"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Diseño de actividades didácticas en el estudio de la variación a partir de la resolución de problemas, con apoyo en GeoGebra

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Ricardo Ruiz Moroyoqui

Director de Tesis: Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Hermosillo, Sonora. México, Febrero del 2018

SINODALES

Dr. Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora

M.C Héctor Alfredo Hernández Hernández
Universidad de Sonora

Dedicatoria

A mis padres

Ricardo y Dina

Agradecimientos

A mi director de tesis, Dr. Agustín Grijalva Monteverde, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él, por su paciencia y su valiosa ayuda al destinar tiempo, además de guiarme amablemente y pacientemente, siempre con disposición

A mis padres y hermanos, por sus palabras, enseñanza y cariño que siempre me acompaña.

A Mary por apoyarme y darme esa motivación para finalizar este trabajo.

Al maestro Juan Soto y Dr. Martin Gildardo García por la ayuda brindada.

A Héctor Hernández por su apoyo desde el ingreso a la carrera hasta la conclusión de este trabajo.

A la Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos por los comentarios que permitieron mejorar este trabajo.

A mis profesores, por ayudarme a crecer personal y profesionalmente, por sus enseñanzas y por su amistad.

A mis compañeros y amigos de la licenciatura por los buenos recuerdos compartidos.

En general a mi familia y amigos.

Ricardo Ruiz Moroyoqui
Hermosillo, Sonora
Febrero del 2018

Índice general

Introducción

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dirigida a estudiantes del cuarto semestre nivel preparatoria. Para llevar a cabo nuestra propuesta tomamos problemas que tuvieran relación directa con otras ciencias, es decir, problemas de matemáticas en contextos no matemáticos.

El trabajo que se está presentando consta de cuatro capítulos y un apartado en donde se expresan las conclusiones obtenidas al haber culminado nuestro estudio.

En el capítulo 1, se realiza un análisis de los antecedentes de la problemática que existe en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y cómo influyen los problemas de matemáticas en este proceso, en el cual tomamos en cuenta que el sistema educativo en México toma la resolución de problemas como competencia a desarrollar, dando así una descripción de la problemática en estudio y justificación para la misma.

Concluyendo en este capítulo con los objetivos esperados en su realización.

En el capítulo 2, presentamos una revisión de los contenidos a cubrir en el cuarto semestre de matemáticas en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Por otro lado exponemos la metodología llevada a cabo para la realización de este trabajo, así como la revisión de algunas obras características en el tema de los problemas y la resolución de problemas. Tales obras corresponden a: George Polya, Alan H. Schoenfeld, Lev Moiseevich Fridman y Eduardo Mancera Martínez.

En el tercer capítulo se presenta la propuesta didáctica, cómo influye el uso del software GeoGebra en cada una de las actividades didácticas. Aparecen las características de la propuesta y de cada actividad se cierra con la descripción de la misma.

El capítulo 4, se conforma de los aspectos principales de la puesta en escena de nuestra propuesta didáctica, para lo cual se seleccionó un grupo de ocho estudiantes para llevar a cabo una prueba piloto, lo cual permitió modificar cada actividad después de haber realizado la puesta en escena.

Por último, presentamos las conclusiones respectivas al proceso de este trabajo y su culminación.

Capítulo 1

Antecedentes, descripción de la problemática, justificación y objetivos

1.1. Antecedentes

En este trabajo describiremos de forma breve la importancia que tienen los problemas y sus soluciones en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, con el fin de proponer alternativas para el tratamiento del curso de matemáticas del cuarto semestre de bachillerato, incorporando software de geometría dinámica y elementos de la enseñanza de la resolución de problemas.

En el estudio de la historia de las matemáticas, se aprecia la importancia de la resolución de problemas en el desarrollo de las matemáticas, así como en la enseñanza y aprendizaje de la misma. Muchos autores de textos matemáticos afirman que las matemáticas empezaron con los números pero no tal como los conocemos hoy en día, no se tenía una abstracción de número.

Podemos decir que las matemáticas de las civilizaciones antiguas, en gran medida se refieren a situaciones problemáticas de terrenos, ganado, comercio entre otras, esto nos dice que la problemática era la determinación de una cantidad. Por ejemplo, establecían una relación con piedras con el número (cantidad) de frutos al momento de repartir en su familia, ovejas en el rebaño etc. Fueron estas actividades las que dieron lugar a los sistemas de numeración. Entonces gracias a una situación problemática en la cual se buscó una solución y fueron fundamentando cómo resolver ciertas situaciones y al mismo tiempo nacían nuevos objetos matemáticos como lo fueron las técnicas de conteo seguido de los sistemas de numeración.

Otra situación problemática era la relacionada con terrenos, por ejemplo, limitar cultivos de una especie con otra, ésto pudo dar una iniciación al concepto de figura geométrica, que tiene sus implicaciones, como conducir a la necesidad de hablar de longitudes, superficies, áreas, ángulos, entre otras cantidades. Dicho ésto, podemos decir que las situaciones problemáticas en las cuales se buscaba una solución, dieron lugar al desarrollo de las matemáticas, ya que con las soluciones se van registrando procedimientos y técnicas que al ser frecuentemente utilizadas enriquecen su comprensión y se van generalizando creando así una disciplina muy bien estructurada.

Si en general se observa que las matemáticas surgieron a partir de la resolución de problemas o de situaciones problemáticas, es natural plantearse la posibilidad de que en la enseñanza se formule la interrogante sobre la mejor posibilidad de usar los problemas. ¿Qué papel deben jugar los problemas en la enseñanza de las matemáticas?, ¿Son situaciones de aplicación de conceptos y algoritmos?, ¿o son el vehículo, para hacer surgir dichos conceptos y algoritmos, a través de sus planteamientos y los procesos de solución?

Este último planteamiento, es el que se retoma en el presente trabajo, mostrando las posibilidades de uso de los problemas en la enseñanza de las matemáticas.

Un primer aspecto que es pertinente abordar, para tener una mejor comprensión de nuestra propuesta, es responder a las siguientes preguntas: ¿qué es un problema? ¿Se refiere a cualquier propuesta para realizar una tarea matemática o es algo más específico?

Dando respuesta a estas preguntas en nuestro trabajo asumiremos que un problema es una situación que nos hace pensar y a la cual se busca una solución, la cual no es inmediatamente accesible, dado que no se cuenta de momento con los recursos necesarios para llegar a la misma. Según Mancera (2000, p. xvi) podemos identificar que estamos frente a un problema si:

1. No sabemos de manera inmediata la forma en la que podemos resolver, es decir, no podemos saber de manera inmediata cómo vamos a proceder, no será posible aplicar de manera inmediata un procedimiento rutinario o una fórmula.

2. Encontrar la solución a un problema requerirá poner en juego nuestras capacidades y conocimientos. es decir. activa varios dispositivos mentales. como la búsqueda de analogías. simulaciones. transformación de parte del enunciado. traducirlo a situaciones aritméticas. algebraicas o geométricas.

3. Podemos hacer algo para resolverlo. esto es: no inmoviliza. se considera que se puede abordar y trabajar con las posibilidades personales. Si se tiene la idea de que no se puede hacer nada. entonces no representará un problema. simplemente es algo que se planteó pero no se asume.

Cuando las situaciones planteadas a un estudiante se convierten en la aplicación mecánica de un procedimiento determinado, diremos que se trata de un ejercicio. que requiere del uso de una rutina, lo cual juega también un papel en el aprendizaje. pero de la que no surgirá nuevo conocimiento. El interés central de nuestro trabajo son los problemas y no los ejercicios rutinarios.

Podemos identificar a la resolución de problemas como una forma de pensar en donde los estudiantes y profesores buscan diferentes maneras de resolver un problema y dar importancia a la justificación de sus respuestas con diferentes tipos de argumentos. es decir. no basta con dar la solución al problema sino de identificar las diferentes maneras de representarlo. resolverlo y de poder realizar conjeturas. hacer comparaciones con otros problemas y analogías. Esta forma de pensar es característica de los rasgos fundamentales del pensamiento matemático al tratar de resolver un problema.

Schoenfeld (1985. p. xii) menciona que en la resolución de problemas:

> Aprender a pensar matemáticamente-involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al dedillo. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina. usar el conocimiento propio eficientemente. y comprender y aceptar las reglas "tácitas de juego".

Santos Trigo (2008) define la resolución de problemas como:

> El proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas.

Es necesario tener presente la utilidad de la matemática en la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología tienen una relación directa con los problemas, así como también el desarrollo del razonamiento, de capacidades de análisis, síntesis y de la inteligencia está vinculado indiscutiblemente a la resolución de problemas, además de que es necesario crear hábitos y condiciones necesarias para crear un ambiente adecuado para ejercer la actividad matemática, a lo que Schoenfeld (1992, p. 345) hace mención:

> ...Para desarrollar los hábitos matemáticos apropiados y disposiciones de interpretación y encontrar sentido [a las ideas matemáticas] también como los modos apropiados de pensamiento matemático-las comunidades de práctica en la cual ellos [los estudiantes] aprenden matemáticas deben reflejar y promover esas formas de pensamiento. Es decir, los salones de clase deben ser comunidades en los cuales el sentido matemático, del tipo que esperamos desarrollen los estudiantes, se practique.

Al revisar el programa de estudios de la educación media superior de nuestro país, de acuerdo a la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) (SEMS, 2013), la cual está realizada en el enfoque por competencias y en donde se declara como competencias matemáticas a desarrollar las siguientes:

1.1.1. Competencias génericas

1. Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.

3. Elige y practica estilos de vida saludables.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Con estas competencias matemáticas se espera que el alumno al concluir el bachillerato pueda:

1.1.2. Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.

5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que los rodean.

7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Como podemos ver en el enfoque por competencias se aprecia la importancia que le están dando en la educación a los problemas y su resolución ya que con ésto el alumno mejora el pensamiento lógico-matemático, agudiza el razonamiento y el desarrollo de las capacidades de análisis y síntesis, entre otras.

Un asunto a considerar es que el profesor debe dejar su papel tradicional, que se limita a explicar un tema y resuelve algún problema utilizando alguna fórmula, para después el alumno resuelva los mismo problemas variando ciertas datos o condiciones, pero esto deja de ser un problema, como lo mencionamos antes, por el hecho de que ya conoce como resolverlo, entonces esto se convierte en ejercicios rutinarios y mecánicos lo cual sólo mejora las técnicas matemáticas para resolver, pero no logran llevarlo a la práctica por el hecho de no saber cómo y cuándo aplicarlas. En otras palabras se dice que el papel tradicional de un profesor es dar información completa y detallada, y el alumno se convierte únicamente en un espectador que solo debe utilizar la memoria lo cual bloquea sus capacidades creativas e inquietudes de indagación.

La matemática no se aprende por repetición, sino por la realización de la actividad matemática, la cual se caracteriza por una indagación constante, el replantear lo ya establecido, la búsqueda de una comprensión profunda de los contenidos y el interactuar constantemente con los contenidos matemáticos Mancera (2000, p. ix).

También menciona que el profesor se convierte en alumno de sus propios discípulos, el cual se preocupa por comprender sus ideas para reorientarlas o apoyarlas, lo que implica enriquecer su formación y le obliga a dejar el papel tradicional.

Lo primordial para el enriquecimiento de la práctica docente en matemáticas, es hacer matemáticas, no solo mostrar malabarismos con los símbolos y enseñar trucos de aparición o desaparición de éstos. La forma de lograrlo no es única, hay diferentes tipos de recursos y además empleando múltiples estrategias Mancera (2000, p. x).

1.2. Descripción de la problemática en estudio

Hasta este momento se ha expuesto la importancia que tienen los problemas y la resolución de problemas en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, incluyendo cómo influyen en el desarrollo de un estudiante. Una cuestión fundamental con mucha importancia consiste en adecuar una enseñanza a los mecanismos del pensamiento, el aprendizaje y de los contextos históricos, institucionales y culturales que demanda la actividad matemática.

Para esto Cantoral (1998) se formula la siguiente pregunta: ¿de qué manera el conocimiento sobre los procesos de aprendizaje en matemáticas puede influir benéficamente en la enseñanza? hace mención al tratar de explicar la complejidad del conocimiento matemático a las nociones que las matemáticas desempeñan un papel dual: el de *proceso* y el de *objeto*.

Asimismo menciona que el proceso de aprendizaje de un concepto incluye demasiadas etapas que pueden desarrollarse durante periodos muy prolongados y esto implica que queden por completo fuera del semestre escolar, y da por ejemplo que al dar inicio con el desarrollo de un proceso en términos concretos, y en la medida en que el alumno se familiariza con los procesos, éstos toman la forma de una serie de operaciones que pueden ser desarrolladas y coordinadas en su pensamiento.

Entonces el alumno habrá tomado un pensamiento operacional con respecto a ese concepto, lo que llevaría posteriormente a que la imagen mental de este proceso se transforme en una nueva y única entidad, digamos en un nuevo objeto. Una vez que éste ha sido adquirido, el estudiante ha desarrollado cierta habilidad para pensar en dicha noción, ya sea en el nivel dinámico, como un proceso, o en el nivel estático, como un objeto. Estas interacciones posibilitan al estudiante pensar en términos de posibilidades: ¿qué ocurriría si yo hago o no hago cierta operación?

Como la matemática trata con números, variables o funciones, por decir sólo algunas de ellas, todos éstos pueden ser vistos como objetos. Los cuales están relacionados entre sí, cada objeto es a su vez parte de una estructura más amplia de objetos. Los procesos se forman de operaciones sobre esos objetos y transforman a los objetos mismos.

De este modo la enseñanza de las matemáticas tendría mejor aprovechamiento de las investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático y sobre cómo se concibe la construcción social del conocimiento matemático, si se empieza a considerar la resolución de problemas como base fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, de esta manera la función del profesor es la de guiar el aprendizaje, de proponer actividades que los exponga a las dificultades inherentes al nuevo concepto y de propiciarles las herramientas para superarlas, es decir, incentivar el proceso de pensamiento en el alumno de tal manera que le permita enfrentarse a situaciones nuevas y proponer soluciones, en esta forma el alumno toma una mayor responsabilidad y juega un papel más activo en la adquisición de un concepto.

Cantoral (1998) menciona:

> ...la visión más extendida entre los profesores es aquella que asume que los conceptos matemáticos son entidades ya elaboradas y que sólo deben comunicarse a sus alumnos, en una enseñanza pulcra y libre de dificultades, olvidando que esos conceptos deben ser construidos por sus estudiantes como herramientas capaces de tratar con varias clases de situaciones... se considera que el profesor es el protagonista principal del proceso enseñanza-aprendizaje y que el alumno se limita a aceptar pasivamente aquello que se le propone, sin tener una participación activa en la construcción de lo que aprende.

Por muchas investigaciones al respecto es bien sabido que los conocimientos así adquiridos se olvidan fácilmente y no quedan integrados en las estructuras lógicas de los alumnos ni parecen fortalecer su pensamiento matemático. y por consecuencia estos conocimientos solo logran utilizarlo en condiciones muy similares a las vistas en clases.

Muchos son los que afirman que en las matemáticas que se enseñan no hay nada por construir. que todo ya ésta hecho. sin embargo. con los contenidos básicos se tiene una fuente importante de objetos que el estudiante debe reconstruir. en otras palabras. el hacer matemáticas requiere del esfuerzo personal. de las capacidades individuales. así como también del debate de ideas. la evaluación constante de otras perspectivas. el reconocer limitaciones y aprender a considerar las relaciones matemáticas de varias formas.

Las siguientes preguntas son expuestas por Mancera (2000. p. x)y nos ayudaran a tener más clara la posición de las matemáticas y nuestro objetivo.

- ¿Cómo se puede ayudar al estudiante para que sea crítico. si no se le deja criticar y analizar?
- ¿Cómo se puede formar a los estudiantes en la vida democrática. si no se les deja participar. evaluar posiciones de otros y comprometerse con una perspectiva?
- ¿Cómo se puede ayudar a los estudiantes a ser creativos. si no se les deja crear?
- ¿Cómo se quiere que aprendan a gozar las matemáticas. si esto se traduce en repeticiones aburridas y rutinarias?
- ¿Cómo se puede motivar al alumno en el estudio de las matemáticas diciéndole que es útil. si no se muestra esto en clase?
- ¿Cómo se puede ayudar al estudiante a desarrollar su razonamiento. si lo único que se le muestra en clase es memorístico y rutinario?

De acuerdo a lo que se ha venido mencionando desde el inicio de este capítulo. tenemos que el tipo de enseñanza tradicional que utilizan los profesores de matemáticas (particularmente los de bachillerato) en sus clases, sigue arrojando los mismos resultados de siempre, el tipo de aprendizaje resulta ser poco productivo y operativo.

Entre las investigaciones en la didáctica, específicamente en matemáticas, se observa la poca vinculación que hay entre dichas investigaciones y la práctica docente, así como el desconocimiento, muchas veces inconsciente de los profesores, sobre la existencia de resultados empíricos relacionados con los conceptos básicos, resultados que comprenden explicaciones y análisis epistemológicos, cognitivos y didácticos que encierra el problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, hasta propuestas didácticas relacionadas con la enseñanza de la misma, fue factor de motivación para el desarrollo de este trabajo, en el cual se busca crear una conexión entre estos dos aspectos de la educación en matemáticas, los cuales son la investigación didáctica y su implementación en la docencia.

Definimos entonces como nuestro tema de estudio, la investigación didáctica como base científica de planeación y orientación de la práctica docente en matemáticas. De esta manera, tenemos como principal problema de investigación la búsqueda de un vínculo entre estos dos aspectos. Para llegar a tal fin, nos dimos a la tarea de indagar y ver el tipo de elementos involucrados en las investigaciones bibliográficas, que en si se rigen en modelos teóricos y metodológicos distintos pero comparten perspectivas específicas, como la deficiencia de la enseñanza tradicional y la necesidad de que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas estén los problemas y su resolución.

Algunas interrogantes que nos formulamos:

- ¿Cómo se puede ayudar al estudiante a visualizar la importancia de las matemáticas en la vida?

- ¿Cómo se puede ayudar al estudiante en el conocimiento de, para qué sirven las matemáticas y cuándo se puede hacer uso de ellas?

- ¿Cómo se puede ayudar al estudiante para que sea capaz de ver la vinculación que hay entre las matemáticas y otros cursos?

- ¿Cuáles son los problemas que le interesan al alumno y valore la necesidad de saber matemáticas?

1.3. Justificación

Después de haber realizado un análisis y reflexión sobre la importancia que tienen los problemas y la resolución de problemas, es de nuestro interés ver las características y los tipos de problemas que se pueden presentar para obtener una mejor enseñanza y aprendizaje en matemáticas, ya que es una materia a la cual se le necesita prestar atención. Como menciona Mancera (2000, p. xi) "la matemática es la única materia que, por diferentes motivos, se incluye en todos los niveles educativos en todas partes del mundo. Esto puede ser suficiente para prestarle especial atención". Podemos observar que los individuos demuestran una falta de interés a esta materia dado que no logran observar las cualidades que ésta les brinda y no logran identificar ¿para qué me sirven las matemáticas?.

Tenemos varias posibilidades para utilizar los problemas en la enseñanza, ya sea como complemento a la clase, espacio de entretenimiento, aplicaciones de los temas trabajados, simulación de la actividad matemática o apoyo para la motivación de algunos temas con otros.

La manera en que se utilicen los problemas en la enseñanza implicará la realización de una propuesta didáctica particular. Un aspecto que es de interés particular, es analizar diferentes representaciones que tiene un problema en matemáticas, y así poder construir un concepto matemático. De acuerdo a la teoría sobre la importancia del uso de diferentes representaciones en la enseñanza de las matemáticas, lo que debemos realizar es la introducción de los conceptos matemáticos a través de actividades que inicien el trabajo con diferentes representaciones, ya sean numéricas, geométricas, mediante símbolos, verbal.

Las investigaciones en educación matemática señalan que en general el sistema algebraico es el preferido por los profesores de matemáticas al realizar la práctica docente.

A lo que Hitt (2003) menciona, "el avance tecnológico ha influido notablemente en el desarrollo de nociones teóricas que antes se tomaban en cuenta pero no eran consideradas como cruciales en términos de explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Estos aspectos teóricos son la base para entender el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y su papel en la construcción de conceptos."

En esta dirección Duval (1998. p.175) citado por Hitt (2003) señala que:

> "...estamos entonces en presencia de lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos".

Esto nos dice que la única forma de estudiar los obejtos matemáticos es a través de sus representaciones, a pesar de que el centro de la actividad matemática implica la aprenhensión conceptual. Por tal motivo es necesario, para que un alumno fortalezca su comprensión sobre los objetos matemáticos, que aprenda a relacionar los diferentes sistemas de representación, realizando un análisis tanto algebraico como geométrico y numérico, lo cual es una faceta muy importante en el aprendizaje de las matemáticas.

En la enseñanza de las matemáticas podemos observar diferentes tipos de situaciones como problemas que podrían servir para la actividad de enseñanza donde Mancera (2000 p. xvii) los clasifica como: juegos, acertijos y aplicaciones.

Los juegos

Los juegos se refieren a situaciones en las que se requiere obtener un resultado siguiendo determinadas reglas, a participar en algunas actividades para lograr un propósito definido de antemano, incluso puede suceder que el juego consista en definir una serie de reglas para poder obtener un resultado.

Proveer de un juego a la enseñanza es algo importante, la diversión es un aspecto motivacional indiscutible. Sin embargo, en este sentido el juego se utiliza como la actividad central y el contenido matemático puede resultar ser secundario, algo accesorio, de esta forma poco se le puede relacionar con temáticas especificas a menos que parte del juego sea resolver algunos ejercicios para poder pasar a otras etapas.

Los acertijos

Los acertijos implican encontrar una solución dada de antemano o desconocida. también pueden referirse a la aclaración de la forma de obtener resultados contradictorios que en apariencia se obtienen de procedimientos correctos. también puede darse el caso de encontrar la forma de obtener un resultado dado. conociendo una manera de lograrlo, pero de tal forma que minimice el tiempo o los recursos empleados.

Los acertijos son espacios dedicados a pensar. a la reflexión o la discusión de situaciones interesantes, pero por lo general. están desvinculados de las secuencias temáticas son una especie de paréntesis. de respiro en la clase. de esparcimiento en la lucha por evitar el aburrimiento. Lo interesante de los acertijos es lo absurdo. lo incoherente o las irreverencias ante lo establecido por la teoría. Algunos ejemplos de acertijos son situaciones como la del viejo. la oveja y el lobo. o también algunas de las conocidas demostraciones de que $0 = 1$.

Las aplicaciones

Las aplicaciones se refieren al uso de los contenidos matemáticos para resolver o comprender aspectos dentro o fuera de la matemática, es decir, se puede utilizar la geometría para comprender o resolver problemas algebraicos. y recíprocamente. se usa el álgebra para resolver problemas geométricos. también se pueden emplear contenidos matemáticos para abordar situaciones fuera de la matemática. como de la física. química. ecología. economía. finanzas. entre otras.

La historia es una fuente importante de aplicaciones que se pueden rescatar para incluir en la clase e incluso como motivo para platicar anécdotas.

Por otro lado. al intentar dar las diferentes representaciones de un objeto matemático. existe gran fuente de investigación que resalta el uso de la tecnología como medio de visualización tanto en el ámbito geométrico. algebraico como numérico. donde Gamboa (2007) menciona:

> El uso de la tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta para que los

estudiantes logren crear diferentes representaciones de ciertas tareas y sirve como un medio para que formulen sus propias preguntas o problemas, lo que constituye un importante aspecto en el aprendizaje de las matemáticas.

Lo cual es objetivo de este trabajo el de diseñar actividades didácticas haciendo uso de la tecnología, para el desarrollo de distintos conceptos matemáticos, dándole un tratamiento geométrico, algebraico y numérico, y así poder motivar al alumno por medio de las computadoras a aprender matemáticas, esto se realizará con ayuda del software GeoGebra, apoyándonos en dicho software y de todas las posibilidades que éste nos brinda para poder crear, construir y analizar conceptos matemáticos de una forma más dinámica. La clave está en trabajar situaciones cotidianas y los problemas presentes en los libros de texto desde un nuevo enfoque, apoyadas en las herramientas tecnológicas disponibles, buscando un lugar de que el alumno mejore la capacidad de aprendizaje y obtenga una mejora a la hora de realizar la actividad matemática.

Hitt (1998) señala que el profesor de matemáticas sentirá la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren la efectividad de la tecnología en el aula, en donde se presente un concepto inmerso en una situación problema y donde se busque el adecuado sistema de representación para visualizarlo.

1.4. Objetivos

En la práctica docente tradicional hemos visto que los resultados arrojados en este tipo de enseñanza no son los que se esperan, y se piensa que una de la razones de lo anterior es que en la actualidad no existe una buena relación entre lo que se ha realizado en las investigaciones y las prácticas educativas.

Nuestra premisa parte entonces de que la práctica docente en las clases de bachillerato es problemática, que el modelo de enseñanza tradicional que se utiliza favorece poco a los aprendizajes significativos y duraderos. Para tratar de mejorar tales dificultades, en este trabajo se ofrece y se pone al alcance de los profesores de bachillerato una propuesta didáctica.

sustentada en evidencia empírica sobre el funcionamiento del sistema didáctico y sobre el cual pueda sustentar su quehacer dentro y fuera del aula.

Objetivo general:

Diseñar actividades didácticas para el estudio de la variación en el nivel medio superior con uso de software de matemática dinámica.

Objetivos específicos

- Analizar propuestas didácticas y uso de tecnología, basados en investigaciones especializadas.
- Establecer el tipo de elementos que intervienen en las propuestas experimentales a través de un análisis de sus actividades, así como los elementos de los problemas y la resolución de problemas.
- Usar los análisis didácticos y del uso de la tecnología en el diseño de una propuesta didáctica para el estudio de la variación en el bachillerato.

Capítulo 2

Marco Conceptual

2.1. Marco referencial

En este apartado se realizara una revisión de los contenidos a cubrir en el cuarto semestre de matemáticas en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, con la finalidad de observar los temas y así poder tener una mejor construcción de las actividades didácticas a desarrollar con ayuda del software Geogebra, tratando algunos de los contenidos a cubrir por el módulo de aprendizaje, asimismo se presentarán algunos libros populares como sugerencia de material bibliográfico, y en los cuales nos hemos basado para la construcción de las actividades didácticas.

2.1.1. Módulo de aprendizaje matemáticas 4 del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

En el capítulo 1 mencionábamos la importancia de los problemas y su resolución a la hora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que son éstos los que nos ayudan a tener una mejor comprensión, desarrollar habilidades matemáticas y el pensamiento lógico matemático entre otras, observamos que el módulo está basado en un enfoque por competencias, las cuales ya fueron descritas en el capítulo 1.

Las competencias a desarrollar se centran en el análisis de los fenómenos de variación, en el cual hay muchos problemas que podemos observar día a día que nos ayudarán a la construcción de las actividades didácticas y de relacionarlos con contenidos escolares de otras asignaturas, observando así la importancia de las matemáticas vista como una herramienta para el análisis de algunos aspectos importantes de los cambios (variaciones) ya sea cualitativamente o cuantitativamente.

A grandes rasgos los tipos de variación que presenta el módulo son:

- **Variación lineal**, tomando como base la variación directamente proporcional.
- **Variación polinomial**, tomando como base la variación directamente proporcional entre una variable y la potencia de otra.
- **exponencial y logarítmica**, ligadas a fenómenos de crecimientos y decrecimientos muy rápidos o muy lentos.
- **Variación periódica**, centrada en los fenómenos cuyo comportamiento se repite con determinada frecuencia.
- **Variaciones especiales e inversas**, para fenómenos que quizá puedan ser como los anteriores, pero que se presentan de forma combinada, así como para fortalecer sus conocimientos.

Observando el mapa de la asignatura vemos que el módulo está dividido en 6 bloques, en cada uno de ellos se estudia un tipo de variación y un bloque adicional para reforzar los conocimientos de los objetos matemáticos que se estudiaron a lo largo del módulo.

