"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciado en Matemáticas

El Cálculo Fraccional y Algunas Aplicaciones

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Alberto Domínguez Corella

Director de Tesis: Dr. Jorge Antonio López Rentería

Hermosillo, Sonora, México. 20 de Junio de 2016.

SINODALES

Dr. Martín Gildardo García Alvarado

Dr. Horacio Leyva Castellanos

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro

Dr. Jorge Antonio López Rentería

Índice general

Introducción

El cálculo fraccional es una rama de las matemáticas que investiga las propiedades de las derivadas e integrales de orden fraccional. En particular esta disciplina trata la resolución de ecuaciones diferenciales que involucran derivadas fraccionales de una función desconocida. La historia del cálculo fraccional empezó casi al mismo tiempo que el cálculo estándar. El cálculo fraccional fue mencionado por primera vez en una carta que Leibniz mandó a L'Hospital en 1695 (ver [9]), donde se abordaba la idea de la semiderivada. Muchos matemáticos famosos aportaron al cálculo fraccional, Liouville, Riemann, Euler, Lagrange, Heaviside, Fourier, Abel, etc. Todos ellos propusieron definiciones originales. En una carta con fecha del 30 de Septiembre de 1695 L'Hospital le escribió a Leibniz preguntando por su notación particular de la derivada,

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n},$$

que pasaría si $n = \frac{1}{2}$. Leibniz le contesto: "Una aparente paradoja de la cual un día tendremos útiles consecuencias"; Fue en estas palabras donde el cálculo fraccional nació.

En 1812 Laplace definió una derivada fraccional de orden arbitrario,. Él generalizó desde el caso entero, empezó con

$$y = x^m,$$

Si n es un entero

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}.$$

Usando la función Gamma obtuvo

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}.$$

Así para el caso $n = \frac{1}{2}, m = 1$, se obtiene

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

La función exponencial está representada en serie como

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Aplicando la fórmula anterior término a término se tiene

$$\frac{d^v}{dt^v} e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-v}}{\Gamma(k-v+1)},$$

donde $v \in \mathbb{R}^+$. Esta derivada fraccional de la exponencial no regresa otra exponencial como es en el caso entero.

Consideremos un entero n, cuando hablamos de x^n, rápidamente visualizamos que multiplicar n-veces x nos dará el resultado, ahora si resulta ser que n no es un entero ya no es tan fácil visualizar el resultado, por ejemplo si pensáramos en 2^π, es difícil visualizarlo sin embargo existe, algo similar sucede con la derivada fraccional. Así como los números reales existen entre los enteros, las derivadas fraccionales existen entre las derivadas enteras. En 1696 Leibniz mencionó otra forma de derivada fraccional en una carta que le escribió a Bernoulli (ver [9]).
El primer paso a la generalización fue dado por Fourier en 1821, después de la introducción de

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)\cos(px - pu)dudp.$$

Su definición fue obtenida de la representación integral de la función, como

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos[p(x-u)] = p^n \cos\left[p(x-u) + \frac{1}{2}n\pi\right],$$

de donde se obtiene

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)p^n cos[p(x-u) + n\frac{\pi}{2}]dudp.$$

Esta relación pudo servir como definición de derivada para $n \in \mathbb{R}$. En la actualidad hay muchas definiciones de derivada fraccional y sirven para diferentes tipos de aplicaciones en las cuales se generaliza un modelo de orden entero a uno de orden fraccional y se obtienen mejores aproximaciones a modelos, esto comprobado empíricamente. En esta tesis abordaremos las principales definiciones de derivadas, Riemann-Liouville, Caputo.

Capítulo 1

Cálculo Fraccional

En esta parte se presentan las definiciones del operador diferintegral de Caputo y de Riemann Liouville, así como las propiedades básicas de tales operadores. Finalmente, veremos la expresión explícita de la derivada de orden fraccional, según las definiciones de los operadores antes mencionados.

1.1. Funciones Elementales en Cálculo Fraccional

La transición del cálculo clásico de orden entero al cálculo fraccional es mediante la generalización de algunas funciones elementales. Particularmente, la función factorial de un número entero juega un rol importante en la definición del operador diferintegral de orden entero, y su generalización, la función Gamma, será el pilar fundamental del operador diferintegral fraccional. En este capítulo, se presentarán las generalizaciones de funciones elementales en el cálculo fraccional.

1.1.1. Función Gamma

La función más importante en el desarrollo del cálculo fraccional es la función Gama, la cual generaliza a la función factorial, pues es el pilar de los conceptos tratados en este tema.

Definición 1.1.1. *Si la parte real de un número complejo z es mayor que cero, la función $\Gamma : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds,$$

se define como la función Gamma.

La función Gamma tiene tiene la siguiente propiedad que nos será de ayuda en el siguiente capítulo.

Proposición 1.1.1. *Si $z \in \mathbb{C}^+$, entonces*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty s^z e^{-s} ds \\
&= \left[-e^{-t}t^z\right]_0^\infty + z \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

$\square$

Como consecuencia obtenemos también el siguiente resultado.

Proposición 1.1.2. *Si $z \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

Demostración. Procederemos por inducción matemática; es claro que $\Gamma(1) = 1$; ahora supongamos $\Gamma(n) = (n-1)!$; entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)\\ &= n(n-1)!\\ &= n!\end{aligned}$$

lo cual termina la inducción. $\square$

1.1.2. Función Beta

Otra función importante en el Cálculo Fraccional es la función Beta.

Definición 1.1.2. *Sean $x, y \in \mathbb{C}^+$, a la función $B : \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$*

$$B(x,y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds,$$

se le llama función Beta.

Proposición 1.1.3. *Sean $x, y \in \mathbb{C}^+$, entonces*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Demostración. Nótese primero que

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds \int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt\\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1}t^{y-1}e^{-s-t}dsdt.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $s = u^2$ y $t = v^2$.

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty u^{2x-1}v^{2y-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv,$$

pasando a coordenadas polares

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2(x+y-1)}e^{-r^2}\cos^{2x-1}(\theta)\operatorname{sen}^{2y-1}(\theta)rdrd\theta,$$

haciendo $t = r^2$

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 2\int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\theta)\operatorname{sen}^{2y-1}(\theta)d\theta \\ &= 2\Gamma(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\theta)\operatorname{sen}^{2y-1}(\theta)d\theta,\end{aligned}$$

así

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\theta)\operatorname{sen}^{2y-1}(\theta)d\theta.$$

Haciendo el cambio de variable $\sin(\theta) = s$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} &= \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds \\ &= B(x,y).\end{aligned}$$

□

1.1.3. Función de Mittag-Leffler

La función de Mittag-Leffler, al igual que la función Gamma, es una de las más importantes en el estudio del cálculo fraccional y en la mayor parte de las aplicaciones.

Definición 1.1.3. *Se define la función de Mittag-Leffler de dos parámetros como*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}.$$

Observación 1.1.1. *Denotaremos* $E_\alpha(x) = E_{\alpha,1}(x)$.

1.2. Diferintegral de Riemman-Liouville

El primer paso, hacia la generalización de derivada fraccional, será construirla para números negativos.

Definición 1.2.1. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función Riemann integrable, definimos* Jf *como*

$$Jf(x) := \int_a^x f(u)du,$$

para cada $x \in [a,b]$.

Por el teorema fundamental del cálculo

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(u)du\right) = f(x),$$

entonces es claro que

$$\frac{d}{dx}\left(J(f(x))\right) = f(x),$$

y que

$$J\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right) = f(x) - f(a).$$

Por tanto, J funciona como un inverso de $\frac{d}{dx}$ por derecha, mientras que J funciona como inverso por izquierda cuando $f(a) = 0$. Aplicando J repetidamente se obtiene

$$\begin{aligned}
J^2(f(x)) &= J(J(f(x))) = \int_a^x \int_a^{u_2} f(u_1)du_1du_2;\\
J^3(f(x)) &= J^2(J(f(x))) = \int_a^x \int_a^{u_3} \int_a^{u_2} f(u_1)du_1du_2du_3;\\
&\vdots\\
J^k(f(x)) &= J^{k-1}(J(f(x))) = \int_a^x \int_a^{u_k} \cdots \int_a^{u_2} f(u_1)du_1du_2\cdots du_k.
\end{aligned}$$

El siguiente teorema será de gran ayuda para generalizar la integral fraccional.

Teorema 1.2.1. *Sea f una función Riemann integrable, entonces*

$$\int_a^x \int_a^{u_n} \ldots \int_a^{u_2} f(u_1)du_1du_2\ldots du_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-u)^{n-1}f(u)du.$$

Demostración. Procedamos por inducción matemática. No es difícil ver que el caso $n = 1$ se cumple. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir que

$$\int_a^x \int_a^{u_k} \ldots \int_a^{u_2} f(u_1)du_1du_2\ldots du_k = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-u)^{k-1}f(u)du.$$

Ahora, por la hipótesis de inducción e integración por partes

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\int_a^x (x-u)^k f(u)du &= \frac{1}{k!}\left(\left[(x-u)^k \int_a^u f(y)dy\right]_{u=a}^{u=x} \int_a^x \left(\int_a^u f(y)dy\right) k(x-u)^{k-1}f(u)du\right)\\
&= \left(\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-u)^{k-1}f(u)du\right)\left(\int_a^x f(u)du\right)\\
&= \left(\int_a^x \int_a^{u_k} \ldots \int_a^{u_2} f(u_1)du_1du_2\ldots du_k\right)\left(\int_a^x f(u)du\right)\\
&= \int_a^x \int_a^{u_{k+1}} \ldots \int_a^{u_2} f(u_1)du_1du_2\ldots du_{k+1},
\end{aligned}$$

lo cual completa la inducción y la prueba.

□

El teorema 1.2.1 nos lleva de forma natural a definir la integral fraccional de orden α de la forma siguiente:

$$J^{\alpha}f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt.$$

Escribiremos la definición de la integral fraccional en forma precisa.

Definición 1.2.2. *Para $\alpha > 0$, decimos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene integral fraccional de Riemann-Liouville de orden α si el límite*

$$\lim_{h\to 0^+}\int_a^{x-h}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,$$

existe para toda $x \in [a,b]$ y llamaremos integral fraccional de Riemann-Liouville de orden α de f a

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-h}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \tag{1.1}$$

y la denotaremos por $J^{\alpha}f(x)$. Definimos la integral fraccional de Riemann-Liouville de orden 0 de f como $f(x)$.

Lema 1.2.1. *Sea $\alpha > 0$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable, entonces la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x) := \int_a^x (x-t)^{\alpha}f(t)dt,$$

es continua.

Demostración. Como $(x-t)^{\alpha}f(t)$ es integrable en $[a,b]$ está acotada, por lo cual se tiene para alguna constante M_1:

$$|(x-t)^{\alpha}f(t)| \leq M_1,$$

para toda $x, t \in [a,b]$. De igual forma, con f se obtiene:

$$|f(x)| \leq M_2,$$

para toda $x \in [a,b]$. Para h cercana a cero se tiene $h^{\alpha+1} \leq h$. Ahora dado $\epsilon > 0$ tomemos $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{3M}, \delta_1\right\}$, donde $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$, como la función $(x-a)^{\alpha}$ es continua se tiene que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|(x+h-a)^{\alpha+1} - (x-a)^{\alpha+1}| < \frac{\epsilon}{3},$$

siempre que

$$|h| < \delta_1.$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
|g(x+h)-g(x)| &= \left| \int_a^{x+h} (x+h-t)^\alpha f(t)dt - \int_a^x (x-t)^\alpha f(t)dt \right| \\
&= \left| \int_a^x f(t)[(x+h-t)^\alpha - (x-t)^\alpha]dt + \int_x^{x+h} (x-t)^\alpha f(t)dt \right| \\
&\leq \int_a^x |f(t)||(x+h-t)^\alpha - (x-t)^\alpha|dt + M_1|h| \\
&\leq M_2 \int_a^x [(x+h-a)^\alpha - (x-a)^\alpha]dt + M_1|h| \\
&\leq \frac{M_2}{\alpha+1} \left| h^{\alpha+1} + (x+h-a)^{\alpha+1} - (x-a)^{\alpha+1} \right| + M_1|h| \\
&\leq M|h| + |(x+h-a)^\alpha - (x-a)^\alpha| + M|h| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}
$$

siempre que

$$|h| < \delta.$$

Por lo que g es, en efecto, continua. □

Proposición 1.2.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene derivada f' integrable, entonces tiene integral fraccional de Riemann-Liouville de orden α para toda $\alpha \geq 0$ y además se tiene la relación*

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(x-a)^\alpha f(a) + \int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)dt \right]$$

para $\alpha > 0$.

