caso continuo coincide con la norma del supremo esencial.

Debido a la identidad de Euler podemos reescribir el polinomio trigonométrico en la forma

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int},$$

donde los coeficientes quedan determinados por $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ y $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Además es claro a partir de la definición que todo polinomio trigonométrico es de período 2π .

Definimos el producto interior en $L^2(T)$ por

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Esta definición concuerda con la de $\|\cdot\|_2$, pues $\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$, i.e., genera la norma en L^2 .

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ escribimos $u_n(t) = e^{int}$. De esta forma tenemos

$$\langle u_n, u_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Lo anterior muestra que $\mathcal{U} = \{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un subconjunto ortonormal de $L^2(T)$, habitualmente llamado sistema trigonométrico. Nuestra intención es mostrar que \mathcal{U} es maximal, y por lo tanto, una base ortonormal para $L^2(T)$.

Por el Teorema de Caracterización de Bases Ortonormales, sabemos que \mathcal{U} será base ortonormal si y sólo si su conjunto generado $\langle \mathcal{U} \rangle$ es denso en $L^2(T)$, es decir, si el conjunto de polinomios trigonométricos es denso en $L^2(T)$. Además, sabemos que $C(T)$ es denso en $L^2(T)$ ([16] pág. 69), por lo tanto, basta con probar que dada $f \in C(T)$ y $\epsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico P tal que $\|f - P\|_2 < \epsilon$.

Ahora, como

$$\|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|g\|_{\infty}^2 dt = \frac{\|g\|_{\infty}^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = \|g\|_{\infty}^2 ,$$

tenemos que $\|g\|_2 \leq \|g\|_{\infty}$ para cada $g \in C(T)$. Debido a esto, la estimación $\|f - P\|_2 < \epsilon$ se verificará si $\|f - P\|_{\infty} < \epsilon$. Por esta razón mostraremos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.2 *Sea $f \in C(T)$ y $\epsilon > 0$. Existe un polinomio trigonométrico P tal que*

$$|f(t) - P(t)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Demostración: Supongamos que tenemos una sucesión de polinomios trigonométricos Q_1, Q_2, \dots con las siguientes propiedades:

- (a) $Q_k(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
- (b) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = 1$.
- (c) Si $\eta_k(\delta) = \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_k(t)$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k(\delta) = 0 \quad \forall \delta > 0$.
(Equivalentemente, para cada $\delta > 0$, $Q_k(t) \rightarrow 0$ uniformemente en $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$).

A cada $f \in C(T)$ le asociamos las funciones P_k definidas por:

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds \quad , \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Haciendo un cambio de variable $s = -s'$, y luego $s' = \hat{s} - t$ obtenemos

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\hat{s}) Q_k(t - \hat{s}) d\hat{s} .$$

Considerando que tanto f como Q_k son periódicas, el valor de la integral será el mismo en intervalos de longitud 2π ; por lo que, sin pérdida de generalidad, renombrando a \hat{s} como s , obtenemos

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) Q_k(t-s) ds \quad . \quad (2.2)$$

Luego, como cada Q_k es polinomio trigonométrico, se puede escribir de la forma

$$Q_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} e^{int},$$

y así

$$Q_k(t-s) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} e^{int} e^{-ins}.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} e^{int} e^{-ins} ds \\ &= \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right) e^{int} \\ &= \sum_{n=-N_k}^{N_k} \left(a_{n,k} \langle f, u_n \rangle \right) e^{int}, \end{aligned}$$

lo cual prueba que cada P_k es un polinomio trigonométrico.

Sea ahora $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continua (es continua en un compacto) existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(s)| < \epsilon/2$ si $|t - s| < \delta$. Haciendo uso de (b)

$$f(t) = f(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) Q_k(s) ds.$$

Aplicando esto en (2.1)

$$P_k(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t)) Q_k(s) ds$$

y luego considerando (a) obtenemos

$$\begin{aligned} |P_k(t) - f(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|s| \leq \delta} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds. \end{aligned}$$

Denotaremos estos sumandos como A_1 y A_2 , respectivamente.

Para A_1 , como $|(t-s) - t| = |s| \leq \delta$, por la continuidad uniforme tenemos $|f(t-s) - f(t)| \leq \epsilon/2$ y se sigue

$$A_1 \leq \frac{\epsilon/2}{2\pi} \int_{|s| \leq \delta} Q_k(s) \, ds \leq \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s) \, ds = \epsilon/2$$

Para A_2 , si $\delta \leq |s| \leq \pi$ tenemos $Q_k(s) \leq \eta_k(\delta)$ y entonces

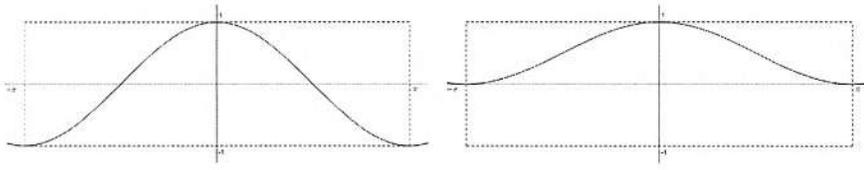
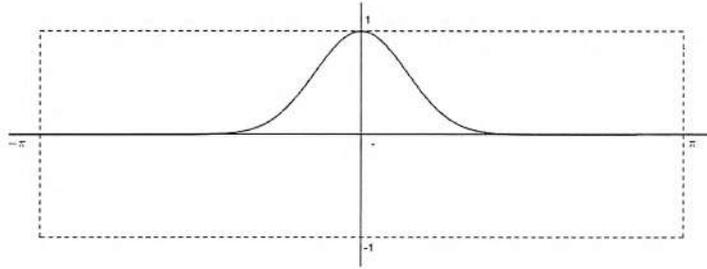
$$\begin{aligned} A_2 &\leq \frac{\eta_k(\delta)}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(t-s) - f(t)| \, ds \\ &\leq \frac{\eta_k(\delta)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| \, ds \\ &\leq \frac{\eta_k(\delta)}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s)| \, ds + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, ds \right] \\ &\leq \frac{\eta_k(\delta)}{2\pi} [2\pi \|f\|_{\infty} + 2\pi \|f\|_{\infty}] = 2\|f\|_{\infty} \eta_k(\delta) \leq \epsilon/2 \end{aligned}$$

para k suficientemente grande, debido a (c). Como todas estas estimaciones son independientes de t , tenemos que para esta misma k

$$|P_k(t) - f(t)| \leq A_1 + A_2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

como queríamos demostrar.

Ahora, sólo hace falta demostrar la existencia de los Q_k . A una familia de funciones con dichas características se le llama aproximación de la identidad. Hay muchas maneras de construir dicha sucesión, a continuación presentamos una de ellas. Sea $Q_k(t) = c_k \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k$, donde $c_k = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt}$. Así tenemos que las funciones cumplirán con (c). Se puede demostrar por medio de inducción que estas funciones son polinomios trigonométricos; además es claro que cumplen (a).

Figura A: Gráficas de $\cos t$ y $\frac{1+\cos t}{2}$.Figura B: Gráfica de $Q_k(t) = \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k$, $k = 10$.

Sólo nos resta probar (c). Como Q_k es función par, usando (b) y que $\sin t$ es positivo y menor que 1 para $t \in (0, \pi)$ tenemos

$$1 = \frac{c_k}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \geq \frac{c_k}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t dt = \frac{2c_k}{\pi(k+1)}.$$

De aquí se sigue que $c_k \leq \frac{\pi(k+1)}{2}$. Como Q_k es decreciente en $[0, \pi]$, se deduce

$$Q_k(t) \leq Q_k(\delta) \leq \frac{\pi(k+1)}{2} \left(\frac{1+\cos \delta}{2}\right)^k$$

para $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$.

Ahora, puesto que $1 + \cos \delta < 2$ si $0 < \delta \leq \pi$, tenemos $\left(\frac{1+\cos \delta}{2}\right)^k < 1$ y por lo tanto

$$\frac{\pi(k+1)}{2} \left(\frac{1+\cos \delta}{2}\right)^k \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow \infty$. De esto se sigue que $Q_k(t)$ converge a 0 uniformemente en $\delta \leq |t| \leq \pi$, es decir, se satisface (c). Esto concluye nuestra demostración.



Con esto, podemos concluir que $\mathcal{U} = \{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para $L^2(T)$. Esto nos permitirá más adelante aplicar varios resultados vistos en la sección anterior.

2.2 Series de Fourier

A mediados del siglo XVIII, al tratar de resolver el problema de la cuerda vibrante, a Daniel Bernoulli se le presentó el problema de representar una función f definida en \mathbb{R} a través de series de senos y cosenos. Este mismo problema fue estudiado después por Euler y d'Alembert, pero fue Fourier quien en buena parte de su "Théorie Analytique de la Chaleur" (1807 la primera versión, 1822 la última) desarrolló en mayor medida esta teoría. El problema había surgido ante él de manera natural, al intentar resolver la ecuación diferencial parcial que modela la distribución de calor en un cuerpo sólido a través del tiempo.

Definición 2.2.1 Dada $f \in L^1(T)$ definimos sus coeficientes de Fourier mediante la fórmula

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Así, a cada función $f \in L^1(T)$ le asociamos una sucesión $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$.

Definición 2.2.2 Definimos la Serie de Fourier de f como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

con sumas parciales

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

En esta primera instancia la definición para serie de Fourier es únicamente formal, en el sentido de que hasta ahora no sabemos si la serie converja a f en algún sentido.

Dado que $L^2(T) \subset L^1(T)$, estas fórmulas se pueden aplicar a cualquier $f \in L^2(T)$, y en este caso, nótese que $\hat{f}(n) = \langle f, u_n \rangle$, donde u_n , son los elementos del sistema trigonométrico. Teniendo esto en mente, expresamos en este contexto específico algunos resultados que en el capítulo anterior dimos de manera general.

A) Caracterización de Espacios de Hilbert Separables (Teorema 1.0.16)

La transformación

$$\begin{aligned} \varphi : L^2(T) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto \hat{f} := \{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

es un isomorfismo que preserva la norma: $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2}$. Debido a esto, sabemos que dada una sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de números complejos en ℓ^2 , existe $f \in L^2(T)$ tal que $\{\langle f, u_n \rangle\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, es decir

$$c_n = \langle f, u_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \hat{f}(n)$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.

B) Identidad de Parseval (Teorema 1.0.15, inciso e)

Para cada pareja de funciones $f, g \in L^2(T)$ tenemos

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, u_n \rangle \overline{\langle g, u_n \rangle} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} .$$

C) Representación en Series de Fourier (Teorema 1.0.15, inciso c)

Para cada $f \in L^2(T)$ se cumple

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, u_n \rangle u_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} .$$

Dicho de otra forma, si $S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_2 = 0$$

es decir, la serie de Fourier de f converge a f en L^2 . Con esto respondemos de manera positiva, para este caso, al problema de representación de f a través de su serie de Fourier.

En vista de **C)**, es natural hacernos la pregunta: ¿Representa la serie de Fourier de f a f en algún otro sentido? Contestamos de forma parcial a esta pregunta a través de criterios de convergencia puntual.

Criterio de Dini: Si existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{|t| < \delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty$$

entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$.

Criterio de Jordan: Si f es de variación acotada en una vecindad de x , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)]$$

Las demostraciones de estos dos criterios pueden ser consultadas en [4], página 3.

A partir del criterio de Jordan, sabemos que la serie de Fourier de una función de variación acotada puede converger aún en un punto en el que se presente una discontinuidad de salto. Esto nos dice que la continuidad no es una condición necesaria para la convergencia. Más aún, las funciones continuas no necesariamente cumplen con alguna de las condiciones requeridas para los criterios anteriores. En este sentido, du Bois-Reymond demostró en 1873 que la continuidad tampoco es condición suficiente, al exhibir una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.

Du Bois-Reymond construyó una función con dicha propiedad, pero aquí demostraremos su existencia haciendo uso del principio de acotamiento uniforme.

Teorema 2.2.3 Principio de Acotamiento Uniforme

Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de transformaciones lineales acotadas

$T_n : X \rightarrow Y$ donde X, Y son espacios normados, X de Banach. Si la sucesión $\{T_n\}$ es acotada puntualmente, esto es, si para cada $x \in X$ existe $c_x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T_n x\|_X \leq c_x$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión de las normas de las transformaciones en $L(X, Y)$ es uniformemente acotada, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T_n\| \leq c$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se puede consultar una demostración de este principio en [11], página 249.

Teorema 2.2.4 Existe una función $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua cuya serie de Fourier diverge en un punto $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración: Dada una función 2π -periódica x , podemos expresar su serie de Fourier de como

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \operatorname{sen} mt) ,$$

donde los coeficientes a_m y b_m estan dados por

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos mt \, dt \quad \text{y} \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \operatorname{sen} mt \, dt .$$

Por conveniencia para nuestro propósito, usaremos esta manera de expresar la serie de Fourier de x , la cual es consistente con la dada al principio de la sección.