En lo que respecta a los contenidos de cada bloque tenemos la siguiente descripción:

- Bloque 1 tema general "Variaciones y funciones lineales", en el cual se ven los procesos de cambio, la variación directamente proporcional y la variación lineal.
- Bloque 2 tema general "Variación no lineal y variación inversamente proporcional", en donde se estudia la variación cuadrática, la variación cubica y la variación inversamente proporcional.
- Bloque 3 tema general "Variación exponencial y logarítmica", en donde se ven los crecimientos y decaimientos sorprendentes y los logaritmos y la variación logarítmica.
- Bloque 4 tema general "Variación periódica", en el cual se ven la variación de la posición de un objeto que se mueve en una trayectoria circular con respecto al ángulo que describe.

la variación de la posición con respecto al tiempo, de una partícula que describe un movimiento circular uniforme (MCU) y las funciones periódicas.

- Bloque 5, tema general "Variaciones especiales y funciones inversas", en donde se observan los sucesos que presentan diferentes tipos de variaciones y un acercamiento a las funciones inversas.

- Bloque 6, tema general "Las funciones como modelo de la variación", en el cual se estudia la percepción de la variación y el establecimiento de las relaciones de dependencia, las funciones como modelos de variación, la gráfica de las funciones como transformación de la recta que es representación gráfica de la función identidad y por último las funciones que resultan al realizar operaciones entre funciones y las funciones inversas.

Se les preguntó a varios profesores que imparten esta asignatura en diferentes planteles sobre el nivel de uso que le daban al módulo de aprendizaje del curso, y la mayoría respondió que usaban sus notas y apuntes de clase como referencia para todos los contenidos.

Las actividades que se elaboraron en este trabajo toman como base lo establecido en el módulo de aprendizaje, pero de lo señalado en el párrafo precedente, es claro que su aplicación por parte de los profesores tiene dificultades y esperamos contribuir a dotar a los docentes de actividades adicionales que puedan emplear en sus clases.

2.1.2. Libros de sugerencia como material bibliográfico y como base en el diseño de las actividades didácticas

Los siguientes libros fueron elegidos como herramienta para la construcción de las actividades didácticas, siendo éstos de los más populares en los temas a desarrollar, y analizando el tratamiento que le dan a los conceptos matemáticos, en los cuales se observa un tratamiento dinámico con base en problemas de aplicación dentro y fuera de la matemática, siendo los problemas de aplicación extra matemática de nuestro interés para así poder promover en el estudiante interés en el estudio de esta materia y que logren ver el poder y utilidad que tienen las matemáticas para modelar el mundo real, y adquieran no solo conocimientos técnicos si no una clara comprensión de los conceptos, ya que la comprensión conceptual y los conocimientos técnicos van de la mano y se refuerzan entre sí.

- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* México: Cengage Learning.

- Larson, R., & Falvo, D. (2012). *Precálculo.* México: Cengage Learning.

- Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J., & Garza, J. (2005). *Elementos del cálculo. Reconstruccion conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* México: Trillas

- Demana, F., Waits, B., Foley, G., & Kennedy, D. (2007). *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico.* México: Pearson educación.

2.2. Estrategia para desarrollar el proyecto

En este apartado se hará una revisión de los aspectos metodológicos de este trabajo, en donde se presentan una serie de actividades didácticas y describiremos las diferentes etapas que se siguieron para el afinamiento y finalización del mismo trabajo.

Etapa 1: Revisión bibliográfica

En esta etapa se hizo un análisis de las diferentes investigaciones que hay sobre la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en general y también de la problemática que llevan los estudiantes previos a iniciar un curso de cálculo, viendo así los antecedentes a este problema tomamos ciertos resultados importantes como base de justificación para el diseño de las actividades didácticas que proponemos, las cuales están realizadas para estudiantes que cursan el cuarto semestre en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Etapa 2: Diseño de las actividades didácticas

Las actividades didácticas fueron diseñadas con el software GeoGebra, dado las bondades que brinda dinámicamente, se elaboró un cuadernillo de trabajo para cada actividad diseñada, el cual consta de una serie de indicaciones y preguntas que sirven de orientación para llevar a cabo la actividad didáctica, en donde cada una de las cuales trata de problemas y su resolución, en donde se aprecien los conocimientos previos y la construcción de los nuevos conocimientos adquiridos en la actividad, así como también ver la relación que hay con otras materias y la importancia del saber matemáticas.

Etapa 3: Puesta en escena

Se pusieron a prueba las 7 actividades didácticas diseñadas junto con sus archivos GeoGebra que sirvieron para crear el ambiente dinámico al ser aplicados. Esto se llevó a cabo en sesiones de dos horas cada actividad con un grupo de 8 estudiantes del quinto semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. esto con la finalidad de identificar posibles errores en el diseño de las actividades, problemas con la redacción tanto del problema como de las interrogantes de cada actividad. en donde al finalizar cada sesión pedimos de favor que nos hicieran observaciones en el cuadernillo de trabajo sobre las dificultades que se les presentaron en cada pregunta.

Etapa 4: Análisis y la incorporación de modificaciones

La cuarta y última etapa, consiste en el análisis realizado después de haber puesto en escena cada una de las actividades didácticas. en donde observamos que algunas preguntas presentaron ambigüedad, así como falta de indicaciones al momento de trabajar en el cuadernillo de trabajo en conjunto con el archivo GeoGebra correspondiente. lo cual provocó confusión y por ende se realizaron algunas modificaciones al diseño de las actividades.

2.3. El papel de los problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas

A lo largo de este apartado se presentará el fundamento teórico de nuestro trabajo. Mostrando la necesidad y urgencia de un rediseño en los cursos de matemáticas, poniendo atención a nuevas técnicas de enseñanza y teorías de aprendizaje, pero prestando especial atención a las siguientes interrogantes ¿Qué enseñar?. ¿Cómo enseñarlo? Y ¿Por qué enseñarlo?, para esto consideramos algunas de las aportaciones teóricas más importantes acerca de la resolución de problemas.

2.3.1. George Polya

George Polya fue un matemático nacido el 13 de diciembre de 1887 en Budapest, Hungría, falleció el 7 de septiembre de 1985 en Palo Alto, Estados Unidos de América. Obtuvo su doctorado en la Universidad de Budapest. Fue maestro en el Instituto Tecnológico Federal en Zúrich, Suiza. En 1940 llegó a la Universidad de Brown en E.U.A. y pasó a la Universidad de Stanford en 1942. En sus últimos años, se dedicó a caracterizar los métodos generales que usa la gente para resolver problemas. El trabajo de Polya fue el más penetrante en los intentos de enseñar la matemática a través de la resolución de problemas, aunque su objetivo no era ese, su trabajo intenta describir la manera en que los expertos resuelven problemas, no tanto en la manera de enseñar a plantearlos o resolverlos, sin embargo en el libro *Cómo plantear y resolver problemas* incluye consejos para enseñar matemática y una mini-enciclopedia de términos heurísticos.

Parecía muy sencillo transferir las ideas de Polya a la enseñanza de la matemática, pero no fue así, de su trabajo surgieron muchas propuestas, las cuales coincidían en la necesidad de considerar las cuatro etapas identificadas por Polya en los procesos de resolución de problemas, de dichas propuestas poco se logró dado que el trabajo de Polya no era para propósitos de enseñanza, más bien en hacer un análisis de los resultados de observar el trabajo de los expertos al resolver un problemas.

Cuatro pasos de Polya

Presentaremos las cuatro etapas de Polya expuestas en la lista de *"Para resolver un problema se necesita"*, que forman el tan conocido "método de los cuatro pasos de Polya" que para llevar a cabo Polya sugiere que des respuesta a ciertas preguntas y menciona algunas sugerencias.

Para resolver un problema se necesita:

1. ***Comprender el problema***
   - ¿Cuál es la incógnita?
   - ¿Cuáles son los datos?
   - ¿Cuál es la condición?
   - ¿Es posible satisfacer la condición?
2. ***Concebir un plan***
   - Relacione la incógnita con algún problema relacionado.
   - ¿Conoce algún problema relacionado?
   - ¿Puede hacer uso del problema relacionado?
   - ¿Puede enunciarse el problema en forma diferente?
   - Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema relacionado con él.
   - ¿Ha empleado todos los datos?
   - ¿Ha hecho uso de toda la condición?
3. ***Ejecucuón del plan***
   - Verificar cada paso.
   - ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?
   - ¿Puede demostrar que es correcto?
4. ***Visión retrospectiva***
   - ¿Puede verificar el resultado?
   - ¿Puede verificar el razonamiento?
   - ¿Puede obtener el resultado de un modo distinto?
   - ¿Puede utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema?

La idea central en el método de los cuatro pasos de Polya es enseñar a los estudiantes lo que debían hacer para resolver problemas. pero también menciona que previo a intentar resolver el problema hay que familiarizarnos con el mismo para esto sugiere que demos respuesta a las siguientes preguntas en cada etapa de los cuatro pasos. ¿por dónde debo empezar?. ¿qué puedo hacer? Y ¿qué gano haciendo esto?

La primera etapa consiste en la comprensión del problema y dando respuesta a estas preguntas, es leer el enunciado del problema hasta que quede claro y grabado en su mente. aislar las partes principales del problema, la hipótesis y la conclusión son las principales partes de un problema por demostrar y las principales partes de un problema por resolver son la incógnita, los datos y las condiciones. Para así poder establecer relaciones que pueden existir entre las partes principales del problema. una con otra, de esta manera se estará mejor preparado y tendrá más claros los detalles del problema y así poder continuar con las siguientes etapas. además de tener una adecuada notación en la elección de los símbolos para las cantidades desconocidas.

En la segunda etapa el objetivo es obtener un plan de cómo vamos a resolver el problema. entonces empezaríamos por considerar las partes principales del mismo. para esto dichas partes ya están establecidas y dispuestas en nuestra mente claramente sin la necesidad de regresar al problema. esto se logra gracias a la primer etapa. Ahora es momento de considerar el problema desde varios puntos de vista y encontrar los puntos de contacto con nuestros conocimientos. obteniendo así una idea útil para llegar a la solución.

En la tercera etapa empezamos por resolver el problema teniendo ya el plan para encontrar la solución. estando seguro del punto de partida y de estar seguros que los detalles siguen la línea que nos proporciona el plan. Asegurándose de que tiene una clara comprensión del problema dado que aquí es cuando se efectúan las operaciones algebraicas o geométricas que se han reconocido factibles para llegar a la solución. Algo esencial es que el alumno este completamente seguro de la exactitud de cada paso. Si el problema es muy complejo. tenemos que distinguir los grandes pasos y pequeños pasos. comprobando primero los grandes pasos y después consideras los pequeños pasos. ya que cada grande paso esta compuesto por pequeños pasos. esto nos dará una presentación de la solución en la cual la exactitud y corrección de cada paso no se presenta duda alguna.

En la cuarta y última etapa nos enfocamos en la solución, verificando que esté completa y correcta en todos los detalles, esto nos ayudará a tener más claro lo que estamos haciendo, el uso de los conocimientos y habilidades que utilizamos para llegar a la solución, buscar alguna mejor solución al problema de esta forma quedará grabada en nosotros y así poder aplicarla a otros problemas. Al realizar esto podemos encontrarnos con una solución mejor y diferente, que al tener este hábito de reconsiderar las soluciones y examinarlas estaremos adquiriendo una serie de conocimientos ordenados correctamente y que podemos utilizar en cualquier momento y a su vez estaremos desarrollando la aptitud en la resolución de problemas.

Ilustraremos algunos de estos principios de la resolución de problemas con un ejemplo.

Problema 1. *Determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular dados su longitud, su ancho y su altura.*(Polya, 1965, pag.29)

Etapa I. ***Comprender el problema***

Con ayuda de la lista de interrogantes que nos sugiere Polya, además de estar familiarizados con el teorema de Pitágoras y haciendo uso de la siguiente ilustación.

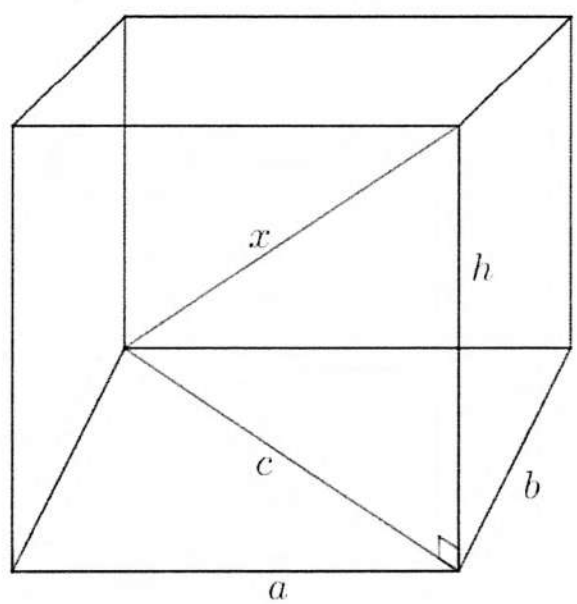


Figura 2.1

Empezamos con preguntarnos:

¿Cuál es la incógnita?

Para nuestro problema nuestra incógnita es la longitud de la diagonal de un paralelepípedo rectangular, que al observar la imagen le llamamos x a la diagonal.

¿Cuáles son los datos?

La longitud, el ancho y la altura del paralelepípedo, a las cuales denotaremos como a, b, h respectivamente.

¿Cuál es la condición que relaciona a, b y h con x*?*

x es la diagonal del paralelepípedo del cual a, b y h son su longitud, ancho y altura respectivamente.

¿Es posible satisfacer la condición?

Si es posible, dado que conocemos a, b y h, entonces el paralelepípedo está en los tres casos de este párrafo determinado y como esta determinado su diagonal también lo esta.

Etapa II. ***Concebir un plan***

En esta etapa encontramos una conexión entre la información dada y la desconocida que nos permita calcular la incógnita. Para esto respondamos las interrogantes propuestas para esta etapa.

- Relacione la incógnita con algún problema relacionado.
- ¿Conoce algún problema relacionado?
- ¿Puede hacer uso del problema relacionado?
- ¿Puede enunciarse el problema en forma diferente?
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema relacionado con él.
- ¿Ha empleado todos los datos?
- ¿Ha hecho uso de toda la condición?

De primera instancia podemos identificar que si conocemos un problema que se relacione con éste, como lo es encontrar la diagonal de un cuadrado, encontrar el lado de un triángulo rectángulo, que como podemos ver en la figura 2.1 aparecen triángulos rectángulos, específicamente para nuestro problema nos centramos en el triángulo formado por los lados x, c, h.

Entonces observamos que tenemos que encontrar el lado x del triángulo formado por los lados x, c, h, pero por otro lado desconocemos el valor de c, esto nos lleva a primero encontrar el valor de c, para después encontrar el valor correspondiente a x.

Para esto nuestro plan lo podríamos hacerlo en dos pasos, después de haber realizado nuestro análisis.

1. Encontrar el valor de c.

   Para esto sabemos que por el *Teorema de Pitágoras* que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. Encontrar el valor de x.

   Ahora conocemos el valor de c, entonces ahora nos centramos en encontrar el lado x formado por el triángulo rectángulo de lados x, c, h y nuevamente utilizando el *Teorema de Pitágoras*

$$x^2 = c^2 + h^2$$

Etapa III. ***Ejecución del plan***

Aquí realizamos el plan planteado en la etapa II.

Encontramos el valor de c.

Para esto sabemos que por el *Teorema de Pitágoras* que

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1}$$

Despejamos c en (1)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{2}$$

Ahora conocemos el valor de c, entonces ahora nos centramos en encontrar el lado x formado por el triángulo rectángulo de lados x, c, h y nuevamente utilizando el *Teorema de Pitágoras* tenemos que

$$x^2 = c^2 + h^2 \tag{3}$$

Sustituimos el valor de c (2) en (3)

$$x^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + h^2$$

y vemos que tenemos una raíz cuadrada elevada al cuadrado, lo cual se cancelaría, obteniendo

$$x^2 = a^2 + b^2 + h^2 \tag{4}$$

despejamos x en (4) y tenemos que

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{5}$$

Etapa IV. ***Visión retrospectiva***

En la última etapa solo nos queda por verificar los procedimientos que nos llevaron a la solución del problema y ver que podemos obtener de ella.

Después de estar completamente seguros de que los procedimientos son correctos y nos llevaron a esa solución, para que se fortalezca esa seguridad sacando provecho que este problema fue planteado en términos generales se puede plantear casos particulares, es decir, con valores númericos dados, y realizando cada una de las operaciones y por otro lado irte directo a la ecuación (5) y sustituir valores para comprobar que son correctos.

Otro aspecto importante al estar en esta etapa. es ver en donde más se puede aplicar esto. es decir. existen problemas análogos a éste. se puede resolver por de alguna otra manera. hay que estar conscientes de que no a todos los problemas les vamos a sacar el mismo provecho. pero siempre se puede aprender algo nuevo al examinar lo que ya se realizó.

Al estar en esta etapa se puede preguntar *¿Qué gano haciendo esto?*. y Polya da respuesta a esto:

> Puede encontrar una solución mejor y diferente. descubrir nuevos hechos interesantes. En todo caso,si toma el hábito de reconsiderar las soluciones y examinarlas muy atentamente,adquiere usted una serie de conocimientos correctamente ordenados,utilizables en cualquier momento,a la vez que desarrolla su aptitud en la resolución de problemas.

2.3.2. Alan H. Schoenfeld

Alan H. Schoenfeld es un matemático norteamericano quien. terminando de estudiar matemática pura. se encontró con el primer libro de Polya. Su lectura le entusiasmó y le hizo preguntarse por qué nadie le había enseñado ese texto durante sus estudios. pues él pensaba que le hubiera sido de gran ayuda. A raíz de esto. Schoenfeld empezó a investigar por qué el motivo de su ausencia durante la enseñanza. y se encontró con que algunos profesores no lo conocían y otros que no creían en lo que Polya proponía. Debido a esto despertó el interés de Schoenfeld sobre averiguar más y fue donde se dio cuenta. que los profesores que preparaban a los estudiantes para olimpiadas en la resolución de problemas. si conocían sobre el trabajo de Polya pero no lo utilizaban puesto que decían que no funcionaba. el detalle era. que como ellos iban a decir que no funcionaba si en realidad no lo utilizaban.

Debido a lo anterior, Schoenfeld publicó MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING en 1985, basado en trabajos realizados en los años 80 del siglo XX. Comenzó a hacer investigaciones mediante experiencias vividas con los estudiantes y profesores. donde les proponía problemas suficientemente difíciles. para así ver la reacción de ellos con respecto al razonamiento del problema. ya que tanto los estudiantes como los profesores tenían los conocimientos y formación necesaria para la resolución de éstos. de tal manera que investigaba por medio de grabaciones. apuntes y trabajos grupales para así ir verificando lo que iban haciendo. al final de todos los experimentos realizados. Schoenfeld concluyó que para resolver los problemas tenían que ir más allá de las estrategias de la heurística. de lo contrario no funcionaría debido a que se necesitan de otros aspectos que con la heurística no se toman en cuenta.

Estos aspectos hacen reflexión sobre lo que interviene en la resolución de problemas. dado que ya no se pretende transferir los comportamientos de expertos a estudiantes. sino de entender lo que está en juego cuando se resuelven problemas con la finalidad de definir estrategias de enseñanza que promueven el adquirir habilidades o formas de trabajo necesarios para un mejor desempeño en este tipo de actividades.

Podemos decir que Schoenfeld llegó a la conclusión de que en el momento en que se quiere trabajar con la resolución de problemas como una estrategia didáctica hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas. dado que de esa manera no funciona. esto no quiere decir que las heurísticas no funcionen. si no que hay otros aspectos que se deben considerar en la resolución de problemas.

Schoenfeld identificó cuatro aspectos del conocimiento y comportamiento esenciales que influyen en la resolución de problemas. Dichos aspectos son los recursos. heurísticas. control y sistemas de creencias.

En la siguiente tabla. tomada del texto *Mathematical problema solving* (Schoenfeld. 1985. p.15) "Knowledge and Behavior Necessary for an Adequate Characterizacion of Mathematical Problem-Solving Performance". se muestran los cuatro aspectos mencionados anteriormente.

Tabla 2.1: Conocimientos y Comportamientos Necesarios para una Caracterización Adecuada del Rendimiento en la Resolución de Problemas Matemáticos

Recursos: Son los conocimientos matemáticos previos que poseen los individuos y que pueden ser ejercidos sobre el problema en cuestión

Intuiciones y conocimientos informales con respecto al dominio de un determinado problema.

Datos.

Procedimientos algorítmicos.

Procedimientos de "rutina"no algorítmicos

Comprensiones (conocimiento proposicional) sobre las reglas acordadas para trabajar en el dominio de un determinado problema.

Heurísticas: Estrategias y técnicas para avanzar en los problemas desconocidos o no comunes; reglas generales para una eficaz resolución de problemas, incluyendo:

Dibujar figuras; introduciendo una adecuada notación.

Explotar problemas relacionados.

Reformular problemas; trabajando hacia atrás.

Comprobar y verificar los procedimientos.

Control: Decisiones globales en cuanto a la selección e implementación de recursos y estrategias

Planificación.

Seguimiento y evaluación.

Toma de decisiones.

Actos conscientes metacognitivos.

Sistemas de creencias: "Visión personal del mundo matemático" el conjunto de (no necesariamente consciente) determinantes del comportamiento de un individuo.

Sobre si mismo.

Sobre su entorno.

Sobre el tema.

Sobre las matemáticas

Recursos

En la categoría de los recursos Schoenfeld señala a éstos como los conocimientos previos que posee el individuo; se refiere, entre otros, a conceptos, fórmulas, algoritmos, y en general, todas las nociones necesarias a saber para enfrentarse a un determinado problema. Uno de los aspectos importantes en cuanto a los recursos es que el profesor debe tener claro sobre cuáles son las herramientas con las que cuenta el alumno, esto es así, dado que a la hora de resolver un problema el alumno no cuenta con las herramientas necesarias para encontrar la solución y esto implicaría que no funcione.

También menciona un *inventario de recursos*, refiriéndose a que el profesor debe conocer cómo utiliza el estudiante los conceptos que tiene, ya que cualquier persona puede tener una serie de conocimientos y no poder hacer uso de ellos. Otra cuestión es de las *circunstancias estereotípicas*, donde Schoenfeld dice que éstas provocan respuestas estereotípicas, por ejemplo, a un alumno se le propone resolver un problema de encontrar un punto máximo, entonces el alumno dice aquí tengo que encontrar una función de alguna manera derivar, ver donde se hace cero la derivada y analizar dicho punto; esto sería una respuesta estereotípica. Pero llegar a esa fórmula no necesariamente resulta un trabajo fácil, la función que hay que derivar puede ser compleja, etc., pero el procedimiento resolución se da de manera automática.

Otra cuestión son los *recursos defectuosos*, esto es, que el estudiante tiene una gran cantidad de recursos, pero algunos pueden ser defectuosos, por ejemplo, algún procedimiento mal aprendido o que él cree que se puede utilizar ante una situación pero resulta no ser así.

Heurísticas

Schoenfeld menciona que existe una problemática con las heurísticas en el trabajo de Polya, y es que para cada tipo de problema se necesitan ciertas heurísticas particulares, por ejemplo, Polya sugiere como heurística hacer dibujos, pero Schoenfeld dice que no en todo problema se puede dar ese tipo de heurística en particular.

En general, las heurísticas tal y como las propone Polya, según Schoenfeld, es que son muy generales, por este motivo no pueden ser implementadas. Dice que primero habría que conocerlas, saber cómo usarlas y tener cierta habilidad para hacerlo. Esto es así porque mientras el alumno aprende una gran cantidad de heurísticas particulares, ya podría haber aprendido mucho sobre otros conceptos.

Para esto Schoenfeld propone manejar dos heurísticas generales las cuales son *examinar casos particulares* y *explotar submetas*. Las cuales se conforman de subestrategias.

Ahora explicaremos en que consisten cada una de las estrategias.

Examinar casos particulares.

> *Estrategia S:* Para comprender mejor un problema desconocido, puede ejemplificar el problema considerando varios casos especiales. Esto puede sugerir la dirección de, o quizás la plausibilidad de, una solución.

Establecer metas secundarias.

> *Estrategia H:* Si no puede resolver el problema dado, establezca metas secundarias (el cumplimiento parcial de las condiciones deseadas). Habiéndolas obtenido, construye sobre ellas o utilizarlas como guía para resolver el problema original.

Control

El control se refiere a cómo y cuándo un alumno controla su trabajo, no basta poseer conocimientos y estrategias, es necesario saber cuándo y cómo utilizarlas. Si el alumno está frente a un problema puede haber una serie de caminos posibles para llegar a su solución, entonces el alumno tiene que ser capaz de determinar si el camino que seleccionó en algún momento está funcionando o si no lo está, es decir, tiene que ser capaz de darse cuenta a tiempo de retroceder e intentar de nuevo por otro camino.

Puede haber varias heurísticas posibles que nos sirvan para resolver un problema, entre esas estrategias puede que una o varias sirvan, o que se crea que algunas sirvan y en realidad no sean útiles, o si alguna sirve pero te lleva por un camino más complicado que otras. Cada una de las estrategias que se utilicen pueden tener sus diferencias, es por esto que se destaca la importancia de que el alumno que esté resolviendo un problema tenga la habilidad para llevar un seguimiento o monitorear y evaluar el proceso.

Algunas acciones que involucran el control son:

- Entendimiento: Tener claridad de lo que trata el problema antes de intentar resolverlo.
- Considerar las distintas formas posibles de solución y seleccionar una en particular, es decir, hacer un diseño.
- Monitorear el proceso y decidir cuando dejar a un lado un camino no exitoso y tomar uno nuevo.
- LLevar a cabo ese diseño que se hizo y estar a disposición de cambiarlo en un momento oportuno.
- Revisar el proceso de resolución.

Sistemas de creencias

Los sistemas de creencias como lo dice su nombre, son las concepciones que poseemos sobre las matemáticas, sobre sí mismo, etc., incluso en cómo los profesores abordan la resolución de algún problema. El tipo de creencia que Schoenfeld enfoca más es sobre cómo perciben el alumno y el profesor la argumentación matemática formal a la hora de resolver un problema. Señala Schoenfeld que para el alumno la argumentación matemática sólo se puede usar en dos circunstancias.

- Para confirmar algo que es intuitivamente obvio y en cuyo caso la prueba parece redundante, es decir, demostrar una fórmula es obvio y no vale la pena hacerlo.
- Para verificar algo que ya es cierto porque lo dice el profesor, en este caso sólo se trata de resolver un ejercicio de entrenamiento.

Entonces podemos decir que para los alumnos la argumentación no sirve, porque en un caso ya es obvio y en el otro ya alguien lo sabe y formulan la pregunta ¿para qué demostrar?

Los sistemas de creencias condicionan muchos aspectos relacionados con el aprendizaje de la matemática, por ejemplo, las creencias determinan en el alumno la forma en que tratará de aprender matemáticas, memorizando o no, en otras palabras el alumno puede creer que la matemática es sólo una serie de reglas o pasos que simplemente van a memorizar, o pueden creer que la matemática es la elaboración de conceptos, realizar relaciones, patrones, etc., en este caso es muy probable que el alumno trate de comprenderla pues van a considerar dicha comprensión como útil.

Schoenfeld cita a Lampert sobre las creencias de los estudiantes;

> "comúnmente la Matemática está asociada con la certeza, conocerla es ser hábil para dar respuestas correctas rápidamente. Esta asunción cultural está condicionada por la experiencia escolar, en la cual hacer matemáticas significa seguir las reglas dadas por el profesor: conocer matemáticas significa recordar y aplicar correctamente las reglas cuando el profesor lo requiera y la verdad matemática queda determinada cuando la respuesta es ratificada por el profesor. Las creencias acerca de cómo hacer matemáticas y qué significa conocerla en la escuela se aquieren a través de años, observando, escuchando y practicando."

También menciona una serie de creencias sobre las matemáticas que tienen los estudiantes, los profesores y la sociedad:

Creencia de los estudiantes

- Los problemas matemáticos tienen una y sólo una respuesta correcta.
- Existe una única manera correcta para resolver cualquier problema, usualmente es la regla que el profesor mostró en clase.
- Algunos estudiantes no pueden esperar a entender matemáticas, solo esperan memorizarla y aplicarla cuando la hayan aprendido mecánicamente.
- La matemática es una actividad solitaria realizada por individuos en aislamiento, no hay trabajo en grupo.
- Los estudiantes que han entendido las matemáticas y han estudiado podrán resolver cualquier problema que se les asigne en cinco minutos o menos

- Las matemáticas aprendidas en la escuela tienen poco o nada que ver con el mundo real.