Demostración. El caso en que $\alpha = 0$ es trivial pues

$$J^\alpha f(x) = f(x).$$

Ahora si $\alpha > 0$ se tiene que $f(t)(x-t)^{\alpha-1}$ es continua en $[a, x-h]$ y por tanto integrable en $[a, x-h]$ para toda h, por lo que haciendo uso del teorema de integración por partes, en la integral que aparece en (1.1) con

$$
\begin{aligned}
u = f(t), \quad & du = f'(t)dt, \\
dv = (x-t)^{\alpha-1}dt, \quad & v = -\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha},
\end{aligned}
$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-h}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{h^\alpha f(x-h)}{\alpha}\right.\\ &\left.+\frac{1}{\alpha}(x-a)^\alpha f(a)+\frac{1}{\alpha}\int_a^{x-h}(x-t)^\alpha f'(t)dt\right].\end{aligned}$$

Ahora, como la integral

$$\int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)dt,$$

es una función continua, por el lema 1.2.1, podemos tomar el límite

$$\lim_{h\to 0^+}\int_a^{x-h}(x-t)^\alpha f'(t)dt=\int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)dt.$$

Además, se tiene que

$$\lim_{h\to 0^+} -\frac{h^\alpha f(x-h)}{\alpha}=0,$$

debido a que f es continua. Así

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-h}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\\ &=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{h^\alpha f(x-h)}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}(x-a)^\alpha f(a)+\frac{1}{\alpha}\int_a^{x-h}(x-t)^\alpha f'(t)dt\right]\\ &=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(x-a)^\alpha f(a)+\int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)dt\right].\end{aligned}$$

Entonces la integral existe para cada $x\in[a,b]$ y se tiene la relación

$$J^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(x-a)^\alpha f(a)+\int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)dt\right],$$

por lo que la prueba está completa. □

Al igual que las integrales usuales, las integrales fraccionales también cumplen ciertas propiedades interesantes y útiles. Una de ellas es la linealidad.

Teorema 1.2.2. *Si $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ son funciones, cuya integral fraccional de Riemann-Liouville de orden α existe, entonces*

$$J^\alpha(\lambda f(x)+g(x)),$$

existe, y más aún,

$$J^\alpha(\lambda f(x)+g(x))=\lambda J^\alpha f(x)+J^\alpha g(x)),$$

con $\lambda\in\mathbb{R}$.

Demostración. La prueba es clara a partir de la definición, pues

$$J^{\alpha}\left(\lambda f(x)+g(x)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}[\lambda f(x)+g(x)]dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left[\lambda(x-t)^{\alpha-1}f(x)+(x-t)^{\alpha-1}g(x)\right]dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\lambda\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(x)dt+\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}g(x)dt\right]$$

$$=\lambda J^{\alpha}f(x)+J^{\alpha}g(x).$$

□

Teorema 1.2.3. *Sea $f_n : [a,b]\to\mathbb{R}$ una sucesión de funciones, con primera derivada integrable, tal que f_n converge uniformemente a f y tal que f_n' converja uniformemente en $[a,b]$. Entonces $J^{\alpha}f$ existe en $[a,b]$ y además*

$$\lim_{n\to\infty} J^{\alpha}f_n(x)=J^{\alpha}f(x).$$

Demostración. Como las f_n' convergen uniformemente se tiene que convergen a f' y que f' es integrable por ser las f_n'. Así, $J^{\alpha}f$ existe por la proposición 1.2.1. Primero se mostrará que $f_n'(t)(x-t)^{\alpha}$ converge uniformemente en $[a,b]$. En efecto, dado $\epsilon>0$, por la convergencia uniforme de las f_n' existe $N>0$ tal que para toda $n>N$ y para toda $t\in[a,b]$ se tiene

$$|f_n'(t)-f'(t)|<\frac{\epsilon}{M},$$

donde $M=(b-a)^{\alpha}$. Ahora, para cada $x\in[a,b]$ y para toda $t\in[a,b]$ obtenemos

$$\begin{aligned}|f_n'(t)(x-t)^{\alpha}-f'(x)(x-t)^{\alpha}| &\le |x-t|^{\alpha}|f_n'(t)-f'(t)|\\ &<\epsilon.\end{aligned}$$

Así, $f_n'(t)(x-t)^{\alpha}$ converge uniformemente a $f'(t)(x-t)^{\alpha}$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)(x-t)^{\alpha}=\int_a^x f'(t)(x-t)^{\alpha},$$

y por la convergencia uniforme de las f_n se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a)(x-a)^{\alpha}=f(a)(x-a)^{\alpha}.$$

Finalmente, con todo esto junto, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} J^{\alpha}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f_n(a)(x-a)^{\alpha}+\int_a^x f_n'(t)(x-t)^{\alpha}dt\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(a)(x-a)^{\alpha}+\int_a^x f'(t)(x-t)^{\alpha}\right]$$

$$=J^{\alpha}f(x).\qquad\square$$

Como una consecuencia inmediata del teorema 1.2.3 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.1. *Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones con primera derivada integrable. Suponga que la sucesión de sumas parciales $S_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

y su primera derivada

$$S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k'(x).$$

convergen uniformemente. Entonces $J^\alpha S$ existe y además

$$J^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} J^\alpha f_k(x).$$

Demostración. S_n converge uniformemente, digamos a

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Notemos que S' es integrable, pues es suma de funciones integrables. Por tanto S_n tiene primera derivada integrable y por la proposición 1.2.1, $J^\alpha S$ existe. Ahora por el teorema 1.2.3 se tiene

$$\lim_{n\to\infty} J^\alpha S_n(x) = J^\alpha S(x),$$

esto es

$$\lim_{n\to\infty} J^\alpha \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = J^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

De aquí que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} J^\alpha f_k(x) = J^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x),$$

lo cual es equivalente a

$$\sum_{k=0}^{\infty} J^\alpha f_k(x) = J^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

□

Teorema 1.2.4. *Sean $\alpha, \beta > 0$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función con integral fraccional de Riemann-Liouville de cualquier orden, entonces $J^\alpha(J^\beta f(x))$ existe y además*

$$J^\alpha(J^\beta f(x)) = J^{\alpha+\beta} f(x).$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
J^{\alpha}(J^{\beta} f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t \frac{1}{\Gamma(\beta)} (t-u)^{\beta-1} f(u) du dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} f(u) du dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} f(u) dt du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \left[\int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} dt \right] du,
\end{aligned}
$$

Ahora al hacer el cambio de variable

$$
z = \frac{t-u}{x-u},
$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_u^x (x-y)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} dt \\
&= \int_0^1 (x-u)^{\alpha+\beta-1} z^{\beta-1} (1-z)^{\alpha-1} dz \\
&= (x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 z^{\beta} (1-z)^{\alpha} dz \\
&= (x-u)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta).
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
J^{\alpha}(J^{\beta} f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \left[\int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} dt \right] du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\
&= J^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}
$$

□

La siguiente proposición nos muestra como influye la derivada sobre J^{α}.

Proposición 1.2.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con primera derivada integrable. Si $\alpha > 1$, entonces $J^{\alpha} f$ es derivable en $[a, b]$ y además*

$$
\frac{d}{dx} J^{\alpha} f(x) = J^{\alpha-1} f(x).
$$

Demostración. Usando el teorema B.0.3 con la función $g(x,t) = (x-t)^\alpha f'(t)$ que tiene derivada parcial con respecto a x continua, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}J^\alpha f(x) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(x-a)^\alpha f(a) + \int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\alpha(x-a)^{\alpha-1}f(a) + \frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\alpha(x-a)^{\alpha-1}f(a) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}\left((x-t)^\alpha f'(t)\right)dt\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\alpha(x-a)^{\alpha-1}f(a) + \alpha\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f'(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[(x-a)^{\alpha-1} + \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f'(t)dt\right] \\
&= J^{\alpha-1}f(x).
\end{aligned}$$

□

Podemos usar la integral fraccional para definir la derivada de orden fraccional.

Definición 1.2.3. *Sea $\alpha > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$. Decimos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene derivada fraccional de orden α si*

$$\frac{d^n}{dx^n}J^{n-\alpha}f(x),$$

existe, y llamamos a

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n}J^{n-\alpha}f(x),$$

la derivada fraccional de f de orden α.

Proposición 1.2.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$ para un entero n. Si f tiene $n+1$ derivadas y $f^{(n+1)}$ es integrable, entonces f tiene derivada fraccional de orden α para $x \in (a,b]$.*

Demostración. Definamos $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) := J^\alpha f(x),$$

bastará con probar que $g^{(n)}$ existe. Definamos $p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$p(t) := f'(t),$$

y

$$q(t) = \frac{(-1)^n(x-t)^{\alpha+n}}{\prod_{j=1}^n(\alpha+j)}.$$

Ahora, por la proposición 1.2.1 y el Teorema C.0.5 se tiene

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1)J^{\alpha}f(x) &= (x-a)^{\alpha}f(a) + \int_a^x f'(t)(x-t)^{\alpha}dt \\
&= (x-a)^{\alpha}f(a) + \int_a^x p(t)q^{(n)}(t)dt \\
&= (x-a)^{\alpha}f(a) - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i p^{(i)}(a)q^{(n-i-1)}(a) + (-1)^n \int_a^x p^{(n)}q(t)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^{\alpha+i}}{\prod_{j=1}^{i}(\alpha+j)} f^{(i)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha+n}}{\prod_{j=1}^{n}(\alpha+j)} f^{(n+1)}(t)dt.
\end{aligned}
$$

Definamos

$$
h_1(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^{\alpha+i}}{\prod_{j=1}^{i}(\alpha+j)} f^{(i)}(a),
$$

y

$$
h_2(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha+n}}{\prod_{j=1}^{n}(\alpha+j)} f^{(n+1)}(t)dt,
$$

así ,

$$
g(x) = h_1(x) + h_2(x).
$$

$h_1(x)$ es infinitamente diferenciable para toda $x \in (a,b]$ y $h_2(x)$ por el Teorema B.0.3 tiene n derivadas, esto nos dice que $g^{(n)}$ existe para toda $x \in (a,b]$. □

Teorema 1.2.5. *Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones cuya derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden α existe. Entonces*

$$
D^{\alpha}(\lambda f(x) + g(x)),
$$

existe, y además

$$
D^{\alpha}(\lambda f(x) + g(x)) = \lambda D^{\alpha}f(x) + D^{\alpha}g(x)),
$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. La prueba es clara usando la linealidad de la integral fraccional

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}(\lambda f(x) + g(x)) &= \frac{d^n}{dx^n}\left[J^{n-\alpha}(\lambda f(x) + g(x))\right], \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[\lambda J^{n-\alpha}f(x) + J^{n-\alpha}g(x)\right], \\
&= \lambda D^{\alpha}f(x) + D^{\alpha}g(x)).
\end{aligned}
$$

□

Finalmente, y en base a toda la discusión anterior, podemos unir los operadores fraccionales en una definición, en una sola pieza.

Definición 1.2.4. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Definimos la diferintegral de Riemann-Liouville de f de orden α, como*

$$\mathbb{D}^{\alpha} f(x) = \begin{cases} J^{-\alpha} f(x) & si \quad \alpha < 0 \\ D^{\alpha} f(x) & si \quad \alpha > 0 \\ f(x) & si \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

1.2.1. Derivadas e integrales fraccionales de funciones conocidas

En esta parte se mostrará la derivada de algunas funciones conocidas y se verá la forma de derivar o integrar fraccionalmente.