Sea $X = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua y de período } 2\pi\}$ con la norma del supremo $\| \cdot \|_{\infty}$. Por facilidad, hagamos $t_0 = 0$. Consideremos la familia de funcionales $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n a_m$. Esto es, $f_n(x)$ es igual al valor en $t = 0$ de la n -ésima suma parcial de la serie de Fourier de $x(t)$. Así

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \, dt + \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos mt \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n a_m \cos mt \right] dt . \end{aligned}$$

Buscamos representar lo que está dentro de la integral de una manera que nos resulte más conveniente:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}t \right) \sum_{m=1}^n \cos(mt) &= \sum_{m=1}^n 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}t \right) \cos(mt) \\ &= \sum_{m=1}^n \left[-\operatorname{sen} \left(\left(m - \frac{1}{2} \right) t \right) + \operatorname{sen} \left(\left(m + \frac{1}{2} \right) t \right) \right] \\ &= \operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}t \right) . \end{aligned}$$

Dividiendo entre $\text{sen}(\frac{1}{2}t)$ y sumando 1 en las expresiones inicial y final de la pasada cadena de igualdades obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{m=1}^n \cos(mt) &= \frac{\text{sen}((n + \frac{1}{2})t) - \text{sen}(\frac{1}{2}t)}{\text{sen}(\frac{1}{2}t)} + \frac{\text{sen}(\frac{1}{2}t)}{\text{sen}(\frac{1}{2}t)} \\ &= \frac{\text{sen}((n + \frac{1}{2})t)}{\text{sen}(\frac{1}{2}t)}, \end{aligned}$$

lo cual utilizamos para escribir la fórmula para el funcional f_n de una manera más simple, a saber,

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)q_n(t) dt ,$$

donde $q_n(t) = \frac{\text{sen}((n+\frac{1}{2})t)}{\text{sen}(\frac{1}{2}t)}$. A estas funciones se les suele llamar el núcleo de Dirichlet. Nótese además que q_n está bien definida de esta manera, pues

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}((n + \frac{1}{2})t)}{\text{sen}(\frac{1}{2}t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos((n + \frac{1}{2})t)(n + \frac{1}{2})}{\cos(\frac{1}{2}t)\frac{1}{2}} = \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2n + 1 .$$

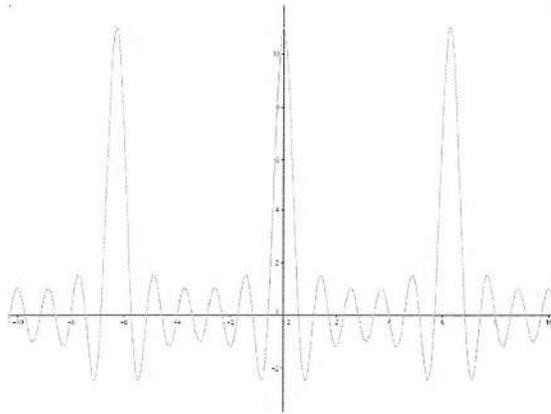


Figura C: Gráfica de $q_n(t)$, para $n = 5$.

Puesto que deseamos hacer uso del principio de acotamiento uniforme, buscamos ahora mostrar que f_n es un funcional lineal acotado. Claramente

es lineal, veamos que es acotado:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)q_n(t) dt \right| \leq \frac{\|x\|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt ,$$

por lo que

$$\|f_n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f_n(x)|}{\|x\|_\infty} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\frac{\|x\|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt = \|q_n\|_1 .$$

Más aún, queremos ver que se da la igualdad. Hagamos $|q_n(t)| = y(t)q(t)$, donde

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } q(t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } q(t) < 0 \end{cases} .$$

Así $y(t)$ no es continua, sin embargo, mostraremos que dado $\epsilon > 0$, existe una función continua x_ϵ tal que $\|x_\epsilon\|_\infty = 1$ y

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [x_\epsilon(t) - y(t)]q_n(t) dt \right| < \epsilon .$$

Para esto, notamos que $y(t)$ es discontinua cuando $q_n(t) = 0$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una cantidad finita de puntos en $[0, 2\pi]$ donde $y(t)$ es discontinua.

Sean t_1, \dots, t_k dichos puntos de discontinuidad y sea $\epsilon > 0$. Hagamos $\delta = \frac{\epsilon\pi}{2k\|q_n\|_\infty}$. En los intervalos

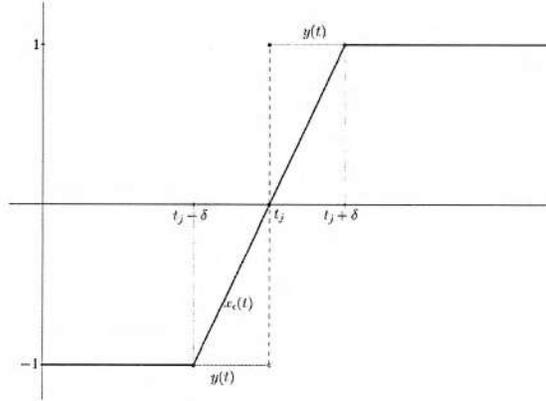
$$[t_j - \delta, t_j + \delta] \quad j = 1, \dots, k$$

consideremos la función $x_\epsilon(t)$ como el segmento que va de

$$(t_j - \delta, -1) \text{ a } (t_j + \delta, 1) \text{ si } y(t) \text{ pasa de } -1 \text{ a } 1,$$

$$(t_j - \delta, 1) \text{ a } (t_j + \delta, -1) \text{ si } y(t) \text{ pasa de } 1 \text{ a } -1$$

e igual a $y(t)$ en el resto de $[0, 2\pi]$.

Figura D: Gráficas de $x_\epsilon(t)$ y $y(t)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [x_\epsilon(t) - y(t)]q_n(t) dt \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=1}^k \int_{t_j - \delta}^{t_j + \delta} [x_\epsilon(t) - y(t)]q_n(t) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{t_j - \delta}^{t_j + \delta} |x_\epsilon(t) - y(t)| |q_n(t)| dt \\
 &\leq \frac{\|q_n\|_\infty}{2\pi} \sum_{j=1}^k 2 \cdot 2\delta \\
 &= \frac{\|q_n\|_\infty}{2\pi} 4k \left(\frac{\epsilon\pi}{2k\|q_n\|_\infty} \right) = \epsilon.
 \end{aligned}$$

Además como $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x_\epsilon(t)| = 1$, $\|x_\epsilon\|_\infty = 1$. De esta forma x_ϵ cumple con las dos condiciones deseadas. Luego

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x_\epsilon(t)q_n(t) dt - \int_0^{2\pi} y(t)q_n(t) dt \right| &< \epsilon \\
 \implies \left| f_n(x_\epsilon) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt \right| &< \epsilon \\
 \implies |f_n(x_\epsilon) - \|q_n\|_1| &< \epsilon,
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \|q_n\|_1 &< |f_n(x_\epsilon)| + \epsilon \\ &= \frac{|f_n(x_\epsilon)|}{\|x_\epsilon\|_\infty} + \epsilon \\ &< \|f_n\| + \epsilon. \end{aligned}$$

Como esto se cumple para cualquier $\epsilon > 0$, se sigue $\|q_n\|_1 \leq \|f_n\|$. Por lo tanto concluimos que

$$\|f_n\| = \|q_n\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt.$$

Veamos ahora que la sucesión $\{\|f_n\|\}_{n=1}^\infty$ no es acotada.

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\text{sen}\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} \right| dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\text{sen}\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{t} \right| dt,$$

pues $\text{sen}\frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}$ en $[0, 2\pi]$. Haciendo $v = (n + \frac{1}{2})t$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\text{sen } v|}{v} dv = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\text{sen } v|}{v} dv \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\text{sen } v| dv \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(k+1)\pi} \cdot 2 \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, pues esta última expresión está escrita en términos de las sumas parciales de la serie armónica. Por lo tanto, efectivamente la sucesión de las normas de los funcionales $\{\|f_n\|\}_{n=1}^\infty$ no es acotada.

Entonces, por el principio de acotamiento uniforme, sabemos que existe $x \in X$ tal que $\{\|f_n(x)\|\}_{n=1}^\infty$ no es acotada, es decir, existe una función continua $x(t)$ tal que las sumas parciales de la serie de fourier de x en $t_0 = 0$ divergen.



Nótese que este resultado nos asegura la existencia de dicha función, pero no nos dice como encontrarla. Ejemplos de tales funciones fueron proporcionados por Fejér. Uno de estos ejemplos se puede consultar en [15], página 76.

Con la aparición de la teoría de la medida y los espacios L^p fue posible plantear el problema de la convergencia para la serie de Fourier de una nueva manera, considerando convergencia en la norma correspondiente. Nos podemos ahora preguntar, para $1 \leq p < \infty$:

- a) ¿ Es $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_p = 0$ para $f \in L^p$?
- b) ¿ Es $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$ casi en todo punto para $f \in L^p$?

Ya vimos que la pregunta a) se responde afirmativamente para $p = 2$. Si $1 < p < \infty$, a) también se responde de manera positiva, pero su demostración requiere más trabajo. En cambio, para $p = 1$ la respuesta es negativa. En cuanto a b), este problema es mucho más difícil. Kolmogorov construyó en 1926 una función integrable cuya serie de Fourier diverge en cada punto, de modo que la respuesta es negativa para $p = 1$. Para $1 < p < \infty$ sí se tiene la convergencia en casi todo punto, como demostraron Carleson en 1965 para $p = 2$ y Hunt en 1967 para $p > 1$.

Capítulo 3

Valores Frontera de Algunas Funciones Analíticas en el Disco

El objetivo que nos planteamos para este tercer capítulo es estudiar el comportamiento cercano a la frontera de cierto tipo de funciones analíticas en el disco unitario. Específicamente, enunciaremos y demostraremos el teorema de Fatou, el cual nos brinda condiciones para asegurar un comportamiento deseable para transformaciones de este tipo. Para lo anterior, primero presentaremos un espacio especial de funciones: el espacio de Hardy H^2 , a veces también llamado espacio de Hardy-Hilbert. Es en este espacio donde encontraremos las herramientas que nos permitirán llegar al resultado deseado.

3.1 El Espacio de Hardy H^2

Dedicaremos esta primera sección a exponer las principales propiedades del espacio de Hardy H^2 , así como algunos resultados relacionados con él y su estructura. Como veremos, éstos se encontrarán estrechamente ligados a la teoría de espacios de Hilbert y series de Fourier que hemos desarrollado

anteriormente.

Definición 3.1.1 *El espacio de Hardy H^2 es el espacio de todas las funciones complejas definidas en el disco unitario D , analíticas en el origen y cuya serie de potencias tiene coeficientes que forman una sucesión en ℓ^2 .*

Esto es:

$$H^2 = \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Si para $f, g \in H^2$ con $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ escribimos

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n,$$

esto define un producto interno en H^2 , e induce la norma

$$\|f\|_{H^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Consideremos ahora el mapeo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Si $\{a_n\} \in \ell^2$ y $|z| < 1$,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \right)^{1/2} < \infty,$$

lo cual implica que f es analítica en el origen, y por lo tanto está en H^2 . Así, dicho mapeo resulta un isomorfismo entre ℓ^2 y H^2 , por lo que podemos concluir que H^2 es espacio de Hilbert. Procedemos a estudiar las principales propiedades de las funciones en este espacio.

Dado que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$ es analítica en el origen, sabemos que es analítica en alguna vecindad de él. Veremos a continuación que dicha vecindad se puede extender a todo el disco $D = \{z : |z| < 1\}$.

Teorema 3.1.2 *Toda función $f \in H^2$ es analítica en D .*

Demostración: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$, $|z_0| < 1$. Mostraremos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge.

Como $|z_0| < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n$ converge. Ahora, como $\{a_n\} \in \ell^2$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| < K$ para toda n . Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_0|^n < K \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n < \infty .$$

Luego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge absolutamente, y por lo tanto, f es analítica en todo D .

■

Habiendo demostrado esto, quisiéramos indagar qué tanto más se puede extender el dominio de analiticidad de una función en H^2 . En este sentido, mostramos con el siguiente resultado que en general dicha extensión no se puede hacer más allá del disco unitario.

Proposición 3.1.3 *Sea $e^{i\theta_0} \in \mathbb{S}^1$. Existe $f \in H^2$ tal que f no es analítica en $e^{i\theta_0}$.*

Demostración: Consideremos

$$f_{\theta_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\theta_0}}{n} z^n \quad \text{para } z \in D.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-in\theta_0}}{n} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, f_{θ_0} está en H^2 . Ahora mostraremos que conforme z se acerca a $e^{i\theta_0}$ manteniendo el ángulo θ_0 fijo, $|f_{\theta_0}(z)|$ toma valores arbitrariamente grandes.