Creencias del profesor:

- Se observa que usualmente en los profesores, las creencias están condicionadas por la forma en que a ellos mismo les enseñaron matemáticas a lo largo de su vida.

Creencias sociales:

- En muchos países la creencia social del aprendizaje de las matemáticas es que se adquiere espontáneamente, pero si ponemos de ejemplo a los japoneses, ellos creen que las personas van adquiriendo un conocimiento poco a poco, esto hace que Japón le dedique más tiempo al estudio de las matemáticas, porque piensan que haciendo un esfuerzo se llega a un concepto y entonces vale la pena hacer ese esfuerzo. Siendo que en muchos países realizar ese esfuerzo no tendría mucho sentido.

Existen muchas diferencias culturales en cuanto a las creencias que tiene la sociedad acerca de la naturaleza del aprendizaje de las matemáticas, estas creencias se pueden agrupar en tres categorías:

- Lo que es posible, es decir, lo que los estudiantes pueden aprender de la matemática en las diferentes edades.
- Lo que es deseable, es decir, lo que los estudiantes deben aprender; marcando la diferencia entre lo que pueden y lo que deben de aprender.
- Y por último nos formulamos la pregunta ¿Cuál es el mejor método para enseñar matemáticas?

2.3.3. Lev Moiseevich Fridman

Fridman en su obra *Metodología para resolver problemas de matemáticas*, expone las características que tienen los problemas y las estrategias que son necesarias en la resolución de problemas, donde define lo que es un problema de la siguiente manera:

> "... consiste de alguna exigencia, requerimiento o pregunta para la cual se necesita encontrar la respuesta, apoyándose en y tomando en cuenta las condiciones señaladas en el problema."(Fridman, 1996, p.13)

Entonces al intentar resolver un problema lo primero que hacemos es leerlo, y observamos que en él hay afirmaciones y exigencias, donde las afirmaciones son llamadas condiciones del problema y las exigencias son los requerimientos del problema.

Fridman señala que lo primero que debemos hacer es analizar el problema *"desglosar la formulación del problema en condiciones y requerimientos,"* de esta manera tendremos una mejor comprensión de lo que tenemos (condiciones) para resolver y hacia donde queremos llegar (requerimientos) para la resolución de un problema.

Debemos tener en cuenta que en algunas situaciones será necesario desglosar más a profundidad un problema, pero sin perder de vista que ese desglosamiento de condiciones y requerimientos siempre debe estar orientado hacia el requerimiento general del problema, tal y como lo menciona Fridman *"el análisis del problema siempre está orientado hacia el requerimiento."* Para dicha orientación del análisis tenemos que tener muy en claro el requerimiento, es decir, lo que se necesita encontrar.

En ciertos problemas será necesario un análisis más prolongado esto dependerá de la dificultad del problema, para esto Fridman estructura las condiciones por objetos y características, por ejemplo, si la condición es un triángulo rectángulo, tenemos como objeto un triángulo rectángulo y como características tenemos que la suma de los ángulos interiores es de $180°$, tiene un ángulo recto, por mencionar algunas. A lo que establece que si las condiciones contienen a un objeto, entonces se señalan su o las características en forma de cierta propiedad del objeto.

Hasta este momento sólo hemos hablado de un análisis descriptivo textual, pero no es la única manera de hacer un análisis, existe por otra parte lo que le llama escritura esquemática del problema, esto no es otra cosa mas que la utilización de signos, literales, dibujos, esquemas, etc., una manera distinta pero representativa del problema y que en esta forma quedan más claras y precisas las condiciones y requerimientos del problema. en donde sólo utilizaremos lo necesario para la solución.

En lo mencionado anteriormente se describen las partes que componen un problema y la manera en que lo analizaremos e identificar sus condiciones y requerimientos. ahora nos hacemos la siguiente pregunta ¿Qué significa resolver un problema de matemáticas?. porque no basta con exponer la solución al problema. ya que la resolución de problemas no consiste solamente en dar respuesta a algún requerimiento. si no que la resolución de problemas consiste en una serie de pasos y en cada paso de la solución lleva la aplicación de algún principio matemático.

Dando respuesta a la pregunta ¿Qué significa resolver un problema de matemáticas?

> Resolver un problema de matemáticas significa encontrar una suceción de principios generales de la matemática (definiciones. axiomas. teoremas. reglas. leyes. fórmulas). cuya aplicación a las condiciones del problema o a las consecuencias derivadas de éstas nos conduce a obtener lo que se requiere en el problema. es decir. la respuesta. (Fridman.1996. p.34)

Fridman estructura el proceso de resolución de problemas en 8 etapas de la siguiente manera:

1. **Análisis del problema.**
   En la primera etapa. es el comprender de qué problema se trata. identificar sus condiciones y sus requerimientos.

2. **Escritura esquemática del problema.**
   En la segunda etapa. consiste en realizar de alguna manera la escritura esquemática de la etapa anterior mediante los diferentes recursos.

3. **Búsqueda del método de solución del problema.**
   La tercera etapa. es el encontrar el método que mejor se adecue para la resolución del problema.

4. **Implementación del método de solución.**

   La cuarta etapa, el método encontrado en la etapa anterior debe de ser aplicada.

5. **Prueba de la solución del problema.**

   La quinta etapa, consiste en ya ejecutado el método es de convencerse de que la solución encontrada es la correcta, donde debe de satisfacer todos los requerimientos del problema.

6. **Análisis del problema (solución).**

   La sexta etapa, es donde realizas un análisis con el objetivo de identificar bajo cuales condiciones el problema tiene solución, así como de cuántas son las soluciones en cada caso posible y bajo qué condiciones el problema no tiene solución.

7. **Formulación de la respuesta al problema.**

   Séptima etapa, ya realizado el análisis de la solución del problema es mostrar de manera precisa la respuesta al problema.

8. **Análisis de la resolución del problema.**

   La octava y última etapa, consiste en determinar si no existe una manera más eficiente de resolver el problema, si existe una generalización del problema y cuáles son las conclusiones que se pueden emanar de la solución obtenida.

De estas ocho etapas en la resolución de problemas, cinco resultan ser inevitables las cuales son, el análisis del problema, la búsqueda del método de solución, la ejecución del método y de la formulación de la respuesta. Estas etapas están relacionadas entre sí.

También Fridamn hace una diferencia entre problemas a los que el denomina como problemas característicos y no característicos.

Los problemas característicos son los que ya la matemática define reglas que se emplean en una serie de pasos para llegar a su solución, de una gran diversidad de problemas, tales reglas se estudian en los cursos de matemáticas.

Algunas de estas reglas son:

- **Regla verbal,** ejemplo, "la potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los multiplicandos."
- **Regla-fórmula,** ejemplo, la fórmula para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática.
- **Regla-identidad,** ejemplo, la identidad para encontrar el cuadrado de un binomio.
- **Regla-teorema,** ejemplo, el primer teorema fundamental del cálculo.
- **Regla-definición,** ejemplo, "el valor de la variable bajo el cual cada una de las desigualdades del sistema se transforma en una desigualdad numérica verdadera, se llama solución del sistema. El conjunto de soluciones del sistema es la intersección de los conjuntos de soluciones de cada una de las desigualdades que lo forman"

Dicho esto algunas recomendaciones para resolver fácilmente los problemas característicos son, recordar las reglas y principios generales estudiados en el curso ya que ésto nos será de mucha ayuda al momento de encontrar la solución a un problema, teniendo en cuenta que algunas reglas no se utilizan seguido y por lo tanto tienden a no memorizarlas, en estos casos contamos con la ayuda de notas de apunte, libros, formularios, etc., otra recomendación sería el saber aplicar las reglas ya sea una fórmula, identidades, teorema, definición, entre otras ya que éstos por lo general están en una serie de pasos para llegar a la solución.

Los problemas no característicos, dada la definición de problemas característicos podemos decir que son los problemas en los cuales en los cursos no se dispone de reglas o principios generales que determinar una serie pasos o algoritmos a seguir para llegar a su solución.

Fridman señala que el proceso de solución de cualquier problema no característico consiste en la aplicación consecutiva de las siguientes dos operaciones fundamentales (Fridman, 1996, p. 55):

1. Reducir el problema no característico, mediante alguna transformación o reformulación, a otro problema equivalente a él, pero característico.
2. Dividir el problema no característico en varios sub-problemas característicos.

Otro aspecto importante es el de identificar el tipo de problema que se está por resolver. para esto Fridman los clasifica en 3 clases de problemas basándose en la clasificación en el carácter del requerimiento del problema. Las 3 clasificaciones son las siguientes:

- **Clase 1. Problemas de encontrar un objeto matemático,** este tipo de problemas el requerimiento consiste en buscar o reconocer algún objeto matemático. este objeto puede ser una magnitud. una relación. una figura. etc.
- **Clase 2. Problemas que se reducen a una demostración o una explicación,** aquí el requerimiento consiste en convencerse de la validez de una cierta proposición. o en someter a prueba la veracidad de dicha proposición. o bien en explicar por qué tiene lugar tal o cual fenómeno. tal o cual hecho.
- **Clase 3. Problemas que se reducen a una transformación o una construcción,** en esta clase son los problemas en los cuales se exige una transformación de cierta expresión. simplificarla. presentarla en otra forma. construir algo que satisface ciertas condiciones. por ejemplo. una figura geométrica o una expresión algebraica.

2.3.4. Eduardo Mancera Martínez

En su obra *"Saber matemáticas es saber resolver problemas"* realiza un análisis de diferentes investigaciones en el enfoque de la resolución de problemas. algunas de ellas son de los autores de Polya. Schoenfeld. Gascón. Majmutov. entre otras. Identificando que existen diversos enfoques en donde se ve reflejado las diversas concepciones que se tiene sobre la matemática. así como su enseñanza y aprendizaje. lo que es un problema. el proceso de resolución. el papel que juegan los problemas en la enseñanza y el papel que juegan las técnicas y las teorías.

Señalando que a pesar de la gran diversidad de situaciones que están relacionadas con la enseñanza por medio de la resolución de problemas. se pueden identificar algunos elementos comunes pero de gran importancia al momento de considerar el diseño y elaboración de planes de clases. A estos elementos los llamó consensos didácticos los cuales son los siguientes:

Consensos didácticos

Significados

Cuando se trabaja con problemas los conceptos y procedimientos están vinculados al contexto que se maneja en el problema.

Un símbolo matemático deja de ser abstracto en un problema. éste adquiere un significado particular y cuando esto sucede se está en condiciones de utilizar estrategias como la dramatización. simulación, entre otras, para ayudar a los estudiantes a encontrar una solución.

Los significados permiten a los estudiantes anclar sus pensamientos en situaciones con sentido para ellos; lo cual les favorece para encontrar relaciones con mayor facilidad que si se restringe al uso exclusivo de la simbolización matemática.

La enseñanza tradicional parte del supuesto de que si se aprende a manejar el concepto abstracto, de manera automática, se pueden manejar todos sus significados, es decir, si se aprende a sumar, restar, multiplicar, dividir, a partir del manejo exclusivo de símbolos y con reglas claras del algoritmo correspondiente.

Una breve explicación de la forma en que influyen estos significados. Estas son algunas ideas expresadas por un psicólogo francés Vergnaud, sabemos que un niño puede encontrar el resultado de una suma como 5 + 7 sin dificultad, desde los primeros años de la escuela, pero con seguridad, dependiendo de su desarrollo, tendrá dificultades con algún tipo de estos problemas:

1. Pedro tiene 5 carros rojos y 7 azules ¿Cuántos tiene en total?
2. Juan tenía cierto número de canicas al iniciar un juego, primero perdió 5 y luego perdió 7 ¿Cuántas perdió en total?
3. Alejandro tiene 5 años más que Paco. Paco tiene 7 años ¿Cuántos años tiene Alejandro?

En el primer problema basta tener cinco objetos a la mano y juntarlos con otros siete objetos y por medio del conteo determinar la cantidad de la colección obtenida.

El segundo problema, por lo general es más difícil para los niños pequeños, es frecuente que pregunten sobre la cantidad que tenía Juan y entonces proceden a establecer relaciones.

Mientras que los niños de mayor edad se dan cuenta después de hacer algunos ensayos de que el dato solicitado no es necesario. pueden pensar en la situación y lo que implica perder sin dificultad.

Al intentar resolver el tercer problema nuevamente se pueden encontrar dificultades para determinar la solución en niños con diferente nivel de desarrollo.

Para los niños pequeños las relaciones que se establecen entre las cantidades no son abstractas están ligadas a la situación que se plantea en el problema y no pueden desligarse de ella. esto es. los números no están solos. poseen significados que los niños pueden o no captar debido a su experiencia con el mundo y facilidad que tengan para representarse para sí las situaciones planteadas en los problemas.

Habilidades intelectuales

Para los matemáticos resolver un problema puede ser una experiencia sumamente satisfactoria. pero no se acaba en el momento de encontrar la solución; en efecto. quedarán muchas preguntas por plantear y por responder con el objeto de profundizar en lo que se hizo; lo más importante es evaluar lo que se hizo y plantearse constantemente preguntas en relación a los porqués se procedió de determinada forma ¿Qué situaciones similares se pueden considerar? ¿Hasta dónde son válidos los procedimientos empleados?

De esta forma el binomio "problema-solución" sólo es el pretexto para una reflexión profunda sobre un tema. La matemática no sólo es repetición de lo ya establecido. por el contrario es buscar y descubrir nuevas relaciones. No basta obtener resultados hay que reflexionar sobre los elementos esenciales para obtenerlos o modificarlos. sobre el papel que juega cada dato o condición. sobre el alcance que tiene la estrategia de resolución. sobre las analogías entre el problema resuelto y otros.

Se está hablando entonces de una serie de habilidades intelectuales que si bien se pueden desarrollar en la matemática pueden ser de utilidad en otras actividades o campos de conocimiento. Se considera que una habilidad es algo más que una acción mecánica que se realiza de manera eficiente. sobre todo cuando se consideran habilidades intelectuales. se asume que éstas son procesos mentales complejos en los que el individuo pone en juego sus conocimientos y estrategias para explorar diversas situaciones.

Estas habilidades están presentes en muchas actividades pero se manifiestan abiertamente en la resolución de problemas, sobre todo en problemas matemáticos, ya sea para encontrar una solución o para profundizar en aspectos relativos al problema resuelto.

Algunos consideran que las habilidades se aprenden, otros más, consideran que se desarrollan de manera progresiva. Las diferencias en matices y conceptualización son complejas, para nosotros basta decir que hay que considerarlas. En los cursos tradicionales el contenido es el fin y los estudiantes lo deben aprender en el enfoque para el desarrollo de habilidades, el contenido es el recurso que se utiliza para desarrollar tal o cual habilidad. Se han identificado algunas habilidades intelectuales relacionadas con los procesos de resolución de problemas, como la flexibilidad del pensamiento, la reversibilidad, la capacidad para generalizar, entre otras, que conviene tratar por separado.

Flexibilidad

Consideremos la flexibilidad de pensamiento como la habilidad que consiste en que los estudiantes reconozcan que un problema se puede resolver de distintas formas, involucrando procesos y conceptos diversos que no tienen que ver con la secuencia de contenidos planteada en los programas, es decir, a la posibilidad de abordar las situaciones de varias maneras, empleando diferentes recursos y estrategias. Para considerar el desarrollo de la flexibilidad del pensamiento se requiere propiciar que los estudiantes enfrenten diversas situaciones y formas de abordarlas, las cuales someterán a un análisis minucioso, con lo cual sin duda se incrementara el espíritu crítico de los alumnos.

Reversibilidad

Consideremos ahora lo correspondiente a los procesos inversos o reversibles a los cuales nos referimos por reversibilidad del pensamiento. Por lo general, desarrollamos procedimientos en forma progresiva, siguiendo algunas ideas desarrolladas por Solow, esto es, se inicia con unos datos o condiciones y se obtiene un resultado o una conclusión, ¿Sería factible iniciar en la conclusión para obtener los datos o condiciones?, es decir, ¿Podemos establecer un camino inverso? En matemáticas los procesos reversibles se dan con mucha frecuencia.

Generalización

Otra habilidad es la capacidad para generalizar, es algo muy importante en matemáticas. Al resolver un problema en realidad se están resolviendo una clase amplia de problemas que conservan las mismas relaciones entre los datos, lo cual ayuda a formar esquemas generales que son de gran ayuda para iniciar el incierto camino en la resolución de problemas.

Un problema resuelto puede servir de marco para identificar relaciones generales que pueden presentarse en otros problemas aunque el contexto varíe. Para que una generalización sea plausible a un estudiante debe haber conocido antes algunos casos particulares relacionados con ésta.

En la enseñanza de la matemática frecuentemente se presenta la etapa ultima el conocimiento sintetizado, generalizado y se le quita la parte más interesante y divertida. Se acostumbra enseñar los aspectos generales y después tratar de particularizar por medio de aplicaciones, sin embargo, esto es contrario a lo que se documenta con la historia, en la cual se puede constatar cómo algunas nociones se fueron creando poco a poco y por medio de diversos niveles de generalización se fueron afinando hasta convertirse en los conceptos actuales.

La generalización es una habilidad necesaria para percibir el material matemático en su forma pura, agarrando la estructura formal de un problema, tipificar las propiedades de los objetos, relaciones y operaciones matemáticas, abreviar el proceso del razonamiento matemático y las operaciones correspondientes.

Estimación

Una habilidad matemática que es útil en diversos aspectos de la vida diaria y que poco a poco se ha ido introduciendo en la escuela es la estimación, por ejemplo se realizan estimaciones constantemente en mediciones, cálculos aritméticos y otro tipo de situaciones.

Es muy importante que los estudiantes al enfrentar un problema inicien la búsqueda de la solución estimando el resultado, ya que realizar estimaciones les hará ganar seguridad en lo que hacen y se acostumbrarán a considerar si tiene sentido o son razonables los intentos que realizan para determinar la solución, además esto ayuda a los profesores a identificar si los estudiantes comprenden el problema, dado que una mala estimación es producto necesariamente de falta de comprensión y buena estimación puede ayudar a generar ideas para resolver el problema.

La estimación es una habilidad particular de la matemática que permite desenvolverse con soltura en muchas actividades de las personas, es una habilidad que fundamentalmente en las clases de matemáticas se puede propiciar, aunque hay la posibilidad de hacerlos también en materias como física o química, pero si ésto se integra a los procesos de resolución de problemas resultará más continuo su desarrollo y tendrá efectos más relevantes.

Imaginación espacial

Otra habilidad matemática que se presenta fundamentalmente en la geometría es la imaginación espacial, la cual se refiere a la manera de elaborar imágenes mentales que nos permita saber si lo que estamos desarrollando está correcto o no.

Vivimos en un mundo tridimensional, en el cual generalmente representamos figuras en el espacio de un papel, lo cual es en forma bidimensional, o también utilizamos representaciones bidimensionales para estudiar diversas partes de una figura tridimensional. Ésto solo es posible si entendemos las relaciones que guardan las figuras geométricas entre sí, cuáles son los efectos que se producen al modificarlas con diversos propósitos, cómo es posible provocar un efecto visual, dividir una superficie, diseñar un objeto, etc.

Discriminación

Otra habilidad que se refiere a aspectos muy sencillos pero casi olvidados en la enseñanza es lo que denominaremos que se pueden incluir en el concepto de control de Shoenfeld. Tiene que ver con la forma en que determinamos la validez de aplicación de conceptos o estrategias.

Por lo general siempre nos referimos a objetos que satisfacen una definición y a situaciones que se resuelven de manera directa con la aplicación de procedimientos dados, siempre decimos lo que es y lo que se debe hacer, pocas ocasiones nos referimos a ejemplos de objetos que no satisfacen una definición o a procesos que no pueden ser aplicados en ciertos momentos.

Para conformar una imagen mental adecuada de un concepto o de un procedimiento no basta la exhibición de ejemplos. es necesario indicar también no ejemplos, sólo de esta manera podemos conformar una idea clara de lo que pretendemos. La discriminación es una habilidad muy importante. dado que presta más atención a los procesos que a los resultados.

Ambiente para la resolución de problemas

Integración del conocimiento

La resolución de problemas obliga a considerar la integración del contenido. no es una opción. Es difícil reconocer un problema que se resuelva exclusivamente a partir de un solo contenido matemático. pero además es absurdo implicar que se debe resolver de cierta forma.

Cuando se resuelve un problema no se circunscribe de antemano a un procedimiento dado o a un tipo de nociones. ya que un problema puede ser abordado desde diversas perspectivas y por lo tanto se puede hacer uso de diferentes recursos matemáticos.

La integración del conocimiento se presenta en dos formas: interna y externa.

Interna

Es cuando se hacen transferencias de la situación que se aborda de un contenido matemático a otro; sabemos que hay aspectos del álgebra que entienden mejor los estudiantes si se les presentan como relaciones entre áreas de figuras geométricas sencillas.

Externa

Es cuando se utiliza la matemática para abordar situaciones de otros campos de conocimiento. Cualquier aplicación de la matemática a otro campo del conocimiento resultará vital para integrar lo que sabemos de matemáticas con otras ramas del saber humano y esto a final de cuentas es algo que les debe quedar claro a los estudiantes no a nivel de promesas incumplidas si no como una práctica cotidiana. No basta decir que la matemática se aplica en diversas situaciones y que las matemáticas están en todas partes. hay que mostrar que esto es así.

Construcción social del conocimiento

La comunicación y la interacción humana es sumamente importante para la construcción del conocimiento. Sin embargo, es algo que no se fomenta de manera continua en los salones de clases.

La actividad matemática es algo que puede ser de importancia para los individuos, pero es una actividad que resulta más importante a medida que nos involucramos con las perspectivas de otros, esto implica un proceso en el que ponemos a prueba nuestras nociones y tenemos la oportunidad de analizar otras posiciones.

La interacción humana propicia la negociación de significados y esto es precisamente lo que puede enriquecer nuestros conocimientos o ayuda a corregir concepciones falsas o limitadas. Discutir y evaluar lo que dicen otros es parte importante de la formación académica y fortalece la seguridad personal, nos obliga a auto convencernos de que las cosas deben funcionar de cierta manera.

Por otra parte la matemática es una obra colectiva, no es patrimonio de individuos aislados, sin duda importó la existencia de personajes relevantes que pudieron adjudicarse algunos descubrimientos, pero su trabajo no tendría sentido sin lo que los demás intentaron ya sea sus contemporáneos o antepasados, como lo expresó Newton que tuvieron la oportunidad de caminar sobre los hombros de gigantes.

2.4. El uso de la tecnología digital

En las investigaciones sobre la enzeñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ha sido un punto muy importante el uso de la tecnología como un recurso que pone en disposición del estudiante obtener diferentes modos de representación de un problema, así como manipular en un ambiente dinámico las variaciones que éste presente, obtener conclusiones, hacer conjeturas, tomar casos particulares etc. La tecnología es una herramienta muy poderosa, en la actualidad se cuenta con diferentes software para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, teniendo como una fuente grande de problemas en los libros de textos, aplicados desde un nuevo enfoque y apoyados en herramientas tecnológicas.

(Hitt. 2003) menciona:

> El desarrollo de la tecnología y la capacidad de graficación de las computadoras y calculadoras impulsó el estudio del rol que juegan las diferentes representaciones de un concepto matemátido en su construcción.

En nuestra propuesta se usó el software de GeoGebra para crear estos ambientes diñamicos el cual nos puede ayudar. en el caso de la geometría en construcciones. visualizaciones de algunos conceptos y propiedades. Además de que es útil para el cálculo de expresiones aritméticas. algebraicas. logarítmicas. trigonométricas. el cálculo de soluciones de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones. También podemos estudiar funciones y sus gráficas. para así poder hacer una interpretación de las funciones reales.

Fuglestad (2004) citado por (Araya. 2007) ha diseñado tres etapas de desarrollo para describir el proceso mediante el cual los estudiantes interactúan con las herramientas tecnológicas:

- Conocimiento básico de los comandos o funcionalidades del software. Los estudiantes pueden utilizar las diferentes funciones del software para resolver tareas simples preparadas para interactuar con éste.

- Desarrollo de modelos simples. Los alumnos pueden hacer un esquema textual. numérico o plantear fórmulas para planear un modelo en una hoja de cálculo. En un software graficador ellos podrían juzgar qué funciones gráficar. usar diferentes escalas en los ejes o ajustar la pantalla.

- Juzgar el uso de las herramientas para dar solución a un problema dado. Los estudiantes deben ser capaces de pensar en distintas formas y recursos para resolver un problema, y juzgar cuáles de las herramientas tenológicas disponibles es más apropiada para resolver el problema o cuándo otros métodos son mejores.

Al hacer uso de herramientas computacionales estamos dando un acceso a los estudiantes a varias formas de expresar sus ideas matemáticas y experimentar con ellas. Fuglestad (2004) citado por (Araya. 2007) hace sugerencias para desarrollar la habilidad respecto al momento de decidir cuál herramienta tecnológica es la más apropiada para resolver un problema. enfatizando algunos puntos:

1. Motivación.

   Es tratar de despertar un interés al estudiante.

2. Características básicas y paso por paso.

   Conocer las características básicas del software para poder hacer uso de todos sus comandos y funciones, por otro lado construir el conocimiento paso por paso.

3. Mismo problema. diferentes herramientas y métodos.

   Hacer uso de diferentes herramientas tecnológicas y diferentes métodos para así dar la oportunidad de juzgar y discutir cuál sería la mejor solución.

4. Tareas y temas abiertos.

   Trabajar con tareas que permitan ser interpretadas y resueltas de diferentes formas y con distintas herramientas

5. Reflexión y discusión.

   Estos dos aspectos son necesarios para consolidar y estar seguros de la comprensión del estudiante.

6. Intervención del profesor.

   EL profesor debe ayudar a sus estudiantes para que desarrollen habilidades sobre el empleo del software y diseñar tareas que requieran el uso de herramientas tecnológicas.

2.5. Diseños didácticos para la enseñanza de las Matemáticas

En este apartado se hará una breve descripción sobre algunos diseños de actividades didácticas que se analizaron con el fin de ver cómo se plantearon los problemas y cómo se fue guiando al estudiante a llegar a la solución del problema. para poder así construir nuestras actividades didácticas.

Se examinaron los trabajos de (Araiza. 2010). (Álvarez. 2011). (Verdugo. 2014). (Gastelum. 2016) en los cuales pudimos observar que están involucrados los consensos didácticos expuestos por (Mancera. 2000) con el cual fueron diseñadas nuestras actividades didácticas y basados en su propuesta didáctica.

En el trabajo de (Araiza. 2010). observamos que se busca construir algunos significados como: función. función creciente. función decreciente. recta tangente. valor máximo y valor mínimo. Aquí se observó que además están presentes en cada una de las actividades las siguientes habilidades intelectuales: flexibilidad. generalización. estimación. imaginación espacial. discriminación. El ambiente para la resolución de problemas fue la integración del conocimiento de manera externa y por construcción social del conocimiento. Todo por medio de problemas de optimización y la utilización de ambientes dinámicos virtuales.

En los diseños de (Gastelum. 2016) y (Álvarez. 2011) se presenta una propuesta de actividades didácticas diseñadas con el software GeoGebra. en la que se busca promover el significado geométrico de la derivada de manera puntual y global. así como algunas reglas de derivación. Del mismo modo se pueden observar los consensos didácticos involucrados en su propuesta. sólo que la integración del conocimiento es interna. es decir. con contenidos intramatemáticos.

Por otro lado. en el trabajo de (Verdugo, 2014). se observó el proceso de la resolución de problemas. viendo así las estrategias que utilizan los alumnos al momento de resolver un problema de matemáticas en contextos no matemáticos. lo cual consideramos de gran importancia en nuestro trabajo ya que fue uno de nuestros objetivos específicos.