Proposición 1.2.4. *Sea $f(x) = x^v$ con $v \in \mathbb{R}$ definida en $[0,b]$, entonces*

$$\mathbb{D}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+1-\alpha)} x^{v-\alpha}$$

Demostración. Calculemos primero $J^{-\alpha} f(x)$:

$$\begin{aligned} J^{-\alpha} x^v &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha-1} t^v dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (1-\frac{t}{x})^{-\alpha-1} x^{-\alpha-1} t^v dt \\ &= \frac{x^{-\alpha+v}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{-\alpha-1} u^v du \\ &= \frac{x^{-\alpha+v}}{\Gamma(-\alpha)} B(v+1,-\alpha) \\ &= \frac{x^{-\alpha+v}}{\Gamma(-\alpha)} \frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(v+1)}{\Gamma(-\alpha+v+1)} \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-\alpha+v+1)} x^{-\alpha+v}. \end{aligned}$$

Calculemos ahora $D^{\alpha} f(x)$:

$$\begin{aligned} D^{\alpha} x^v &= D^n [J^{(n-\alpha)} x^v] \\ &= D^n [\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+n-\alpha+1)} x^{v+n-\alpha}] \\ &= D^{n-1} [\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+n-\alpha+1)} (n-\alpha+v) x^{v+n-\alpha-1}] \\ &= D^{n-1} [\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+n-\alpha)} x^{v+n-\alpha-1}] \\ &= D^{n-2} [\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+(n-1)-\alpha)} x^{v+n-\alpha-2}] \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+1-\alpha)} x^{v-\alpha}. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.5. *Sea $f(x) = e^{cx}$ con $v \in \mathbb{R}$ definida en $[0, b]$, entonces*

$$\mathbb{D}^{\alpha} f(x) = x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(cx)$$

Demostración. Empecemos por calcular $J^{\alpha} f(x)$:

$$\begin{aligned}
J^{-\alpha} f(x) &= J^{\alpha}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^{-\alpha} x^n}{\Gamma(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+n+1)} \\
&= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(-\alpha+n+1)} \\
&= x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(x).
\end{aligned}$$

Calculemos ahora $D^{\alpha} f(x)$:

$$\begin{aligned}
D^{\alpha} f(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left[J^{n-\alpha} e^x\right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&= x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(x).
\end{aligned}$$

□

1.3. Diferintegral de Caputo

Definición 1.3.1. *Sea $\alpha > 0$ y n tal que $n - 1 < \alpha \leq n$, decimos que un función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tiene derivada fraccional de Caputo de orden α si*

$$J^{n-\alpha}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right],$$

existe, y llamamos a

$$D_*^{\alpha} f(x) = J^{n-\alpha}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right],$$

la derivada fraccional de Caputo de orden α de f.

Proposición 1.3.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $n - 1 < \alpha \leq n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Si f es $n + 1$ veces derivable y $f^{(n+1)}$ es integrable, entonces f tiene derivada fraccional de Caputo de orden α.*

Demostración. Como $f^{(n)}$ tiene primera derivada integrable, por la proposición 1.2.1, $J^{n-\alpha} f^{(n)}(x)$ existe. Así, $D_*^{\alpha} f(x)$ existe. □

Definición 1.3.2. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Definimos la diferintegral de Caputo de orden α de f como*

$$\mathbb{D}_*^{\alpha} f(x) = \begin{cases} J^{-\alpha} f(x) & si \quad \alpha < 0 \\ D_*^{\alpha} f(x) & si \quad \alpha > 0 \\ f(x) & si \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Provisionalmente denotemos la derivada fraccional de Riemann-Liouville como ${}^{RL}D^{\alpha}$ y la de Caputo como ${}^{C}D^{\alpha}$. Una consecuencia inmediata de la definición de ambas derivadas es la íntima relación que existe entre ellas y es muy importante para el análisis de la sección 3.3. Tal relación se describe en el siguiente resultado.

Lema 1.3.1 ([4]). *Si $n \in \mathbb{N}$ y $n - 1 < \alpha < n$, entonces*

$${}^{RL}D^{\alpha} x(t) = {}^{C}D^{\alpha} x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} x^{(k)}(a). \tag{1.2}$$

Capítulo 2

Ecuaciones integrales fraccionales

En este capítulo consideraremos las ecuaciones integrales fraccionales más simples no triviales que existen: las ecuaciones integrales de Abel de primer y segundo tipo. Se hará uso de la transformada de Laplace, pues esta hace más fácil y comprensible el tratamiento de las ecuaciones integrables fraccionales.

2.1. Transformada de Laplace de Diferintegrales

Podemos usar la definición que tenemos de diferintegral a funciones $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y después hablar de transformadas de Laplace de la diferintegral de f. Denotaremos con $\mathcal{L}$ la transformada usual de Laplace, ver sección [A].

Proposición 2.1.1. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función con primera derivada integrable, entonces*

$$\mathcal{L}[J^\alpha f] = s^{-\alpha}\mathcal{L}[f].$$

Demostración. Definamos la función $\phi_\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ como

$$\phi_\alpha = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Entonces

$$f' * \phi_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t)dt,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[J^\alpha f] &= \mathcal{L}\left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t)dt\right] \\
&= \left[\frac{f(0)\mathcal{L}[x^\alpha]}{\Gamma(\alpha+1)} + \mathcal{L}[\phi_\alpha * f']\right] \\
&= \frac{f(0)}{s^{\alpha+1}} + \frac{1}{s^{\alpha+1}}\left[s\mathcal{L}[f] - f(0)\right] \\
&= s^{-\alpha}\mathcal{L}[f].
\end{aligned}$$

Lo cual termina la prueba. □

Teorema 2.1.1. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función con primeras $n+1$ derivadas integrables. Entonces*

$$\mathcal{L}[D^\alpha f] = s^\alpha \mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \mathbb{D}^{k-n+\alpha} f(0).$$

Demostración. Usando la proposición 2.1.1 tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[D^\alpha f] &= \mathcal{L}[\frac{d^n}{dx^n} J^{n-\alpha} f] \\
&= s^n \left(\mathcal{L}[J^{n-\alpha} f]\right) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \frac{d^k}{dx^k}[J^{n-\alpha} f(0)] \\
&= s^n \left(s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f]\right) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \frac{d^k}{dx^k}[J^{n-\alpha} f(0)] \\
&= s^\alpha \mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \mathbb{D}^{k-n+\alpha} f(0).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.2. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función con primeras $n+1$ derivadas integrables. Entonces*

$$\mathcal{L}[D_*^\alpha f] = s^\alpha \mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

Demostración. Por la proposición 2.1.1 se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[D_*^\alpha f] &= \mathcal{L}[J^{n-\alpha} f^{(n)}] \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f^{(n)}] \\
&= s^{\alpha-n} \left[s^n \mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \right] \\
&= s^\alpha \mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

□

La siguiente tabla da un breve resumen de las transformadas de Laplace de algunas funciones importantes que se requerirán posteriormente.

$\mathcal{L}[y]$	$y(t)$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{at}$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha + a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{at} - e^{bt})$

Cuadro 2.1: Tabla de Transformadas.

2.2. Ecuación integral de Abel de primer tipo

En esta sección y en la siguiente haremos uso de la herramienta que proporciona la transformada de Laplace que, al igual que en el caso de orden entero, nos ayudará a entender y resolver las ecuaciones integrales simples de Abel.

La *ecuación integral de Abel de primer tipo* está definida como

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = f(x),$$

donde $0<\alpha<1$ y $f(t)$ es una función dada. Notamos rápidamente que podemos reescribir la ecuación como

$$J^\alpha u(x) = f(x),$$

y consecuentemente resolverla en términos de la derivada fraccional

$$u(x) = D^\alpha f(x).$$

Tratemos ahora de expresar la solución en términos de ambas derivadas fraccionales usando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[J^\alpha u] = \mathcal{L}[f].$$

Podemos ahora aplicar la transformada inversa de dos maneras, la siguiente nos da la solución en términos de la derivada fraccional

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u] &= \frac{\mathcal{L}[f]}{s^{-\alpha}}\\ &= s\left(\frac{\mathcal{L}[f]}{s^{1-\alpha}}\right).\end{aligned}$$

Así,

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt.$$

Apliquemos la transformada de Laplace de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \frac{\mathcal{L}[f]}{s^\alpha}\\ &= \frac{1}{s^{1-\alpha}}\left[s\mathcal{L}[f]-f(0)\right]+\frac{f(0)}{s^{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

De aquí que

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha}dt + f(0)\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\\ &= D_*^\alpha f(x) + f(0)\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

Por tanto, hemos obtenido la solución en términos de ambas derivadas.

2.3. Ecuación integral de Abel de segundo tipo

La *ecuación integral de segundo tipo de Abel* está definida como

$$u(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x),$$

donde $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y f una función dada. En [2] se prueba que la ecuación se puede escribir en términos del operador fraccional como

$$(I + \lambda J^{\alpha})u(x) = f(x), \tag{2.1}$$

de donde

$$u(x) = (I + \lambda J^{\alpha})^{-1} f(x).$$

Además, se prueba que

$$(I + \lambda J^{\alpha})^{-1} f(x) = \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda)^n J^{\alpha n} \right) f(x).$$

Nótese que

$$\begin{aligned} J^{\alpha n} f(x) &= \Phi_{\alpha n}(x) * f(x) \\ &= \frac{t^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)} * f(x), \end{aligned}$$

donde

$$\Phi_{\alpha}(x) := \frac{x^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Podemos reescribir la solución como

$$u(x) = f(x) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^n}{\Gamma(\alpha n)} \right) * f(x),$$

y dado que

$$E_{\alpha}(-\lambda x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)},$$

podemos escribir, finalmente, la solución de la siguiente manera

$$u(x) = f(x) + \frac{d}{dx} E_{\alpha}(-\lambda x^{\alpha}) * f(x). \tag{2.2}$$

Es posible obtener la solución aquí expuesta por medio de la trasformada de Laplace. Si en (2.1) usamos la transformada de Laplace, obtenemos

$$\left[1 + \frac{\lambda}{s^{\alpha}} \mathcal{L}[u] \right] = \mathcal{L}[f],$$

de donde se obtiene

$$\mathcal{L}[u] = \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha}+\lambda}\mathcal{L}[f] = s\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+1}}\right)\mathcal{L}[f],$$

y, dado que,

$$\mathcal{L}[E_{\alpha}(-\lambda x^{\alpha})] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+1}},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})dt \\ &= \int_0^x f'(x-t)E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})dt + f(0)E_{\alpha}(-\lambda x^{\alpha}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Analicemos otra forma de obtener la solución. No es difícil ver que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u] &= \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha}-\lambda}\mathcal{L}[f] \\ &= s\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-\lambda}-1\right)\mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[f], \end{aligned}$$

lo cual implica

$$u(x) = \int_0^x f(x-t)\frac{d}{dt}E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})dt + f(x)$$

$$= f(x) + \frac{d}{dx}E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha}) * f(x),$$

que coincide con la solución obtenida en (2.2).

2.4. La tautócrona

La tautócrona o isócrona es una curva tal que si deslizamos un cuerpo sin fricción a partir del reposo sobre ella, le tomará el mismo tiempo llegar al punto más bajo de la curva desde cualquier punto inicial. El nombre deriva del griego tauto, por mismo y chronos, por tiempo.