En efecto, sea $M \in \mathbb{R}$. Existe N tal que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > M + 1$. Ahora, existe

$r_0 < 1$ tal que $r_0^N > \frac{M}{M+1}$. Entonces $r_0 e^{i\theta_0} \in D$ y

$$\begin{aligned} |f(r_0 e^{i\theta_0})| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\theta_0}}{n} r_0^n e^{in\theta_0} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n}{n} \\ &> \sum_{n=1}^N \frac{r_0^n}{n} > r_0^N \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \\ &> \left(\frac{M}{M+1} \right) (M+1) = M. \end{aligned}$$

Por lo tanto, no hay manera de definir f_{θ_0} en $z = e^{i\theta_0}$ tal que f_{θ_0} sea analítica. ■

Inversamente, tiene sentido preguntarnos si toda función analítica en el disco está en el espacio H^2 . Exponemos a continuación un ejemplo para mostrar que lo anterior no es necesariamente cierto.

Ejemplo 3.1.4 *La función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es analítica en D , pero no está en el espacio H^2 .*

Sabemos que $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ para $z \in D$. De aquí que f es analítica en D . Por otro lado se tiene que la sucesión $\{a_n\}$ de los coeficientes de su serie de potencias es la sucesión constante $\{1\}$, que no está en ℓ^2 . Por lo tanto, f no está en H^2 .

De lo visto en los capítulos anteriores sabemos que una parte importante de la exploración de un espacio de Hilbert recae en el estudio de sus funcionales lineales acotados, es decir, de su espacio dual. Por el momento nos ocupamos en una familia específica de funcionales que nos serán de gran utilidad: las evaluaciones puntuales.

Teorema 3.1.5 *Para cada $z_0 \in D$, el mapeo $\Psi_{z_0} : f \mapsto f(z_0)$ está en el dual de H^2 .*

Demostración: Claramente Ψ_{z_0} es lineal. Para ver que es continua, primero notamos que $\{|z_0|^n\} \in \ell^2$. Esto se tiene debido a que $\sum_{n=0}^{\infty} (|z_0|^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (|z_0|^2)^n$ converge ya que $|z_0|^2 < |z_0| < 1$. Luego

$$\sup_{f \neq 0} \frac{|\Psi_{z_0}(f)|}{\|f\|_{H^2}} = \sup_{f \neq 0} \frac{|f(z_0)|}{\|f\|_{H^2}} = \sup_{f \neq 0} \frac{|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n|}{(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2)^{1/2}}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la expresión anterior puede estimarse por

$$\sup_{f \neq 0} \frac{1}{(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2)^{1/2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n} \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n} \right)^{1/2}.$$

Por lo tanto, Ψ_{z_0} es funcional lineal acotado, con

$$\|\Psi_{z_0}\|_{H^{2*}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{1 - |z_0|^2} \right)^{1/2}.$$

■

Un poco más adelante mostraremos que esta última desigualdad es realmente una igualdad.

Por el teorema de representación de Riesz sabemos que cada funcional lineal acotado se puede representar como el producto interno con algún vector en el espacio. Nos interesa entonces buscar la función en H^2 que representa en este sentido al funcional Ψ_{z_0} .

Definición 3.1.6 Sea $z_0 \in D$. El núcleo reproductor para z_0 en H^2 es la función

$$k_{z_0} : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z^n = \frac{1}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Es directo a partir de la definición que k_{z_0} es analítica en D , y como $\{\bar{z}_0^n\}$ está en ℓ^2 , k_{z_0} está en H^2 .

Teorema 3.1.7 Para $z_0 \in D$, $f \in H^2$ se tiene $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ y

$$\|k_{z_0}\|_{H^2} = \left(\frac{1}{1 - |z_0|^2} \right)^{1/2}.$$

Demostración: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Como $k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z^n$ tenemos

$$\langle f, k_{z_0} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = f(z_0).$$

Para estimar la norma

$$\|k_{z_0}\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n} = \frac{1}{1 - |z_0|^2},$$

de donde

$$\|k_{z_0}\|_{H^2} = \left(\frac{1}{1 - |z_0|^2} \right)^{1/2}.$$

■

Este resultado nos dice que k_{z_0} es precisamente el elemento de H^2 que representa al funcional lineal Ψ_{z_0} en el sentido que $\Psi_{z_0}(f) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ para toda f en H^2 . Además, por el teorema de representación de Riesz, sabemos que $\|\Psi_{z_0}\|_{(H^2)^*} = \|k_{z_0}\|_{H^2} = (1 - |z_0|)^{-1/2}$.

Otra aplicación importante de los núcleos reproductores, es que nos permiten establecer una relación entre la convergencia en H^2 y la convergencia estándar de funciones analíticas.

Teorema 3.1.8 Si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones converge a f en H^2 , entonces $\{f_n\}$ también converge a f uniformemente en subconjuntos cerrados de D .

Demostración: Sea $z_0 \in D$. Entonces

$$\begin{aligned} |f_n(z_0) - f(z_0)| &= |(f_n - f)(z_0)| = |\langle f_n - f, k_{z_0} \rangle| \\ &\leq \|f_n - f\|_{H^2} \cdot \|k_{z_0}\|_{H^2} \end{aligned}$$

Sea $K \subseteq D$ cerrado. Luego, $\sup_{z \in K} \left(\frac{1}{1-|z|^2} \right)^{1/2}$ es finito. Denotando por M a este supremo, tenemos que para cualquier $z_0 \in K$

$$\|k_{z_0}\|_{H^2} = \left(\frac{1}{1-|z_0|^2} \right)^{1/2} \leq M .$$

Aplicando esto en la primer desigualdad, obtenemos

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \leq M \|f_n - f\|_{H^2}$$

para todo $z_0 \in K$; lo cual implica la convergencia uniforme. ■

Nos proponemos en lo siguiente encontrar una manera alternativa para representar al espacio H^2 . Para esto, lo asociaremos con el siguiente subespacio de $L^2(T)$.

Definición 3.1.9 *Definimos el espacio \tilde{H}^2 como el de todas las funciones en $L^2(T)$ con representación en serie de Fourier de la forma $\tilde{f}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$. Es decir*

$$\tilde{H}^2 := \left\{ \tilde{f} \in L^2 : \langle \tilde{f}, u_n \rangle = 0 \quad \forall n < 0 \right\} .$$

Comenzamos probando que este subespacio es cerrado.

Proposición 3.1.10 *El subespacio \tilde{H}^2 es cerrado en $L^2(T)$.*

Demostración: Sea $\{\tilde{f}_k\}$ sucesión en \tilde{H}^2 que converge a f en la norma de $L^2(T)$. Luego, $\langle \tilde{f}_k, u_n \rangle = 0$ para toda k y para toda $n < 0$. Entonces :

$$\begin{aligned} |\langle f, u_n \rangle| &= |\langle f, u_n \rangle - \langle \tilde{f}_k, u_n \rangle| \\ &= |\langle f - \tilde{f}_k, u_n \rangle| \\ &\leq \|f - \tilde{f}_k\|_{L^2} \cdot \|u_n\|_{L^2} = \|f - \tilde{f}_k\|_{L^2} . \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando k tiende a infinito, obtenemos que $|\langle f, u_n \rangle| = 0$ para toda $n < 0$. Por lo tanto $f \in \tilde{H}^2$, y \tilde{H}^2 es cerrado. ■

Obtenemos ahora una identificación natural entre H^2 y \tilde{H}^2 . A la función $\tilde{f} \in \tilde{H}^2$ con serie de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ le asociamos la función analítica $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (Recordemos que la serie converge en $|z| < 1$ pues $\{a_n\} \in \ell^2$). Dado que esta asociación la estamos construyendo a partir de identificar nuestras funciones a través del espacio ℓ^2 , es inmediato que se trata de un isomorfismo. Más aún, por la identidad de Parseval, sabemos que dadas dos funciones $\tilde{f}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ y $\tilde{g}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta}$ en $\tilde{H}^2 \subseteq L^2(T)$ su producto interno está dado por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$. Puesto que ésta es precisamente la forma en la que definimos el producto interno en H^2 , se tiene que ambos coinciden, es decir

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2}$$

para cualquier par de funciones f, g .

Si f y \tilde{f} están relacionadas mediante el isomorfismo anterior, f es una función definida en D , mientras que \tilde{f} está definida en T . Así, aunque esta identificación resulta natural en términos de las representaciones de f y \tilde{f} , no nos brinda una forma de relacionarlas en primera instancia como funciones. Exhibimos esta relación en nuestro siguiente teorema, cuya demostración requiere auxiliarnos de una familia parametrizada de funciones, la cual presentamos a continuación.

Definición 3.1.11 Sea $\tilde{f} \in \tilde{H}^2$ con serie de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ y $f \in H^2$ con serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Para $0 < r < 1$ definimos $f_r : T \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} .$$

Definidas de esta manera, es directo que $f_r \in \tilde{H}^2$ para cada $0 < r < 1$.

Teorema 3.1.12 *Sea $\tilde{f} \in \tilde{H}^2$, f_r definidas de la manera anterior. Entonces*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|\tilde{f} - f_r\|_{L^2} = 0 .$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 < \frac{\epsilon}{2}$. Ahora elegimos $s \in (0, 1)$ suficientemente cercano a 1, de forma que

$$1 - s^{N-1} < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - f_r\|_{L^2}^2 &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right\|_{L^2}^2 \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - r^n) e^{in\theta} \right\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (1 - r^n)|^2 \quad (\text{Identidad de Parseval}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 (1 - r^n)^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2 \\ &\leq (1 - s^{N-1})^2 \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 \quad (\text{Para } r > s) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon . \end{aligned}$$

Lo que demuestra el resultado. 

■

Una consecuencia importante del teorema anterior es el siguiente resultado.

Corolario 3.1.13 Para cada $f \in H^2$ existe una sucesión creciente $\{r_n\}$ de números positivos convergente a 1 tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n e^{i\theta}) = \tilde{f}(e^{i\theta})$$

para casi toda θ .

Demostración: Se sigue directamente del teorema anterior y el hecho de que convergencia en L^2 implica convergencia de una subsucesión para casi todo θ . ■

En la siguiente sección de este capítulo demostraremos el Teorema de Fatou, que generaliza este resultado.

Una caracterización muy útil para el espacio de Hardy H^2 es la siguiente.

Teorema 3.1.14 Sea f analítica en D . Entonces, $f \in H^2$ si y sólo si

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty .$$

Más aún, para $f \in H^2$

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta .$$

Demostración: Sea f analítica en D con serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Para $0 < r < 1$ tenemos

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})|^2 &= f(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-im\theta} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} . \end{aligned}$$

Integrando ambas partes de la igualdad, y usando la convergencia uniforme de la serie para integrar término a término obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \delta_{n,m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} .
\end{aligned} \tag{3.1}$$

(\Rightarrow) Supongamos $f \in H^2$. Para toda $0 < r < 1$ se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_{H^2}^2 .$$

Así, por la igualdad (3.1)

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|f\|_{H^2}^2 < \infty .$$

(\Leftarrow) Supongamos $f \notin H^2$. Por lo tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ diverge. Sea ahora $M \in \mathbb{R}$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=0}^N |a_n|^2 > M + 1$. Tomemos $r \in (0, 1)$ tal que $r^{2N} > \frac{M}{M+1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} &> \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} \\
&> r^{2N} \sum_{n=0}^N |a_n|^2 \\
&> \frac{M}{M+1} (M+1) = M .
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ diverge. Esto a su vez implica, por la igualdad (3.1), que $\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ no es finito.

Nótese que (3.1) también implica

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \|f\|_{H^2}^2 .$$

A manera de comentario, podemos agregar que desde un enfoque más tradicional esta condición para la integral es tomada como la definición natural de H^2 , mientras que la definición inicial que nosotros dimos en términos de los coeficientes $\{a_n\}$ es tomada como una caracterización. Esto debido a que la primera surge como el caso particular $p = 2$ de la condición

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty,$$

la cual sirve para definir los espacios de Hardy H^p para $0 < p < \infty$.

Resumimos a continuación algunos puntos importantes vistos en la demostración del teorema anterior.

Corolario 3.1.15 *Para cualquier función f analítica en D , la función*

$$M_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

es creciente en $(0, 1)$. De esto se sigue que $\lim_{r \rightarrow 1^-} M_f(r) = \sup_{0 < r < 1} M_f(r)$, y por lo tanto $f \in H^2$ si y sólo si $\lim_{r \rightarrow 1^-} M_f(r) < \infty$, en cuyo caso $\lim_{r \rightarrow 1^-} M_f(r) = \|f\|_{H^2}^2$.

Demostración: Es consecuencia de la igualdad (3.1).

La siguiente colección es un ejemplo de funciones en H^2 con el cual ilustramos también la utilidad de la caracterización que hemos obtenido previamente.

Ejemplo 3.1.16 *Para $s \in (0, \frac{1}{2})$, la función*

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^s}$$

está en H^2 .

Demostración: Sea $s \in (0, \frac{1}{2})$ fijo. Por el corolario anterior, basta demostrar que

$$M_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{(1 - re^{i\theta})^s} \right|^2 d\theta$$

está acotado uniformemente para $r \in (0, 1)$. Primero, notemos que

$$|1 - re^{i\theta}|^2 = 1 - 2r \cos \theta + r^2 .$$

Por lo tanto, sustituyendo y usando la periodicidad del coseno:

$$\begin{aligned} M_f(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^s} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^s} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^s} d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^s} d\theta \\ &=: A_1 + A_2 . \end{aligned}$$

Estimamos cada parte por separado.