Capítulo 3

La Propuesta

3.1. Objetivo general

Nuestra propuesta didáctica está dirigida a estudiantes del cuarto semestre de matemáticas en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, y busca promover un mayor interés y entendimiento sobre las características y comportamientos de diferentes variaciones, tales variaciones son la variación lineal, variación polinomial (cuadrática y cubica), variación exponencial y logarítmica, variación periódica (seno y coseno), todo esto por medio de la resolución de problemas de aplicación. Para lograr dicho objetivo, apoyándonos en los elementos teóricos vistos en el capítulo 2, hemos diseñado un conjunto de actividades didácticas que constan de hojas de trabajo para los estudiantes y un archivo en GeoGebra para cada variación.

3.2. Uso de GeoGebra en la propuesta

Esta propuesta didáctica se conforma con 7 archivos GeoGebra y sus respectivas hojas de trabajo como ya se mencionó, por ello daremos una breve justificación de la utilización de los beneficios y bondades que este software ofrece.

GeoGebra es un programa dinámico para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas que combina elementos de aritmética, geometría, álgebra, cálculo, probabilidad y estadística. Es sencillo de aprender a usar y su descarga es gratuita desde su página oficial www.geogebra.org.

Además de la gratuidad y la facilidad de aprendizaje, la característica más destacable de GeoGebra es la múltiple percepción de los objetos matemáticos, ya que cada objeto tiene tres representaciones, una en la vista gráfica (geometría), otra vista algebraica (álgebra) y numérica (hoja de cálculo). Así, se establece una conexión entre los símbolos algebraicos, los valores numéricos y las gráficas.

Por ejemplo GeoGebra visualiza a la vez un punto en el plano cartesiano y sus coordenadas numéricas, una circunferencia y su ecuación, la gráfica de una función y su expresión simbólica, etc.

Es un programa innovador, el cual posee características propias de los programas de geometría dinámica pero también de los programas de cálculo simbólico, incorpora su propia hoja de cálculo, es un sistema de distribución de los objetos por capas y ofrece la posibilidad de animar manual o automáticamente los objetos.

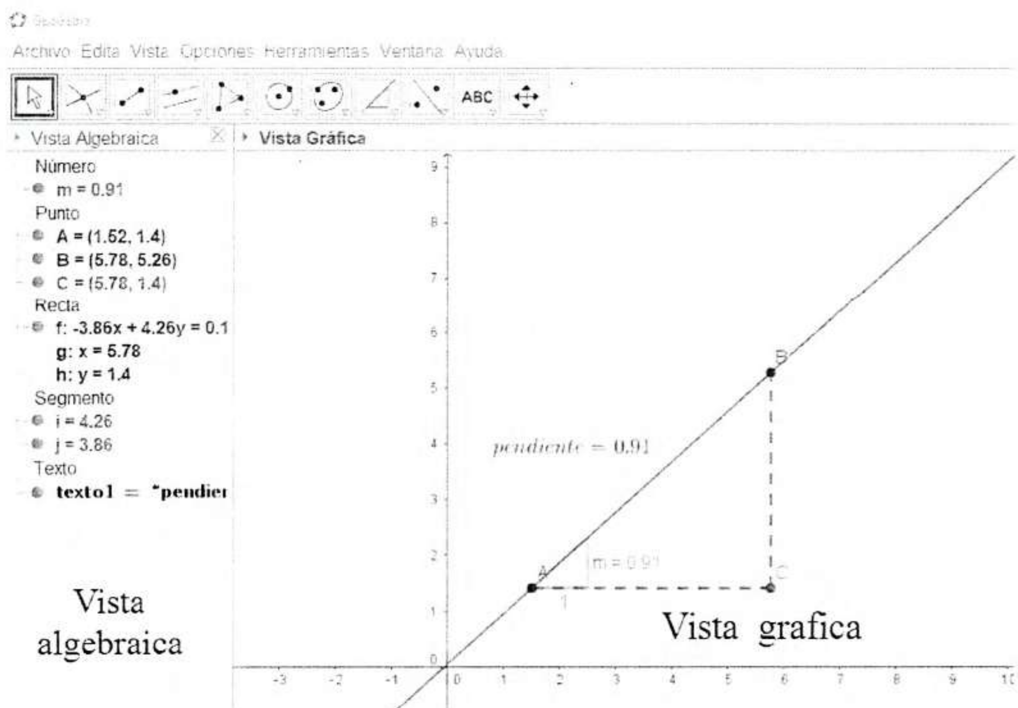


Figura 3.1

3.3. Características de la propuesta y de las actividades

Nuestra propuesta didáctica, como ya se mencionó en los objetivos generales, está dirigida a estudiantes de cuarto semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, en la cual se busca promover la construcción del significado de algunas de las funciones básicas y otros objetos matemáticos, mediante la resolución de problemas de matemáticas en contextos no matemáticos.

Para poder lograr esto, nos apoyamos en los aspectos teóricos considerados en el capítulo 2 y así poder diseñar una serie de actividades didácticas que se consignan en hojas de trabajo para el estudiante y un archivo del software GeoGebra, para poder crear con este conjunto, un ambiente dinámico para cada uno de los problemas de matemáticas en contextos no matemáticos.

Principalmente consideramos los aspectos y propuesta de Mancera, en la cual se rescatan algunos elementos esenciales de Schoenfeld, Fridman y Polya, descritos en el capítulo 2. Así como para poder realizar la aplicación de estas actividades se consideró que en esta propuesta lo mejor sería trabajar en un centro de cómputo.

La propuesta esta conformada por las siguientes etapas:

- Planteamiento de un problema de matemáticas en contextos no matemáticos.
- Estimaciones sobre la posible solución.
- Crear con los estudiantes un debate para determinar cuáles son las opciones más viables para encontrar la solución al problema.
- Solicitar que se resuelva el problema, preferentemente por equipos y dejando total libertad en cuanto al uso de contenidos, así como del archivo GeoGebra de cada actividad.
- Solicitar que se presenten en grupo algunas alternativas para resolver el problema.
- De ser necesario, presentar en grupo algunas alternativas para resolver el problema.

- Solicitar que se modifiquen los datos del problema y que se analice si las formas planteadas para resolver el problema siguen siendo válidas, para así poder ver el método de solución más genereal, tener claridad en dónde se puede aplicar este tipo de método, es decir, casos del mismo tipo de problemas.

- Solicitar que se planteen problemas, con datos iguales o similares que se resuelvan de la misma manera, pero que estén en otros contextos.

- Utilizar una de las soluciones al problema, la que esté acorde con la teoría, para introducir conceptos y nociones del temario.

Nuestros archivos GeoGebra se caracterizan por tener los siguientes factores, una construcción dinámica, en la cual se manipula y simula virtualmente el problema planteado, representaciones analíticas, numéricas, gráficas y de varias casillas de control, con las cuales al ser activadas muestran algunos de los factores previamente mencionados. También nuestras hojas de trabajo están conformadas de la siguiente manera, contienen el enunciado del problema, seguido de preguntas e indicaciones para el estudiante, que sirven de guía para así obtener la resolución del problema.

Como esta propuesta está diseñada para estudiantes de cuarto semestre de nivel preparatoria, las actividades que conforman esta propuesta están elaboradas para enfrentarlas haciendo uso de conocimientos básicos de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, las cuales ya han sido estudiadas en cursos anteriores. Se consideró necesario usar un lenguaje que les resulte familiar a los estudiantes y sin perder de vista nuestro principal objetivo que como ya se mencionó es construir los objetos matemáticos, variaciones en este caso, y de sus principales características y comportamientos en algunos problemas matemáticos pero en contextos no matemáticos.

La propuesta didáctica que proponemos está construida por 7 actividades didácticas, cada una con su respectiva hoja de trabajo y un archivo GeoGebra correspondiente a cada actividad. Los nombres de las actividades son los siguientes:

- Movimiento rectilíneo uniforme.

- Cercado de un corral.
- Volumen de una caja sin tapa.
- Presión atmosférica.
- Magnitud de un temblor.
- Rueda de la fortuna (análisis 1).
- Rueda de la fortuna (análisis 2).

Este orden de las actividades está tomado con base en el libro de cuarto semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, del cual se mostró el temario en el capítulo 1, que es el estudio de las diferentes variaciones básicas: variación lineal, variación cuadrada, variación cubica, variación exponencial, variación logarítmica, variaciónes periódicas (seno y coseno), así está estructurada nuestra propuesta para cubrir cada una de estas variaciones respectivamente.

Las siete actividades didácticas de nuestra propuesta, tienen una estructura similar. Además, al finalizar cada actividad viene una serie de interrogantes sobre las características de cada variación, así como en cada archivo GeoGebra se va a poder manipular cada función en términos generales y poder observar sus comportamientos mientras uno más de los coeficientes va variando.

3.4. Aspectos del marco conceptual

Basados en la propuesta que propone (Mancera, 2000), proponemos un problema de matemática en contextos no matemáticos, se solicitan estimaciones acerca de lo planteado y de la posible solución, se crea un debate con los estudiantes al momento de definir las magnitudes involucradas y cuáles deben ser tomadas y cuáles no en este contexto, en el proceso de resolución se trabaja en equipos y deja total libertad en cuanto al uso de contenidos, así como de la manipulación del archivo GeoGebra, se solicitan algunas alternativas para resolver el problema, de ser necesario se presentarán algunas alternativas para resolverlo el problema.

Se solicita que se modifiquen los datos del problema y que se analice si las formas planteadas para resolverlo siguen siendo validas. se solicita que se planteen problemas. con datos iguales o similares que se resuelvan de la misma manera pero estén en otros contextos. del mismo modo que se van introduciendo los conceptos y nociones por cubrir. Por otro lado. la integración del conocimiento es externa ya que se trabaja con problemas de matemáticas en contextos no matemáticos y fue creada por construcción social del conocimiento. todas las actividades didácticas manejan un esquema similar.

En la primera actividad didáctica podemos observar que están presentes los consensos didácticos. ya que están los significados de una variación lineal. gráfica del modelo de una función lineal. función creciente o decreciente. rango. dominio. pendiente y los comportamientos que tiene el modelo de una función lineal al haver variar alguno de sus coeficientes.

Con respecto a las habilidades intelectuales. están presentes la flexibilidad. ya que se deja total libertad al uso de conocimientos. generalización. dado que al finalizar se estudió el modelo lineal. estimación. por el hecho de solicitar estimaciones para la solución al problema. imaginación espacial. ya que con ayuda de la manipulación se logra desarrollar esta habilidad y así poder crear una imagen mental de lo que está sucediendo. discriminación. porque se toma decisiones sobre qué usar y qué no usar.

Analizando la segunda actividad didáctica consiste en resolver un problema de encontrar la mayor área posible para cercar un terreno adyacente a un río. vemos que los significados involucrados en ésta son la variación cuadrática. rango. dominio. propiedades de dicha variación. concavidad. modelo de una función cuadrática. los comportamientos del modelo. área. perímetro. Las habilidades intelectuales presentes en esta actividad son la flexibilidad. generalización. estimación. imaginación espacial y la discriminación.

En la tercera actividad didáctica se plantea la situación problematica de construir una caja a partir de una lamina cuadrada haciendo cortes de cuadrados en cada esquina de la lámina. la cual se debe construir la que tenga el volumen máximo. los significados presentes son la variación cúbica. propiedades de la variación. área. perímetro. volumen. máximos y mínimos. rango. dominio. función creciente. función decreciente. concavidad. modelo de una función cúbica. Las habilidades intelectuales involucradas en esta actividad son la flexibilidad, generalización, estimación, imaginación espacial y la discriminación.

Los consensos didácticos que están presentes en la cuarta actividad didáctica por un lado los significados: variación exponencial, propiedades de la variación, comparación con otras gráficas, función creciente y decreciente, interpretación de datos, estudio del modelo de la función exponencial, y por otro lado las habilidades intelectuales presentes en esta actividad son la flexibilidad, generalización, estimación, imaginación espacial y la discriminación. Partiendo de una situación problematica de encontrar la presión atmosférica a una altura determinada.

En la quinta actividad didáctica se plantea la situación problemática de calcular la magnitud de un temblor, en esta actividad están involucrados los significados de: variación logarítmica, propiedades de la variación logarítmica, modelo de la función logarítmica, función creciente y decreciente, rango y dominio. Las habilidades intelectuales presentes en esta actividad son la flexibilidad, generalización, estimación, imaginación espacial y la discriminación.

En la sexta actividad didáctica se plantea un problema de posición de una canastilla de la rueda de la fortuna, donde el problema es encontrar la posición sobre la altura (eje y), entonces los significados encontrados en estas actividades son las variaciones periódicas , en este caso el modelo de la función seno, propiedades del modelo y una generalización de la función para ver sus comportamientos al hacer variar alguno de sus coeficientes. Las habilidades intelectuales presentes en esta actividad son la flexibilidad, generalización, estimación, imaginación espacial y la discriminación.

En la séptima actividad didáctica se plantea un problema de posición de una canastilla de la rueda de la fortuna, pero ahora sobre el eje x, entonces los significados encontrados en estas actividades son las variaciones periódicas , en este caso el modelo es la función coseno, propiedades del modelo y una generalización de la función para ver sus comportamientos al hacer variar alguno de sus coeficientes. Las habilidades intelectuales presentes en esta actividad son la flexibilidad, generalización, estimación, imaginación espacial y la discriminación.

3.5. Descripción de las actividades

3.5.1. Actividad 1 Movimiento rectilíneo uniforme

Objetivo de la actividad 1

En esta actividad se procura que el alumno haga análisis de las características y comportamientos de la variación lineal, para esto se plantea una situación problema acerca del movimiento rectilíneo uniforme, que para este tipo de situaciones es una función lineal, en el cual se hace un primer análisis mediante un bosquejo de la situación problemática, seguido de manipular el archivo GeoGebra y ver cómo se comportaría en tiempo real esta situación con sus respectivas variaciones. De inicio el archivo Geogebra tiene esta apariencia.

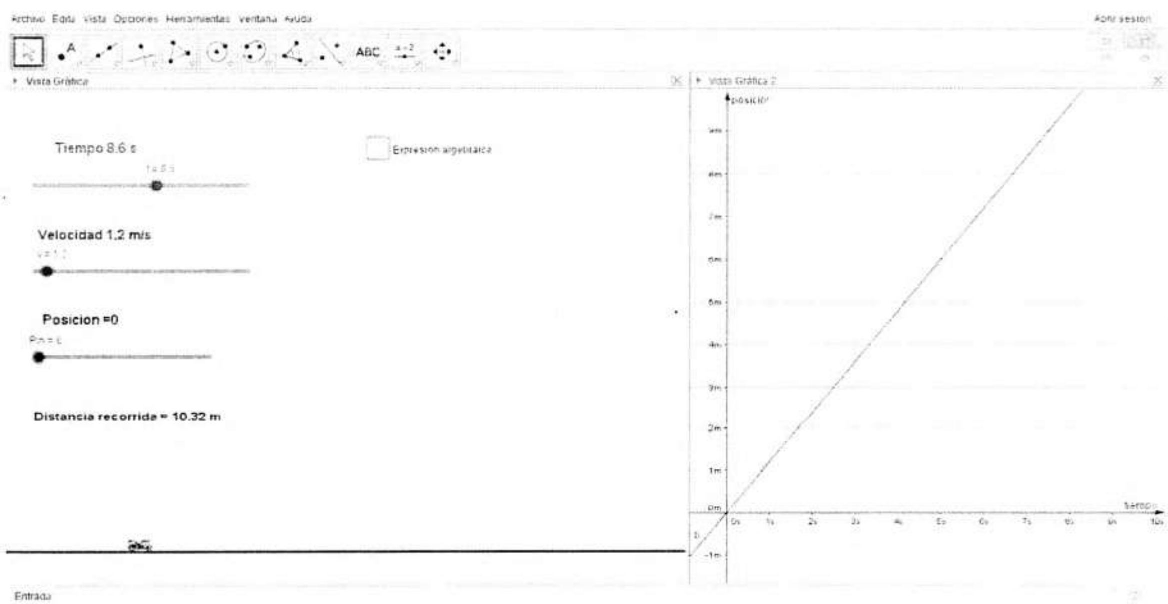


Figura 3.2

También aparecen una serie de casillas que al ser activadas muestran algunos de los siguientes elementos: expresión analítica, función general, gráfica y los puntos correspondientes a los datos numéricos de las tablas realizadas.

Después de haber hecho un dibujo y tablas numéricas con la información del problema se hace un análisis de la información que arrojan los datos obtenidos en la tabla, como por ejemplo, el valor 70 correspondiente al tiempo $t = 1$, su interpretación seria:

$$70 \text{ metros} = 30 \text{ metros} + 40 \text{ metros}$$

30 metros representa la posición inicial

40 metros representa lo que aumenta la posición al transcurrir 1 segundo

De tal manera se va guiando al alumno para llegar a formular una expresión analítica que represente un modelo de la situación a la cual se le quiere dar solución. así poder identificar en cualquier instante de tiempo t la posición de la motocicleta que va a una velocidad constante.

También se le guía al alumno para que observe mediante el archivo GeoGebra y la hoja de trabajo de dicha actividad. el comportamiento de la función. es decir. cómo varía su representación gráfica: si la velocidad cambia. el tiempo cambia. Así. se puede observar y dar respuesta a las interrogantes ¿Cuál es el dominio y rango de la función? ¿Es una función creciente o decreciente?

Para finalizar se hace un análisis de la representación de una función lineal en general y cómo se comporta si hacemos variar alguno de sus coeficientes para poder así observar la información cualitativa y cuantitativa sobre la variación. todo esto mediante el archivo GeoGebra activando la casilla función general. en la que al activar la casilla nos mostrará la gráfica de la función y unos deslizadores para así poder manipular dicha función.

Actividad 1

Un motociclista transita por una carretera recta. El motociclista viaja con una velocidad constante de 40 m/s. Supongamos que en el momento que empezamos a medir el tiempo. es decir en el instante t=0. el motociclista se encuentra a 30 metros a la derecha de un punto de referencia O sobre la carretera. tal y como aparece indicado en la figura y llamémosle x a la posición correspondiente al tiempo t.

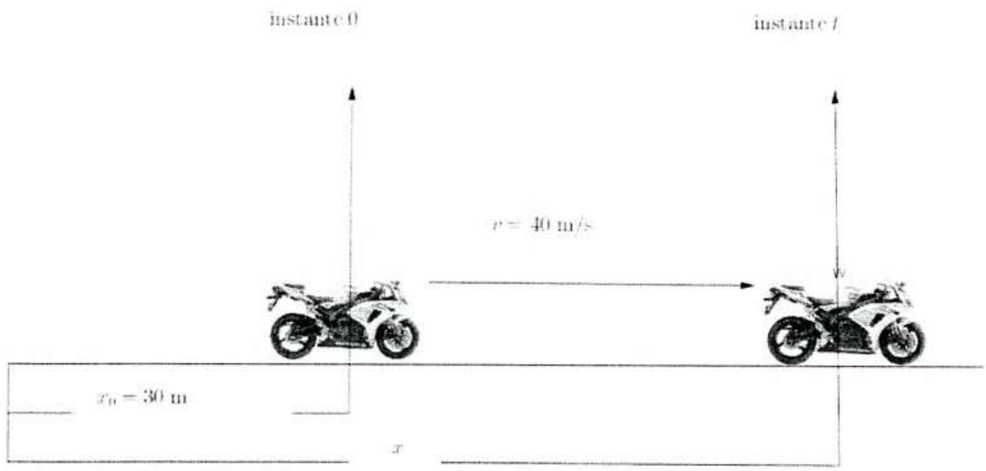


Figura 3.3

1. Construye 3 tablas numéricas que relacionen valores del tiempo con los correspondientes valores de la posición.

2. ¿Qué nos dice el hecho de tener una velocidad constante de $40\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

3. Verificar que en las 3 tablas se cumple la velocidad constante. calculando el cambio de posición entre el cambio del tiempo.

4. Interpretar los datos que hemos obtenido en las tablas. es decir.

   a) El valor correspondiente al tiempo $t = 1$.

   b) La posición 130 correspondiente al tiempo $t = 2.5$.

   Esta última expresión se obtiene:

$$130\text{m} = 30\text{m} + (40)(2.5)\text{m}$$

   ¿Qué representan el 40 y el 2.5?

5. Determine una fórmula algebraica, en la cual expreses la relación que guardan la posición y el tiempo. llamemosle $x(t)$ donde $x(t)$ representa la posición del motociclista correspondiente al tiempo t.

6. Determine lo siguiente:

a) La posición en el tiempo $t = 25$ segundos.

b) La posición en el tiempo $t = 19$ segundos.

c) Si la posición del motociclista es 550 metros ¿Cuánto transcurrio?

7. Traza la gráfica de la función $x(t)$.

8. Determine el rango y el dominio de $x(t)$.

9. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta?

10. Esta función es creciente o decreciente. Justifique su respuesta.

11. Dé un ejemplo que se modele como una función lineal.

12. Dé una función que modele cualquier situación problemática del movimiento rectilíneo uniforme.

13. ¿Cuál sería su pendiente?

14. Completa la siguiente tabla:

m	Signo	Información cualitativa sobre y	Información cuantitativa sobre y
4			
2			
1			
1/2			
1/4			
0			
-1/4			
-1/2			
-1			
-2			
-4			

15. Mencione 3 características que tienen las funciones lineales.

3.5.2. Actividad 2 Cercado de un terreno

Objetivo de la actividad 2

En esta actividad su principal objetivo es el analizar las características que tiene una variación cuadrática, partiendo desde una situación problemática que se modela con una función cuadrática y en la cual damos solución a la situación, además de analizar los comportamientos y propiedades de dicha función, mediante la utilización de un archivo GeoGebra para así hacerlo mas dinámico y poder observar mejor el comportamiento y sus propiedades.

Se comienza haciendo un análisis a través de realizar dibujos en los cuales se pueden apreciar las diferentes formas que podrían dar solución a la situación problemática, con la finalidad de que analicen que dependiendo de cómo elijan cercar el terreno, va a variar su área.

Después seguimos con encontrar una función que modele esta situación para así poder trabajar en ella de manera mas cómoda utilizando las matemáticas, así como de acercarnos al valor que resultará el área máxima mediante una tabla de valores numéricos e ir graficando los puntos para así poder dar un acercamiento a la gráfica de la función.

Realizamos también un análisis de los posibles valores que puede tomar esta función en la situación problemática analizada, así como también observar su concavidad y entre que valores crece y decrece la función.

Al abrir el archivo GeoGebra tiene esta apariencia.

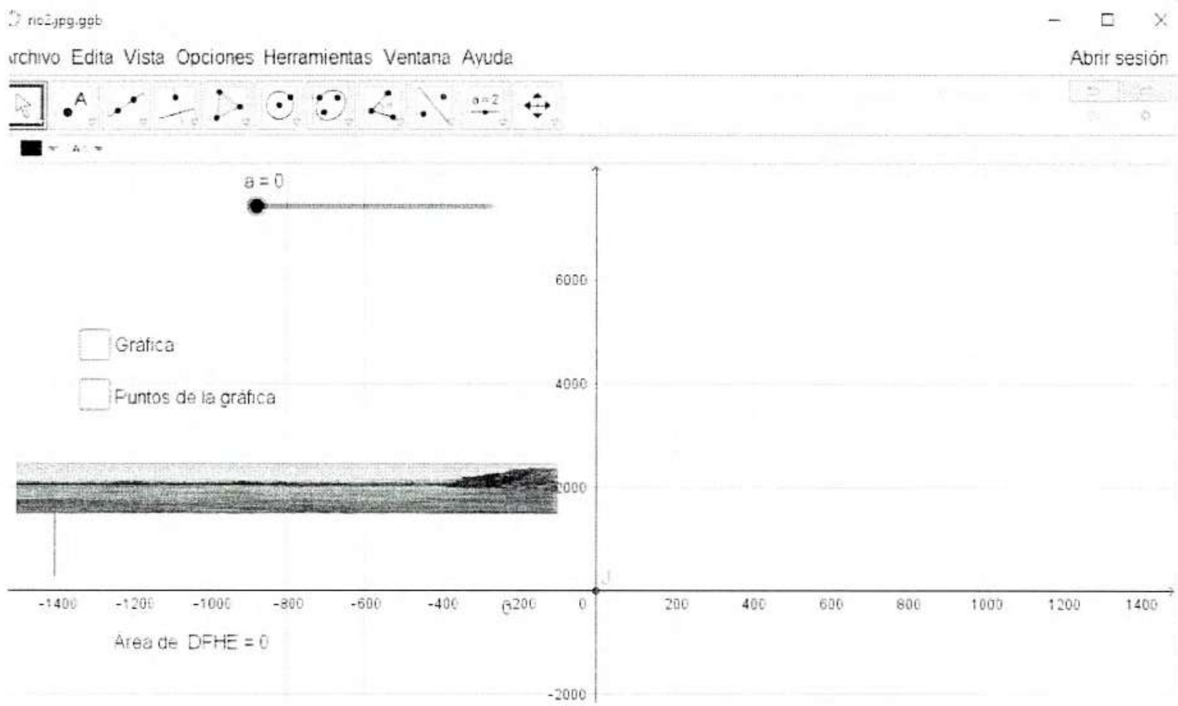


Figura 3.4

Notemos que mientras se va avanzando en la realización de la actividad, observaremos cómo al activar las distintas casillas aparecen los objetos como su gráfica, función, puntos de la tabla, entre otras, para así poder hacer un mejor análisis de la situación y de las propiedades y comportamientos de la variación en esta situación.

Por ultimo haremos un análisis de la forma general de la función cuadrática y cómo se comporta si modificamos algunos de sus parámetros.

Actividad 2:

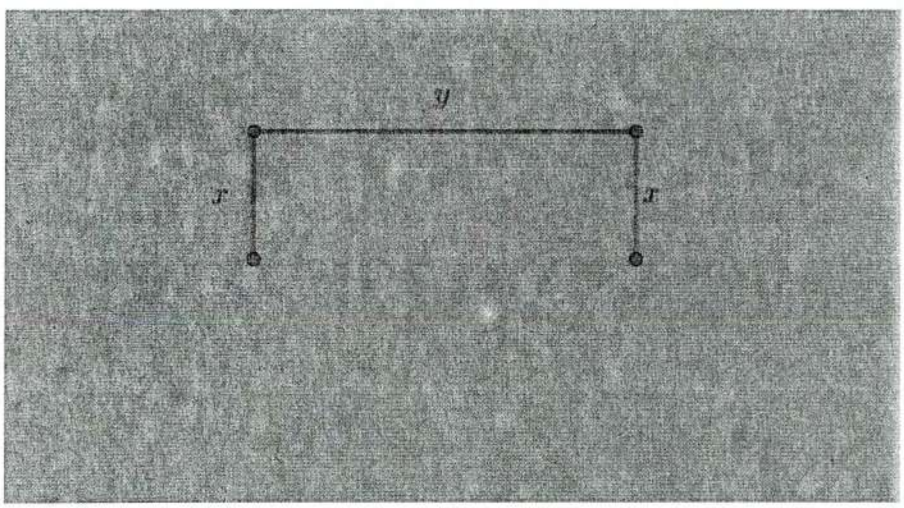
Un granjero tiene 2400 metros de material y quiere construir un corral para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesite corral a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

1. Haz 3 bosquejos en los cuales se muestre el río y el área rectangular cercada con diferentes diferentes dimensiones.

2. ¿Qué puedes decir de las áreas en los campos?

3. Calcule el área de los bosquejos.

4. Si al lado paralelo al río le llamamos "y", y a los otros lados "x", tal como se muestra en la figura. Expresa de forma algebraica la longitud del cerco.

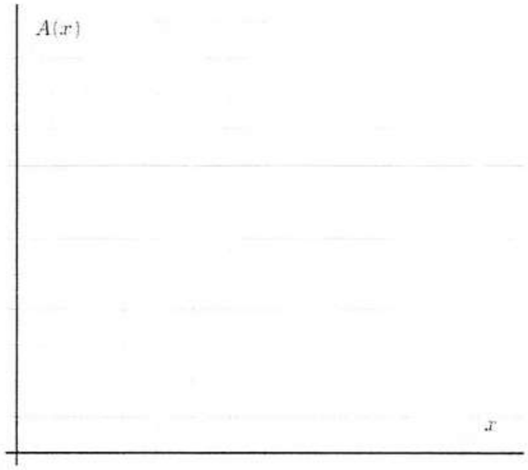


5. ¿Cómo quedaría la expresión algebraica para calcular la longitud del lado "y" en términos de la variable "x"?