El problema es determinar la forma de la curva que describe la tautócrona. Puede resolverse de diversas formas (generalmente por principio variacional) y siempre se llegará a que la curva que satisface la tautócrona es una cicloide, que es un tipo de las curvas llamadas ruletas, que se generan al girar alguna otra curva (usualmente una circunferencia).
Supongamos que una partícula parte del punto $P = (a, b)$ y que la parte inferior de la curva es el origen, donde

$$r(t) = (x(t), y(t)),$$

es la curva deseada. Fijemos las condiciones iniciales: queremos que la curva parta del punto P, por lo que de bemos tener

$$(x(0), y(0)) = (a, b),$$

y buscamos que parta del reposo, es decir

$$(x'(0), y'(0)) = (0, 0).$$

Sabemos que la longitud de la curva del punto P a $r(t)$ está dada por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du, \tag{2.4}$$

y que podemos expresarla como función de la altura y de la siguiente forma

$$s(y) = \int_b^y f(y) dy,$$

donde $f(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. La función

$$f(y) = \frac{d}{dy} s(y), \tag{2.5}$$

es la *razón de cambio de la longitud de arco de la curva con respecto a la altura*, que, por el Teorema Fundamental de Cálculo, es

$$f(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

La energía potencial que perderá la partícula al recorrer la distancia $b - y$ es

$$E_p = mg(b - y),$$

y en ese recorrido ganará la energía cinética

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

donde m es la masa de la partícula, g la aceleración de la gravedad y v la velocidad de la partícula. Por el principio de conservación de la energía se tiene

$$v(y) = \sqrt{2g(b - y)}. \tag{2.6}$$

La partícula recorrerá infinitesimalmente una distancia dada por $ds = f(y)dy$ a una velocidad $v(y)$ por lo que el tiempo total que le tomará a la partícula llegar del punto de partida al origen será

$$t = \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{2g(b - y)}} dy.$$

El problema nos dice que el tiempo debe ser constante en cualquier punto, es decir, buscamos que

$$\int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b - y}} dy = c\sqrt{2g}, \tag{2.7}$$

para toda b; para resolver el problema de manera tradicional definamos

$$h(y) = y^{-\frac{1}{2}},$$

entonces

$$(f * h)(b) = \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}} dy = c\sqrt{2g}.$$

Aplicando transformada de Laplace a esta última ecuación se tiene

$$\mathcal{L}[f]\mathcal{L}[h] = \frac{c\sqrt{2g}}{s}.$$

Calculando $\mathcal{L}[h]$ y despejando $\mathcal{L}[f]$ se obtiene

$$\mathcal{L}[f] = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi s}}.$$

Ahora, tomamos la transformada inversa de Laplace para llegar a

$$f(y) = \frac{c\sqrt{2g}}{\pi} y^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

Sea $k = c\sqrt{2g}/\pi$. Para calcular la función $x(t)$ notemos que

$$ky^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1},$$

y al despejar el diferencial lo podemos expresar como

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{k^2 - y}{y}}.$$

Ahora, usemos el cambio de variable $y = k^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$ para expresar la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \left(\sqrt{\frac{k^2 - k^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}{k^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}}\right)\left(k^2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= \left(\sqrt{\cot^2\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\left(k^2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= k^2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \frac{k^2}{2}\left(\cos t + 1\right).
\end{aligned}$$

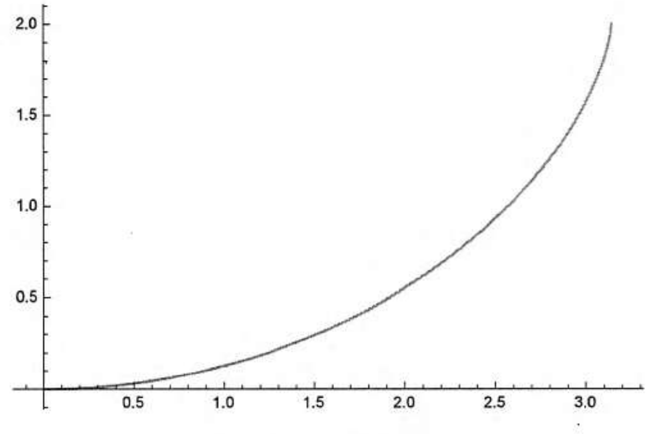

Figura 2.1: Cicloide

Al integrar y considerar condiciones iniciales se obtiene

$$x(t) = \frac{k^2}{2}(t + \operatorname{sen} t).$$

Análogamente se puede obtener

$$y(t) = \frac{k^2}{2}(1 - \cos t).$$

La curva

$$r(t) = \left(\frac{k^2}{2}(t + \operatorname{sen} t), \frac{k^2}{2}(1 - \cos t)\right),$$

es una cicloide y es la curva solución al problema.

Resolvamos el problema con cálculo fraccionario.

Al retomar (2.7), notamos que se puede escribir de la forma

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) J^{\frac{1}{2}} f(y) = c\sqrt{2g}.$$

Así, reescribimos el problema como una ecuación integral fraccional de la siguiente manera:

$$J^{\frac{1}{2}} f(y) = c\sqrt{\frac{2g}{\pi}}.$$

Al tomar derivada fraccional de orden $\frac{1}{2}$ en ambos lados obtenemos.

$$f(y) = c\frac{\sqrt{2g}}{\pi} y^{-1/2},$$

lo cual coincide con (2.8).

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales Fraccionales

Las ecuaciones diferenciales fraccionales son, en efecto, ecuaciones en las que aparecen derivadas de orden fraccional. A continuación, vamos a precisar esto.

Definición 3.0.1. *Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números reales no negativos, no todos cero y $f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ una función. Si $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \neq 0$ para algún $j \in \{3, 4, \ldots, n+2\}$, entonces la ecuación*

$$f\left(t, x(t), D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \cdots, D^{\alpha_n}x(t)\right) = 0,$$

se llama Ecuación Diferencial Fraccional de orden $\alpha = \text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ y una función $x : I \to \mathbb{R}$, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, que satisfaga la Ecuación Diferencial Fraccional se llama solución x.

Observación 3.0.1. *La definición para una ecuación en la que aparecen derivadas fraccionales de Caputo es análoga a la anterior.*

En algunas partes escribiremos EDOF en lugar de Ecuación Diferencial de Orden Fraccional.

Teorema 3.0.1 ([4], pp. 136-138). *La EDOF*

$$D^\alpha y = f(x, y(x)), \quad D^{\alpha-k}y(0) = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

para $n-1 < \alpha \leq n$, tiene solución $y \in C[0, h]$ única si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua, está acotada y satisface la condición de Lipschitz

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|,$$

donde M es una constante positiva.

Teorema 3.0.2 ([4], p. 141). *La EDOF*

$$D_*^\alpha y = f(x, y(x)), \quad y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

tiene solución $y \in C[0, h]$ única si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua, está acotada y satisface la condición de Lipschitz

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$$

donde M es una constante positiva.

Veamos algunos ejemplos de [3] antes de adentrarnos en el análisis.

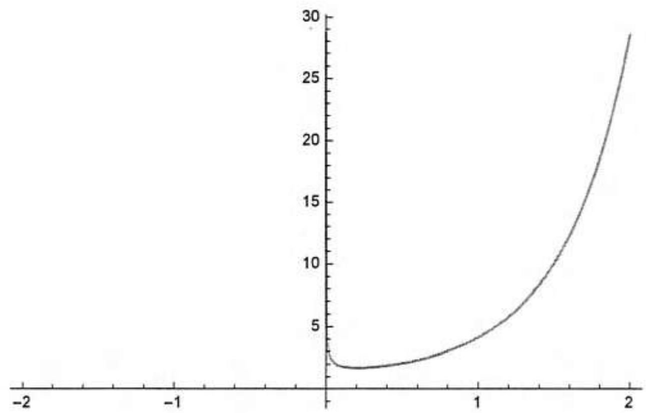

Figura 3.1: $y(t) = t^{-\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}(t^{\frac{2}{3}})$.

Ejemplo 3.0.1. Resolvamos la EDOF

$$D^{\frac{2}{3}} y(t) = a y(t),$$

donde a es una constante. Si aplicamos la trasformada de Laplace en ambos lados de la ecuación anterior obtenemos

$$s^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}[y] - J^{\frac{1}{3}} y(0) = a \mathcal{L}[y]. \tag{3.1}$$

Denotemos por $J^{\frac{1}{3}} y(0)$ al valor de $J^{\frac{1}{3}} y$ en $t = 0$. Llamándole c a este valor, podemos reescribir la ecuación (3.1) como

$$s^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}[y] - c = a \mathcal{L}[y].$$

Resolviendo para $\mathcal{L}[y]$ se tiene

$$\mathcal{L}[y] = \frac{c}{s^{\frac{2}{3}} - a}.$$

Finalmente, al tomar la transformada inversa de Laplace, se concluye

$$y(t) = c t^{-\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}(a t^{\frac{2}{3}}).$$

En la figura 3.1 se muestra la gráfica de esta función correspondiente a $a = 1$.

Ejemplo 3.0.2. Resolvamos ahora la ecuación diferencial fraccional

$$D^{\frac{4}{3}} y(t) = 0.$$

Al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación fraccional obtenemos

$$s^{\frac{4}{3}} \mathcal{L}[y] - s J^{\frac{2}{3}} y(0) - D^{\frac{1}{3}} y(0) = 0. \tag{3.2}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, denotemos a $J^{\frac{2}{3}} y(0)$ y $D^{\frac{1}{3}} y(0)$ por c_1 y c_2, respectivamente. Ahora, reescribamos la ecuación (3.2) como

$$s^{\frac{4}{3}} \mathcal{L}[y] - c_1 s - c_2 = 0.$$

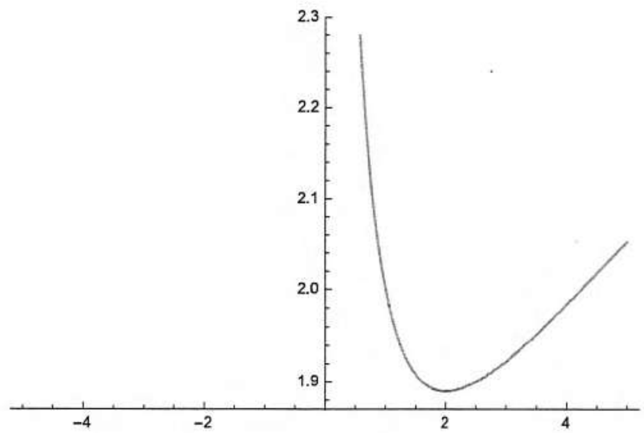

Figura 3.2: $y(t) = t^{-\frac{2}{3}} + t^{\frac{1}{3}}$.

Resolviendo para $\mathcal{L}[y]$ obtenemos

$$\mathcal{L}[y] = \frac{c_1 s}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}}.$$

Finalmente, tomamos la transformada inversa de Laplace de la ecuación anterior para obtener la solución $y(t)$, dada por

$$y(t) = \tfrac{c_1}{\Gamma(\frac{1}{3})} t^{-\frac{2}{3}} + \tfrac{c_2}{\Gamma(\frac{4}{3})} t^{\frac{1}{3}}. \qquad \diamondsuit.$$

A continuación, generalizaremos la ecuación resuelta en el primer ejemplo.

Ejemplo 3.0.3. Consideremos el problema de condición inicial

$$D^\alpha y(t) = a y(t), \qquad y(0) = k,$$

donde $0 < \alpha \leq 1$ y $a \in \mathbb{R}$. Al tomar la transformada de Laplace en ambos lados obtenemos

$$s^\alpha \mathcal{L}[y] - J^{1-\alpha} y(0) = a\mathcal{L}[y]. \tag{3.3}$$

Tal cual hicimos en los ejemplos anteriores, denotemos $J^{1-\alpha}y(0)$ por c. Entonces, la ecuación (3.3) se expresa como

$$s^\alpha \mathcal{L}[y] - c = a\mathcal{L}[y].$$

Despejando $\mathcal{L}[y]$ obtenemos

$$\mathcal{L}[y] = \frac{c}{s^\alpha - a}.$$

Luego, al aplicar la transformada inversa de Laplace, se obtiene

$$y(t) = c t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(a t^\alpha).$$

Se puede ver en [4] que

$$\lim_{t \to 0^+} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(a t^\alpha) = 1. \tag{3.4}$$

Así,

$$\lim_{t \to 0^+} y(t) = c.$$

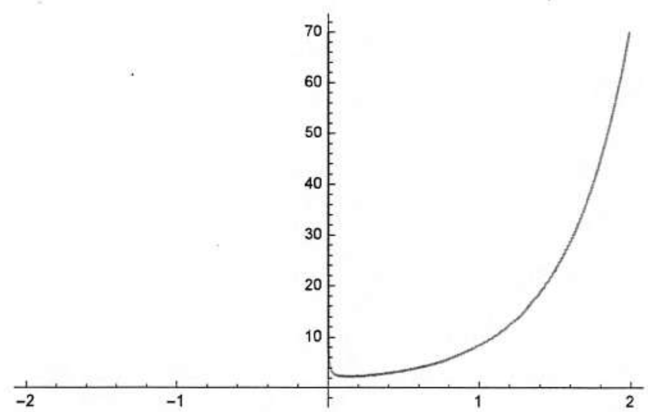

Figura 3.3: $y(t) = t^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}})$.