Para A_1 : Comenzamos notando que $1 - 2r \cos \theta + r^2 = (r - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \geq \sin^2 \theta$. Lo cual implica:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^s} d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin^2 \theta)^s} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^{2s} \theta} d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^{2s} \theta} d\theta . \end{aligned}$$

Ya que $\frac{1}{\sin^{2s} \theta}$ es continuo en $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, el sumando $\frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^{2s} \theta} d\theta$ es finito. Por lo tanto A_1 converge si y sólo si $\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^{2s} \theta} d\theta$ es finito. Para demostrar esto, primero usamos que $\theta \leq \tan \theta$ para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Esto implica que $\theta \cos \theta \leq \sin \theta$ en $[0, \frac{\pi}{4}]$, y por lo tanto $\frac{\theta}{\sqrt{2}} \leq \sin \theta$ en $[0, \frac{\pi}{4}]$. Considerando esto tenemos

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^{2s} \theta} d\theta \leq \frac{2^s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\theta^{2s}} ,$$

y esta última integral es finita, ya que $2s < 1$.

Para A_2 : Como $\cos \theta \leq 0$ en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, tenemos $1 - 2r \cos \theta + r^2 \geq 1 + r^2$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^s} d\theta &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{(1 + r^2)^s} d\theta \\ &= \frac{1}{2(1 + r^2)^s} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Usando todas estas estimaciones podemos concluir que

$$M_f(r) \leq \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^{2s} \theta} + \frac{2^s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\theta^{2s}} + \frac{1}{2}.$$

Como esta cota es independiente de r , $\lim_{r \rightarrow 1^-} M_f(r) < \infty$, y por lo tanto $f(z) = \frac{1}{(1-z)^s} \in H^2$. ■

Otro espacio de funciones analíticas que surge naturalmente en el estudio de H^2 y que está estrechamente relacionado con él es H^∞ .

Definición 3.1.17 *El espacio H^∞ está definido como*

$$H^\infty := \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es función analítica y acotada} \},$$

donde la suma y producto por un escalar son definidos de la forma usual y la norma está dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Una importante observación que podemos hacer respecto a H^∞ es que este espacio es de Banach, pues la convergencia en la norma $\|\cdot\|_\infty$ es equivalente a la convergencia uniforme. Además, se tiene que H^∞ está contenido de manera densa en H^2 .

Corolario 3.1.18 *Toda función en H^∞ está en H^2 .*

Demostración: Sea $f \in H^\infty$. Entonces tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{\|f\|_\infty^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \|f\|_\infty^2,$$

de donde

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} M_f(r) \leq \|f\|_\infty^2 < \infty,$$

y por lo tanto $f \in H^2$. ■

Teorema 3.1.19 H^∞ es denso en H^2 .

Demostración: Sea $f \in H^2$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\epsilon > 0$. Dado que $\{a_n\} \in \ell^2$, existe N natural tal que $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 < \epsilon$. Consideremos la función $p(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$. De esta forma

$$|p(z)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| |z|^n < \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| < \infty,$$

y se sigue que $p \in H^\infty$. Luego

$$(f - p)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n,$$

y por lo tanto $\|f - p\|_{H^2} = \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 < \epsilon$. ■

Teorema 3.1.20 Si $f \in H^\infty$ y f no es constante, $|f(z)| < \|f\|_\infty$ para toda $z \in D$.

Demostración: Es una consecuencia directa del teorema de módulo máximo. ■

A continuación presentamos como ejemplo una familia de funciones en H^∞ .

Ejemplo 3.1.21 Para cada $t \in \mathbb{R}$ la función

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{it}$$

está en H^∞ .

Demostración: Hagamos $w = \frac{1+z}{1-z}$. De esta forma podemos ver a w como una transformación de Möbius que manda la circunferencia \mathbb{S}^1 en la recta imaginaria, y el disco D en el semiplano derecho. Por lo tanto, podemos escribir $w = re^{i\theta}$ con $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Luego, si elegimos la rama principal del logaritmo tendremos

$$w^{it} = e^{it \log w} = e^{it \log(re^{i\theta})} = e^{it(\log r + i\theta)} = e^{-\theta t + it \log r},$$

de donde se sigue que $|w^{it}| = e^{-\theta t} \leq e^{\frac{\pi}{2}|t|}$, y por ende $|f(z)| \leq e^{\frac{\pi}{2}|t|}$ para toda $z \in D$. Por lo tanto $f \in H^\infty$. ■

Retomamos los núcleos reproductores. Ahora los emplearemos para demostrar una relación que asemeja a la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 3.1.22 Sea $f \in H^2$, $z_0 \in D$. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\tilde{f}(z)}{z - z_0} dz.$$

Demostración: Recordemos que el núcleo reproductor de z_0 en H^2 es la función $k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z^n$. Luego

$$\tilde{k}_{z_0}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n e^{in\theta} = \frac{1}{1 - \bar{z}_0 e^{i\theta}}.$$

Entonces para $z_0 \in D$:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \langle f, k_{z_0} \rangle_{H^2} = \langle \tilde{f}, \tilde{k}_{z_0} \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) \overline{\tilde{k}_{z_0}(e^{i\theta})} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) \frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z_0} i e^{i\theta} d\theta . \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, $dz = i e^{i\theta} d\theta$ obtenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\tilde{f}(z)}{z - z_0} dz$$

como queríamos demostrar. ■

Para concluir con la sección, hacemos un acercamiento similar para la fórmula integral de Poisson.

Definición 3.1.23 Para $0 \leq r < 1$, $t \in [0, 2\pi]$, definimos el núcleo de Poisson como

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} .$$

Nótese que $P_r(t)$ está bien definido, y más aún es siempre positivo, pues $1 - r^2 > 0$ y $1 - 2r \cos t + r^2 \geq (1 - r)^2 > 0$.

Teorema 3.1.24 **Fórmula Integral de Poisson**

Si $f \in H^2$ y $re^{it} \in D$, entonces

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) P_r(\theta - t) d\theta .$$

Demostración: Sea $z_0 \in D$. Al igual que en el teorema anterior tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(e^{i\theta})}{1 - z_0 e^{-i\theta}} d\theta .$$

Ahora, como

$$\frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} = 1 + z_0 e^{-i\theta} + z_0^2 e^{-i2\theta} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} z_0^j e^{-ij\theta},$$

tenemos

$$\frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} - 1 = \sum_{j=-1}^{-\infty} z_0^{-j} e^{ij\theta}.$$

Es decir, en la expresión en series de Fourier de $\overline{k_{z_0}} - 1$ todos sus coeficientes con índices no negativos son iguales a cero. Por lo tanto esta función y \tilde{f} son ortogonales en $L^2(T)$, pues $\tilde{f} \in \tilde{H}^2$. Entonces

$$\langle \tilde{f}, \overline{k_{z_0}} - 1 \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) \overline{\left(\frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} - 1 \right)} d\theta = 0.$$

Sumando este cero en la expresión inicial para $f(z_0)$ obtenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) \left(\frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - \overline{z_0} e^{i\theta}} - 1 \right) d\theta.$$

Queremos mostrar ahora que la expresión dentro del paréntesis en la igualdad anterior es precisamente el núcleo de Poisson valuado en $\theta - t$. Sustituyendo $z_0 = r e^{it}$ en dicha expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - r e^{-i(\theta-t)}} + \frac{1}{1 - r e^{i(\theta-t)}} - 1 &= \frac{1 - r e^{i(\theta-t)} + 1 - r e^{-i(\theta-t)}}{|1 - r e^{i(\theta-t)}|^2} - 1 \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} \\ &= P_r(\theta - t). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(r e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) P_r(\theta - t) d\theta,$$

como queríamos demostrar. ■

3.2 Teorema de Fatou

En general, a pesar de que una función f sea analítica en el disco unitario D , ésta puede presentar comportamientos muy accidentados cuando nos aproximamos a la frontera $\partial D = \mathbb{S}^1$. En la proposición 3.1.3 de la sección anterior ya vimos un ejemplo de una función analítica en el disco que no converge a ningún valor cuando nos acercamos a un punto θ_0 de la frontera. Más aún, este mismo comportamiento errático puede presentarse en subconjuntos mucho mayores de \mathbb{S}^1 . Ejemplos de funciones con estas características se pueden encontrar, por ejemplo, en el ejercicio 16, página 196 de [17], así como en el teorema 9.2.1, página 286 de [8]. En el primer caso, la función falla en converger para un subconjunto denso de la frontera, mientras que en el segundo caso ningún punto p en ∂D es regular, es decir, f no puede extenderse como función holomorfa a un conjunto abierto que contenga a D y al punto p . Por esta razón es que resulta interesante preguntarnos: ¿Cómo podemos asegurar que una función analítica en D converja, en un sentido apropiado, a valores frontera en el círculo unitario?

El teorema de Fatou, a cuya demostración dedicamos esta sección, da respuesta a esta pregunta, proporcionando una condición suficiente para asegurar la convergencia de una función en el sentido radial para casi todo punto sobre la frontera.

Comenzaremos precisando el tipo de convergencia que manejaremos.

Definición 3.2.1 *Sea f definida en D . Decimos que f converge radialmente para el punto $-\pi \leq \theta \leq \pi$ del círculo unitario, si*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$$

existe.

En nuestro recorrido con miras a demostrar dicho resultado, el núcleo de Poisson $P_r(t)$, que ya presentamos al final de la sección anterior, jugará un papel de enorme importancia. Es por ello que iniciamos nuestro desarrollo enunciando algunas de sus propiedades, que serán indispensables más adelante.

Proposición 3.2.2 *El núcleo de Poisson $P_r(t)$ posee las siguientes propiedades:*

$$i) P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt}.$$

$$ii) 0 < P_r(t) < \frac{2}{1-r} \text{ para toda } t.$$

$$iii) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1.$$

iv) Para cada $0 < \delta < \pi$, $P_r(t)$ converge uniformemente a 0 en $\delta \leq |t| \leq \pi$, cuando r converge a 1.

Demostración:

i) Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (re^{it})^k + \sum_{k=0}^{\infty} (re^{-it})^k - 1 \\ &= \frac{1}{1 - re^{it}} + \frac{1}{1 - re^{-it}} - 1. \end{aligned}$$

Como ya vimos dentro de la demostración del teorema 3.1.24, esta última expresión es igual a $P_r(t)$.

ii) Cuando definimos el núcleo de Poisson demostramos que es positivo.

Para establecer la otra cota notemos que

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} < \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2} \\ &= \frac{1 + r}{1 - r} < \frac{2}{1 - r}. \end{aligned}$$

iii) Usamos la identidad probada en el primer inciso para calcular la integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r^{|k|}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt. \end{aligned}$$

Esta última igualdad se verifica por la convergencia uniforme de la serie. También sabemos que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 0$ si $k \neq 0$. Luego, el único término que se suma es cuando $k = 0$ y por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1.$$

iv) Sea $0 < \delta < \pi$ y $\delta \leq |t| \leq \pi$. Luego $\cos t = \cos |t| \leq \cos \delta$, y por lo tanto $1 - \cos t \geq 1 - \cos \delta$. Esto a su vez implica

$$\begin{aligned} 1 - 2r \cos t + r^2 &= (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos t) \\ &\geq (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos \delta) \\ &> 2r(1 - \cos \delta). \end{aligned}$$

Entonces

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} < \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos \delta)}$$

para toda $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, y por lo tanto

$$\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} P_r(t) \leq \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos \delta)}.$$

Tomando el límite cuando r tiende a 1, la expresión del lado derecho tiende a 0, lo que implica la convergencia uniforme.

■

Nótese que las últimas tres propiedades implican que el núcleo de Poisson forma una aproximación de la identidad parametrizada por r . Otro concepto que nos será de utilidad es el de función maximal de Poisson.

Definición 3.2.3 Para $f \in L^1([-\pi, \pi])$ se define la función maximal de Poisson por

$$P^*(f)(\theta) = \sup_{0 \leq r < 1} |(P_r * f)(\theta)|,$$

donde $P_r * f$ denota la convolución de P_r con f , es decir

$$(P_r * f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt.$$

Proposición 3.2.4 La función maximal de Poisson es de tipo débil $(1, 1)$, esto es, existe una constante $C > 0$ tal que para toda $\lambda > 0$

$$|\{ \theta \in [-\pi, \pi] : P^*(f)(\theta) > \lambda \}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1,$$

donde las barras denotan la medida de Lebesgue del conjunto.

Demostración: Ver el apéndice A. ■

La relevancia del núcleo de Poisson para nuestro actual propósito queda exhibida en gran parte por el siguiente resultado.

Proposición 3.2.5 Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Entonces

$$(P_r * f)(\theta) \longrightarrow f(\theta) \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow 1^-$$

para casi toda $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Demostración: Consideremos los conjuntos

$$A_s = \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} |(P_r * f)(\theta) - f(\theta)| > s \right\} .$$

Basta demostrar que cada A_s es de medida cero, pues en dicho caso

$$\left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : (P_r * f)(\theta) \rightarrow f(\theta) \text{ cuando } r \rightarrow 1^- \right\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{\frac{1}{j}}$$

sería también de medida cero, que es lo que queremos demostrar.