6. Encuentre una expresión algebraica para el área $A(x)$ del terreno cercado en términos de la variable "x". ¿Cuál crees que sería la gráfica de esta expresión?

7. Llena la siguiente tabla con la finalidad de acercarnos a encontrar el lado "x" que permita encontrar el área mayor. Gráfica los puntos obtenidos.

Longitud x	área del terreno $A(x)$



8. ¿Qué observas con el valor del área rectangular a través de los diferentes valores de x?

9. Determine el rango y dominio de $A(x)$.

10. Por el teorema de los valores máximos y mínimos encuentra el área máxima.

11. Si x aumenta su valor después del valor que da el área máxima. ¿Qué pasa con los valores de $A(x)$?

12. Si x disminuye su valor después del valor que da el área máxima. ¿Qué pasa con los valores de $A(x)$?

13. ¿En qué intervalo del dominio $A(x)$ la función es creciente? y ¿cuándo es decreciente?

14. ¿Cómo es la concavidad de la función $A(x)$?

3.5.3. Actividad 3 Volumen de una caja sin tapa

Objetivo de la actividad 3

En esta actividad se analiza la función cúbica con base en una situación problemática de construcción de una caja con base cuadrada de tal manera que obtengamos su mayor volumen, dicho volumen está modelado con una variación cúbica la cual se examinará en detalle sus comportamientos mediante un archivo GeoGebra para hacer mas visual y dinámica la actividad.

Comenzamos haciendo preguntas, las cuales servirán para hacer una análisis más profundo del comportamiento del volumen de la caja, así como también calcular volúmenes específicos para poder llegar a realizar una expresión que modele dicha situación.

También se hará una tabla y se graficarán los puntos de la tabla para poder observar gráficamente la función obtenida, para poder observar más a detalle su comportamiento en cuanto como varia el volumen de la caja dependiendo del corte que se la haga a la lámina

Por último, observamos los valores que pueden tener los cortes y cómo es la función, en que momentos crece y decrece, su concavidad y por último, obtenemos un valor aproximado que debe llevar el corte par así obtener la caja con su volumen máximo.

Al abrir el archivo GeoGebra vamos a poder observar cómo se hacen los cortes y la caja que se va formando, también vienen una serie de casillas que activan la caja, la gráfica de la función los puntos que se obtuvieron y por ultimo, la gráfica general de una función cubica donde haremos una análisis más detallado de cómo es la gráfica de la función variando sus constantes, de inicio esta sería la apariencia del archivo.

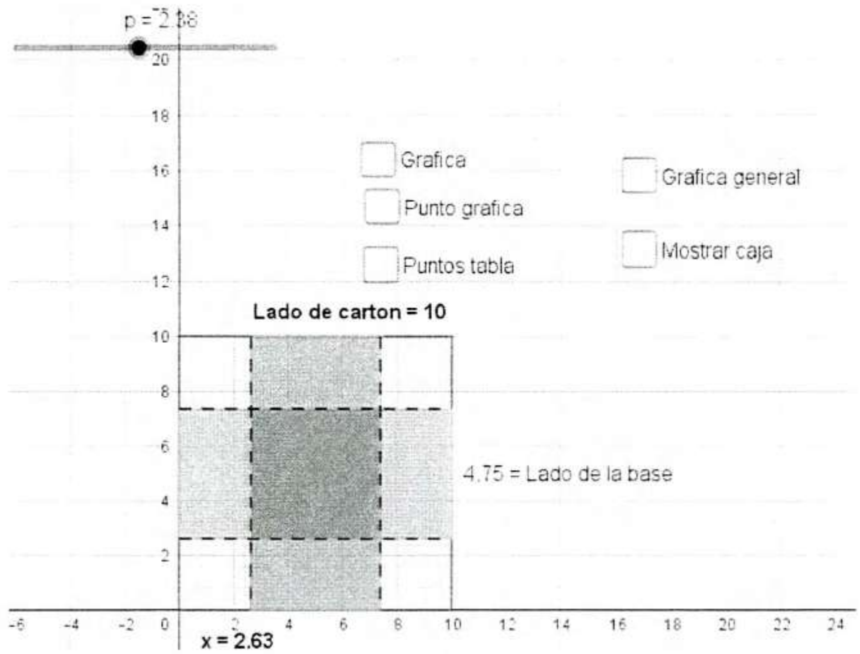


Figura 3.5

Actividad 3

Con una lámina cuadrada de 10 cm de lado se quiere construir una caja de base cuadrada sin tapa. recortando cuadrados en las esquinas de igual tamaño. estas formaran unas cejas las cuales se doblarán con el fin de formar los lados de la caja. ¿Cuál debe ser el lado del cuadrado cortado para que el volumen de la caja resultante sea el máximo?

1. Abre el archivo caja cuadrada. mueve el deslizador marcado con el punto "p". si la longitud del cuadrado cortado cambia ¿el volumen también va a cambiar? Justifica tu respuesta.

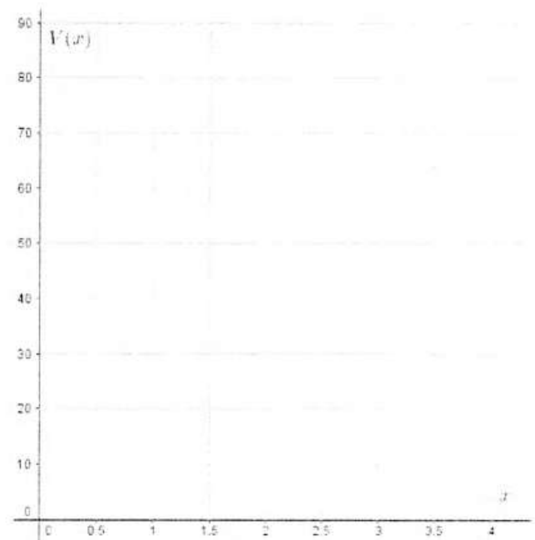
2. Si cortamos cuadrados cuyos lados midan 2 cm ¿Cuál será el volumen de la caja? Activa la casilla "Mostrar caja.^{en} el archivo caja cuadrada.

3. Si al lado del cuadrado cortado le llamamos x ¿Cuánto medirá el lado del cuadrado de la base? y ¿cuánto medira el área de la base en dependencia de x?

4. Escribe una expresión algebraica para encontrar el volumen en dependencia de x, a la cual llamaremos $V(x)$.

5. ¿Qué volumen tendrá la caja si la longitud x de los cuadrados que se recortan son 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5? Escribe tus resultados en la siguiente tabla y grafícalos. Después de esto activa las casillas "Puntos tablaz "Gráfica"para comparar resultados.

Longitud x	Volumen $V(x)$



6. Donde se obtuvo mayor volumen en los puntos de la pregunta anterior.

7. Si hacemos un corte de 6 cm de longitud ¿Qué volumen tendría la caja?

Nota: Activa la casilla "Punto Gráficaz desactiva "Puntos tabla", mueve el deslizador para contestar las siguientes preguntas.

8. ¿Cuáles son los valores que puede tomar x?

9. ¿Cuáles son los valores que puede tomar $V(x)$?

10. ¿Cuáles son los valores en donde la función es creciente?

11. ¿Cuáles son los valores en donde la función es decreciente?

12. ¿Cómo es su concavidad?

13. ¿Cuál es el valor de x que se aproxima mejor al volumen máximo?

14. Activa la casilla función general. mueve los deslizadores que corresponden a cada una de los coeficientes de una función cúbica y anota tres características que observes.

3.5.4. Actividad 4 Presión atmosférica

Objetivo de la actividad 4

En esta actividad analizaremos una función exponencial y sus características, mediante una situación problema, la cual es sobre la presión atmosférica al nivel del mar, se inicia con la realización de una tabla donde se podrán comparar las diferentes presiones dependiendo de la altura en la cual nos encontremos.

Después se analizan las operaciones que realizamos para calcular los datos de la tabla, para así poder llegar a una expresión algebraica que nos modele el comportamiento de la presión a cualquier altura que nos encontremos.

Después comparamos 3 distintas funciones la cual una de ellas es la analizada en el problema y hacemos una tabulación para ver qué resultados nos arrojan para así poder graficar cada una ellas, después viene identificar cuál gráfica corresponde a cada una de las funciones comparadas.

También analizamos con el software GeoGebra la gráfica y cómo se comporta en dependencia de la altura en que nos situemos, y así analizamos si es una función creciente o decreciente su concavidad y la interpretación que tienen las variables en sus diferentes puntos.

De inicio el archivo GeoGebra tiene la siguiente apariencia:

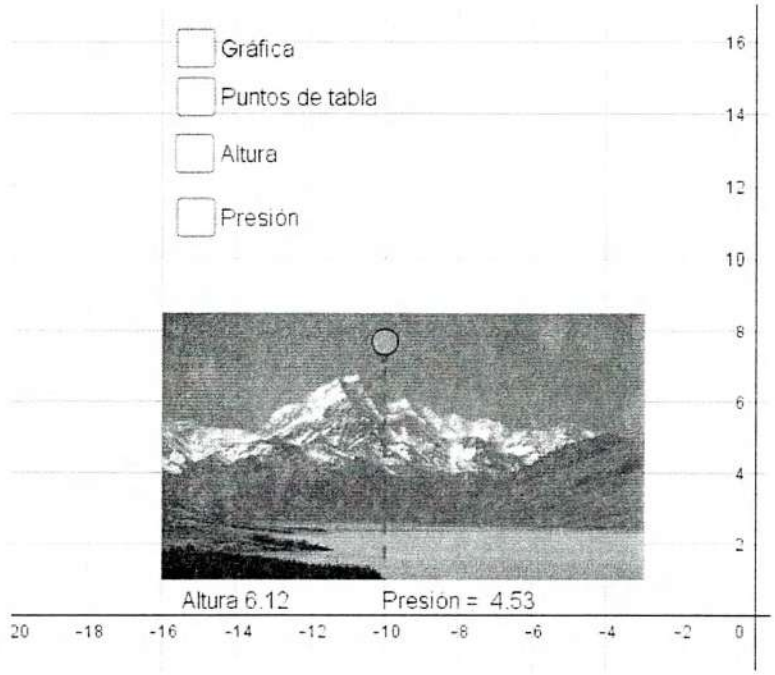


Figura 3.6

Actividad 4

Los científicos han estable que la presión atmosférica al nivel del mar es $14.7\frac{lb}{pulg^2}$ y la presión se reduce a la mitad cada 3.6 millas sobre el nivel del mar. Esta regla para la presión atmosférica se cumple para altitudes de hasta 50 millas sobre el nivel del mar.

1. Complete la siguiente tabla. donde m es la altura en millas expresada 3.6 millas cada aumento y p la presión atmosferica en la que se encuentra. Para $m = 0$ tenemos que $p = 14.7$

Millas sobre nivel del mar (Cada 3.6 millas)	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10
Presión Atmosférica	P=14.7										

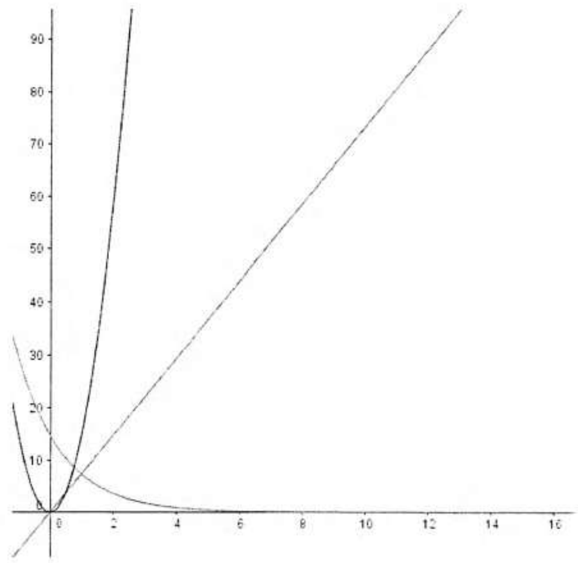
2. Escribe las operaciones que realizaste para calcular la presión dependiendo de las millas.

$m = 0$		
$m = 1$	14.7(0.5)	7.35
$m = 2$		
$m = 3$		
$m = 4$		
$m = 5$		
$m = 6$		
$m = 7$		
$m = 8$		
$m = 9$		
$m = 10$		

3. En la siguiente tabla se muestran 3 expresiones de funciones distintas. completa la tabla y contesto ¿ Cuál de ellas representa mejor el cambio de presión dependiendo de la altura?

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x) = 14.7(0.5)x$									
$g(x) = 14.7(x^{0.5})$									
$h(x) = 14.7(0.5)^x$									

4. En la siguiente figura se muestran las gráficas correspondientes a las tabulaciones anteriores. etiqueta cada una de las curvas según su función $f(x), g(x), h(x)$.



5. ¿Cuál es la gráfica que mejor representa la presión atmosférica dependiendo de la altura? ¿Por qué?

6. Si la presión se redujera a una tercera parte cada 3.6 millas ¿Como sería la espresión algebraica?

7. ¿Es posible determinar la presión a 2.5 millas de altura? ¿Es posible determinar la presión a cualquier altura? Justifica tus respuestas.

8. ¿Cuál es la expresión algebraica a cualquier altura?

9. Manipulando el archivo Geogebra determine las siguientes preguntas ¿Cuáles son los valores que puede tomar x?

10. Con base en la gráfica de la función. determine a que altura aproximadamente se encuentra cuando la presión es de $4\frac{lb}{pulg^2}, 4.5\frac{lb}{pulg^2}, 10\frac{lb}{pulg^2}, 7\frac{lb}{pulg^2}$.

11. ¿Cómo se comporta la presión dependiendo de a que altura nos encontremos?

12. La función que representa la presión ¿es una función creciente o decreciente? ¿es una función cóncava?

13. ¿En qué punto la gráfica corta al eje Y? ¿Qué interpretación tiene esta intersección?

3.5.5. Actividad 5: Magnitud de un terremoto

Objetivo de la actividad 5

Actividad 5

En 1935, el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1984) definió la magnitud M de un terremoto como:

$$M = \log \frac{I}{S}$$

Donde I es la intensidad del terremoto, medida por la amplitud de la lectura de un sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto, y S es la intensidad de un terremoto estándar, cuya amplitud es 1 micrón 10^{-4}cm, la magnitud de un terremoto estándar es

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

Richter estudió numerosos terremotos que ocurrieron entre 1900 y 1950. El más grande tuvo una magnitud de 8.9 en la escala de Richter y el más pequeño, tuvo una magnitud 0. Esto corresponde a una relación de intensidad de 800.000.000 de modo que la escala de Richter da números más manejables para trabajar.

Por ejemplo, un terremoto de magnitud 6 es diez veces más fuerte que uno de magnitud 5, y un terremoto de magnitud 6 es 100 veces más grande que un terremoto de magnitud 4.

Ahora consideremos el terremoto de 1906 en San Francisco que tuvo una magnitud estimada de 8.3 en la escala de Richter. En el mismo año ocurrió un poderoso terremoto en la frontera entre Colombia y Ecuador, que fue 4 veces más intenso, ¿Cuál fue la magnitud del temblor entre Colombia y Ecuador en la escala de Richter?

1. Si relacionamos las intensidades entre los dos terremotos ¿Cómo quedaría una expresión algebraica que los relacione?

2. Sustituyendo estos valores de intensidad en la función de calcular la magnitud del terremoto.

3. Si un terremoto tuvo una magnitud de 7.1 en la escala de Richter ¿Cuántas veces más intenso fue el temblor de 1906?

Definición 1. *Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La función logarítmica con base a, denotada por $\log_a$, esta definida por*

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$$

Por lo tanto, $\log_a x$ es el exponente al cual la base a debe de ser elevado para obtener x.

Definición 2. *El logaritmo con base e se denomina logaritmo natural y se denota con* ln :

$$\ln x = \log_e x$$

$$\ln x = y \leftrightarrow e^y = x$$

Dada las definiciones anteriores tenemos el siguiente teorema que enuncia algunas de las propiedades de los logaritmos.

Teorema 1.

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^x = x$
4. $a^{\log_a x} = x$
5. $\ln 1 = 0$
6. $\ln e = 1$
7. $\ln e^x = x$
8. $e^{\ln x} = x$

4. Explica la razón de porqué se cumplen estas propiedades dada su definición.

3.5.6. Actividad 6: Rueda de la fortuna (primera parte)

Objetivo de la actividad 6

En esta actividad, haremos surgir el modelo de la función seno con el análisis del movimiento de una canastilla en una rueda de la fortuna que gira con una rapidez constante sobre una circunferencia de radio 4 cuyo centro está en el origen del sistema de coordenadas cartesianas o plano XY.

Más específicamente analizaremos el movimiento de una partícula sobre una circunferencia, modelando el problema con ayuda del software dinámico GeoGebra para una mejor comprensión y visualización de dicha actividad.

Comenzamos dando algunos datos que analizaremos a lo largo de la actividad y viendo cómo es su recorrido mientras transcurre el tiempo, cómo avanza o cómo se desplaza.

Analizamos la situación que sucede en el tiempo transcurrido, cuando crece y cuando decrece su posición respecto al transcurrir determinados tiempos, para observar su comportamiento y así poder decir que es una variación periódica.

Se realizará en base a sus posiciones conforme el tiempo transcurre, para así poder determinar una gráfica de cómo va cambiando su posición, previo a eso se debe analizarse ciertas cuestiones que nos llevarán a poder definir que cierta variación es la función seno.

Por último, se realiza un análisis de una función seno con todos los parámetros que pueden estar presentes en algunas situaciones, para ver los comportamientos de la función al hacer variar sus parámetros.

Al abrir el archivo GeoGebra correspondiente, esta actividad tiene la siguiente apariencia de entrada, en la cual se observan que están las casillas que a lo largo de la actividad se activarán para así poder observar la gráfica, función, puntos etc., que se analizan en esta situación problema.

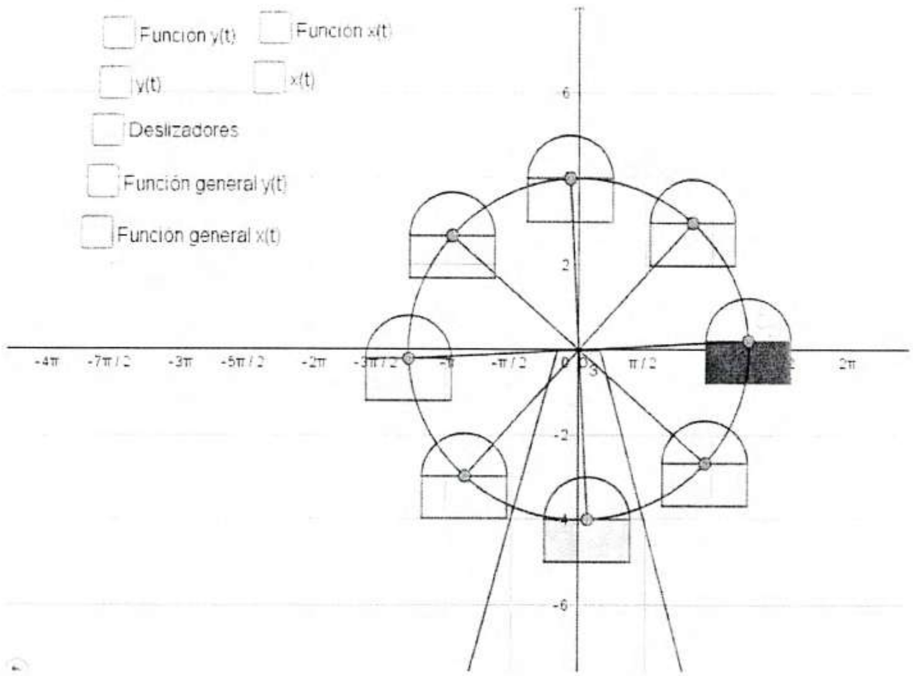
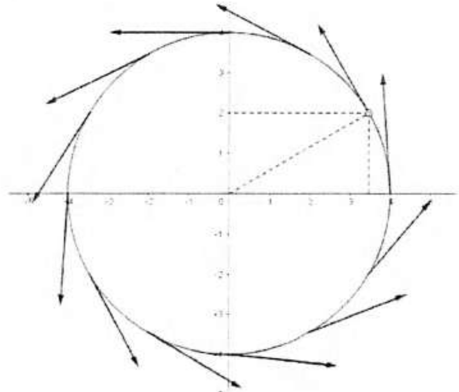


Figura 3.7

Actividad 6

Una canastilla de una rueda de la fortuna se mueve con una rapidez constante sobre una circunferencia de radio 4. Su movimiento se realiza en el sentido contrario a las manecillas del reloj. En la siguiente figura se muestra la situación.



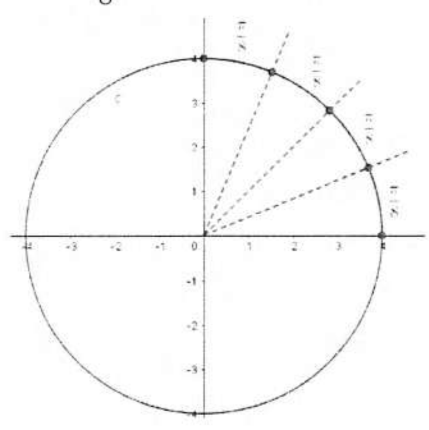
Observamos que. a medida que el tiempo transcurre. las coordenadas x, y que señalan la posición de la canastilla están cambiando. esto lo representaremos como

$$x = x(t) \text{ y } y = y(t)$$

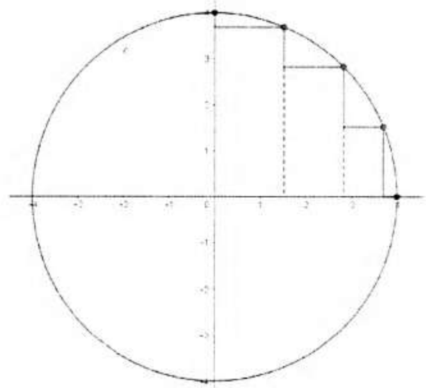
Lo que nos expresa que. tanto la variable x como la variable y son funciones en dependencia del tiempo t.

Ahora consideremos en esta situación que se empieza a medir el tiempo ($t = 0$) al pasar la canastilla por el punto $(4, 0)$. además el tiempo transcurrido al pasar la canastillas de este punto $(4, 0)$ al punto $(-4, 0)$ es de π segundos.

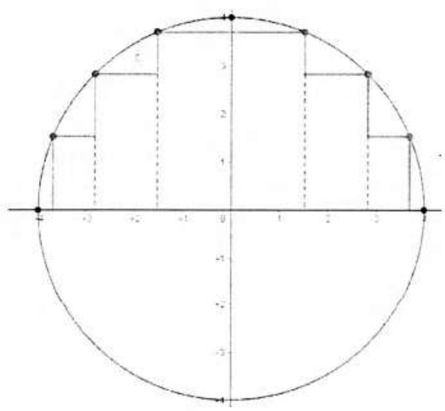
1. ¿Cuántas partea de la circunferencia recorrerá la canastilla al transcurrir el tiempo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ segundos?
2. ¿Cuál es la posición de la canastilla en $\frac{\pi}{2}$ segundos?
3. ¿La ordenada $y(t)$ están creciendo o decreciendo?
4. ¿Qué significa que la canastilla se mueva a una velocidad constante?
5. Si dividimos el intervalo de tiempo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ segundos en 4 subintervalos de tiempos iguales. estos tendrán longitud $\frac{\pi}{8}$ segundos. Como se muestra en la siguiente figura.



Ahora observamos en la siguiente figura los segmentos verticales. estos representan la cantidad que ha aumentado o disminuido y al pasar de una posición a otra. ¿Van aumentando o disminuyendo? ¿Cada vez lo hacen más rápido o lento?



6. Al transcurrir el tiempo de los $\frac{\pi}{2}$ a los π segundos, la canastilla recorre la cuarta parte del círculo que corresponde al segundo cuadrante. Si hacemos el mismo análisis anterior, es decir, partir ese cuadrante en 4 como se muestra en la siguiente figura, los segmentos correspondientes a y ¿Van aumentando o disminuyendo? ¿Lo hacen cada vez más rápido o cada vez más lento y?



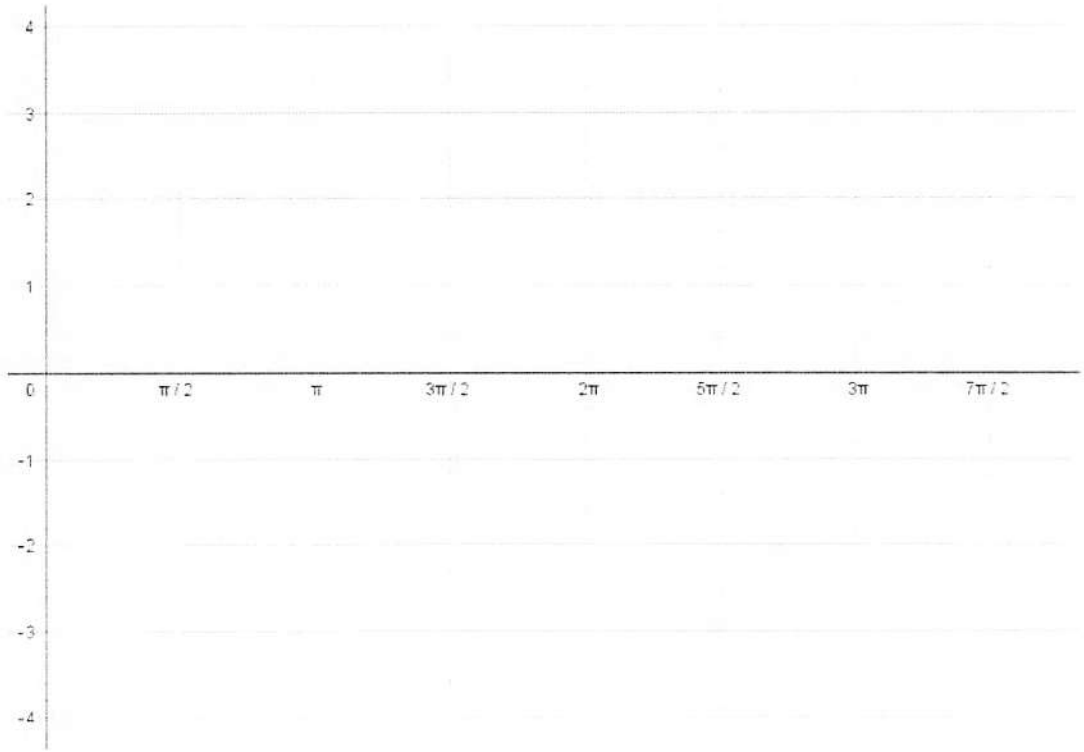
7. ¿Cuál es la información cualitativa y cuantitativa obtenida hasta este momento?

8. Has un dibujo, gráfica, etc. con esa información obtenida.

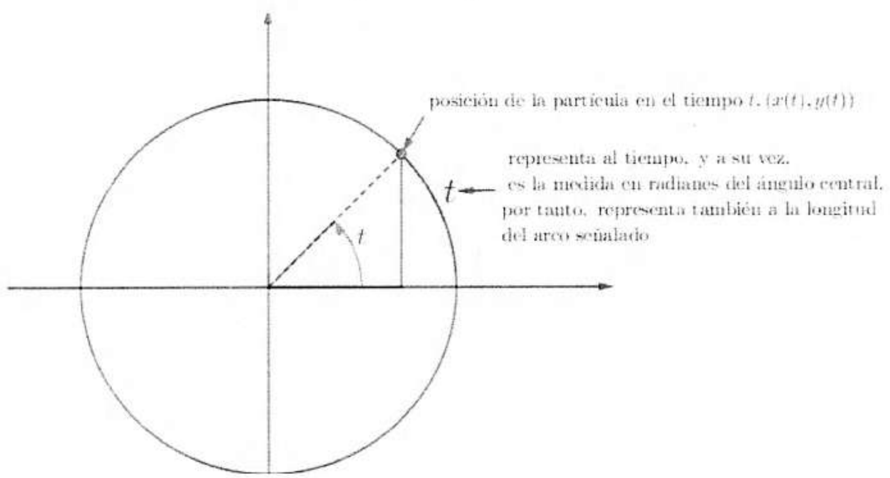
9. Haz un análisis análogo al que realizamos en las preguntas 5-7 pero ahora con los intervalos de tiempo de π a $\frac{3\pi}{2}$ y de $\frac{3\pi}{e}$ a los 2π.