Por lo tanto, se concluye que

$$y_0 = J^{1-\alpha} y(0).$$

Finalmente, la solución al problema de valor inicial es

$$y(t) = kt^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^{\alpha}). \qquad \diamondsuit$$

3.1. Ecuaciones de Relajación y Oscilación

Analizaremos ahora Ecuaciones Diferenciales Fraccionales que generalicen los *fenómenos de relajación y Oscilación*, las cuales, en su forma más simple están gobernados por ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, respectivamente.
Primero, la ecuación de relajación clásica está definida como

$$u'(t) = -u(t) + q(t), \tag{3.5}$$

donde q es una función continua cuya, solución bajo la condición inicial $u(0) = c_0$, es

$$u(t) = c_0 e^{-t} + \int_0^t q(t-\tau) e^{-\tau} d\tau. \tag{3.6}$$

La ecuación de oscilación está definida por la ecuación diferencial de orden entero

$$u''(t) = -u(t) + q(t), \tag{3.7}$$

donde q es una función continua. La solución, bajo las condiciones iniciales $u(0) = c_0$ y $u'(0) = c_1$, es

$$u(t) = c_0 \cos(t) + c_1 \operatorname{sen}(t) + \int_0^t q(t-\tau) \operatorname{sen}(\tau) d\tau. \tag{3.8}$$

Desde el punto de vista de Cálculo Fraccional, una generalización natural es reemplazar la derivada de orden entero, por una de orden fraccional; para preservar el tipo de condiciones iniciales impuestas en el problema del fenómeno clásico las remplazaremos con derivadas fraccionales de Caputo, lo haremos con una de orden $0 < \alpha \leq 1$. Para la ecuación diferencial de relajación se adoptará el nombre de *ecuación diferencial fraccional de relajación simple* y para la ecuación de oscilación el nombre *ecuación diferencial fraccional de oscilación simple.*

3.1.1. Ecuación Diferencial Fraccional de Relajación Simple

La ecuación diferencial fraccional de relajación simple la definimos como

$$D_*^\alpha u(t) = -u(t) + q(t),$$

donde q es continua y $0 < \alpha \leq 1$, sujeta a la condición inicial $u(0) = c_0$.
Para resolver la ecuación usaremos la transformada de Laplace ambos lados de la ecuación. Usando el teorema de la transformada de una derivada de orden α se tiene

$$\mathcal{L}[u]s^\alpha - s^{\alpha-1}u(0) = -\mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[q]. \tag{3.9}$$

Al despejar $\mathcal{L}[u]$ la expresión queda de la forma

$$\mathcal{L}[u] = \frac{\mathcal{L}[q]}{s^\alpha + 1} + \frac{c_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}. \tag{3.10}$$

Ahora, dado que

$$\mathcal{L}[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)] = \frac{1}{s^\alpha + 1},$$

podemos reescribir la ecuación (3.10) en la forma

$$\mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[q]\mathcal{L}[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)] + \frac{c_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}. \tag{3.11}$$

Adicionalmente, se tiene la relación

$$\mathcal{L}[E_\alpha(-t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1},$$

la cual sustituimos en (3.11) y aplicamos la transformada de Laplace inversa para obtener

$$u(t) = \int_0^t q(t-\tau)E_\alpha(-\tau^\alpha)d\tau + c_0 E_\alpha(-t^\alpha). \tag{3.12}$$

Además, dado que

$$E_1(-t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{\Gamma(k+1)} = e^{-t},$$

si tomamos $\alpha = 1$ en la ecuación (3.12), obtenemos la solución (3.6) de (3.5), por lo que recuperamos el caso de orden entero, lo cual no es novedad.

3.1.2. Ecuación Diferencial Fraccional de Oscilación Simple

La ecuación diferencial fraccional de oscilación simple la definimos como

$$D_*^{2\alpha} u(t) = -u(t) + q(t),$$

donde q es una función continua y $0 < \alpha \leq 1$, bajo las condiciones iniciales

$$u(0) = c_0, \qquad u'(0) = c_1.$$

La resolveremos por medio de la transformada de Laplace aplicada a una derivada de Caputo se tiene

$$s^{2\alpha}\mathcal{L}[u] - s^{2\alpha-1}f(0) - s^{2\alpha-2}f'(0) = -\mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[q],$$

de donde despejamos $\mathcal{L}[u]$, para obtener la expresión

$$\mathcal{L}[u] = \frac{\mathcal{L}[q]}{s^{2\alpha}+1} + \frac{c_0 s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha}+1} + \frac{c_1 s^{2\alpha-2}}{s^{2\alpha}+1}.$$

Ahora, usando el hecho de que

$$\frac{s^{2\alpha-\beta}}{s^{2\alpha}+1} = \mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{2\alpha,\beta}(-t^{2\alpha})\right],$$

se tiene, al usar la transformada inversa de Laplace, que la solución es

$$u(t) = \int_0^t q(t-\tau)\tau^{2\alpha-1}E_{2\alpha,2\alpha}(-\tau^{2\alpha})d\tau + c_0E_{2\alpha}(-t^{2\alpha}) + c_1tE_{2\alpha,2}(-t^{2\alpha}). \tag{3.13}$$

Si tomamos $\alpha = 1$ en la solución (3.13) llegaremos a la solución (3.8) de (3.7), esto es claro observando que

$$E_2(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{\Gamma(2k+1)} = \cos(t),$$

y que

$$E_{2,2}(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)^k t^{2k}}{\Gamma(2k+1+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$$

$$= \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{t}\,\mathrm{sen}(t).$$

3.2. Función Exponencial Fraccionaria

Consideremos la función exponencial

$$x(t) = x_0e^{at}, \quad x_0, a \in \mathbb{R},$$

que es la solución del problema de valor inicial

$$x'(t) = ax(t) \quad , \quad x(0) = x_0.$$

Buscaremos, de manera similar, definir una función exponencial fraccionaria como la solución de la ecuación diferencial fraccional con problema de valor inicial fraccionario de orden $n-1 < \alpha \leq n$

$$D^\alpha x(t) = a^\alpha x(t), \quad D^{\alpha-k-1}x(0) = x_k, \quad k = 0, 1 \ldots, n-1,$$

para el caso de la derivada de Riemann-Liouville; mientras que para la derivada de Caputo será

$$D_*^\alpha x(t) = a^\alpha x(t), \quad x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1 \ldots, n-1,$$

en el cual supondremos $a > 0$ para no lidiar con números negativos elevados a una potencia fraccionaria.

3.2.1. Función Exponencial Fraccional de Riemann-Liouville

Partiremos de la ecuación diferencial fraccional

$$D^{\alpha}x(t) = a^{\alpha}x(t),$$

bajo las condiciones iniciales

$$D^{\alpha-k-1}x(0) = x_k, \quad k = 0, 1 \ldots, n-1.$$

Como ya se ha hecho antes, aplicamos la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[D^{\alpha}x] = a^{\alpha}\mathcal{L}[x],$$

y llegamos a la expresión

$$s^{\alpha}\mathcal{L}[x] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} = a^{\alpha}\mathcal{L}[x].$$

Ahora, procedemos, igual que siempre, despejando $\mathcal{L}[x]$

$$\mathcal{L}[x] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k x_k}{s^{\alpha} - a^{\alpha}}.$$

Nótese que para cada término de la suma se tiene

$$\begin{aligned} \frac{s^k x_k}{s^{\alpha} - a^{\alpha}} &= \frac{x_k}{s^{\alpha-k}\left(1 - \left(\frac{a}{s}\right)^{\alpha}\right)} \\ &= \frac{x_k}{s^{\alpha-k}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s}\right)^{j\alpha} \\ &= x_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}}{s^{(j+1)\alpha-k}}. \end{aligned}$$

Luego, aplicando la transformada inversa de Laplace y usando el hecho de que

$$\mathcal{L}[t^{\alpha-1}] = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}},$$

para $\alpha > 0$, llegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[x_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}}{s^{(j+1)\alpha-k}}\right] &= x_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{(j+1)\alpha-k-1}}{\Gamma((j+1)\alpha-k)} \\ &= x_k t^{\alpha-k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(at)^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+\alpha-k)} \\ &= x_k t^{\alpha-k-1} E_{\alpha,\alpha-k}((at)^{\alpha}). \end{aligned}$$

Así, finalmente, la solución es

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^{\alpha-k-1} E_{\alpha,\alpha-k}((at)^{\alpha}).$$

Definimos entonces

$$\mathcal{E}^a_{\alpha,k}(t) = t^{\alpha-k-1}E_{\alpha,\alpha-k}((at)^\alpha),$$

como la *función exponencial fraccionaria de Riemann-Liouville.* Ahora mostraremos que $x(t)$ en efecto satisface la ecuación diferencial fraccional. Notemos que

$$\begin{aligned}
D^\alpha \mathcal{E}^a_{\alpha,k}(t) &= D^\alpha\left[t^{\alpha-k-1}E_{\alpha,\alpha-k}((at)^\alpha)\right]\\
&= D^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\alpha}\frac{t^{(j+1)\alpha-k-1}}{\Gamma((j+1)\alpha-k)}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^{j\alpha}}{\Gamma((j+1)\alpha-k)}D^\alpha(t^{(j+1)\alpha-k-1})\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^{j\alpha}}{\Gamma((j+1)\alpha-k)}\frac{\Gamma((j+1)\alpha-k)t^{(j+1)\alpha-k-1-\alpha}}{\Gamma((j+1)\alpha-k-\alpha)}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^{j\alpha}t^{j\alpha-k-1}}{\Gamma(j\alpha-k)}.
\end{aligned}$$

Al tomar $j=0$ en la suma, el término $\Gamma(j\alpha-k)=\Gamma(-k)$ toma un valor infinito, pues los enteros negativos son polos de la función Gamma, así que la suma se puede hacer desde $j=1$, por lo que podemos re-indexar

$$\begin{aligned}
D^\alpha \mathcal{E}^a_{\alpha,k}(t) &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a^{j\alpha}t^{j\alpha-k-1}}{\Gamma(j\alpha-k)}\\
&= a^\alpha\sum_{j=1}^{\infty}a^{j\alpha}\frac{t^{j\alpha-k-1}}{\Gamma((j+1)\alpha-k)}\\
&= a^\alpha\mathcal{E}^a_{\alpha,k}(t),
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
D^\alpha x(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} D^\alpha\mathcal{E}^a_{\alpha,k}(t)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k a^\alpha\mathcal{E}^a_{\alpha,k}(t)\\
&= a^\alpha x(t).
\end{aligned}$$

Comprobemos ahora las condiciones iniciales. Para $m = 0, 1, \ldots, n-1$ se tiene

$$\begin{aligned} D^{\alpha-m-1}\mathcal{E}^a_{\alpha,k}(t) &= D^{\alpha-m-1}\sum_{j=0}^{\infty} a^{j\alpha}\frac{t^{(j+1)\alpha-k-1}}{\Gamma((j+1)\alpha-k)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^{j\alpha}}{\Gamma((j+1)\alpha)-k}\frac{\Gamma((j+1)\alpha-k)t^{(j+1)\alpha-k-1-(\alpha-m-1)}}{\Gamma((j+1)\alpha-k-(\alpha-m-1))} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^{j\alpha}t^{j\alpha-k+m}}{\Gamma(j\alpha-k+m+1)} \\ &= \frac{t^{-k+m}}{\Gamma(-k+m+1)}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a^{j\alpha}t^{j\alpha-k+m}}{\Gamma(j\alpha-k+m+1)}. \end{aligned}$$

Vemos que el primer término toma el valor cero si $m < k$. Al evaluar en $t = 0$ todos los términos de la suma en que $j > 0$ son cero pues $\alpha - k + m > 0$, por lo que sólo importa el caso $j = 0$; tenemos 3 casos dependiendo de k y m:

i) Si $m > k$, entonces

$$D^{\alpha-m-1}\mathcal{E}^a_{\alpha,k}(0) = 0.$$

ii) Si $m = k$, nos queda

$$D^{\alpha-m-1}\mathcal{E}^a_{\alpha,k}(0) = 1.$$

iii) Si $k > m$, se tiene

$$D^{\alpha-m-1}\mathcal{E}^a_{\alpha,k}(0) = 0.$$

Concluimos entonces

$$D^{\alpha-m-1}\mathcal{E}^a_{\alpha,k}(0) = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq k \\ 1 & si \quad m = k \end{cases}$$

Por lo tanto, para toda $m = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} D^{\alpha-m-1}x(0) &= \sum_{k=0}^{n-1} D^{\alpha-m-1}\mathcal{E}^a_{\alpha,k}(0) \\ &= x_m. \end{aligned}$$

Por tanto las condiciones iniciales se cumplen.