Sea entonces $s > 0$. Como $C([-\pi, \pi])$ es denso en $L^1([-\pi, \pi])$, dado $\epsilon > 0$ existe $g \in C([-\pi, \pi])$ tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Haciendo $h := f - g$ tenemos que $f = h + g$, con $\|h\|_1 < \epsilon$ y $g \in C([-\pi, \pi])$.

Así para cada $\theta \in [-\pi, \pi]$ y cada $0 \leq r < 1$ tenemos

$$\begin{aligned} |(P_r * f)(\theta) - f(\theta)| &= |(P_r * (h + g))(\theta) - (h + g)(\theta)| \\ &\leq |(P_r * h)(\theta)| + |(P_r * g)(\theta) - g(\theta)| + |h(\theta)| . \end{aligned}$$

Como $g \in C([-\pi, \pi])$ es uniformemente continua y $\{P_r\}_{r \in [0,1]}$ es una aproximación de la identidad, en este caso se demuestra que $(P_r * g)(\theta) \rightarrow g(\theta)$ usando la misma técnica que usamos en la demostración del teorema 2.1.2 en el capítulo 2. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} |(P_r * f)(\theta) - f(\theta)| &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} |(P_r * h)(\theta)| + |h(\theta)| \\ &\leq \sup_{0 \leq r < 1} |(P_r * h)(\theta)| + |h(\theta)| \\ &= P^*(h)(\theta) + |h(\theta)| . \end{aligned}$$

De esto se sigue que si $\overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} |(P_r * f)(\theta) - f(\theta)| > s$, entonces al menos uno de $P^*(h)(\theta)$ o $|h(\theta)|$ es mayor que $\frac{s}{2}$. Luego

$$\begin{aligned} A_s &\subseteq \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : P^*(h)(\theta) > \frac{s}{2} \right\} \cup \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : |h(\theta)| > \frac{s}{2} \right\} \\ |A_s| &\leq \left| \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : P^*(h)(\theta) > \frac{s}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : |h(\theta)| > \frac{s}{2} \right\} \right| . \end{aligned}$$

Acotamos por separado la medida de estos dos conjuntos. Para el primero

$$\left| \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : P^*(h)(\theta) > \frac{s}{2} \right\} \right| \leq \frac{2C}{s} \|h\|_1 \leq \frac{2C}{s} \epsilon$$

ya que P^* es de tipo débil $(1, 1)$. Mientras, para el otro sumando

$$\begin{aligned} \frac{s}{2} \left| \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : |h(\theta)| > \frac{s}{2} \right\} \right| &\leq \int_{\{\theta : |h(\theta)| > \frac{s}{2}\}} |h(\theta)| \, d\theta \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |h(\theta)| \, d\theta = \|h\|_1 < \epsilon. \end{aligned}$$

Así

$$\left| \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : |h(\theta)| > \frac{s}{2} \right\} \right| \leq \frac{2}{s} \epsilon,$$

y por lo tanto

$$|A_s| \leq \frac{2C}{s} \epsilon + \frac{2}{s} \epsilon = \left(\frac{2C+2}{s} \right) \epsilon.$$

Como ϵ se tomó arbitrario, se sigue que $|A_s| = 0$, como queríamos. ■

Usamos este resultado para demostrar un último teorema de convergencia antes de probar el teorema principal de esta sección. Veremos a continuación como podemos usar la convergencia a una función f en términos de la convolución con el núcleo de Poisson para reformularla en términos únicamente de los coeficientes de Fourier de f .

Teorema 3.2.6 *Sea f integrable en $[-\pi, \pi]$ y sean a_n sus coeficientes de Fourier. Entonces*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

tiende a $f(\theta)$ para casi toda θ , cuando r tiende a 1.

Demostración: Consideremos

$$\begin{aligned} f(\theta - t)P_r(t) &= f(\theta - t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} f(\theta - t) e^{int} . \end{aligned}$$

Luego, por el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)P_r(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} f(\theta - t) e^{int} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|} f(\theta - t) e^{int} dt . \end{aligned}$$

Por otro lado, haciendo un cambio de variable $t' = \theta - t$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|} f(\theta - t) e^{int} dt &= -\frac{r^{|n|}}{2\pi} \int_{\pi+\theta}^{-\pi+\theta} f(t') e^{in(\theta-t')} dt' \\ &= r^{|n|} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') e^{-int'} dt' \\ &= a_n r^{|n|} e^{in\theta} . \end{aligned}$$

Así, podemos establecer

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) P_r(t) dt .$$

Lo que concluye con la demostración, pues por el teorema anterior sabemos que el límite cuando r tiende a 1 de la expresión en el lado derecho de la igualdad es precisamente $f(\theta)$ para casi toda θ en $[-\pi, \pi]$. ■

Contamos finalmente con todas las herramientas necesarias para culminar la sección con la demostración del teorema de Fatou.

Teorema 3.2.7 Teorema de Fatou

Toda función f en H^2 tiene límites radiales para casi toda θ en el círculo unitario.

Demostración: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en H^2 . Entonces, $\tilde{f}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ está en L^2 . Como $L^2 \subseteq L^1$, podemos aplicar el teorema anterior a \tilde{f} , y así

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} = \tilde{f}(\theta)$$

para casi toda θ . Pero dado que todos los coeficientes de Fourier de \tilde{f} con índices negativos son iguales a 0 tenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} = f(re^{i\theta}),$$

y por lo tanto

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}) = \tilde{f}(\theta),$$

lo que demuestra el teorema. ■

Ya que $H^\infty \subseteq H^2$, el teorema anterior se cumple en particular para toda función analítica acotada en el disco. Esta formulación es a veces la que suele presentarse en la literatura, y con la cual podemos apreciar de mejor forma porque el resultado es un teorema notable en el análisis complejo. A pesar de que su demostración requiere combinar elementos de teoría de espacios de Hilbert y series de Fourier, su enunciado es breve y general, y no hace mención de nada de ello.

A manera de cierre, podemos agregar que la condición de estar en H^2 dada en el teorema de Fatou es suficiente, pero no necesaria. Para notar esto podemos considerar la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Ya vimos anteriormente que f es analítica en D , pero que no está en H^2 . Sin embargo, f sí tiene límites radiales para casi todo punto en el círculo unitario, puesto que sólo presenta problemas cerca de $z = 1$.

Capítulo 4

Espacios de Hilbert con Núcleo Reproductor

En el capítulo anterior estudiamos ampliamente el espacio H^2 y algunas de sus propiedades. De entre éstas, destacamos la presencia de los núcleos reproductores k_z , los cuales se convirtieron en una eficaz herramienta para mostrar varios de los resultados mostrados. Es por esto, que resulta interesante preguntarse para que otros espacios es posible llevar a cabo dicha construcción. En la primera parte de este capítulo nos dedicamos a exponer varios ejemplos de espacios que cumplen lo necesario para poseer núcleos reproductores. En la segunda sección, presentamos los núcleos así obtenidos y mostramos un método para calcularlos explícitamente, el cual usaremos para obtener las expresiones de éstos en varios espacios. Concluiremos el capítulo utilizando los núcleos reproductores para definir el símbolo de Berezin, concepto que nos permitirá obtener funciones suaves en el disco a partir de operadores en un espacio de Hilbert H .

4.1 Espacios Funcionales de Hilbert

Cuando estudiamos el espacio H^2 , la existencia de los núcleos reproductores k_z fue garantizada a partir del hecho de que el funcional que evalúa cada función del espacio en un punto fijo z era continuo. Los espacios que presentan esta característica se vuelven, por lo tanto, nuestro objeto estudio.

Definición 4.1.1 Sea H un espacio de Hilbert cuyos elementos son funciones definidas en un conjunto X y que toman valores en los complejos. Decimos que H es un espacio funcional de Hilbert sobre X si las evaluaciones puntuales son transformaciones continuas, esto es, para cada $x \in X$ el mapeo dado por $\Psi_x : f \mapsto f(x)$ es un funcional lineal acotado.

Presentamos a continuación ejemplos de espacios que caben dentro de la anterior definición.

Ejemplo 4.1.2 Espacio de Hardy H^2

Este espacio ya fue abordado en el capítulo anterior, donde uno de los resultados que probamos fue precisamente que el funcional Ψ_{z_0} es acotado para cada $z_0 \in D$.

Ejemplo 4.1.3 Espacio de Bergman $L_a^2(D)$

Recordemos del primer capítulo que el espacio de Bergman para D se define por

$$L_a^2(D) = \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ analítica, } \int_D |f(z)|^2 dz < \infty \right\},$$

donde dicha integral se toma con respecto a la medida de Lebesgue bidimensional en D , y cuyo producto interno está dado por

$$\langle f, g \rangle_{L_a^2} = \frac{1}{\pi} \int_D f(z) \overline{g(z)} dz.$$

Existe una manera alternativa de expresar este producto interno y que a continuación presentamos. Sean $f, g \in L_a^2(D)$ con coeficientes de Taylor a_n y b_n , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle_{L_a^2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \bar{b}_j r^j e^{-ij\theta} \right) r \, d\theta dr \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_n \bar{b}_j r^{n+j+1} e^{i(n-j)\theta} \, d\theta dr \\
&= 2 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_n \bar{b}_j r^{n+j+1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-j)\theta} \, d\theta \right] dr \\
&= 2 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n r^{2n+1} \, dr \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n \int_0^1 2r^{2n+1} \, dr = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \bar{b}_n}{n+1}.
\end{aligned}$$

De esto obtenemos

$$\|f\|_{L_a^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_{H^2}^2,$$

lo que implica que $\|f\|_{L_a^2} \leq \|f\|_{H^2}$.

Adecuando el corolario 1.0.8 del primer capítulo con el factor de normalización $1/\pi$ que hemos agregado en este caso, obtenemos

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{r} \|f\|_{L_a^2},$$

donde r es tal que $0 < r < d(z_0, \partial D)$. Concluimos que la evaluación puntual es un funcional continuo.

Ejemplo 4.1.4 Espacio de Dirichlet \mathcal{D}

Definimos el espacio de Dirichlet como el de todas las funciones analíticas en el disco D tales que su función derivada f' está en el espacio de Bergman.

Esto es

$$\mathcal{D} = \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ analítica, } f' \in L_a^2(D) \right\}.$$

A pesar de que resulta intuitivo intentar definir la norma de f en \mathcal{D} a través de $\|f'\|_{L_a^2}$, esto propiciaría que todas las funciones constantes tuvieran norma cero. Por lo tanto, optamos por definir la norma de f mediante

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|a_n|^2,$$

de manera que además se cumple la relación

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \|f'\|_{L_a^2}^2 + \|f\|_{H^2}^2.$$

Para verificar esto, calculamos

$$\begin{aligned} \|f'\|_{L_a^2}^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} \right\|_{L_a^2}^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) z^n \right\|_{L_a^2}^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_{n+1}|^2 (n+1)^2}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2. \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos que

$$\begin{aligned} \|f'\|_{L_a^2}^2 + \|f\|_{H^2}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |a_0|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) |a_n|^2 + |a_0|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |a_n|^2 = \|f\|_{\mathcal{D}}^2, \end{aligned}$$

justo como queríamos. Nótese que esta relación junto con la desigualdad que ya establecimos para las normas de los espacios de Hardy y Bergman implica

$$\|f\|_{\mathcal{D}} \geq \|f\|_{H^2} \geq \|f\|_{L_a^2},$$

y $\mathcal{D} \subseteq H^2 \subseteq L_a^2(D)$. Deducimos además que en cada caso la inclusión de un espacio en otro resulta en una transformación continua.

Finalmente, usamos esta misma desigualdad para probar que las evaluaciones puntuales son continuas en \mathcal{D} . Dado que en H^2 sí lo son, sabemos que $|f(z_0)| \leq C \|f\|_{H^2} \leq C \|f\|_{\mathcal{D}}$ para alguna constante C .

Ejemplo 4.1.5 Espacio de Sobolev W_1^2

El espacio de Sobolev W_1^2 está formado por todas las funciones absolutamente continuas definidas en $[0, 1]$ y tales que el cuadrado del módulo de su derivada es integrable. La norma se define por

$$\|f\|_{W_1^2}^2 = \int_0^1 \left[|f(x)|^2 + |f'(x)|^2 \right] dx .$$

Demostremos que la evaluación en cualquier punto del intervalo $[0, 1]$ es un funcional continuo.

Sea $x_0 \in [0, 1]$. Ya que f es absolutamente continua, es continua. Luego, como el intervalo en cuestión es cerrado, la integral coincide con la integral de Riemann. Entonces por el teorema del valor medio para integrales de Riemann sabemos existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) - f(c) = \int_c^{x_0} f'(t) dt$. Usando además que para cualquier par $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, tenemos :

$$\begin{aligned} |f(x_0)|^2 &\leq \left(|f(x_0) - f(c)| + |f(c)| \right)^2 \\ &\leq 2 \left(|f(x_0) - f(c)|^2 + |f(c)|^2 \right) \\ &= 2 \left(\left| \int_c^{x_0} f'(t) dt \right|^2 + \left| \int_0^1 f(t) dt \right|^2 \right) \leq 2 \left(\|f'\|_{L^1}^2 + \|f\|_{L^1}^2 \right) . \end{aligned}$$

Luego, ya que $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}$ por la desigualdad de Hölder, tendremos que

$$|f(x_0)|^2 \leq 2 \left(\|f'\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \right) = 2\|f\|_{W_1^2}^2 ,$$

lo que implica la continuidad del funcional.