10. Del intervalo 2π a $\frac{5\pi}{2}$ ¿Cómo es el comportamiento de y?

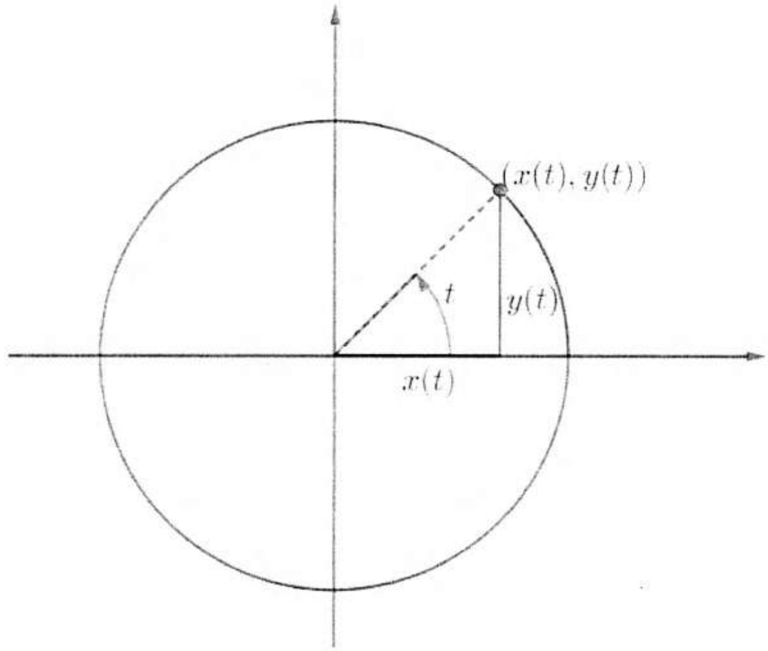
11. Con la información obtenida haz la gráfica correspondiente al movimiento de la canastilla dependiendo del tiempo t.



Con esta información nosotros podemos asegurar que la medida del tiempo t segundos, coincide numéricamente con la medida de la longitud del arco que recorre la canastilla sobre la circunferencia de radio 4. Tomemos por ejemplo, un valor de t con $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ilustrando lo que hemos obtenido hasta ahora en la siguiente figura:



Si trazamos el triángulo rectángulo que se determina con esa posición, y recordamos nuestro conocimiento en trigonometría, podemos observar que las coordenadas de la posición de la canastilla como catetos en el triángulo rectángulo con ángulo interior t, tal y como se muestra en la siguiente figura. De este modo podemos calcular a la magnitud y ¿Cuál sería la expresión algebraica que determina la posición de y?



3.5.7. Actividad 7: Rueda de la fortuna (segunda parte)

Objetivo de la actividad 7

En esta actividad, haremos surgir el modelo de la función coseno con el análisis del movimiento de una canastilla en una rueda de la fortuna que gira con una rapidez constante sobre una circunferencia de radio 4 cuyo centro está en el origen del sistema de coordenadas cartesianas o plano XY.

Más específicamente analizaremos el movimiento de una partícula sobre una circunferencia, modelando el problema con ayuda del software dinámico GeoGebra para una mejor comprensión y visualización de dicha actividad.

Comenzamos dando algunos datos que analizaremos a lo largo de la actividad y viendo como es su recorrido mientras transcurre el tiempo, cómo avanza o cómo se desplaza.

Analizamos la situación que sucede en determinados tiempos cuando crece y cuando decrece su posición respecto al tiempo transcurrido, para observar su comportamiento y así poder decir que es una variación periódica.

Se realizara con base en sus posiciones conforme el tiempo transcurre, para así poder determinar una gráfica de cómo va cambiando su posición, previo a eso se deben analizarse ciertas cuestiones que nos llevarán a poder definir que cierta variación es la función coseno.

Por último se realiza un análisis de una función coseno con todos los parámetros que pueden estar presentes en algunas situaciones para ver los comportamientos de la función al hacer variar sus parámetros.

Al abrir el archivo GeoGebra correspondiente, esta actividad tiene la siguiente apariencia de entrada, en la cual se observa que están las casillas que a lo largo de la actividad se activarán para así poder observar la gráfica, función, puntos etc., que se analizan en esta situación problema.

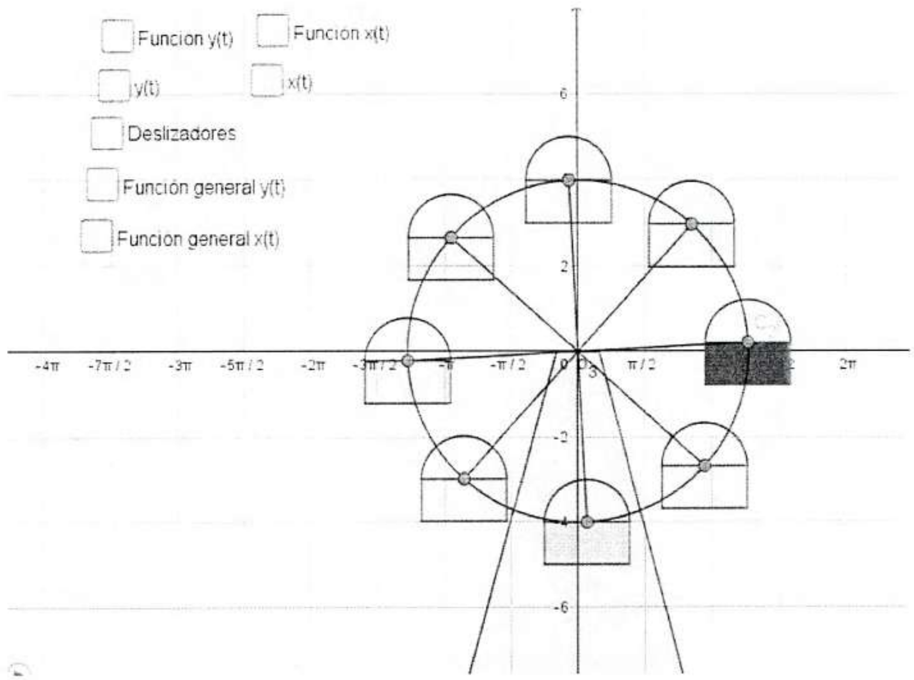
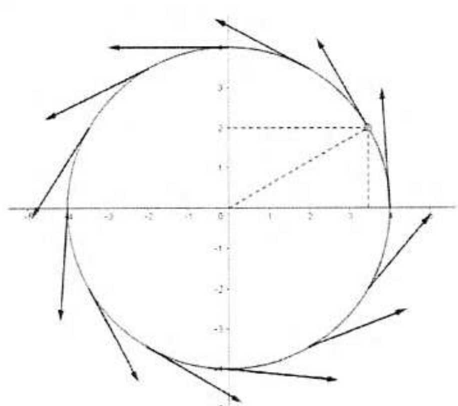


Figura 3.8

Actividad 7

Una canastilla de una rueda de la fortuna se mueve con una rapidez constante sobre una circunferencia de radio 4. Su movimiento se realiza en el sentido contrario a las manecillas del reloj. En la siguiente figura se muestra la situación.



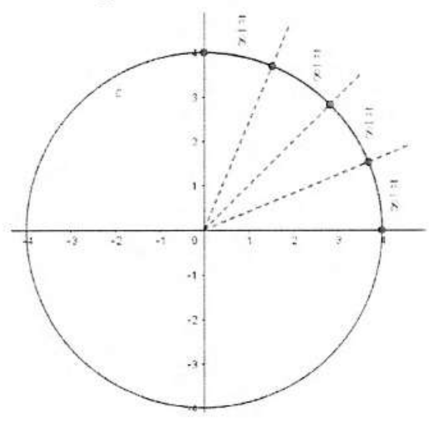
Observamos que, a medida que el tiempo transcurre, las coordenadas x, y que señalan la posición de la canastilla están cambiando, esto lo representaremos como

$$x = x(t) \text{ y } y = y(t)$$

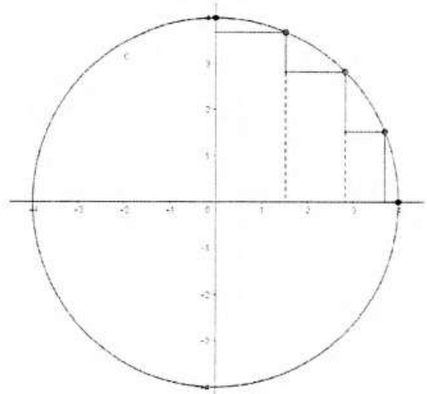
Lo que nos expresa que, tanto la variable x como la variable y son funciones en dependencia del tiempo t.

Ahora consideremos en esta situación que se empieza a medir el tiempo ($t = 0$) al pasar la canastilla por el punto $(4, 0)$, además el tiempo transcurrido al pasar la canastillas de este punto $(4, 0)$ al punto $(-4, 0)$ es de π segundos.

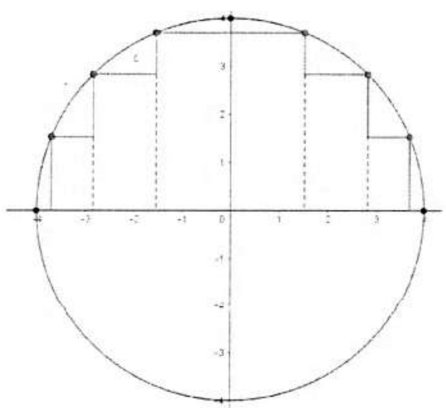
1. ¿Cuántas partea de la circunferencia recorrerá la canastilla al transcurrir el tiempo de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$ segundos?
2. ¿Cuál es la posición de la canastilla en $\dfrac{\pi}{2}$ segundos?
3. ¿La abscisa $x(t)$ está creciendo o decreciendo?
4. ¿Qué significa que la canastilla se mueva a una velocidad constante?
5. Si dividimos el intervalo de tiempo de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$ segundos en 4 subintervalos de tiempos iguales, estos tendrán longitud $\dfrac{\pi}{8}$ segundos. Como se muestra en la siguiente figura.



Ahora observamos en la siguiente figura los segmentos horizontales, estos representan la cantidad que ha aumentado o disminuido x al pasar de una posición a otra. ¿Van aumentando o disminuyendo? ¿Cada vez lo hacen más rápido o lento?



6. Al transcurrir el tiempo de los $\frac{\pi}{2}$ a los π segundos, la canastilla recorre la cuarta parte del círculo que corresponde al segundo cuadrante. Si hacemos el mismo análisis anterior, es decir, partir ese cuadrante en 4 como se muestra en la siguiente figura, los segmentos correspondientes a x ¿Van aumentando o disminuyendo? ¿Lo hacen cada vez más rápido o cada vez más lento?



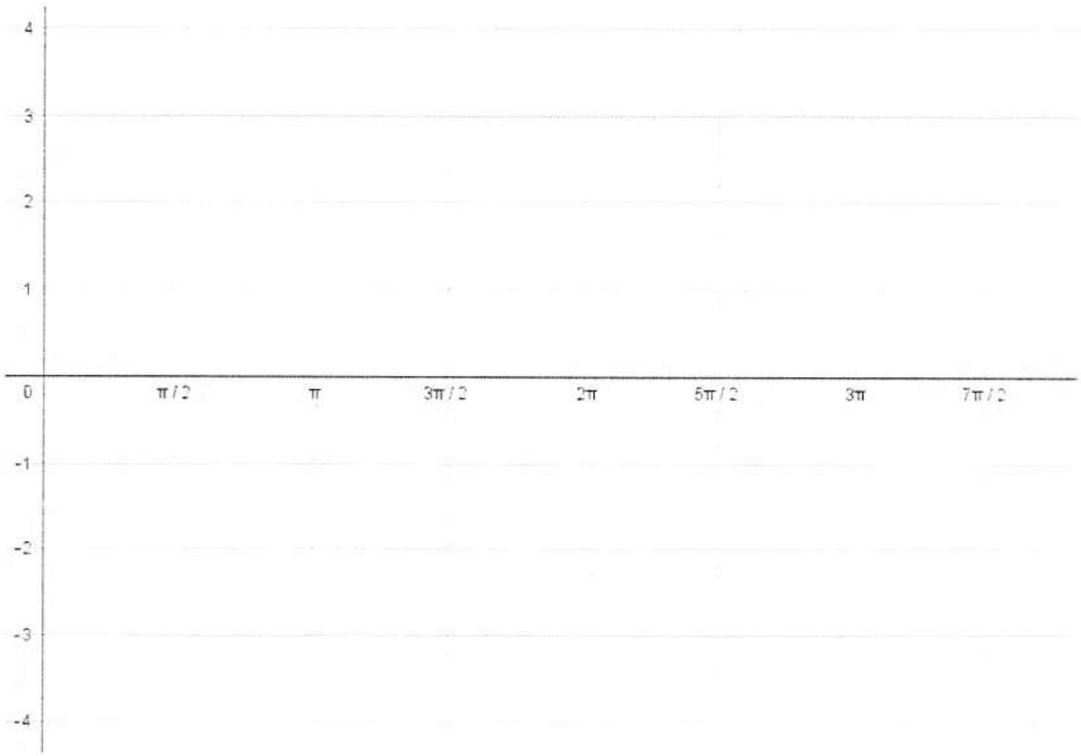
7. ¿Cuál es la información cualitativa y cuantitativa obtenida hasta este momento?

8. Has un dibujo, gráfica, etc, con esa información obtenida.

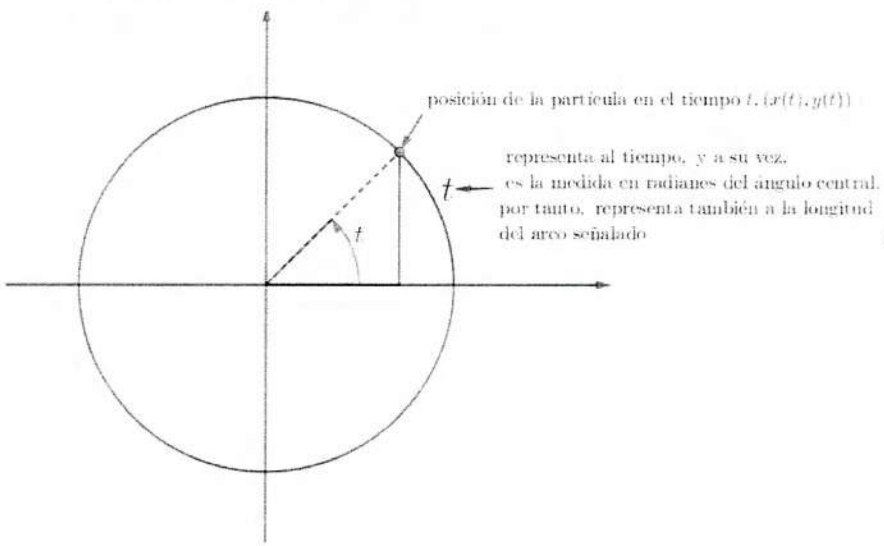
9. Haz un análisis análogo al que realizamos en las preguntas 5-7 pero ahora con los intervalos de tiempo de π a $\frac{3\pi}{2}$ y de $\frac{3\pi}{e}$ a los 2π.

10. Del intervalo 2π a $\frac{5\pi}{2}$ ¿Cómo es el comportamiento de x?

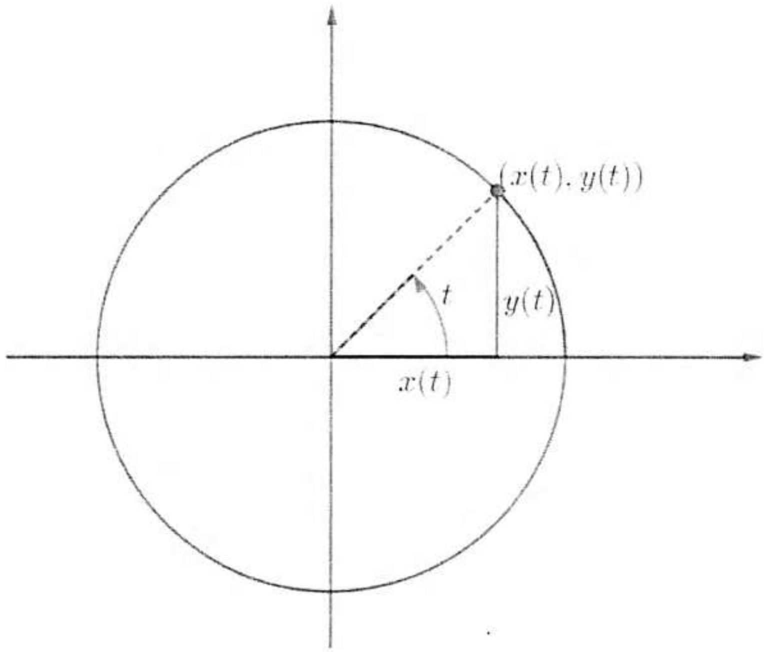
11. Con la información obtenida haz la gráfica correspondiente al movimiento de la canastilla dependiendo del tiempo t.



Con esta información nosotros podemos asegurar que la medida del tiempo t segundos, coincide numéricamente con la medida de la longitud del arco que recorre la canastilla sobre la circunferencia de radio 4. Tomemos por ejemplo, un valor de t con $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ilustrando lo que hemos obtenido hasta ahora en la siguiente figura:



Si trazamos el triángulo rectángulo que se determina con esa posición, y recordamos nuestro conocimiento en trigonometría, podemos observar que las coordenadas de la posición de la canastilla como catetos en el triángulo rectángulo con ángulo interior t, tal y como se muestra en la siguiente figura. De este modo podemos calcular a la magnitud x ¿Cuál sería la expresión algebraica que determina la posición de x?



Capítulo 4

Puesta en escena de la propuesta didáctica

4.1. Descripción general

En este capítulo hablaremos sobre los aspectos principales de la puesta en escena de todas las actividades didácticas diseñadas de nuestra propuesta. Se puso a prueba cada actividad con su respectivo archivo GeoGebra. cada una con una duración promedio de 2 horas. con un grupo de 8 estudiantes del quinto semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. se seleccionaron estos individuos por el hecho de que acaban de cursar el cuarto semestre. que es a donde este trabajo está dirigido. con el objetivo de identificar errores. cuestiones de redacción. así como del diseño de las actividades finalizando cada una de ellas con comentarios respecto a la actividad realizada y se les pedía que señalaran las interrogantes en las cuales tuvieron dificultades y el porqué de ellas.

Consideramos que al poner en escena nuestra propuesta didáctica podríamos obtener información sobre los siguientes aspectos:

- En qué medida se lograron los objetivos de las actividades. haciendo referencia a:
  - Modelaran las situaciones que se les presentaban. relacionaran los datos involucrados en éstas. así como de las magnitudes. y poder llegar a determinar los valores que resuelven los problemas planteados.
  - Los diferentes tipos de representaciones en las que se puede resolver. describir la situación planteada. con apoyo del material que se les proporcionó. así como también del archivo GeoGebra correspondiente a cada actividad.

- Los diseños de las hojas de trabajo, qué tan adecuados fueron éstos respecto a su redacción de las preguntas e instrucciones y a la relación con el archivo GeoGebra.
- Qué tan adecuados fueron las construcciones de los ambientes dinámicos credos con GeoGebra.

Como los estudiantes seleccionados para la puesta en escena de las actividades didácticas ya habían cursado la materia de matemáticas 4, esta puesta en escena no fue adecuada para rescatar lo correspondiente a los objetos matemáticos pretendidos, dado que eran objetos matemáticos que ya habían sido estudiados con anterioridad y ya le habían asignado un significado a cada uno. Sin embargo, obtuvimos información muy interesante sobre mejoras para el diseño de las actividades didácticas y del ambiente dinámico creado por el software GeoGebra, así como información sobre las deficiencias que presentan los estudiantes al estudiar y usar las matemáticas.

La puesta en escena de las actividades didácticas tuvo lugar en un aula bajo las siguientes condiciones:

- El grupo estuvo conformando por 8 estudiantes y el diseñador de las actividades. Se emprendieron los problemas diseñados:
    - Movimiento rectilíneo uniforme.
    - Cercado de un corral.
    - Volumen de una caja sin tapa.
    - Presión atmosférica.
    - Magnitud de un temblor.
    - Rueda de la fortuna (análisis 1).
    - Rueda de la fortuna (an álisis 2).
- Se contó con una computadora y un proyector. El diseñador de las actividades y conductor del proceso de estudio manipuló la computadora siguiendo las especificaciones de las actividades didácticas, así como de las sugerencias que realizaban los estudiantes en cada parte de la actividad.

- La puesta en escena estuvo conducida por el diseñador de las actividades. pero estuvo presente el profesor titular y en algunas ocasiones un profesor invitado. a quienes se les dio total de libertad de realizar intervenciones cuando lo consideraban necesario.
- Cada estudiante contó con el cuadernillo de trabajo referente a las actividades diseñadas. el cual contenía el enunciado del problema. instrucciones e interrogantes. las cuales fueron guías para la resolución de cada problema.
- Se dividió el grupo en dos equipos formados por cuatro personas cada uno. aunque la mayor parte del proceso fue en trabajo grupal. dado que sólo se contaba con una computadora para poder manipular así el archivo GeoGebra creando el ambiente dinámico. en este caso el diseñador formulaba preguntas relacionadas con el contexto del tema o con el cuadernillo de trabajo. mientras que los estudiantes argumentaban. debatían sobre las respuestas dadas. algunos de ellos pasaban al pizarrón para explicar su conjetura o punto de vista.
- En cada discusión grupal. se destinaban algunos minutos para que los estudiantes anotaran de manera individual sus propias conclusiones respecto al tema en discusión. En dos ocasiones. por falta de tiempo. se les dejó de tarea que terminaran sus conclusiones por escrito.

El proceso de estudio llevado a cabo. estuvo conformado de los siguientes momentos:

- Una introducción antes de empezar cada actividad con el objetivo de familiarizar a los estudiantes con el contexto del problema. buscando siempre la participación de ellos para llegar a determinar las condiciones y datos necesarios para así tener una mejor comprensión del problema.
- Manipulación de la construcción hecha en GeoGebra. la cual simula el problema planteado. con la finalidad de que observarán los posibles valores que ésta podría tomar en cada contexto.
- Trabajo en equipo,para determinar los posibles valores que nos llevarán a la resolución del problema. mediante estimaciones capturando los datos en tablas y graficando cada

valor obtenido, para después llegar a una expresión analítica que modelara el contexto en estudio.

- Identificar en la gráfica obtenida el punto correspondiente a la solución del problema planteado.
- Visualización numérica al mover un punto sobre la gráfica, con el objetivo de ver los valores en los cuales va aumentando o disminuyendo según sea el caso.

4.2. Aspesctos destacados

Al realizar la puesta en escena de las siete actividades didácticas con el grupo de 8 estudiantes, nos pudimos percatar que las situaciones problematicas elegidas fueron de un alto grado de interés para estos, puesto que se logró su total participación tanto para hacer nuevas propuestas, pasando al pizarrón exponiendo sus ideas de las situaciones planteadas para una mejor compresión del tema en discusión.

Observamos que los ambientes dinámicos creados con el software GeoGebra fueron de agrado, ya que mostraban admiración al ver cómo las situaciones problemáticas que les fueron planteadas se podían modelar dinámicamente, también mostraban más interés al tema de estudio, así como también fue una gran herramienta para comprobar algunas conjeturas que salieron en las discusiones de cada actividad didáctica y de una mejor comprensión de argumentos en debate.

También pudimos observar durante la puesta en escena de las actividades didácticas algunas dificultades que presentaban los estudiantes al tratar de construir la expresión analitica que modelara la situación problemática planteada, así como de algunas deficiencias sobre algunos significados, como el dominio y rango de una función, además de algunas interrogantes que resultaron ambiguas para la situación y también mostraron deficiencias en recordar propiedades que fueron útiles para llegar a la resolución del problema.

Durante la puesta en escena de nuestra propuesta didáctica pudimos observar que utilizando la construcción de un archivo en el software GeoGebra , el cual modelara la situación planteada en cada actividad didáctica, facilito la identificación de las magnitudes que intervenían en cada situación, así como de la dependencia entre las variables involucradas. También facilitó el observar el comportamiento de la función en estudio y así poder generar el modelo matemático que da solución a la situación problema de la que se estaba tratando.

Por otro lado, observamos que es de gran ayuda al momento de dar solución a un problema, el tratar de involucrar las diferentes formas de lenguaje para analizar y resolver problemas, como lo son expresión analítica, numéricamente, gráficamente y descripción verbal de la situación, pues eso involucra más al estudiante en conocer lo que está por construir, es decir diferentes objetos matemáticos emergentes, al ser manipulado el archivo GeoGebra observamos que tuvieron una mejor comprensión de lo que significa el objeto *variable*, así como del significado de *función*.

Al momento de hacer el análisis numérico y gráfico de cada actividad didáctica, surgieron objetos como: *función creciente o decreciente y concavidad.* Por otro lado se observó que gracias al ambiente dinámico creado para cada actividad se facilitó la visualización de algunas de las propiedades de cada función estudiada.

Los cambios que surgieron después de la puesta en escena, fueron incorporados al diseño final de cada actividad didáctica, con lo que se mejoró la comprensión de cada actividad para su desarrollo.

4.3. Modificaciones

Con base a lo observado durante la puesta en escena, consideramos sensato realizar algunas modificaciones en las actividades didácticas, tanto en el cuadernillo de trabajo como en los archivos GeoGebra, dichas modificaciones las describiremos enseguida.

4.3.1. Modificaciones en la Actividad 1 Movimiento rectilíneo uniforme

En la pregunta 1 se pide la construcción de tres tablas numéricas y se decidio ponerles las tablas con los valores correspondientes a calcular.

Pregunta 3. se especificó que al momento de verificar deberían tomarse como base las tablas realizadas en la pregunta 1.

Pregunta 8. se preguntaba sobre el dominio y el rango de la función. así que se decidió cambiar la pregunta por cuáles son los valores que puede tomar cada una de las variables. ya que algunos no recordaban o no tenían claridad sobre el significado de dominio y rango.

Pregunta 11. se describió mejor la pregunta. agregándole que dieran un ejemplo de una situación que se modele como una variación lineal.

Pregunta 12. se agregó más descripción. al solicitar que escribieran una expresión algebraica en términos generales que modelara la situación del movimiento rectilíneo uniforme.

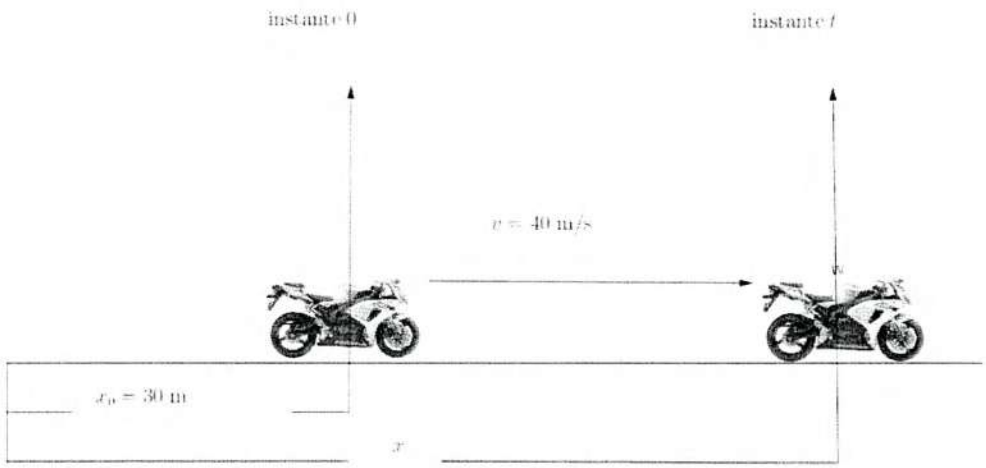
Pregunta 14. se describieron mejor las instrucciones conforme al llenado de la tabla y se proporcionaron varios ejemplos.