3.2.2. Función Exponencial Fraccional de Caputo

Para la derivada de Caputo, consideremos la ecuación diferencial fraccional

$$D^\alpha_* x(t) = a^\alpha x(t),$$

con las condiciones iniciales

$$x^{(k)} = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

De nuevo, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}[D_*^\alpha x] = a^\alpha \mathcal{L}[x],$$

y obtenemos

$$s^\alpha \mathcal{L}[x] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} x_k = a^\alpha \mathcal{L}[x].$$

Despejando $\mathcal{L}[x]$, y re-acomodando todos los términos obtenemos la expresión:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x] &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - a^\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{s^{k+1}} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{s}\right)^\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{s^{k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s}\right)^{j\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}}{s^{j\alpha+k+1}}.
\end{aligned}$$

Al calcular la transformada inversa de Laplace se tiene

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\alpha} \frac{t^{j\alpha+k}}{\Gamma(j\alpha+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(at)^\alpha}{\Gamma(j\alpha+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k E_{\alpha,\alpha+1}((at)^\alpha).
\end{aligned}$$

Definimos la función

$$\mathcal{E}^a_{*,\alpha,k}(t) = t^k E_{\alpha,\alpha+1}((at)^\alpha),$$

a la cual llamaremos *la función exponencial fraccional de Caputo*. Al tomar su derivada de

Caputo de orden α tenemos

$$\begin{aligned}
D_*^\alpha \mathcal{E}^a_{*,\alpha,k}(t) &= D_*^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\alpha} \frac{t^{j\alpha+k}}{\Gamma(j\alpha+k+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+k+1)} D_*^\alpha (t^{j\alpha+k}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} J^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n}(t^{j\alpha+k}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+k+1)} J^{n-\alpha} \left[\frac{\Gamma(j\alpha+k+1)t^{j\alpha+k-n}}{\Gamma(j\alpha+k-n+1)}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+k-n+1)} J^{n-\alpha}(t^{j\alpha+k-n}),
\end{aligned}$$

el término en que $j=0$ es cero, por lo que

$$\begin{aligned}
D_*^\alpha \mathcal{E}^a_{*,\alpha,k}(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+k-n+1)} J^{n-\alpha}(t^{j\alpha+k-n}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+k-n+1)} \frac{\Gamma(j\alpha+k-n+1)t^{j\alpha+k-n+n-\alpha}}{\Gamma(j\alpha+k-n+n-\alpha+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}t^{(j-1)\alpha+k}}{\Gamma((j-1)\alpha+k+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}t^{j\alpha+k}}{\Gamma(j\alpha+k+1)} \\
&= a^\alpha \mathcal{E}^a_{*,\alpha,k}(t).
\end{aligned}$$

Así concluimos que la función satisface la ecuación diferencial fraccional, verifiquemos ahora que satisface las condiciones iniciales.
Para $m = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dt^m}\left[\mathcal{E}_{*,\alpha,k}(t)\right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+k+1)} \frac{d^m}{dt^m}(t^{j\alpha+k}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+k+1)} \frac{\Gamma(j\alpha+k+1)t^{j\alpha+k-m}}{\Gamma(j\alpha+k-m+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\alpha}t^{j\alpha+k-m}}{\Gamma(j\alpha+k-m+1)}.
\end{aligned}$$

Si $j > 0$ los términos son cero, por lo que sólo nos importa el término inicial

$$\frac{t^{k-m}}{\Gamma(k-m+1)}.$$

Tenemos otra vez tres casos, si $k \neq m$ será cero, si $k = m$ será 1, así

$$\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{E}_{*,\alpha,k}(0) = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq k \\ \\ 1 & si \quad m = k. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m}x(0) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \frac{d^m}{dt^m}\mathcal{E}^a_{*,\alpha,k}(0) \\ &= x_m. \end{aligned}$$

Efectivamente, la solución satisface las condiciones iniciales.

3.3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionales

Para esta parte, estaremos considerando, $0 < \alpha < 2$ y omitiremos la definición de derivada con la cual estemos trabajando, pues en lo que sigue se darán argumentos de que la dinámica de un sistema fraccional en principio no depende de la definición de derivada con la cual se trabaje.

En general, un sistema dinámico autónomo de tiempo continuo de orden fraccional puede ser descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccional

$$D^\alpha x = f(x), \;\; x(t_0) = x_0, \tag{3.14}$$

donde

$$D^\alpha x = \begin{bmatrix} D^{\alpha_1}x_1 \\ D^{\alpha_2}x_2 \\ \vdots \\ D^{\alpha_n}x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

con $x_j \in \mathbb{R}$ variables reales y f_j funciones reales escalares suficientemente suaves. Además, los órdenes de derivación deben ser $0 < \alpha_j < 2$, $j = 1, \ldots, n$.
En la mayoría de los trabajos se trabaja con una forma específica en los ordenes de derivación α_j llamada *conmensurabilidad*, en el siguiente sentido.

Definición 3.3.1. *Si $\alpha_j = j\alpha$, $j = 1, 2, \ldots, n$, entonces el sistema* (3.14) *se dice ser de orden conmensurado α.*

Si el sistema no es de orden conmensurado, existe una forma de conmensurarlo, sin embargo, es una parte que no se abordará en este trabajo, pero se puede verificar en [6], [7].
De igual forma que en los sistemas de orden entero, se definen algunos conceptos importantes para el análisis de sistemas de orden fraccional, como lo son los *puntos de equilibrio* y la *estabilidad* del sistema en un punto de equilibrio.

Definición 3.3.2. *Un vector constante x_0 se dice ser punto de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionales* (3.14), *si*

$$D^\alpha x_0 = f(x_0).$$

Al igual que en el caso ordinario, cualquier sistema con punto de equilibrio $x_0 \neq 0$ puede ser trasladado al origen vía el cambio de variable $y = x - x_0$.

Observación 3.3.1. *El sistema* (3.14) *con la derivada de Caputo tiene el mismo equilibrio que el sistema de orden entero $\dot{x}(t) = f(x)$, ésto es, $f(x_0) = 0$. En el sentido de Riemann-Liouville no es cero, debido a que la derivada de Riemann-Liouville de una constante no es cero. A saber, $D^\alpha(1) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, $t > 0$. Por tanto, por el lema 1.3.1, el punto de equilibrio x_0 en el sentido de R-L satisface $f(x_0) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}x_0$.*

Dado que ya se ha establecido la relación entre la derivada de Caputo y la de Riemann-Liouville, el siguiente resultado establece la relación entre los equilibrios con cada una de sus derivadas.

Lema 3.3.1. *Un punto $x(t_0) = x_0$ es equilibrio del sistema fraccional $D_*^\alpha x = f(x)$ si, y sólo si, x_0 es un punto de equilibrio de $D^\alpha x = f(x)$, para $0 < \alpha < 2$.*

Demostración. Sabemos que $D^\alpha(1) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, y entonces $D^\alpha x_0 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}x_0$. De aquí que, $D^\alpha x_0 = f(x_0) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}x_0$. Supóngase que $D_*^\alpha x_0 = f(x_0) = 0$. Del lema 1.2 obtenemos la relación

$$\begin{aligned} D^\alpha x_0 &= D_*^\alpha x_0 + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}x_0 \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}x_0 \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

Ahora, supóngase que $D^\alpha x_0 = f(x_0)$. No es difícil ver que $D^\alpha x_0 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}x_0 = D_*^\alpha x_0 + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}x_0$. Por tanto, $D_*^\alpha x_0 = 0$. □

La estabilidad se define de manera similar al caso entero para cualquier derivada fraccional.

Definición 3.3.3. *El sistema*

$$D^\alpha x(t) = Ax(t), \;\; x(t_0) = x_0,$$

se dice estable en el origen si para todo x_0 existe K tal que para todo $t \geq 0$ $\|x(t)\| \leq K$. Se dice asintóticamente estable en el origen si $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

Como es conocido, un sistema lineal también puede ser estudiado como una ecuación diferencial fraccional, de orden conmensurado α, expresada de la siguiente forma:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j D^{\alpha_{n-j}} y(t) = 0,$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son constantes, sin pérdida de generalidad podemos suponer $\alpha_i > \alpha_j$ si $i < j$. Haciendo el cambio de variable $D^{\alpha j}y(t) = x_{j+1}(t)$ podemos escribir

$$\begin{pmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax,$$

el cual tiene polinomio característico

$$p(s^\alpha) = \det(s^\alpha I - A) = \sum_{j=0}^{n} a_j s^{\alpha(n-j)},$$

que es un pseudo-polinomio. Así que, lo siguientes resultados caracterizan a los sistemas fraccionales estables.

Teorema 3.3.1 (Matignon, 1996 [6]). *El sistema lineal fraccional de orden conmensurado* α

$$D^\alpha x(t) = Ax(t), \;\; x(t_0) = x_0, \tag{3.16}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ *es asintóticamente estable en el origen si, y sólo si,* $|\arg(s_j)| > \frac{\pi}{2}$, *para toda raíz* s_j *de* $p_A(s^\alpha) = \det(s^\alpha I - A)$.

En general, el pseudo-polinomio $p(s^\alpha)$ no tiene un número finito de soluciones. Sin embargo, si consideramos $0 < \alpha < 2$ de orden conmensurado para el mapeo multi-valuado

$$\begin{aligned} \lambda &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ s &\mapsto \lambda(s) = s^\alpha, \end{aligned}$$

con la rama principal de logaritmo definida por $-\pi < \arg(s) < \pi$ y su correspondiente dominio λ definido por $-\alpha\pi < \arg(\lambda) < \alpha\pi$ tendremos un número finito de soluciones.

Teorema 3.3.2 (Matignon, 1996, 1998 [6, 7]). *El sistema*

$$D^\alpha x(t) = Ax(t), \;\; x(t_0) = x_0, \tag{3.17}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, *es asintótincamente estable si y sólo si* $|arg(\lambda_j)| > \alpha\frac{\pi}{2}$, *para toda* λ_j *que sea raíz de* $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, *donde* $\lambda = s^\alpha$.

Definamos los conjuntos $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| > \frac{\pi}{2}\}$, $\mathbb{C}^\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| > \alpha\frac{\pi}{2}\}$. En este sentido, por el teorema 3.3.2, el pseudo polinomio $p(s^\alpha)$ es $\mathbb{C}^-$ estable si, y sólo si, el polinomio de orden entero $p(\lambda) = p(s^\alpha)|_{s=\lambda^{1/\alpha}}$ es $\mathbb{C}^\alpha$ estable.