Ejemplo 4.1.6 Espacio de Fock

El espacio de Fock consiste en todas las funciones enteras f tales que

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dz < \infty ,$$

y se define la norma del espacio como la raíz cuadrada de este valor.

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y consideremos el disco $D = D(z_0, 1)$. Usando el lema 1.0.7 del primer capítulo:

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_D |f(z)| \, dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_D |f(z)| \left(e^{-|z|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(e^{|z|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \, dz \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi} \int_D |f(z)|^2 e^{-|z|^2} \, dz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_D e^{|z|^2} \, dz\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|f\|_{Fock} \cdot C_{z_0}, \end{aligned}$$

donde $C_{z_0} = \left(\frac{1}{\pi} \int_D e^{|z|^2} \, dz\right)^{\frac{1}{2}}$. Esta última es una constante que sólo depende de z_0 y no de f , de donde concluimos que Ψ_{z_0} es continuo para cada $z_0 \in \mathbb{C}$.

4.2 Núcleos Reproductores

Consideremos H un espacio funcional de Hilbert sobre X . Así, la evaluación en el punto z es un funcional continuo para cada $z \in X$. Luego, por el teorema de representación de Riesz, existe una función $k_z \in H$ tal que

$$\langle f, k_z \rangle = f(z) \quad \forall f \in H.$$

A esta función k_z le llamamos núcleo reproductor para z en H , y a esta relación se le llama propiedad reproductora. Dado que $k_z \in H$, es en si una función definida en X , y por lo tanto

$$k_z(w) = \langle k_z, k_w \rangle.$$

Definimos entonces la función

$$\begin{aligned} K : X \times X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ K(w, z) &:= k_z(w) = \langle k_z, k_w \rangle, \end{aligned}$$

y le llamamos núcleo reproductor de H . Mostramos un par de propiedades de este núcleo.

Proposición 4.2.1 *Para todo par $w, z \in X$, $K(w, z) = \overline{K(z, w)}$.*

Demostración:

$$K(w, z) = \langle k_z, k_w \rangle = \overline{\langle k_z, k_w \rangle} = \overline{\langle k_w, k_z \rangle} = \overline{K(z, w)} .$$

■

Proposición 4.2.2 *Si H es espacio de funciones analíticas, K es analítica en la primera componente y conjugada analítica en la segunda.*

Demostración: Se sigue del hecho que ambas funciones estén en H , pues $K(\cdot, z) = k_z(\cdot) \in H$ y, usando el resultado anterior, $\overline{K(w, \cdot)} = K(\cdot, w) = k_w(\cdot) \in H$. Por lo tanto, ambas son analíticas.

■

La siguiente proposición se vuelve de gran relevancia, pues nos brinda una forma de encontrar expresiones precisas para nuestros núcleos.

Proposición 4.2.3 *Sea H espacio funcional de Hilbert sobre X y sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base ortonormal de H . Entonces*

$$K(w, z) = \sum_{i \in I} \overline{e_i(z)} e_i(w) .$$

Demostración: Es consecuencia de la Identidad de Parseval:

$$\begin{aligned} K(w, z) &= \langle k_z, k_w \rangle \\ &= \sum_{i \in I} \langle k_z, e_i \rangle \overline{\langle k_w, e_i \rangle} \\ &= \sum_{i \in I} \overline{\langle e_i, k_z \rangle} \langle e_i, k_w \rangle = \sum_{i \in I} \overline{e_i(z)} e_i(w) . \end{aligned}$$



Usaremos este resultado para calcular los núcleos de algunos de los espacios que presentamos en la sección anterior.

• **Espacio de Hardy H^2**

Afirmamos que $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ es base ortonormal de H^2 . En efecto, es un conjunto ortonormal pues para z^n y z^m sus representaciones en series de potencias son

$$z^n = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{j,n} z^j \quad \text{y} \quad z^m = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{j,m} z^j,$$

y por lo tanto

$$\langle z^n, z^m \rangle_{H^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{j,n} \overline{\delta_{j,m}} = \delta_{n,m}.$$

Mientras que, para verificar que es completo, sea $f \in H^2$ con serie de potencias $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ tal que $\langle f, z^n \rangle = 0$ para toda n . Entonces

$$0 = \langle f, z^n \rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, z^n \right\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \langle z^j, z^n \rangle = a_n$$

para toda n , lo que implica que $f = 0$.

Empleamos pues esta base para calcular el núcleo de H^2 :

$$\begin{aligned} K_{H^2}(w, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z^n} w^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{z} w)^n = \frac{1}{1 - \overline{z} w}. \end{aligned}$$

A este núcleo se le suele llamar el núcleo de Szegő.

• **Espacio de Bergman $L_a^2(D)$**

Podemos verificar de manera similar al caso anterior que el conjunto

$\{\sqrt{n+1} z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es base ortonormal para $L_a^2(D)$. Calculamos el núcleo del espacio:

$$\begin{aligned} K_{L_a^2}(w, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} w^n \sqrt{n+1} \bar{z}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (w\bar{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \xi^n, \end{aligned}$$

donde $\xi = w\bar{z} \in D$. Como esta serie de potencias describe una función analítica, se puede integrar término a término dentro de su dominio de convergencia. Entonces la función $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^{n+1} = \frac{\xi}{1-\xi}$ es antiderivada de $K_{L_a^2}(w, z)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} K_{L_a^2}(w, z) &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi}{1-\xi} \right) \\ &= \frac{1}{(1-\xi)^2} = \frac{1}{(1-w\bar{z})^2}. \end{aligned}$$

Este núcleo recibe el nombre de núcleo de Bergman.

- **Espacio de Dirichlet \mathcal{D}**

Consideramos para este caso la base ortonormal $\left\{ \frac{z^n}{\sqrt{n+1}} \right\}_{n=0}^{\infty}$. Calculamos:

$$K_{\mathcal{D}}(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\sqrt{n+1}} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w\bar{z})^n}{n+1}.$$

Para expresar esta suma de otra manera, recordamos que para $|\alpha| < 1$ se cumple $\log(1+\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \alpha^n$, y por lo tanto $\log(1-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} \alpha^n$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha} \log(1-\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} \alpha^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n+1}. \end{aligned}$$

De donde concluimos que

$$K_{\mathcal{D}}(w, z) = -\frac{1}{w\bar{z}} \log(1-w\bar{z}).$$

4.3 El Símbolo de Berezin

Para esta sección consideraremos espacios funcionales de Hilbert H sobre el disco unitario D y cuyos elementos son funciones analíticas. Ya vimos que el núcleo reproductor de H , $K(w, z) = k_z(w)$ es analítico en la primera componente y conjugado analítico en la segunda. También tenemos que el conjunto de las funciones k_z , con $z \in D$ es maximal con respecto a la ortogonalidad, pues de existir $f \in H$ tal que $f \perp k_z$ para toda $z \in D$, entonces

$$0 = \langle f, k_z \rangle = f(z) \quad \forall z \in D,$$

y por lo tanto $f = 0$. Podemos mencionar también las siguientes relaciones:

- $\|k_z\|^2 = K(z, z)$,
- $|K(w, z)|^2 \leq K(z, z)K(w, w)$,

las cuales se deducen directamente de la definición de K y la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si contamos con que $k_z \neq 0$ para cada $z \in D$ (o equivalentemente, para cada $z \in D$ existe $f \in H$ tal que $f(z) \neq 0$), podemos considerar las funciones

$$\hat{k}_z(w) = \frac{k_z(w)}{\|k_z\|} = \frac{K(w, z)}{\sqrt{K(z, z)}},$$

y les llamamos núcleos reproductores normalizados.

Definición 4.3.1 Sea H espacio funcional de Hilbert con núcleos reproductores normalizados \hat{k}_z y sea T un operador lineal acotado en H . Definimos una función $\tilde{T} : D \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$\tilde{T}(z) = \langle T\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle$$

y le llamamos el símbolo de Berezin de T .

Mostramos algunas de las propiedades de esta función.

Proposición 4.3.2 *El símbolo de Berezin cumple:*

- a) Si T es auto-adjunto, \tilde{T} toma valores reales.
- b) Si T es positivo, \tilde{T} es no negativo.
- c) $\tilde{T}^* = \overline{\tilde{T}}$, es decir, el símbolo de Berezin del adjunto, es el conjugado del símbolo.
- d) El mapeo que asigna a cada operador lineal acotado su símbolo de Berezin

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(H) &\longrightarrow L^\infty(D) \\ T &\longmapsto \tilde{T} \end{aligned}$$

es una contracción lineal.

Demostración:

- a) Si T es auto-adjunto, entonces $\langle T\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle = \langle \hat{k}_z, T\hat{k}_z \rangle = \overline{\langle T\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle}$. Esto es, $\tilde{T}(z) = \overline{\tilde{T}(z)}$, y por lo tanto $\tilde{T}(z) \in \mathbb{R}$.
- b) Si T es positivo, $\langle T\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle \geq 0$, es decir, $\tilde{T}(z) \geq 0$.
- c) Se sigue de $\tilde{T}^*(z) = \langle T^*\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle = \langle \hat{k}_z, T\hat{k}_z \rangle = \overline{\langle T\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle} = \overline{\tilde{T}(z)}$.
- d) Sean T_1, T_2 operadores en $\mathcal{L}(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Para cada $z \in D$ tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{(\lambda T_1 + T_2)}(z) &= \langle (\lambda T_1 + T_2)\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle \\ &= \lambda \langle T_1\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle + \langle T_2\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle \\ &= \lambda \tilde{T}_1(z) + \tilde{T}_2(z). \end{aligned}$$

De esto se sigue que $\Phi(\lambda T_1 + T_2) = \lambda\Phi(T_1) + \Phi(T_2)$, y por lo tanto Φ es lineal. Luego

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D} |\tilde{T}(z)| &= \sup_{z \in D} |\langle T\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle| \\ &\leq \sup_{z \in D} \|T\hat{k}_z\| \|\hat{k}_z\| \\ &\leq \sup_{z \in D} \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \|\hat{k}_z\|^2 = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que \tilde{T} efectivamente está en $L^\infty(D)$ y que la norma de Φ como mapeo de $\mathcal{L}(H)$ a $L^\infty(D)$ es menor o igual a 1. Por lo tanto, Φ es contracción. ■

Dado que $K(w, z)$ es analítica en w y conjugada analítica en z , los núcleos reproductores k_z son real-analíticos en z . Se sigue que el símbolo de Berezin \tilde{T} es una función real-analítica y acotada en D . Esto nos dice que cada operador acotado en el espacio funcional de Hilbert induce una función suave en el disco D a través de su símbolo de Berezin. Más aún, como mostramos a continuación, esta asignación tiene la propiedad de que cada operador queda totalmente determinado por su símbolo. Esto es, a operadores acotados distintos corresponden símbolos de Berezin diferentes.

Proposición 4.3.3 *El mapeo $\Phi : T \mapsto \tilde{T}$ es uno a uno.*

Demostración: Sea T operador en H tal que $\Phi(T) = \tilde{T} = 0$. Entonces $\langle T\hat{k}_z, \hat{k}_z \rangle = 0$ para todo $z \in D$. Bastará con demostrar que T es el operador cero. Consideremos la función

$$F(z, w) = \langle Tk_w, k_z \rangle \quad z, w \in D.$$

Si consideramos a T^* el operador adjunto de T , entonces por la propiedad reproductora tendremos

$$\begin{aligned} F(z, w) &= (Tk_w)(z), \quad y \\ \overline{F(z, w)} &= \langle k_z, Tk_w \rangle = \langle T^*k_z, k_w \rangle = (T^*k_z)(w). \end{aligned}$$

Además como $F(z, z) = \|k_z\|^2 \tilde{T}(z) = 0$, se tiene que F es analítica en z , conjugada analítica en w y cero en la diagonal. Por lo tanto, por un resultado de la teoría de funciones complejas de varias variables (ver ejercicio 3, página 371 de [10]), se sigue que $F = 0$. Luego

$$T\hat{k}_w(z) = \frac{1}{\|k_z\|} F(z, w) = 0 \quad \forall z, w \in D.$$

En particular, $T\hat{k}_w$ es la función cero de H para cada $w \in D$. Sea ahora $f \in H$. Entonces

$$(T^*f)(z) = \langle T^*f, k_z \rangle = \|k_z\| \langle f, T\hat{k}_z \rangle = 0 \quad \forall z \in D.$$

Por lo tanto, $T^*f = 0$ para toda $f \in H$, y por ende T^* es el operador cero. Se deduce de esto que $T = 0$.