En el archivo GeoGebra se agregó una parte destinada a ver el comportamiento de la variación lineal en términos generales con la posibilidad de hacer variar los coeficientes y a la suma de una constante, y además de incluir instrucciones cuando se consideró necesario para que manipulen el archivo GeoGebra.

Ahora presentamos las modificaciones en el cuadernillo de trabajo:

Actividad 1 Movimiento rectilíneo uniforme

Un motociclista transita por una carretera recta. El motociclista viaja con una velocidad constante de 40 m/s. Supongamos que en el momento que empezamos a medir el tiempo. es decir en el instante $t = 0$. el motociclista se encuentra a 30 metros a la derecha de un punto de referencia O sobre la carretera, tal y como aparece indicado en la figura y llamémosle x a la posición correspondiente al tiempo t.

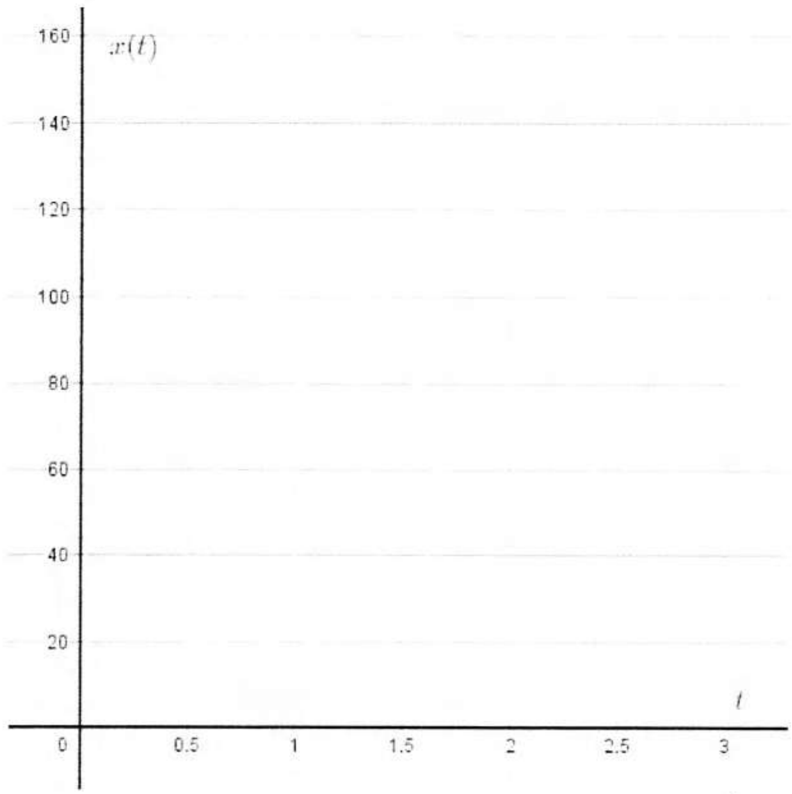


1. Complete las siguientes tablas numéricas que relacionen valores del tiempo con los correspondientes valores de la posición (distancia recorrida). luego grafique los puntos obtenidos.

Tiempo t *(segundos)*	Posición x *(metros)*
0	30
1	
2	
3	
4	
5	

Tiempo t *(segundos)*	Posición x *(metros)*
0	30
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	

Tiempo t *(segundos)*	Posición x *(metros)*
o	30
.25	
.5	
.75	
1	
1.25	



Nota. Abra el archivo GeoGebra con nombre MRU, activa la casilla posición en la recta y después mueve el deslizador referente al tiempo.

2. ¿Qué nos dice el hecho de tener una velocidad constante de $40\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

3. Verificar que en las 3 tablas elaboradas en la pregunta 1, se cumple la velocidad constante, calculando el cambio de posición entre el cambio del tiempo.

4. Interpretar los datos que hemos obtenido en las tablas, es decir,

   a) El valor correspondiente al tiempo $t = 1$.

   b) La posición 130 correspondiente al tiempo $t = 2.5$.

   Esta última expresión se obtiene:

$$130\text{m} = 30\text{m} + (40)(2.5)\text{m}$$

¿Qué representa el 40 y el 2.5?

5. Determine una fórmula algebraica. en la cual exprese la relación que guardan la posición y el tiempo. llamémosle $x(t)$ donde $x(t)$ representa la posición del motociclista correspondiente al tiempo t.Después active la casilla expresión algebraica y compare sus resultados.

6. Determine lo siguiente:

    a) La posición en el tiempo $t = 25$ segundos.

    b) La posición en el tiempo $t = 19$ segundos.

    c) Si la posición del motociclista es 550 metros ¿Cuánto transcurrió?

    Active la casilla distancia y mueva el deslizador del tiempo para comparar sus resultados.

7. Trace la gráfica de la función $x(t)$. Luego active la casilla Gráfica y compare sus resultados.

8. Determine cuáles son los valores que puede tomar $x(t)$ y cuáles son los valores que puede tomar t.

9. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta?

10. Esta función es creciente o decreciente. Justifique su respuesta.

11. Dé un ejemplo. de alguna situación en la vida cotidiana que se modele como una variación lineal.

12. Escriba en términos generales una expresión algebraica de una función que modele cualquier situación problemática del movimiento rectilíneo uniforme.

13. ¿Cuál sería la pendiente de la expresión que obtuvo en la pregunta anterior?

14. Con ayuda de la expresión algebraica que obtuvo. completa la siguiente tabla para poder observar el comportamiento cuando su pendiente cambia:

m	Signo	Información cualitativa sobre y	Información cuantitativa sobre y
4	+	crece	$x(t)$ crece 4 por 1 de t
2			
1			
1/2			
1/4			
0		estable	$x(t)$ mantiene el mismo valor
-1/4			
-1/2			
-1			
-2	-	decrece	$x(t)$ decrece 2 por 1 de t
-4			

15. Active la casilla función general y desactive todas las demás. observe qué pasa al mover los dezlizadores y mencione 3 características que tienen las funciones lineales.

4.3.2. Modificaciones de la Actividad 2 Cercado de un terreno

La pregunta 2 se cambió por la pregunta 3 y la pregunta 3 se cambió por la 2.

En la pregunta 9 cambiamos la pregunta sobre el dominio y rango de la función. solicitando la escritura de los valores que puede tomar la variable x y cuales valores que toma $A(x)$.

En la pregunta 10. se describió con más claridad cómo obtener los máximos y mínimos de una función cuadrática.

Se agregó una última pregunta en donde se piden que den 3 características de la función cuadrática con base en un análisis con el archivo GeoGebra donde se manipula una función en general. Por otro lado en la mayoría de las preguntas se hicieron cambios referentes a una mejora en las instrucciones para que sea más comprensible su interacción a través del cuadernillo de trabajo y al archivo GeoGebra.

En el archivo GeoGebra se agregó una función cuadrática en forma general con la posibilidad de mover las constantes y apreciar los comportamientos a través de su gráfica. Ahora presentaremos el cuadernillo de trabajo con sus respectivas modificaciones.

Actividad 2 Cercado de un terreno

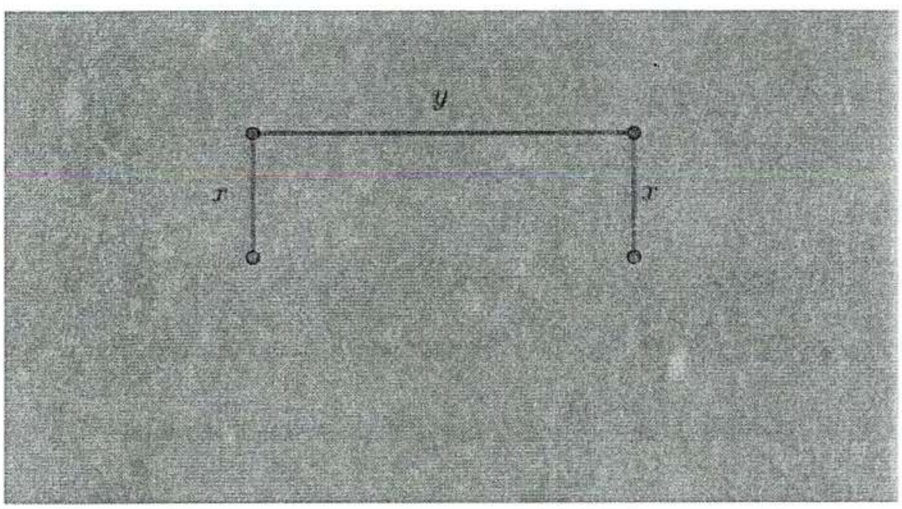
Un granjero tiene 2400 metros de material y quiere construir un corral para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesite corral a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

1. Haga 3 bosquejos en los cuales se muestre el río y el área rectangular cercada con diferentes diferentes dimensiones.

2. Calcule el área de los bosquejos que realizó en la pregunta anterior.

3. ¿Qué puede decir de las áreas en los campos?

4. Si al lado paralelo al río le llamamos "y", y a los otros lados "x", tal como se muestra en la figura. Exprese de forma algebraica la longitud del cerco.

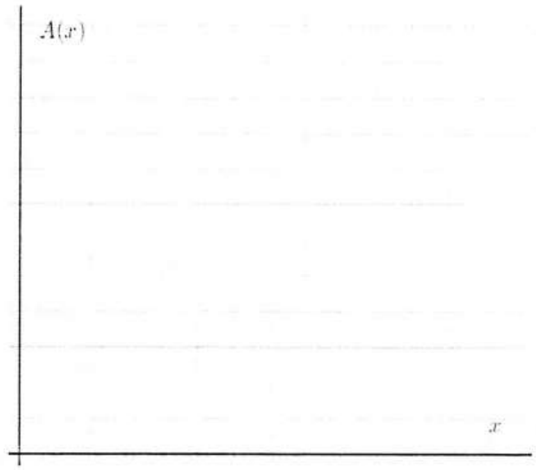


5. ¿Cómo quedaría la expresión algebraica para calcular la longitud del lado "y" en términos de la variable "x"?

6. Encuentre una expresión algebraica para el área $A(x)$ del terreno cercado en términos de la variable "x". ¿Cuál cree que sería la gráfica de esta expresión?

7. Llene la siguiente tabla con la finalidad de acercarnos a encontrar el lado "x" que permita encontrar el área mayor. Grafique los puntos obtenidos. Después active la casilla puntos de la gráfica y compare sus resultados.

Longitud x	área del terreno $A(x)$



8. Active la casilla área y mueva el deslizador a ¿Qué observa con el valor del área rectangular a través de los diferentes valores de x?

9. Determine cuáles son los valores que puede tomar x y cuales valores toma $A(x)$.

10. Active la casilla gráfica y estime en qué punto se encuentra el área máxima. Basándose en los resultados que conoce de Geometría Analítica sobre los vértices de una parábola, encuentre el área máxima. Nos referimos al siguiente resultado:

    Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática, entonces el vértice de la parábola de la función cuadrática se encuentra en:

    $$x = -\frac{b}{2a}$$

    Tomando en cuenta los casos en que $a > 0$ y $a < 0$, ¿cuándo se obtiene un máximo y cuándo un mínimo?

11. Active la casilla punto sobre la gráfica y conteste. Si x aumenta su valor después del valor que da el área máxima, ¿Qué pasa con los valores de $A(x)$?

12. Si x disminuye su valor después del valor que da el área máxima. ¿Qué pasa con los valores de $A(x)$?

13. ¿En qué intervalo de los valores que toma x la función es creciente? y ¿cuándo es decreciente?

14. ¿Cómo es la concavidad de la función $A(x)$?

15. En el archivo GeoGebra en el panel de vista active vista gráfica 2, aparecerán unos deslizadores que son las constantes en una función muevelos y observe qué pasa con la gráfica. Luego anote tres características que haya notado de la función cuadrática.

4.3.3. Modificaciones de la Actividad 3 Volumen de una caja sin tapa

No hay modificaciones. Solo se agregó una pregunta más la cual es anotar 3 características de la variación cúbica, con base a lo observado en el archivo GeoGebra cuando hacen variar los coeficientes de la función general.

Actividad 3 Volumen de una caja

Con una lamina cuadrada de 10 cm de lado se quiere construir una caja de base cuadrada sin tapa. recortando cuadrados en las esquinas de igual tamaño. éstas formarán unas cejas las cuales se doblarán con el fin de formar los lados de la caja. ¿Cuál debe ser el lado del cuadrado cortado para que el volumen de la caja resultante sea el máximo?

1. Abra el archivo caja cuadrada, mueva el deslizador marcado con el punto "p", si la longitud del cuadrado cortado cambia ¿el volumen también va a cambiar? Justifique tu respuesta.

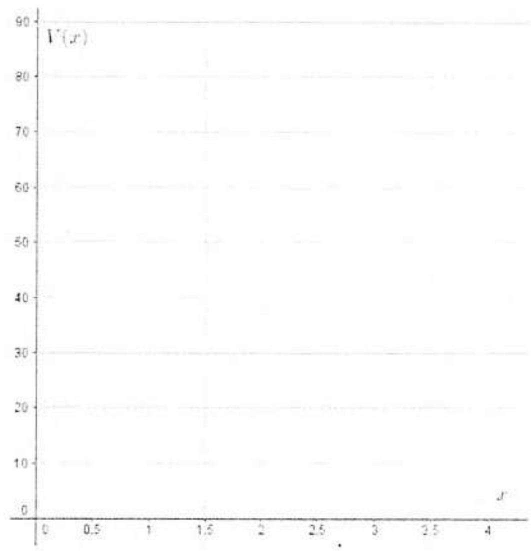
2. Si cortamos cuadrados cuyos lados midan 2 cm ¿Cuál será el volumen de la caja? Active la casilla "Mostrar caja" en el archivo caja cuadrada.

3. Si al lado del cuadrado cortado le llamamos x ¿Cuánto medirá el lado del cuadrado de la base? y ¿cuánto medira el área de la base en dependencia de x?

4. Escriba una expresión algebraica para encontrar el volumen en dependencia de x, a la cual llamaremos $V(x)$.

5. ¿Qué volumen tendrá la caja si la longitud x de los cuadrados que se recortan son 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5? Escriba sus resultados en la siguiente tabla y grafíquelos. Después de esto active las casillas "Puntos tabla" y "Gráfica" para comparar resultados.

Longitud x	Volumen $V(x)$



6. Dónde se obtuvo mayor volumen en los puntos de la pregunta anterior.

7. Si hacemos un corte de 6 cm de longitud ¿Qué volumen tendría la caja?

Nota: Active la casilla "Punto Gráfica" y desactiva "Puntos tabla", mueva el deslizador para contestar las siguientes preguntas.

8. ¿Cuáles son los valores que puede tomar x?

9. ¿Cuáles son los valores que puede tomar $V(x)$?

10. ¿Cuáles son los valores en donde la función es creciente?

11. ¿Cuáles son los valores en donde la función es decreciente?

12. ¿Cómo es su concavidad?

13. ¿Cuál es el valor de x que se aproxima mejor al volumen máximo?

14. Active la casilla función general, mueva los deslizadores que corresponden a cada una de las coeficientes de una función cúbica y anote tres características que observe.

4.3.4. Modificaciones de la Actividad 4 Presión atmosférica

En la pregunta 1, se especificó que cuando $m = 1$ esto equivale a decir que la altura es de 3.6 millas porque se les dificultaba poder determinar eso solo con palabras, aparte en el cuadernillo de trabajo se les agregó un espacio con los ejes coordenados para que realizaran la gráfica de la función.

Se agregó una pregunta más al final para observar los comportamientos de la función exponencial dada su definición y que mencionaran tres características de esta variación.

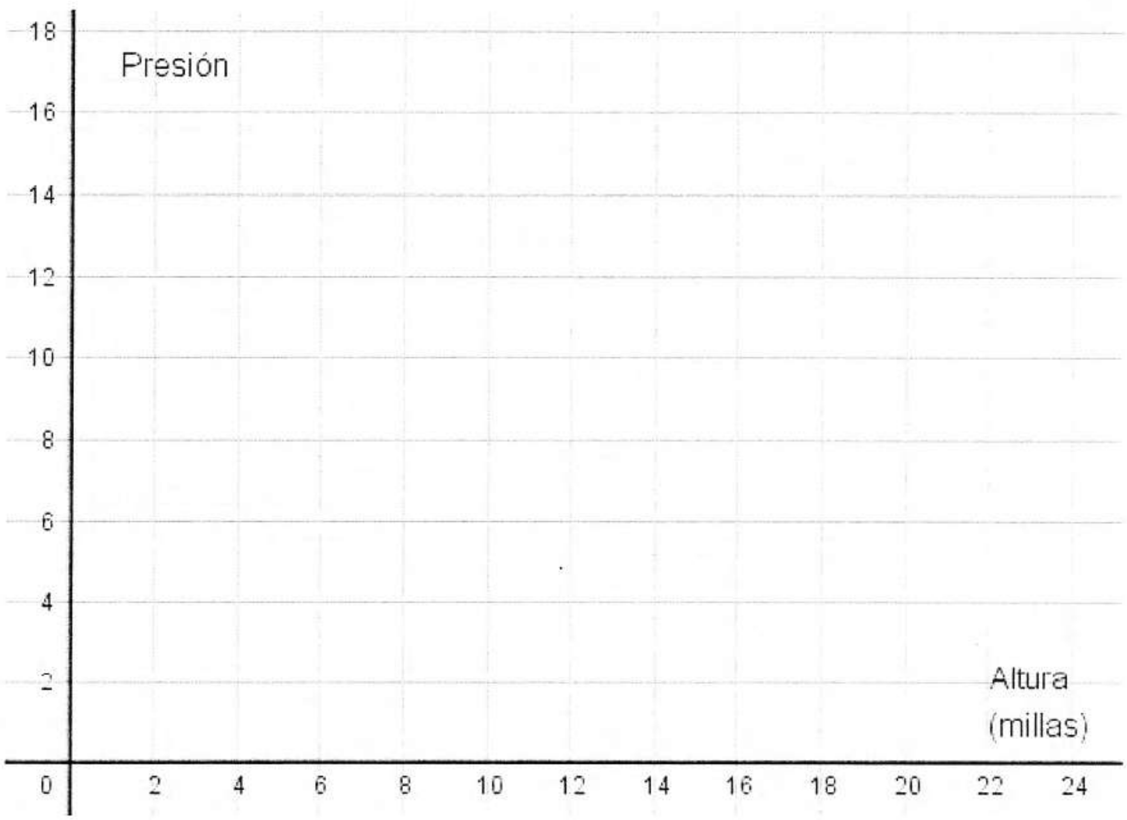
Además de modificaciones en varias preguntas, especificando cuando y como interactuar con el ambiente dinámico creado con GeoGebra.

Actividad 4 Presión atmosférica

Los científicos han establecido que la presión atmosférica al nivel del mar es $14.7\frac{lb}{pulg^2}$ y la presión se reduce a la mitad cada 3.6 millas sobre el nivel del mar. Esta regla para la presión atmosférica se cumple para altitudes de hasta 50 millas sobre el nivel del mar.

1. Complete la siguiente tabla, donde m es la altura en millas expresada 3.6 millas cada aumento, es decir $m = 1 = 3.6$ millas, y p la presión atmosferica en la que se encuentra. Para $m = 0$ tenemos que $p = 14.7$. Luego grafique los puntos obtenidos y active la casilla puntos tabla para comparar resultados.

Millas sobre nivel del mar (Cada 3.6 millas)	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10
Presión Atmosférica	P=14.7										



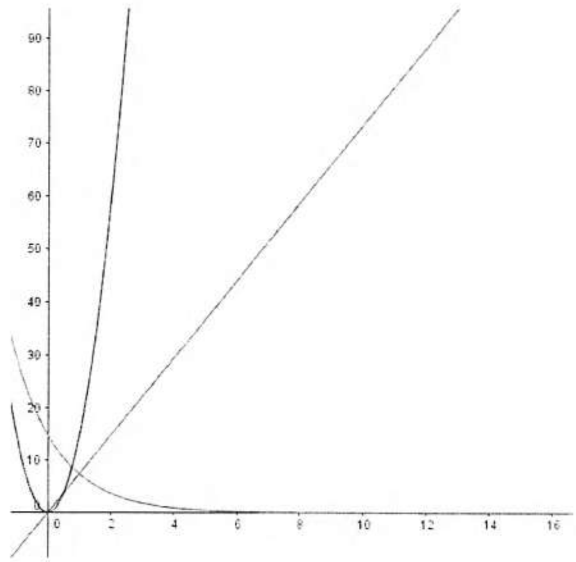
2. Escriba las operaciones que realizó para calcular la presión dependiendo de las millas.

$m = 0$		
$m = 1$	14.7(0.5)	7.35
$m = 2$		
$m = 3$		
$m = 4$		
$m = 5$		
$m = 6$		
$m = 7$		
$m = 8$		
$m = 9$		
$m = 10$		

3. En la siguiente tabla se muestran tres expresiones de funciones distintas. complete la tabla y conteste ¿ Cuál de ellas representa mejor el cambio de presión dependiendo de la altura?

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x) = 14.7(0.5)x$									
$g(x) = 14.7(x^{0.5})$									
$h(x) = 14.7(0.5)^x$									

4. En la siguiente figura se muestran las gráficas correspondientes a las tabulaciones anteriores, etiquete cada una de las curvas según su función $f(x), g(x), h(x)$.



5. ¿Cuál es la gráfica que mejor representa la presión atmosférica dependiendo de la altura? ¿Por qué? Active la casilla Gráfica.

6. Si la presión se redujera a una tercera parte cada 3.6 millas ¿Como sería la expresión algebraica?

7. ¿Es posible determinar la presión a 2.5 millas de altura? ¿Es posible determinar la presión a cualquier altura? Justifique sus respuestas.

8. ¿Cuál es la expresión algebraica a cualquier altura?

9. Active la casilla punto sobre la gráfica y manipulando el archivo Geogebra determine las siguientes preguntas ¿Cuáles son los valores que puede tomar x?

10. ¿Cuales son los valores que puede tomar $p(x)$?

11. Con base en la gráfica de la función, determine a qué altura aproximadamente se encuentra cuando la presión es de $4\frac{lb}{pulg^2}, 4.5\frac{lb}{pulg^2}, 10\frac{lb}{pulg^2}, 7\frac{lb}{pulg^2}$. Active las casillas Altura y Presión.

12. ¿Cómo se comporta la presión dependiendo de a que altura nos encontremos?

13. La función que representa la presión ¿es una función creciente o decreciente? ¿es una función cóncava?

14. ¿En qué punto la gráfica corta al eje Y? ¿Qué interpretación tiene esta intersección?

15. En la pestaña vista. active vista gráfica 2, después en vista gráfica 2, active la casilla gráfica 1 y mueva los deslizadores a_1, b, c y mencione tres características que observe al variar los coeficientes de la función. Realice lo mismo pero ahora desactive la casilla gráfica 1 y active la casilla gráfica 2.

16. Active las dos casillas gráfica 1 y gráfica 2. mueva los deslizadores y observe ¿Qué relación tienen ambas gráficas.?

4.3.5. Modificaciones de la Actividad 5

Actividad 5

En 1935, el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1984) definió la magnitud M de un terremoto como:

$$M = \log \frac{I}{S}$$

Donde I es la intensidad del terremoto, medida por la amplitud de la lectura de un sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto, y S es la intensidad de un terremoto estándar, cuya amplitud es 1 micrón 10^{-4}cm. la magnitud de un terremoto estándar es

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

Richter estudió numerosos terremotos que ocurrieron entre 1900 y 1950. El más grande tuvo una magnitud de 8.9 en la escala de Richter y el más pequeño. tuvo una magnitud 0. Esto corresponde a una relación de intensidad de 800.000.000 de modo que la escala de Richter da números más manejables para trabajar.

Por ejemplo. un terremoto de magnitud 6 es diez veces más fuerte que uno de magnitud 5, y un terremoto de magnitud 6 es 100 veces más grande que un terremoto de magnitud 4.

Ahora consideremos el terremoto de 1906 en San Francisco que tuvo una magnitud estimada de 8.3 en la escala de Richter. En el mismo año ocurrió un poderoso terremoto en la frontera entre Colombia y Ecuador, que fue 4 veces más intenso. ¿Cuál fue la magnitud del temblor entre Colombia y Ecuador en la escala de Richter?

1. Si relacionamos las intensidades entre los dos terremotos ¿Cómo quedaría una expresión algebraica que los relacione?

2. Sustituyendo estos valores de intensidad en la función de calcular la magnitud del terremoto

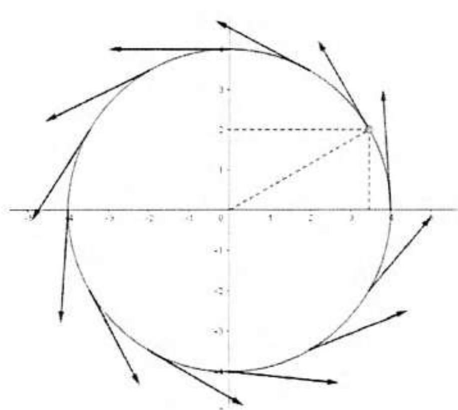
4.3.6. Modificaciones de la Actividad 6 Rueda de la fortuna (Análisis 1)

Se le agregó una pregunta al finalizar la actividad junto con el archivo GeoGebra manipulando la función para observar qué sucede al hacer variar los coeficientes y que anoten sus resultados.

Además de indicaciones de como manipular el archivo GeoGebra.

Actividad 6 Rueda de la fortuna (Análisis 1)

Una canastilla de una rueda de la fortuna se mueve con una rapidez constante sobre una circunferencia de radio 4. Su movimiento se realiza en el sentido contrario a las manecillas del reloj. En la siguiente figura se muestra la situación.



Observemos que, a medida que el tiempo transcurre, las coordenadas x, y que señalan la posición de la canastilla están cambiando, esto se representa como

$$x = x(t) \text{ y } y = y(t)$$

Lo que expresa que, tanto la variable x como la variable y son funciones en dependencia del tiempo t.

Ahora consideremos en esta situación que se empieza a medir el tiempo ($t = 0$) al pasar la canastilla por el punto $(4, 0)$, además el tiempo transcurrido al pasar la canastillas de este punto $(4, 0)$ al punto $(-4, 0)$ es de π segundos.

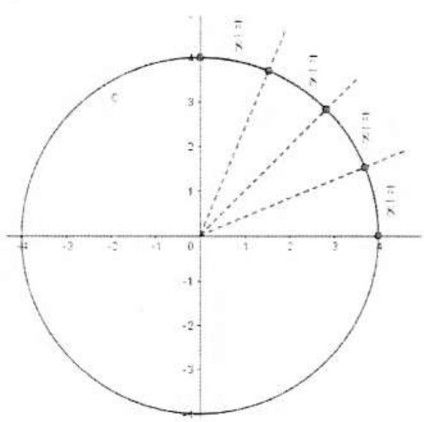
1. ¿Cuántas partes de la circunferencia recorrerá la canastilla al transcurrir el tiempo de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$ segundos?

2. ¿Cuál es la posición de la canastilla en $\dfrac{\pi}{2}$ segundos?

3. ¿La ordenada $y(t)$ está creciendo o decreciendo?

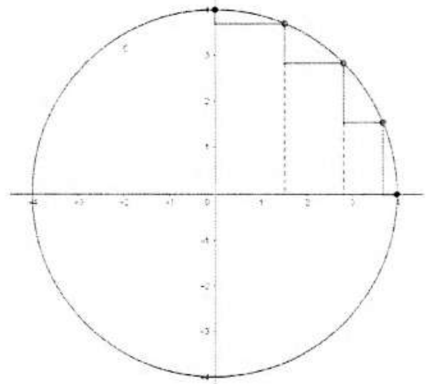
4. ¿Qué significa que la canastilla se mueva a una velocidad constante?

   Si dividimos el intervalo de tiempo de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$ segundos en 4 subintervalos de tiempos iguales, estos tendrán longitud $\dfrac{\pi}{8}$ segundos. Como se muestra en la siguiente figura.