Ejemplo 3.3.1. *Consideremos el sistema de orden fraccional conmensurado*

$$D^\alpha x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{35}{18} & -\frac{19}{12} \end{pmatrix} x, \tag{3.18}$$

cuyo pseudo-polinomio característico es $p_A(\lambda^\alpha) = \lambda^{3\alpha} + \frac{19}{12}\lambda^{2\alpha} - \frac{35}{18}\lambda^\alpha + 1$. *Si hacemos el cambio de variable* $s = \lambda^\alpha$, *el polinomio* $p_A(s)$ *tiene raíces* $\lambda_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}i$ *y* $\lambda_3 = -\frac{9}{4}$. *No es difícil ver que* $\lambda_{1,2} = \frac{2}{3}e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ *y entonces* $|\arg(\lambda_j)| > \alpha\frac{\pi}{2}$ *para* $\alpha < \frac{2}{3}$, $j = 1, 2, 3$. *De aquí que, por los teoremas 3.3.1 y 3.3.2,* $p_A(\lambda^\alpha)$ *es* $\mathbb{C}^-$ *estable si, y sólo si* $p_A(s)$ *es* $\mathbb{C}^\alpha$ *estable, para* $\alpha < \frac{2}{3}$. *Podemos, entonces, tomar* $\alpha = \frac{1}{2}$ *para garantizar la* $\mathbb{C}^-$ *estabilidad de* $p_A(\lambda^{\frac{1}{2}})$.

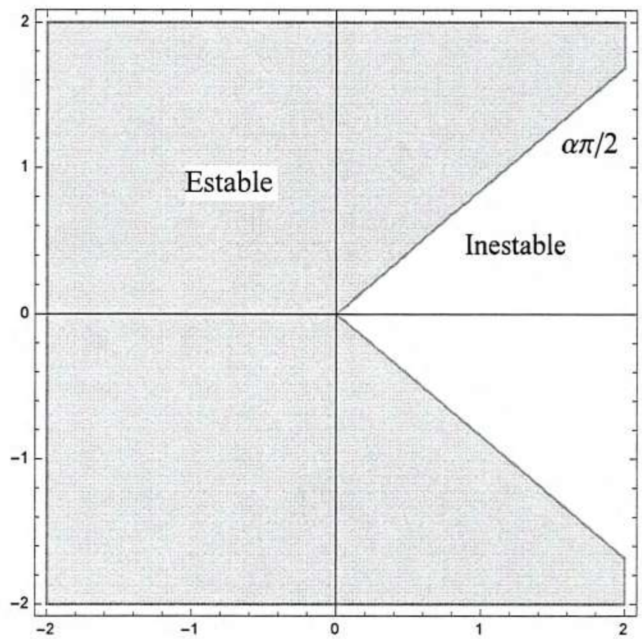

Figura 3.4: $0 < \alpha < 1$

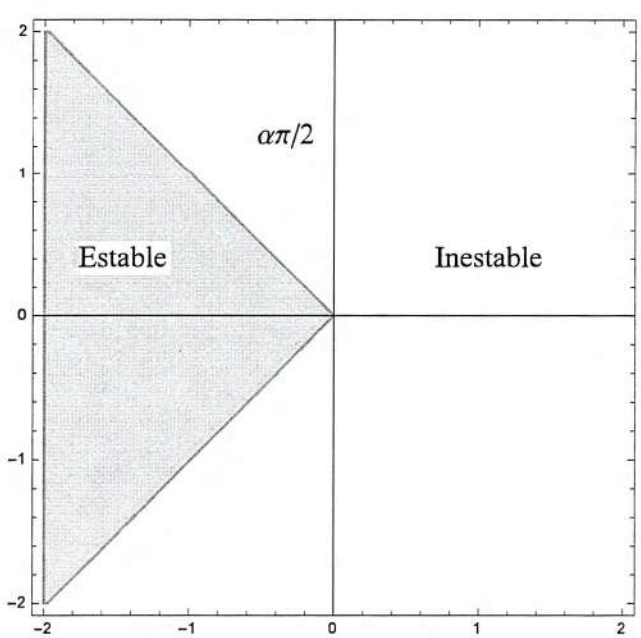

Figura 3.5: $1 < \alpha < 2$

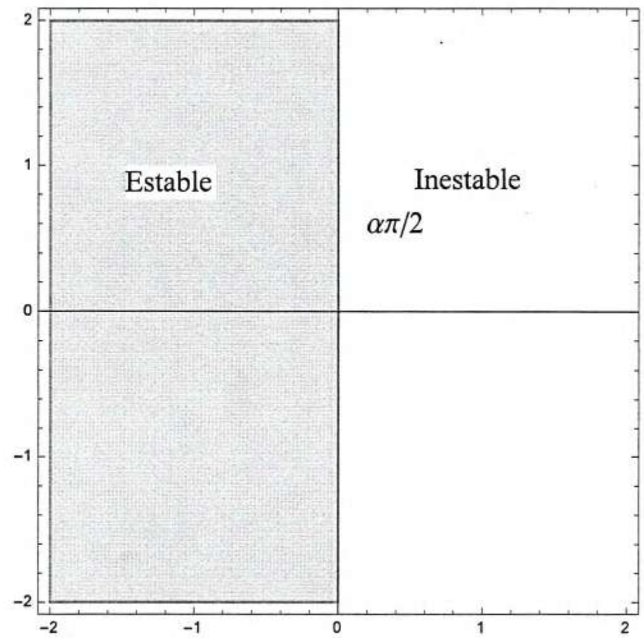

Figura 3.6: $\alpha = 1$

3.4. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionales Lineales en el Plano

Consideremos el sistema autónomo lineal con derivadas de orden fraccional

$$D_*^\alpha x = ax + by,$$
$$D_*^\alpha y = cx + dy,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc \neq 0$.
El punto $(0,0)$ es el único punto de equilibrio. El objetivo es resolver el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionales y obtener los planos fase, para analizar la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio. Haremos una comparación entre el caso fraccional y el caso ordinario. Para ello nos basaremos en [10].

Teniendo en cuenta que

$$D_*^\alpha(E_\alpha(\lambda t^\alpha)) = \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha),$$

y de forma análoga al caso ordinario $\alpha = 1$, buscamos soluciones de la forma

$$x(t) = AE_\alpha(\lambda t^\alpha),$$
$$y(t) = BE_\alpha(\lambda t^\alpha),$$

donde es claro que para $\lambda < 0$

$$x \to 0, y \to 0, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty,$$

y que para $\lambda > 0$

$$x \to \infty, y \to \infty, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty.$$

Sustituyendo en el sistema y re-acomodando, obtenemos

$$\begin{aligned}(a-\lambda)A + bB &= 0\\ cA + (d-\lambda)B &= 0,\end{aligned}$$

que puede ser visto como

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y similar al caso ordinario λ debe ser solución de la ecuación característica

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0,$$

De este modo debemos considerar los diferentes casos de las raíces.

Raíces Reales Distintas

En este caso la solución general es (ver [10])

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + A_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha),\\ y(t) &= B_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha),\end{aligned}$$

donde $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$.

Si las raíces son de signo contrario las soluciones tienden a infinito. Si las raíces son del mismo signo, entonces cuando t crece, las soluciones tienden al punto de equilibrio para raíces positivas y a infinito para raíces negativas. Para ilustrar el caso consideremos el sistema

$$\begin{aligned}D_*^\alpha x &= -x,\\ D_*^\alpha y &= -2y,\end{aligned}$$

para este caso la solución general es

$$\begin{aligned}x &= AE_\alpha(-t^\alpha),\\ y &= BE_\alpha(-2t^\alpha),\end{aligned}$$

puesto que la ecuación característica es

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Podemos observar que en el caso fraccionario el punto de equilibrio presenta un comportamiento similar al caso ordinario. La principal diferencia es que en el caso fraccionario las soluciones tienden al punto de equilibrio más lentamente que en el caso ordinario, por tanto es necesario tomar valores de t muy altos para conseguir que las soluciones se aproximen al punto de equilibrio.

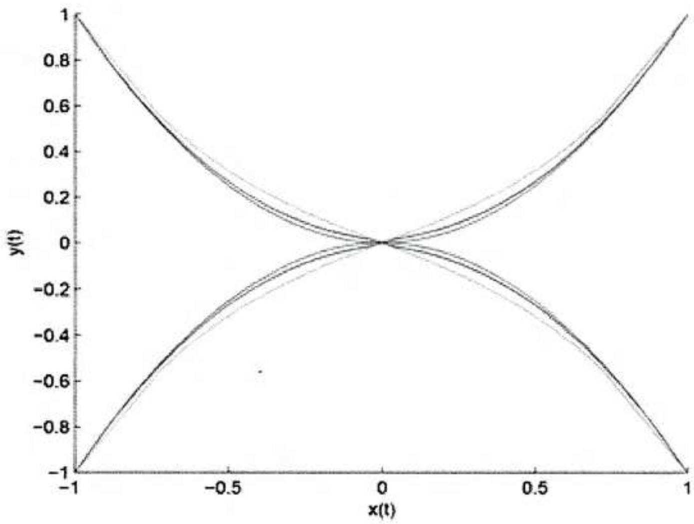

Figura 3.7: Plano de fases para el caso ordinario (rojo) y el caso fraccionario con $\alpha = 0{,}9$ (azul) y $\alpha = 0{,}5$ (verde).

3.4.1. Raíces Iguales

En este caso la solución general es

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + A_2 t^\alpha E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha), \\ y(t) &= B_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 t^\alpha E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha). \end{aligned}$$

Entonces cuando t crece, las soluciones tienden al punto de equilibrio para una raíz positiva y a infinito para una negativa. Para darnos una idea del caso, analicemos el siguiente sistema, que corresponde a la modelación de un problema de crecimiento descontrolado de poblaciones de células cancerígenas (ver [10]).

$$\begin{aligned} D_*^\alpha x &= -x, \\ D_*^\alpha y &= -y, \end{aligned}$$

con solución general

$$\begin{aligned} x(t) &= A E_\alpha(-t^\alpha), \\ y(t) &= B E_\alpha(-t^\alpha). \end{aligned}$$

El punto de equilibrio presenta en el caso fraccionario un comportamiento similar al caso ordinario; las trayectorias son iguales en ambos casos. La única diferencia es la velocidad de aproximación al punto de equilibrio. Así, en el caso fraccionario las soluciones tienden a (0,0) más lentamente que en el caso ordinario y son necesarios valores altos de t para observar que las soluciones se aproximan al punto de equilibrio.

Consideremos también el sistema

$$\begin{aligned} D_*^\alpha x &= -2x, \\ D_*^\alpha y &= x - 2y, \end{aligned}$$

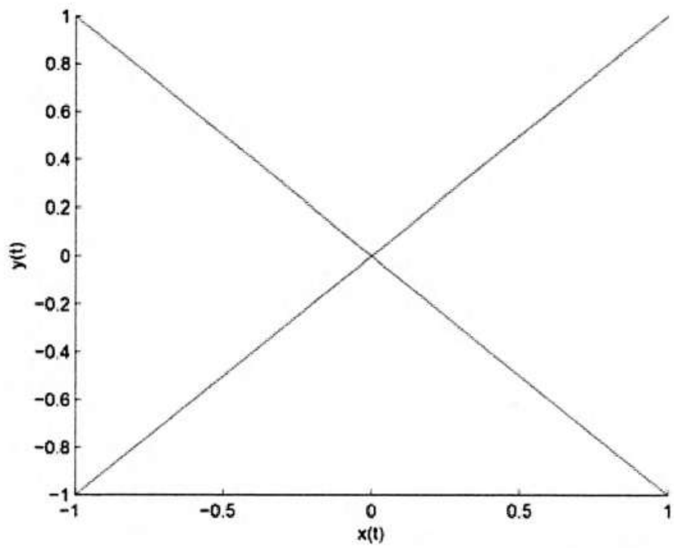

Figura 3.8: Plano de fases para el caso ordinario (rojo) y el caso fraccionario con $\alpha = 0{,}9$ (azul) y $\alpha = 0{,}5$ (verde).