■

Capítulo 5

Comportamiento Frontera de Clases Especiales de Funciones C^∞ en el Disco

5.1 Valores Frontera de Símbolos de Berezin

Bajo el contexto de la teoría desarrollada en la sección final del capítulo anterior, buscaremos en este capítulo retomar el planteamiento que en su momento nos motivó a enunciar al teorema de Fatou. Hasta ahora, a pesar de haber enunciado algunas propiedades del símbolo de Berezin, no podemos decir nada acerca de su comportamiento cerca de la frontera del disco unitario. Ya que este cuestionamiento permanece a la fecha sin solución para espacios funcionales de Hilbert sobre D en general, nos enfocaremos en el caso H^2 . En concreto, nos dedicaremos a describir el comportamiento frontera de funciones suaves en el disco dadas a través del símbolo de Berezin de un operador acotado en el espacio de Hardy H^2 . También mostraremos como el símbolo de algunos operadores nos puede dar información acerca de

la convergencia a valores frontera de cierto tipo de funciones analíticas.

Antes de adentrarnos en el problema para algún operador en general, nos centraremos en explorar el comportamiento frontera de los símbolos de una familia de operadores especiales, los compactos. Para esto, observamos primero que para cada $f \in H^2$:

$$\begin{aligned} |\langle f, \hat{k}_z \rangle| &= \sqrt{1 - |z|^2} |\langle f, k_z \rangle| \\ &= \sqrt{1 - |z|^2} |f(z)|. \end{aligned}$$

Así, si $f \in H^\infty$

$$|\langle f, \hat{k}_z \rangle| \leq \|f\|_\infty \sqrt{1 - |z|^2},$$

y deducimos que $\langle f, \hat{k}_z \rangle$ tiende a cero cuando $|z|$ tiende a 1. Además, como H^∞ es denso en H^2 dicha convergencia se cumple para cualquier $f \in H^2$. Esto nos dice que el espacio H^2 es estandar, en el sentido que para cualquier sucesión $\{z_n\}$ en el disco tal que $|z_n| \rightarrow 1^-$, se tiene que la sucesión $\{\hat{k}_{z_n}\}$ de los núcleos correspondientes converge débilmente a cero. Dicha propiedad es la clave en la demostración del siguiente resultado.

Proposición 5.1.1 *Sea T operador lineal compacto en H^2 . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}(z_n) = 0$$

para cualquier sucesión $\{z_n\}$ convergente a la frontera de D .

Demostración: Como $\{z_n\}$ converge a la frontera del disco, $|z_n| \rightarrow 1^-$. Luego, por la observación anterior, $\{\hat{k}_{z_n}\}$ converge débilmente a cero. Dado que T es compacto, manda sucesiones débilmente convergentes en fuertemente convergentes (Ver apéndice B, teorema B.0.11). Así, $T\hat{k}_{z_n}$ converge

fuertemente a $T0 = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \tilde{T}(z_n) \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \langle T\hat{k}_{z_n}, \hat{k}_{z_n} \rangle \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\hat{k}_{z_n}\| \|\hat{k}_{z_n}\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\hat{k}_{z_n}\| = 0 . \end{aligned}$$

■

Con esto, concluimos que el símbolo de Berezin de un operador compacto en H^2 se anula en la frontera.

En contraste con lo que ocurre con los operadores compactos, el comportamiento que se presenta para símbolos en general puede ser bastante errático. Corroboramos esta afirmación exhibiendo un operador acotado en H^2 cuyo símbolo de Berezin no tiene límites radiales en ningún punto de la frontera del disco. Para lograr esto, será preciso recordar que una sucesión $\{a_n\}$ de números complejos se dice Abel convergente a a si el límite

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

existe y es igual a a .

Teorema 5.1.2 *Sea $a_n = n^{ic}$ con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y sea $D_{\{a_n\}}$ el operador diagonal en H^2 cuyos elementos en la diagonal con respecto a la base $\{z^n\}$ son los números $\{a_n\}$. Entonces el símbolo de Berezin $\tilde{D}_{\{a_n\}}$ del operador $D_{\{a_n\}}$ no tiene límites radiales en ningún punto de la frontera.*

Demostración: Hagamos $s_k = \sum_{n=1}^k n^{-1+ic}$. Estimamos:

$$\begin{aligned} s_{k-1} - \frac{k^{ic} - 1}{ic} &= \sum_{n=1}^{k-1} n^{-1+ic} - \int_1^k t^{-1+ic} dt \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \int_n^{n+1} n^{-1+ic} dt - \sum_{n=1}^{k-1} \int_n^{n+1} t^{-1+ic} dt \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \int_n^{n+1} [n^{-1+ic} - t^{-1+ic}] dt . \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada k tenemos

$$s_{k-1} = \frac{k^{ic}}{ic} - \frac{1}{ic} + \sum_{n=1}^{k-1} \int_n^{n+1} [n^{-1+ic} - t^{-1+ic}] dt. \quad (5.1)$$

Examinamos el término general de la última suma:

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} [n^{-1+ic} - t^{-1+ic}] dt &= \int_n^{n+1} \left[(-1+ic) \int_t^n s^{-2+ic} ds \right] dt \\ &= (-1+ic) \int_n^{n+1} \int_t^n s^{-2+ic} ds dt. \end{aligned}$$

Tomando módulos y considerando que $n < s < t < n+1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+1} [n^{-1+ic} - t^{-1+ic}] dt \right| &\leq |-1+ic| \left| \int_n^{n+1} \int_t^n s^{-2+ic} ds dt \right| \\ &\leq |-1+ic| \int_n^{n+1} \int_n^t \frac{1}{s^2} ds dt \\ &\leq \frac{|-1+ic|}{n^2} \int_n^{n+1} \int_n^t ds dt \\ &\leq \frac{\sqrt{1+c^2}}{n^2} = O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k-1} \int_n^{n+1} [n^{-1+ic} - t^{-1+ic}] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} [n^{-1+ic} - t^{-1+ic}] dt$$

existe y es finito. Considerando esto en (5.1) obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{ic}}{ic} - \frac{1}{ic} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} [n^{-1+ic} - t^{-1+ic}] dt.$$

Lo cual, dado que $\frac{k^{ic}}{ic}$ no es sucesión convergente, implica que s_k tampoco lo es. Entonces, como $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-1+ic}$ no converge y $|n^{-1+ic}| = \frac{1}{n}$, se sigue a partir de uno de los teoremas de A. Tauber (ver [9], pag. 154) que s_k no es Abel convergente.

Por otro lado, sabemos por (5.1) que $s_{k-1} - \frac{k^{ic}}{ic}$ tiende a un límite finito cuando k crece. De aquí deducimos que $a_k = k^{ic}$ no es Abel convergente, pues de serlo implicaría que s_k lo es.

Dado que $|a_n| = |n^{ic}| = 1$ (salvo $a_0 := 0$), tenemos que $\{a_n\}$ es acotado. Por lo tanto $D_{\{a_n\}}$ es acotado en H^2 y podemos calcular su símbolo de Berezin:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\{a_n\}}(z) &= \left\langle D_{\{a_n\}} \hat{k}_z(w), \hat{k}_z(w) \right\rangle = \left\langle D_{\{a_n\}} \frac{\sqrt{1-|z|^2}}{1-\bar{z}w}, \frac{\sqrt{1-|z|^2}}{1-\bar{z}w} \right\rangle \\ &= (1-|z|^2) \left\langle D_{\{a_n\}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}^n w^n, \sum_{j=0}^{\infty} \bar{z}^j w^j \right\rangle \\ &= (1-|z|^2) \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{z}^n w^n, \sum_{j=0}^{\infty} \bar{z}^j w^j \right\rangle \\ &= (1-|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_n \bar{z}^n z^j \langle w^n, w^j \rangle = (1-|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^{2n}. \end{aligned}$$

Esto nos indica que $\tilde{D}_{\{a_n\}}$ es una función radial, es decir, $\tilde{D}_{\{a_n\}}(z) = \tilde{D}_{\{a_n\}}(|z|)$.

Luego

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} \tilde{D}_{\{a_n\}}(z) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

donde $t = |z|^2$. Como ya vimos, $\{a_n\}$ no es Abel convergente. Esto implica que el límite en el lado derecho de la igualdad anterior no existe. Por lo tanto, podemos concluir que el símbolo de Berezin $\tilde{D}_{\{a_n\}}$ no tiene límites radiales en ningún punto de la circunferencia unitaria. ■

Estos dos últimos resultados nos indican que dado un operador acotado cualquiera en H^2 , no es posible decir en primera instancia algo acerca del comportamiento frontera de su símbolo de Berezin; al menos no sin conocer más acerca de la naturaleza de dicho operador. Cabe destacar que este resultado también implica que $\tilde{D}_{\{a_n\}}$ es un ejemplo de una función en D que es C^∞ pero no es analítica. Esto debido a que si lo fuese, al ser acotada en el disco, estaría en H^∞ y por el teorema de Fatou tendríamos que sus límites radiales existen para casi todo punto de la frontera.

Complementaremos estos resultados relativos a símbolos y límites radiales con el siguiente teorema. En él mostramos que es posible dar condiciones suficientes y necesarias en términos de símbolos de Berezin de operadores diagonales en H^2 para asegurar un buen comportamiento frontera de cierto tipo de funciones analíticas. En específico, consideraremos funciones en $\ell_A^\infty(D)$, es decir, funciones analíticas en D cuyos coeficientes de Taylor $\hat{f}(n)$ forman una sucesión acotada.

Teorema 5.1.3 *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n \in \ell_A^\infty(D)$. Entonces f tiene límites radiales para casi todo punto de \mathbb{S}^1 si y sólo si*

$$\tilde{D}_{\{\hat{f}(n)e^{in\theta}\}}(\sqrt{t}) = O(1-t) \quad \text{cuando } t \rightarrow 1^- ,$$

para casi toda θ en $[0, 2\pi]$.

(Conservando la notación usada en el teorema anterior, $D_{\{\hat{f}(n)e^{in\theta}\}}$ denota el operador diagonal con respecto a la base canónica $\{z^n\}$ cuyos elementos en la diagonal son $\{\hat{f}(n)e^{in\theta}\}$).

Demostración: Hagamos $z = re^{i\theta}$. Así $f(z) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)r^n e^{in\theta}$. Ya que la sucesión $\{\hat{f}(n)\}$ está en ℓ^∞ , el operador $D_{\{\hat{f}(n)e^{in\theta}\}}$ es acotado. Entonces, haciendo los mismos cálculos que en la demostración del teorema anterior obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)r^n e^{in\theta} \\ &= \frac{(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)r^n e^{in\theta}}{1-r} = \frac{\tilde{D}_{\{\hat{f}(n)e^{in\theta}\}}(\sqrt{r})}{1-r} . \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\tilde{D}_{\{\hat{f}(n)e^{in\theta}\}}(\sqrt{r})}{1-r} .$$

Por lo tanto, f tendrá límites radiales para casi todo punto en la frontera si y sólo si

$$\tilde{D}_{\{f(n)e^{in\theta}\}}(\sqrt{r}) = O(1-r) \quad \text{cuando } r \rightarrow 1^-$$

para casi toda θ en $[0, 2\pi]$.

■

5.2 Una Función Analítica sin Límites Radiales

Como ya hemos visto, un buen comportamiento de una función en el disco no implica por sí solo que éste se pueda extender a la frontera. Para concluir este capítulo, presentamos una función analítica en D que carece de límites radiales en todo punto de la frontera. Nótese que por ser analítica, esta función es más restrictiva que el símbolo de Berezin $\tilde{D}_{\{a_n\}}$ expuesto en la sección anterior; mientras que por no tener límite en ningún punto frontera, su comportamiento es mucho peor que los ejemplos mencionados en el capítulo 3.

Teorema 5.2.1 *La función $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ es analítica en D , pero no tiene límites radiales en ningún punto de su frontera.*

Demostración: La función es analítica pues la serie de potencias converge para $|z| < 1$.

Sea $0 \leq \theta \leq 2\pi$ fijo y consideremos $s_k = \sum_{j=1}^k e^{i\theta j!}$. Si $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es sucesión de complejos con $|\delta_k| < 1$ para cada k , entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{e} + s_{k-1}$ no existe. Para ver esto, notamos que la diferencia entre dos términos consecutivos no tiende

a cero:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta_{k+1}}{e} + s_k - \left(\frac{\delta_k}{e} + s_{k-1} \right) \right| &= \left| s_k - s_{k-1} + \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{e} \right| \\ &\geq |e^{i\theta k!}| - \left| \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{e} \right| \\ &\geq 1 - \frac{2}{e} > 0. \end{aligned}$$

Demostraremos que existe $\{\delta_k\}$ con $|\delta_k| < 1$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[f \left(\left(1 - \frac{1}{k!} \right) e^{i\theta} \right) - \left(\frac{\delta_k}{e} + s_{k-1} \right) \right] = 0, \quad (5.2)$$

y de esto se seguirá que f no tiene límite radial en el punto $e^{i\theta}$ de la frontera.