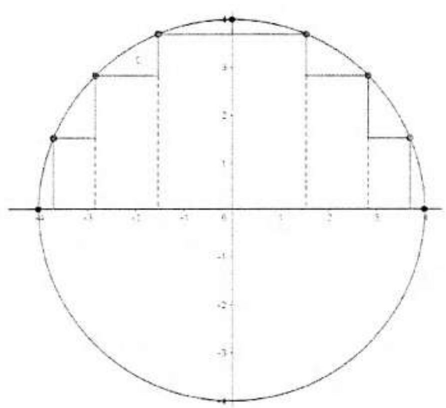


5. Ahora observamos en la siguiente figura los segmentos verticales (azules), estos representan la cantidad que ha aumentado o disminuido y al pasar de una posición a otra,

¿Van aumentando o disminuyendo? ¿Cada vez lo hacen más rápido o lento?



6. Al transcurrir el tiempo de los $\frac{\pi}{2}$ a los π segundos, la canastilla recorre la cuarta parte del círculo que corresponde al segundo cuadrante. Si hacemos el mismo análisis anterior, es decir, partir ese cuadrante en 4 como se muestra en la siguiente figura, los segmentos verticales correspondientes a y ¿Van aumentando o disminuyendo? ¿Lo hacen cada vez más rápido o cada vez más lento?



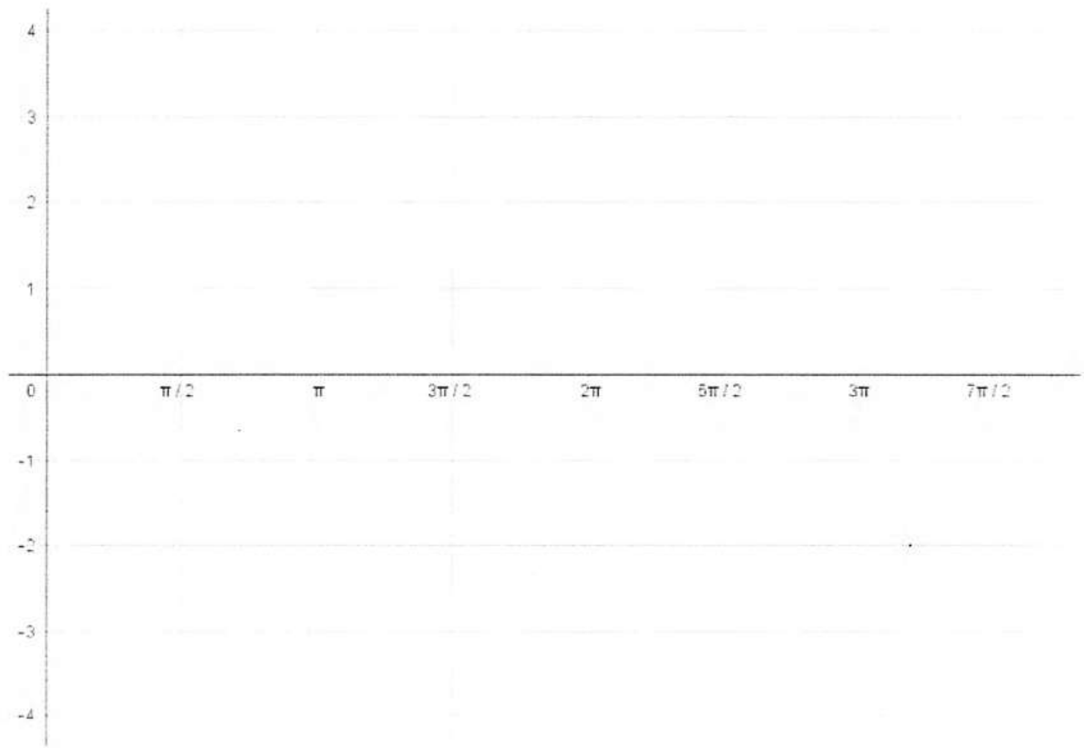
7. ¿Cuál es la información cualitativa y cuantitativa obtenida hasta este momento?

8. Haga un dibujo, gráfica, etc. con esa información obtenida.

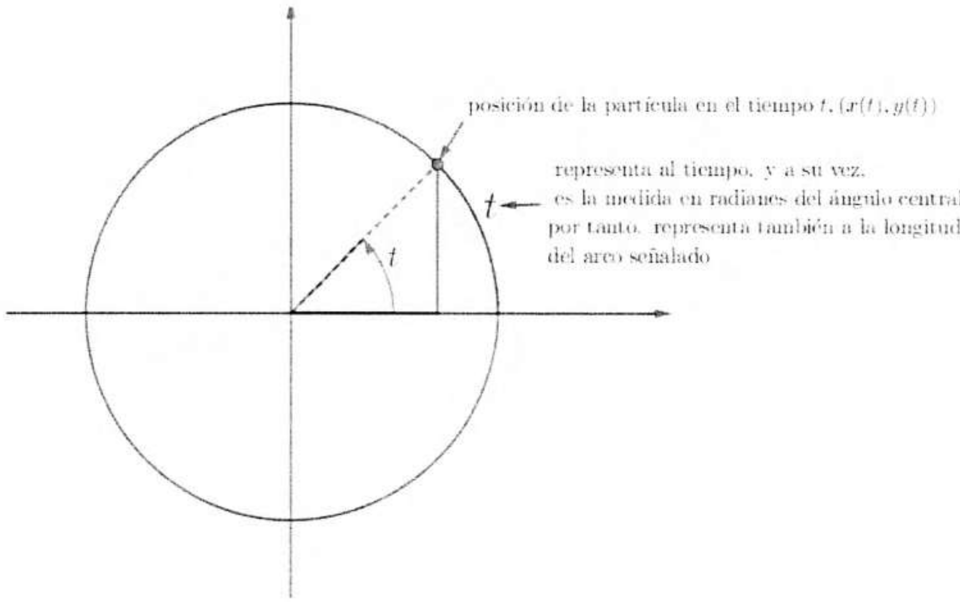
9. Haga un análisis análogo al realizado en las preguntas 5-7 pero ahora con los intervalos de tiempo de π a $\frac{3\pi}{2}$ y de $\frac{3\pi}{e}$ a los 2π.

10. Del intervalo 2π a $\frac{5\pi}{2}$ ¿Cómo es el comportamiento de y?

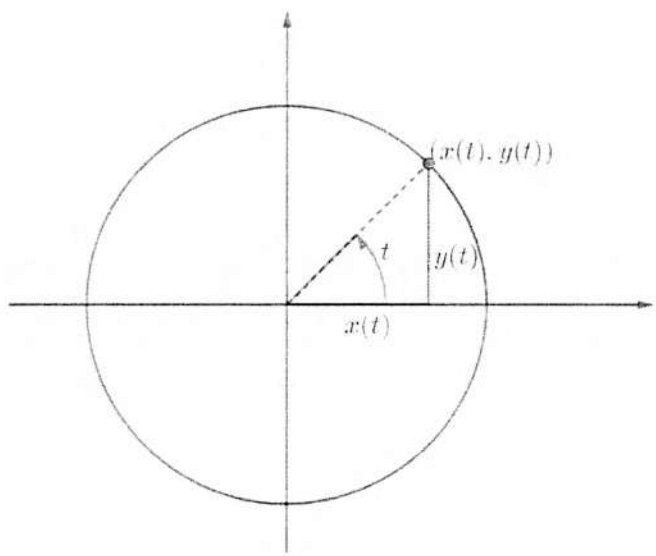
11. Con la información obtenida haga la gráfica correspondiente al movimiento de la canastilla dependiendo del tiempo t. Luego active la casilla $y(t)$ para comparar resultados.



Nota. Con esta información se puede asegurar que la medida del tiempo t segundos, coincide numéricamente con la medida de la longitud del arco que recorre la canastilla sobre la circunferencia de radio 4. Tomemos por ejemplo, un valor de t con $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ilustrando lo que hemos obtenido hasta ahora en la siguiente figura:



12. Si trazamos el triángulo rectángulo que se determina con esa posición, y recordamos nuestro conocimiento en trigonometría, podemos observar que las coordenadas de la posición de la canastilla como catetos en el triángulo rectángulo con ángulo interior t, tal y como se muestra en la siguiente figura. De este modo podemos calcular a la magnitud y ¿Cuál sería la expresión algebraica que determina la posición de y?



13. Activ3 la casilla función $y(t)$ y menciona tres características de la función.

14. Por último, desactive todas las casillas activadas y active las casillas deslizadores y función general $y(t)$, mueva cada uno de los deslizadores y describa qué sucede cuando hacemos variar estos.

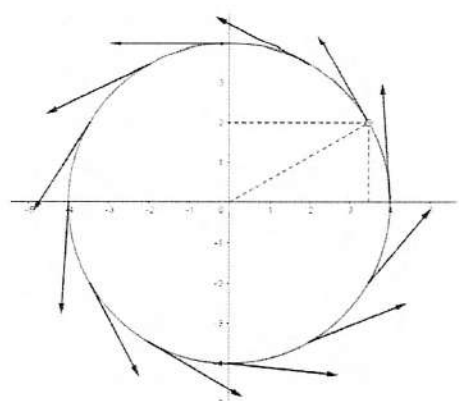
4.3.7. Modificaciones de la Actividad 7 Rueda de la fortuna (Análisis 2)

Se le agregó dos pregunta al finalizar la actividad junto con el archivo GeoGebra manipulando la función para observar qué sucede al hacer variar los coeficientes y anoten sus resultados. La siguiente pregunta es de observar las funciones seno y coseno y anotar 3 características que hay entre ellas.

Además de indicaciones de como manipular el archivo GeoGebra.

Actividad 7 Rueda de la fortuna (Análisis)

Una canastilla de una rueda de la fortuna se mueve con una rapidez constante sobre una circunferencia de radio 4. Su movimiento se realiza en el sentido contrario a las manecillas del reloj. En la siguiente figura se muestra la situación.



Observemos que, a medida que el tiempo transcurre, las coordenadas x, y que señalan la posición de la canastilla están cambiando, esto lo representaremos como

$$x = x(t) \text{ y } y = y(t)$$

Lo que nos expresa que, tanto la variable x como la variable y son funciones en dependencia del tiempo t.

Ahora consideremos en esta situación que se empieza a medir el tiempo ($t = 0$) al pasar la canastilla por el punto $(4, 0)$, además el tiempo transcurrido al pasar la canastillas de este punto $(4, 0)$ al punto $(-4, 0)$ es de π segundos.

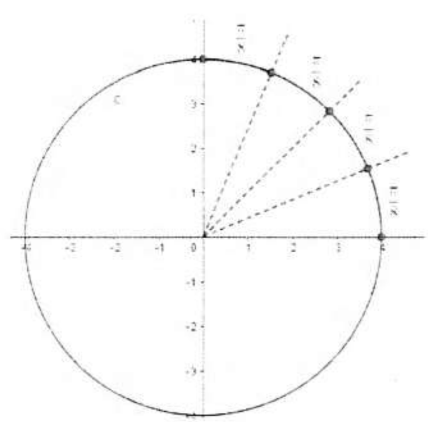
1. Abra el archivo con nombre canasta y mueve el punto C_2. ¿Cuántas partea de la circunferencia recorrerá la canastilla al transcurrir el tiempo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ segundos?

2. ¿Cuál es la posición de la canastilla en $\frac{\pi}{2}$ segundos?

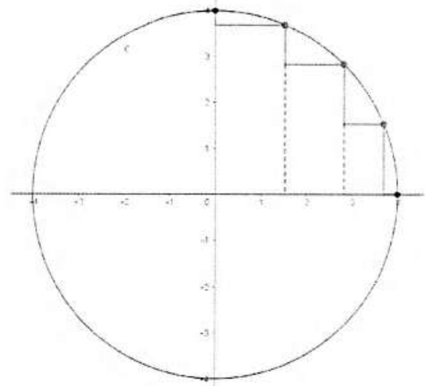
3. ¿La abscisa $x(t)$ están creciendo o decreciendo?

4. ¿Qué significa que la canastilla se mueva a una velocidad constante?

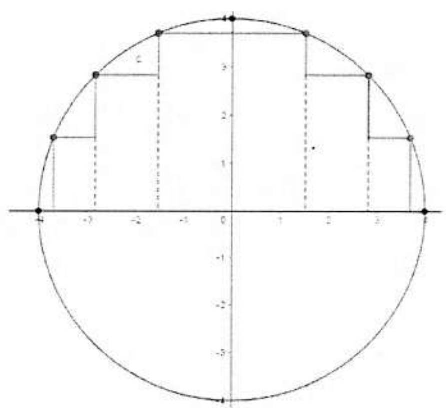
   Si dividimos el intervalo de tiempo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ segundos en 4 subintervalos de tiempos iguales, estos tendrán longitud $\frac{\pi}{8}$ segundos. Como se muestra en la siguiente figura.



5. Ahora observemos en la siguiente figura los segmentos horizontales, estos representan la cantidad que ha aumentado o disminuido x al pasar de una posición a otra, ¿Van aumentando o disminuyendo? ¿Cada vez lo hacen más rápido o lento?



6. Al transcurrir el tiempo de los $\frac{\pi}{2}$ a los π segundos, la canastilla recorre la cuarta parte del círculo que corresponde al segundo cuadrante. Si hacemos el mismo análisis anterior, es decir, partir ese cuadrante en 4 como se muestra en la siguiente figura, los segmentos correspondientes a x ¿Van aumentando o disminuyendo? ¿Lo hacen cada vez más rápido o cada vez más lento?

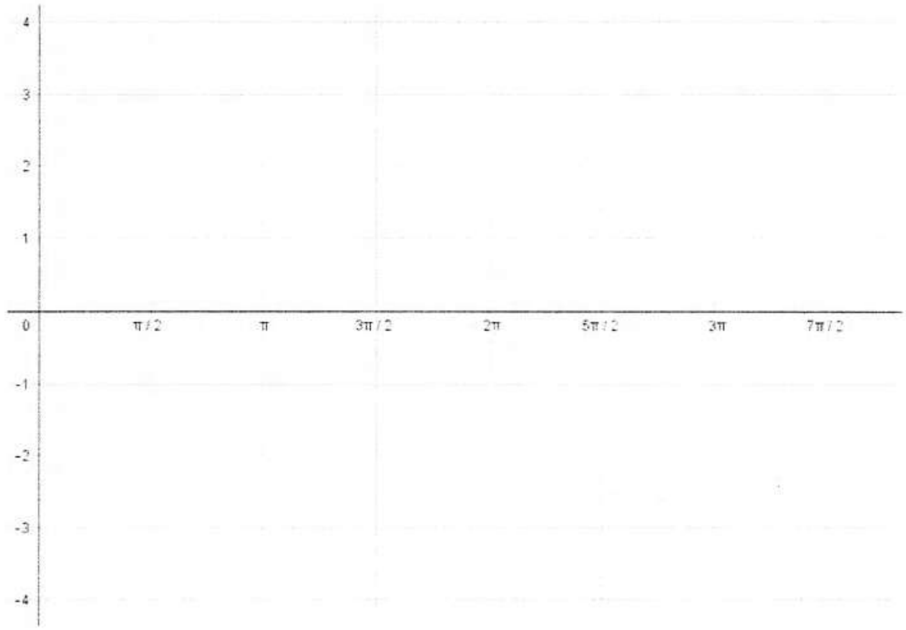


7. ¿Cuál es la información cualitativa y cuantitativa obtenida hasta este momento?

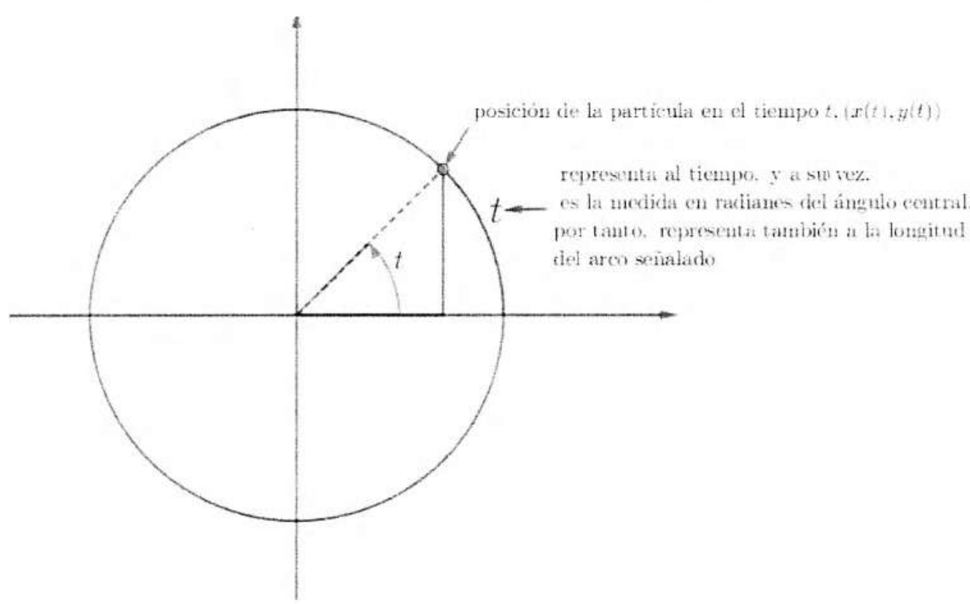
8. Haga un análisis análogo al realizado en las preguntas 5-7 pero ahora con los intervalos de tiempo de π a $\frac{3\pi}{2}$ y de $\frac{3\pi}{e}$ a los 2π.

9. Del intervalo 2π a $\frac{5\pi}{2}$ ¿Cómo es el comportamiento de x, y?

10. Con la información obtenida haga la gráfica correspondiente al movimiento de la canastilla dependiendo del tiempo t. Luego active la casilla de $x(t)$ para comparar.

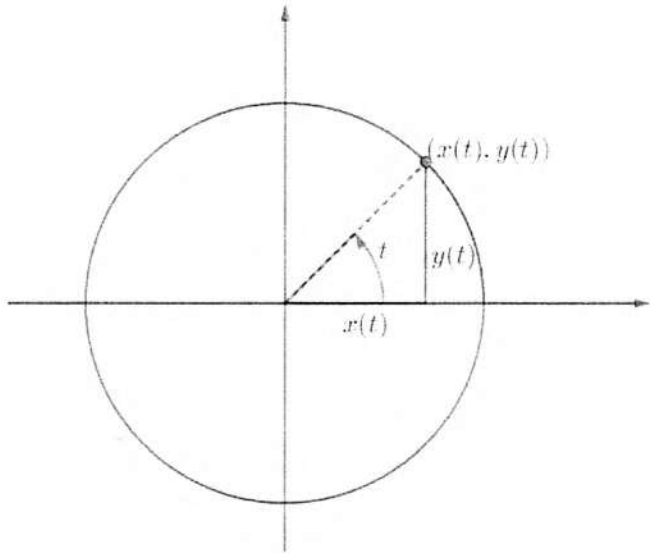


Nota. Con esta información se puede asegurar que la medida del tiempo t segundos, coincide numéricamente con la medida de la longitud del arco que recorre la canastilla sobre la circunferencia de radio 4. Tomemos por ejemplo, un valor de t con $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ ilustrando lo que hemos obtenido hasta ahora en la siguiente figura:



11. Si trazamos el triángulo rectángulo que se determina con esa posición, y recordamos

nuestro conocimiento en trigonometría. podemos observar que las coordenadas de la posición de la canastilla como catetos en el triángulo rectángulo con ángulo interior t. tal y como se muestra en la siguiente figura. De este modo podemos calcular a la magnitud x ¿Cuál sería la expresión algebraica que determina la posición de x?



12. Active la casilla función $x(t)$ y mencione tres características de la función.

13. Ahora. desactive todas las casillas activadas y active las casillas deslizadores y función general $x(t)$. mueva cada uno de los deslizadores y describa que sucede cuando hacemos variar estos.

14. Por último. active las casillas de función general $x(t)$ y $y(t)$ mueva los deslizadores y que observe las gráficas al hacer varias los valores de cada deslizador.

Capítulo 5

Conclusiones

Desde el capítulo 1 deliberamos sobre la problemática que existe en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. a nivel bachillerato. prestando nuestro interés a las dificultades que presentan los estudiantes para modelar y dar solución a problemas de matemáticas aplicadas a algunas ramas del conocimiento. es decir. a problemas fuera de la matemática pero que ocupan como herramienta a las matemáticas para dar solución al problema en estudio.

Para esto diseñamos una propuesta didáctica. dirigida a estudiantes del cuarto semestre de matemáticas en el nivel medio superior. tomando como referencia al Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. buscando promover un mayor interés y entendimiento sobre las características y comportamientos de las diferentes variaciones en estudio. Apoyándonos en los elementos teóricos analizados en el capítulo 2.

Nuestra propuesta didáctica tal y como se mostró en el capítulo 3. consiste en una serie de problemas descritas en un cuadernillo de trabajo. con preguntas e indicaciones que sirven como guía y así tener una mejor comprensión. además de archivo correspondientes a cada actividad didáctica. creando así un ambiente dinámico con ayuda del software GeoGebra.

Los planteamientos que estamos realizando hasta aquí. ponen de manifiesto nuestra concepción de que logramos el objetivo general planteado en la tesis. el cual quedó formulado de la siguiente manera:

Objetivo General

Diseñar actividades didácticas para el estudio de la variación en el nivel medio superior con uso de software de matemática dinámica.

Tal y como se señalo en el capítulo 1, el logro de este objetivo quedaba supeditado a la consecución de los objetivos específicos enunciados, los cuales quedaron establecidos de la siguiente manera:

Objetivos específicos

1. Analizar propuestas didácticas y uso de tecnología, basados en investigaciones especializadas.

2. Establecer el tipo de elementos que intervienen en las propuestas experimentales a través de un análisis de sus actividades, así como los elementos de los problemas y la resolución de problemas.

3. Usar los análisis didácticos y del uso de la tecnología en el diseño de una propuesta didáctica para el estudio de la variación en el bachillerato

En cuanto al primero de ellos, decimos que el objetivo fue alcanzado toda vez que, por una parte, hicimos la revisión y análisis de diferentes propuestas didácticas, en particular las que hacen referencia a la importancia de los problemas y sus procesos de resolución en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este aspecto se analizaron los planteamientos de Polya, Schoenfeld, Friedman y Mancera, así como la tesis de Licenciatura en Matemáticas de Moreno.

En lo que se refiere al uso de la tecnología, tomamos elementos de Hitt, Gamboa, Pluvinage y aspectos señalados en la tesis de Licenciatura en Matemáticas de Murillo, con respecto al uso de GeoGebra.

Con base en los análisis realizados en el primer objetivo específico establecimos los puntos que deberíamos incorporar en los diseños y las formas de implementarlos en el aula para la observancia de su validez.

Finalmente, el tercer objetivo específico, referente y casi coincidente con le objetivo general se logró pues pudimos hacer el diseño de las actividades planteadas, cada una de ellas con el uso de GeoGebra, las cuales son las siguientes:

1. Movimiento rectílineo uniforme. que promueve el aprendizaje de la variación lineal.
2. Cercado de un terreno. para el estudio de la variación cuadrática.
3. El volumen de una caja sin tapa. sobre la variación cúbica.
4. La presión atmosférica. destinada al análisis de la variación exponencial.
5. Terremotos. para el estudio de la variación logarítmica.
6. La rueda de la fortuna para estudiar la variación periódica. en este caso la modelada con la función seno.
7. La rueda de la fortuna. pero ahora para la función coseno.

Si bien es cierto que estamos señalando el logro de los objetivos planteados. nos parece importante decir que en la realización del trabajo obtuvimos también otro tipo de conclusiones que nos dejan un aprendizaje individual que es necesario destacar.

Por un lado al realizar el análisis referente al marco conceptual me di cuenta de la importancia que tienen los problemas y los procesos de resolución para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. los aspectos que intervienen en ellos. así como su clasificación. Lo cual me fue de gran ayuda al momento de elaborar este trabajo y también en mi vida personal. dado que estudié Licenciatura en Matemáticas y los problemas, así como los procesos de resolución son el día a día.

Por otro lado. de acuerdo a la Reforma Integral de la educación Media Superior (RIEMS) el programa de estudios está diseñado con base en un enfoque por competencias. las cuales ya fueron descritas en el Capítulo 1, entonces presentaremos algunas competencias que se desarrollan en esta propuesta. recordando que están divididas por competencias génericas y disciplinares.

Competencias génericas

- Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
- Escucha. interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios. códigos y herramientas apropiados.
- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general. considerando otros puntos de vista de manera crítico y reflexiva.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad. región. México y el mundo.
- Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y diversidad de creencias. valores. ideas y prácticas sociales.
- Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica. con acciones responsables.

Competencias disciplinares

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos. algebraicos. geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales. hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos. aplicando diferentes enfoques.

- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal.matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más vbariables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimentalmente o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que los rodean.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos símbolos matemáticos y científicos

He tenido la oportunidad de impartir clases, y el haber obtenido este conocimiento me ha ayudado al momento de realizar la planeación para la materia, otros aspecto es el haber aprendido en el manejo del software de matemática dinámica GeoGebra, dado que es una herramienta muy útil para la visualización y la manipulación de los objetos matemáticos.

Por otro lado he obtenido una mayor comprensión de las matemáticas, cómo se relacionan entre sí las diferentes ramas de ella, así como el tener más claro qué es un objeto matemático, el cual a lo largo de la carrera lo escuchaba con naturalidad pero no fue algo que me quedara claro en su momento. Algo que fue nuevo para mí fue al momento de diseñar las actividades didácticas fue darme cuenta que estan centradas en el estudio de las variaciones más que en el modelo matemático.

Como comentario ahora al resolver un problema, lo analizo más que antes y trato de aplicar el conocimiento adquirido al realizar este trabajo, dado que sólo me enfocaba en resolver y no ver las cosas que estaban en juego al resolver cualquier problema, lo cual ha tomado un gran interés particular.

Para finalizar este trabajo y lo expresado anteriormente podemos concluir que nuestra propuesta didáctica sí promueve el crear un mayor interés en los estudiantes en el estudio de las matemáticas, así como de una mejor compresión sobre los objetos matemáticos, sus comportamientos y propiedades, dejando la posibilidad de continuar este trabajo de tesis en desarrollar una propuesta didáctica para el cálculo diferencial o integral.

Bibliografía

Álvarez, J. S. (2011). *Actividades Didácticas para la Enseñanza de la Integral con Uso de un Software Dinámico (tesis de maestría).* Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

Araiza, M. T. D. (2010). *La Derivada a Partir de Problemas de Optimización en Ambientes Dinámicos Creados con GeoGebra (tesis de maestría).* Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

Araya, R. G. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 2(3):11–44.

Arcavi, A. (2006). Lo cotidiano y lo académico en matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63:3–23.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., and Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 1:97–140.

Badillo Jiménez, E. R., Azcárate, C., and Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2):0191–206.

Caballero, M. and Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional.

Cantoral, R. and Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2):694–701.

COBACH (2014). *Modulo de Aprendizaje, Matemáticas 4.* Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.

Córdoba, J. J. M. (2011). Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema/a didactic strategy for school mathematics. from the perspective of problem situations/une stratégie didactique pour les mathématiques scolaires depuis lápproche de situations-problème. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59):179.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1):143–168.

Fridman, L. (1996). *Metodología para la resolución de problemas de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gastelum, B. U. M. (2016). *Una propuesta para el estudio de la función derivada en un amviente de geometría dinámica (tesis de pregrado)*. Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

Guzmán, R. et al. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1).

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnologıa. *Edición Especial: Educación Matemática*, 213.

Mancera, E. (2000). Saber matemáticas es saber resolver problemas. *Grupo editorial Iberoamericana, México*.

Pluvinage, F. (2011). Usos de las tecnologías de la información y la comunicación (tic) en la enseñanza del cálculo.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Prada-Núñez, R., Suárez, C. H., and Ramírez-Leal, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica*, 2(25):188–205.

Salinas, P. (2002). *ELEMENTOS DEL CALCULO, CUADERNO DE APOYO: RECONSTRUCCION CONCEPTUAL PARA EL APRENDIZAJE Y SU ENSEÑANZA*. Number 515 E434C.

Santos Trigo, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. *En D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Matematics Teaching and Learning*, pages 334–370.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Stewart, J., Redlin, L., and Watson, S. (2007). Precálculo, matemática para el cálculo. *Editorial Thomson Learning, Quinta Edición, ISBN*, pages 13–978.

Verdugo, A. C. M. (2014). *ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS. UN ESTUDIO EXPLORATORIO (tesis de pregrado)*. Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.