Sea pues $\delta_k = \left(1 - \frac{1}{k!} \right)^{k!} e^{i\theta k!} e$. Entonces

$$\begin{aligned} f \left(\left(1 - \frac{1}{k!} \right) e^{i\theta} \right) &= \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{k!} \right)^{j!} e^{i\theta j!} + \left(1 - \frac{1}{k!} \right)^{k!} e^{i\theta k!} \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k!} \right)^{j!} e^{i\theta j!} \\ &= A_1 + \frac{\delta_k}{e} + A_2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Estimaremos primero $|A_1 - s_{k-1}|$. Para esto usaremos la desigualdad $1 - (1-x)^M \leq Mx$; la cual se cumple para cada $M \geq 1$, para todo $x \in [0, 1]$ y puede ser demostrada usando cálculo diferencial elemental.

$$\begin{aligned} |A_1 - s_{k-1}| &= \left| \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{k!} \right)^{j!} e^{i\theta j!} - \sum_{j=1}^{k-1} e^{i\theta j!} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k!} \right)^{j!} \right) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j!}{k!} \\ &\leq \frac{(k-2)!}{k!} \sum_{j=1}^{k-2} 1 + \frac{(k-1)!}{k!} \\ &= \frac{k-2}{k(k-1)} + \frac{1}{k} < \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|A_1 - s_{k-1}|$ tiende a cero cuando k tiende a infinito. Para lo siguiente, recordemos que $(1 - \frac{1}{n})^n$ tiende crecientemente a $\frac{1}{e}$ conforme n aumenta. Así

$$|\delta_k| = \left| \left(1 - \frac{1}{k!}\right)^{k!} e^{i\theta k!} e \right| \leq \frac{1}{e} e = 1 .$$

Para estimar A_2 :

$$\begin{aligned} |A_2| &= \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k!}\right)^{j!} e^{i\theta j!} \right| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k!}\right)^{j!} \\ &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{k!}\right)^{k!} \right]^{\frac{j!}{k!}} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{j!}{k!}} \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^j . \end{aligned}$$

Dado que esta última expresión es la cola de una serie geométrica convergente, tendremos que también se acerca a cero cuando k tienda a infinito. Por último, empleando (5.3) tenemos

$$\begin{aligned} \left| f \left(\left(1 - \frac{1}{k!}\right) e^{i\theta} \right) - \left(\frac{\delta_k}{e} + s_{k-1} \right) \right| &= |A_1 - s_{k-1} + A_2| \\ &\leq |A_1 - s_{k-1}| + |A_2| , \end{aligned}$$

lo cual debido a las estimaciones anteriores implica el límite en (5.2). Dado que θ fue tomado de modo arbitrario en $[0, 2\pi]$, concluimos que f no tiene límite radial en ningún punto de la frontera \mathbb{S}^1 .

Conclusiones

Hemos desarrollado la teoría del análisis funcional que nos ha permitido obtener resultados acerca del comportamiento frontera de funciones analíticas y C^∞ en el disco unitario. Con el teorema de Fatou, hemos podido asegurar que toda función analítica y acotada en D tenga límites radiales para casi todo punto en la frontera. Mediante el símbolo de Berezin fuimos capaces de obtener nuevas funciones suaves en el disco, cuyo comportamiento radial describimos en el último capítulo para algunos casos.

Además, en el tercer capítulo mostramos que la existencia de límites radiales nos permite recuperar los valores de funciones en D a través de las integrales de Poisson y Cauchy, así como pasar de un espacio de funciones a otro, como lo hicimos con H^2 y \tilde{H}^2 . Esto nos reafirma las ventajas de poder garantizar un buen comportamiento frontera.

Para finalizar, podemos agregar que aún es posible seguir trabajando en esta misma línea, pues los resultados que se han dado describen el comportamiento frontera con condiciones suficientes sin ser necesarias, o para ciertos subespacios de funciones analíticas. Siempre será un reto interesante tratar de debilitar las hipótesis dadas, generalizando así tanto como se pueda.

Apéndice A

La Función Maximal de Poisson

En este apéndice argumentamos brevemente por qué la función maximal de Poisson es de tipo débil $(1, 1)$. Recordemos que esta función se define por

$$P^*(f)(\theta) = \sup_{0 \leq r < 1} |(P_r * f)(\theta)| ,$$

donde $P_r * f$ denota la convolución del núcleo de Poisson P_r con f . Para lograr esto, es necesario auxiliarnos de otra función de enorme relevancia: la maximal de Hardy-Littlewood.

Definición A.0.2 Sea $f \in L^1_{loc}([-\pi, \pi])$. Para $\theta \in [-\pi, \pi]$ definimos la función maximal de Hardy-Littlewood Mf como

$$Mf(\theta) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)| dt : \theta \in \overset{\circ}{Q}, Q \text{ es un intervalo cerrado} \right\} ,$$

donde $|Q|$ denota la medida de Lebesgue de Q y $\overset{\circ}{Q}$ su interior. Además, al operador M tal que $f \mapsto Mf$ se le llama el operador maximal de Hardy-Littlewood.

El resultado que deseamos obtener será consecuencia de dos lemas que a continuación enunciamos, relativos a propiedades de esta función.

Lema A.0.3 *La función maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil (1, 1), esto es, existe una constante $C > 0$ tal que para toda $\lambda > 0$*

$$|\{ \theta \in [-\pi, \pi] : Mf(\theta) > \lambda \}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Demostración: Ver [7], pag. 143. ■

Lema A.0.4 *Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Entonces*

$$|(P_r * f)(\theta)| \leq CMf(\theta, r),$$

donde C es una constante y

$$Mf(\theta, r) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)| dt : \theta \in \dot{Q}, Q \text{ es un intervalo cerrado de longitud } \geq r \right\}$$

Demostración: Ver [7], página 90. ■

Concluimos con la proposición central de este apéndice.

Proposición A.0.5 *La función maximal de Poisson es de tipo débil (1, 1), esto es, existe una constante $C > 0$ tal que para toda $\lambda > 0$*

$$|\{ \theta \in [-\pi, \pi] : P^*(\theta) > \lambda \}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Demostración: Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Por el lema anterior existe una constante C tal que $|(P_r * f)(\theta)| \leq CMf(\theta, r)$. Luego

$$\sup_{0 \leq r < 1} |(P_r * f)(\theta)| \leq C \sup_{0 \leq r < 1} Mf(\theta, r) \leq CMf(\theta),$$

y por lo tanto $P^*(f)(\theta) \leq CMf(\theta)$. Entonces

$$\left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : P^*(f)(\theta) > \lambda \right\} \subseteq \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : Mf(\theta) > \frac{\lambda}{C} \right\}.$$

Por lo cual, usando que el operador M es de tipo débil $(1,1)$, tenemos

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : F^*(f)(\theta) > \lambda \right\} \right| &\leq \left| \left\{ \theta \in [-\pi, \pi] : Mf(\theta) > \frac{\lambda}{C} \right\} \right| \\ &\leq \frac{C'}{\lambda} \|f\|_1 = \frac{C''}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. ■

Apéndice B

Operadores Compactos

En este apéndice recordamos algunas propiedades de los operadores compactos, y su relación con las convergencias débil y fuerte en los espacios normados.

Definición B.0.6 Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado X converge fuertemente (o converge en la norma) si existe un $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0 .$$

Definición B.0.7 Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado X converge débilmente si existe un $x \in X$ tal que para toda $f \in X^*$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) .$$

Una primera observación que podemos hacer es que convergencia fuerte implica débil. En efecto, si x_n converge fuertemente a x y $f \in X^*$ tenemos

$$|f(x) - f(x_n)| = |f(x - x_n)| \leq \|f\| \|x - x_n\| \rightarrow 0$$

conforme n tiende a infinito.

En el caso que X sea un espacio de Hilbert, el teorema de representación de Riesz nos permite obtener una equivalencia para la convergencia débil. Esto es, $x_n \rightarrow x$ débilmente si y sólo si $\langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle$ para todo $z \in X$.

Teorema B.0.8 *Sea $\{x_n\}$ sucesión débilmente convergente a un punto x en un espacio normado X . Entonces*

- a) *El límite débil x es único.*
- b) *Cada subsucesión de $\{x_n\}$ converge débilmente a x .*
- c) *La sucesión $\{\|x_n\|\}$ es acotada.*

Demostración: Ver [11], pag. 258.

■

Definimos a los operadores compactos, para luego mostrar un par de resultados que nos serán de utilidad.

Definición B.0.9 *Sean X, Y espacios normados. Un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ es un operador compacto si para cada subconjunto acotado M de X , su imagen $T(M)$ es compacto relativo en Y , esto es, la cerradura $\overline{T(M)}$ es compacta.*

Teorema B.0.10 *Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador compacto. Entonces para cada sucesión $\{x_n\}$ acotada en X , la sucesión $\{Tx_n\}$ en Y tiene una subsucesión convergente.*

Demostración: Como T es compacto y $\{x_n\}$ acotada, la cerradura de $\{Tx_n\}$ es compacta en Y . Si $\{Tx_n\}$ es igual a su cerradura, entonces es compacto,

y por la definición de compacidad se sigue que $\{Tx_n\}$ tiene una subsucesión convergente. En caso contrario, se tendría que $\{Tx_n\}$ tiene al menos un punto de acumulación, y por lo tanto, alguna subsucesión convergente.

■

Teorema B.0.11 Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador compacto. Si la sucesión $\{x_n\}$ converge débilmente a x en X , entonces $\{Tx_n\}$ converge fuertemente a Tx en Y .

Demostración: Hagamos $y_n = Tx_n$ y $y = Tx$. Mostraremos primero que $\{y_n\}$ converge débilmente a y . Sea $g \in Y^*$. Definimos un funcional lineal f en X mediante $f(z) = g(Tz)$. Como T es compacto, es acotado, y por lo tanto

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leq \|g\| \|Tz\| \leq \|g\| \|T\| \|z\| ,$$

lo que implica que f es acotado. Luego, como $\{x_n\}$ converge débilmente a x , se tiene $f(x_n) \rightarrow f(x)$, y por ende, $g(y_n) \rightarrow g(y)$. Esto prueba que $\{y_n\}$ converge débilmente a y .

Ahora, supongamos $\{y_n\}$ no converge fuertemente a y . Entonces, existe un $\eta > 0$ y una subsucesión y_{n_k} tal que

$$\|y - y_{n_k}\| > \eta .$$

Dado que $\{x_n\}$ converge débilmente, el inciso c) de B.0.8 nos dice que es una sucesión acotada, y por lo tanto $\{x_{n_k}\}$ también. Se sigue del teorema anterior que $\{Tx_{n_k}\} = \{y_{n_k}\}$ tiene una subsucesión convergente. Sea $\{\hat{y}_j\}$ dicha subsucesión, y \hat{y} su límite. Como esta convergencia es fuerte, implica la débil, esto es, $\{\hat{y}_j\}$ converge débilmente a \hat{y} . Se sigue de a) y b) en B.0.8 que $y = \hat{y}$. Con esto obtenemos

$$\|y - \hat{y}_j\| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \|y - \hat{y}_j\| > \eta > 0 ,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\{y_n\}$ converge fuertemente a y .



Bibliografía

- [1] AGLER, J., MCCARTHY, J.E., *Pick Interpolation and Hilbert Function Spaces*, American Mathematical Society, 2002.
- [2] ASH, J.M., KARAEV, M.T., *On the Boundary Behavior of Special Classes of C^∞ -Functions and Analytic Functions*, International Mathematical Forum, Vol. 7, no. 4 (2012), pp. 153-166.
- [3] CONWAY, J., *A Course in Functional Analysis*, Segunda Edición, Springer, 1990.
- [4] DUOANDIKOETXEA, J., *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2000.
- [5] FOLLAND, G., *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*, Segunda Edición, John Wiley and Sons Inc., 2004.
- [6] GARCÍA-CUERVA, J., RUBIO DE FRANCIA, J.L., *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North Holland, 1985.
- [7] GARCÍA FIGUEROA, G., *Teoremas de Extensión Armónica para Funciones y Distribuciones*, Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, 2006.

- [8] GREENE, R., KRANTZ, S., *Function Theory of One Complex Variable*, Tercera Edición, American Mathematical Society, 2006.
- [9] HARDY, G.H., *Divergent Series*, Oxford: The Clarendon Press, 1963.
- [10] KRANTZ, S., *Function Theory of Several Complex Variables*, Segunda Edición, AMS Chelsea Publishing, 2000.
- [11] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, Inc., 1978.
- [12] MARTÍNEZ-AVENDAÑO, R., ROSENTHAL, P., *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space*, Springer, 2007.
- [13] NAYLOR, A.W., SELL, G.R., *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, Springer-Verlag, 1982.
- [14] NORDGREN, E., ROSENTHAL, P., *Boundary Values of Berezin Symbols*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 73 (1994), pp. 362-368.
- [15] ROGOSINSKI, W. *Fourier Series*, Segunda Edición, Chelsea Publishing Company, 1959.
- [16] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, Tercera Edición, McGraw Hill, 1987.
- [17] STEIN, M., SHAKARCHI, R., *Real Analysis, Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.
- [18] ZHU, K., *Operator Theory in Function Spaces*, Segunda Edición, American Mathematical Society, 2007.