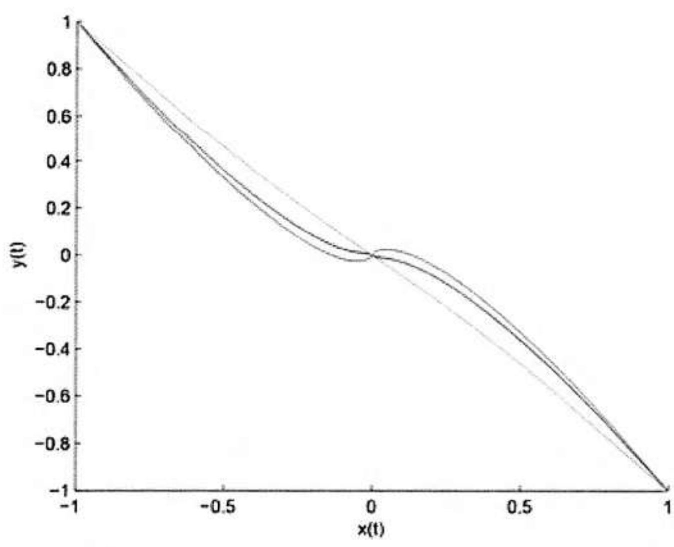

Figura 3.9: Plano de fases para el caso ordinario (rojo) y el caso fraccionario con $\alpha = 0{,}9$ (azul) y $\alpha = 0{,}5$ (verde).

con solución general

$$x = AE_\alpha(-2t^\alpha),$$
$$y = BE_\alpha(-2t^\alpha) + \frac{A}{\alpha} t^\alpha E_{\alpha,\alpha}(-2t^\alpha),$$

donde A, B son números reales. Observamos que el punto de equilibrio presenta en el caso fraccionario un comportamiento similar al caso ordinario. Sin embargo, las soluciones necesitan valores altos de t para aproximarse al punto de equilibrio.

3.4.2. Raíces Complejas

En este caso, para raíces complejas conjugadas λ y $\bar{\lambda}$ la solución general(ver [10]) es

$$x(t) = A_1 Re(E_\alpha(\lambda t^\alpha)) + A_2 Im(E_\alpha(\lambda t^\alpha)),$$
$$y(t) = B_1 Re(E_\alpha(\lambda t^\alpha)) + B_2 Im(E_\alpha(\lambda t^\alpha)).$$

Así cuando t crece las soluciones tienden al punto de equilibrio $(0, 0)$ para raíces complejas conjugadas con parte real negativa. Para raíces complejas conjugadas con parte real positiva se van a infinito.

Ilustremos la situación con el sistema

$$D_*^\alpha x = y,$$
$$D_*^\alpha y = -x,$$

en esta ocasión la solución general es

$$x(t) = AIm(E_\alpha(it^\alpha)),$$
$$y(t) = ARe(E_\alpha(it^\alpha)).$$

Este es un caso muy curioso(ver (3.10)). En el caso ordinario, obtenemos órbitas periódicas y el punto de equilibrio es un centro. Sin embargo, en el caso fraccionario las soluciones pierden la periodicidad y sus trayectorias forman espirales.

3.5. Mecánica Fraccional

Matemáticamente, el movimiento de un cuerpo puede ser modelado a partir de las fuerzas que actúan sobre él. El principio básico es la segunda ley de Newton, que se puede formular en términos de la ecuación diferencial

$$F = mx'',$$

donde x es la función que determina el movimiento.
Algunos autores (Como Ebaid u Otero, ver [1]) proponen una generalización fraccionaria de la forma

$$F = mD^\alpha x,$$

en la que $D^\alpha x$ es la derivada de orden $1 < \alpha \leq 2$ de x.
A partir de la ecuación anterior, seguiremos, el procedimiento habitual para el estudio de la dinámica de algunos sistemas físicos clásicos, como el péndulo y el proyectil. Este nuevo enfoque fraccionario de la dinámica conduce a resultados, ecuaciones e interpretaciones diferentes a los tradicionales.

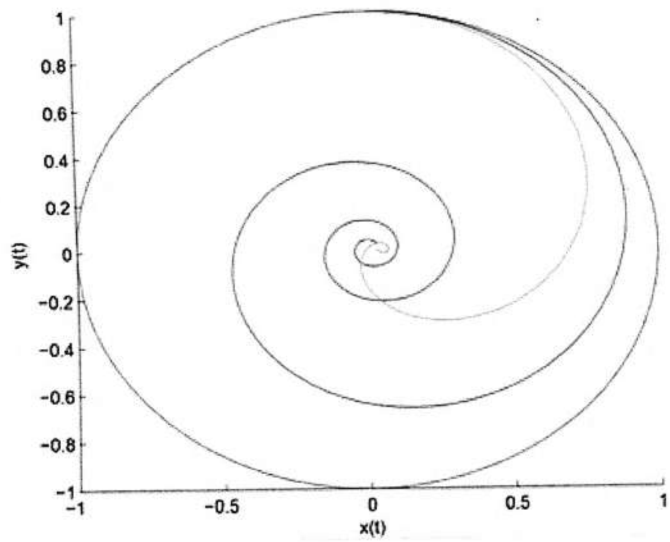

Figura 3.10: Plano de fases para el caso ordinario (rojo) y el caso fraccionario con $\alpha = 0{,}9$ (azul) y $\alpha = 0{,}5$ (verde).

3.5.1. Péndulo Fraccional

El péndulo simple es un sistema físico constituido por una partícula de masa m que, suspendida de un punto fijo O por medio de una varilla de longitud L, puede oscilar en un plano vertical fijo por efecto de la fuerza de la gravedad. La posición de la partícula en el instante t se especifica mediante el ángulo θ que la varilla forma con la vertical en ese momento.

El estudio del péndulo constituye uno de los problemas clásicos de la dinámica elemental, y todas sus componentes están perfectamente determinadas desde el punto de vista matemático. Lo que se pretende con este apartado es realizar un análisis del movimiento pendular enfocado desde la óptica más extensa del Cálculo Fraccionario, y para ello se va a generalizar la idea clásica de aceleración (derivada segunda de la posición) a una derivada fraccionaria de Caputo de un orden comprendido entre 1 y 2. Obviamente el péndulo simple es un sistema idealizado, sobre el que haremos una serie de hipótesis simplificativas:

(1) La varilla que sujeta a la partícula carece de masa, es inextensible y siempre permanece rígida.

(2) El movimiento de la partícula ocurre en dos dimensiones; es decir, la partícula traza un arco de círculo en un plano vertical fijo.

(3) El sistema no pierde energía por efecto de la resistencia del aire ni por fricción alguna.

Para determinar la función que describe el movimiento del péndulo fraccionario empezamos buscando la ecuación diferencial fraccionaria que modela dicho movimiento. La ecuación buscada tiene por incógnita la función θ, que determina en radianes el ángulo de la varilla en el instante t. La partícula se mueve sobre un arco de circunferencia bajo el efecto de dos fuerzas: su propio peso (mg, donde $g = 9,80665$ es la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra cerca de su superficie) y la fuerza de tensión T ejercida por la varilla. Si descomponemos el peso en sus componentes tangencial y normal, observamos que la componente normal de

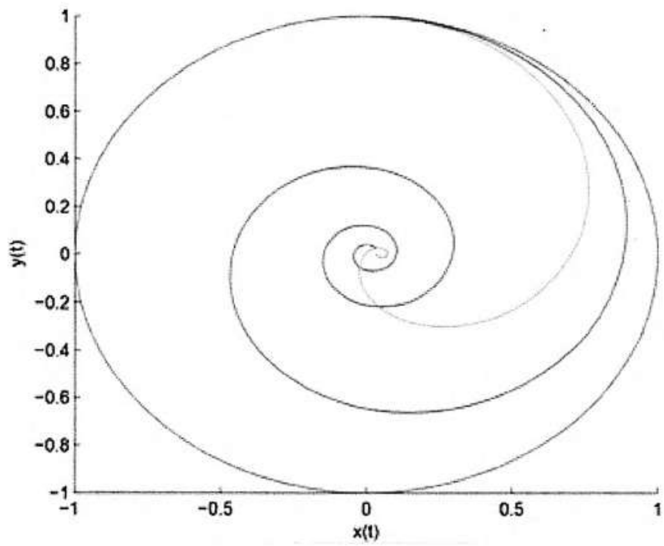

Figura 3.10: Plano de fases para el caso ordinario (rojo) y el caso fraccionario con $\alpha = 0{,}9$ (azul) y $\alpha = 0{,}5$ (verde).

3.5.1. Péndulo Fraccional

El péndulo simple es un sistema físico constituido por una partícula de masa m que, suspendida de un punto fijo O por medio de una varilla de longitud L, puede oscilar en un plano vertical fijo por efecto de la fuerza de la gravedad. La posición de la partícula en el instante t se especifica mediante el ángulo θ que la varilla forma con la vertical en ese momento.

El estudio del péndulo constituye uno de los problemas clásicos de la dinámica elemental, y todas sus componentes están perfectamente determinadas desde el punto de vista matemático. Lo que se pretende con este apartado es realizar un análisis del movimiento pendular enfocado desde la óptica más extensa del Cálculo Fraccionario, y para ello se va a generalizar la idea clásica de aceleración (derivada segunda de la posición) a una derivada fraccionaria de Caputo de un orden comprendido entre 1 y 2. Obviamente el péndulo simple es un sistema idealizado, sobre el que haremos una serie de hipótesis simplificativas:

(1) La varilla que sujeta a la partícula carece de masa, es inextensible y siempre permanece rígida.

(2) El movimiento de la partícula ocurre en dos dimensiones; es decir, la partícula traza un arco de círculo en un plano vertical fijo.

(3) El sistema no pierde energía por efecto de la resistencia del aire ni por fricción alguna.

Para determinar la función que describe el movimiento del péndulo fraccionario empezamos buscando la ecuación diferencial fraccionaria que modela dicho movimiento. La ecuación buscada tiene por incógnita la función θ, que determina en radianes el ángulo de la varilla en el instante t. La partícula se mueve sobre un arco de circunferencia bajo el efecto de dos fuerzas: su propio peso (mg, donde $g = 9,80665$ es la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra cerca de su superficie) y la fuerza de tensión T ejercida por la varilla. Si descomponemos el peso en sus componentes tangencial y normal, observamos que la componente normal de

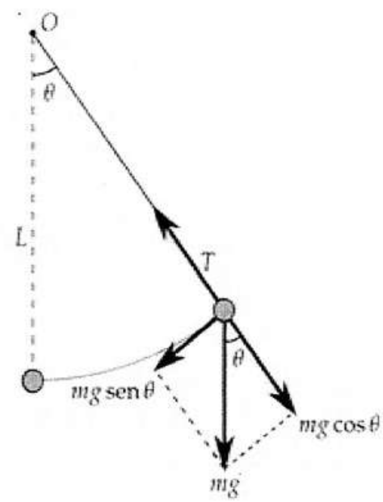

Figura 3.11: Péndulo

esta fuerza se ve contrarrestada por la fuerza de tensión de la varilla. Por lo tanto, la única fuerza actuante en lo que concierne al movimiento del sistema será la componente tangencial del peso, que tendrá signo negativo por ir siempre en dirección opuesta al movimiento:

$$F(t) = -mg\,\mathrm{sen}(\theta(t)).$$

En el modelo clásico se introduce esta fuerza en

$$F = ma.$$

Siendo a la aceleración tangencial del movimiento, y se llega así a la ecuación tradicional del péndulo. Aquí vamos a sustituir, por una fórmula alternativa más general haciendo uso de derivadas fraccionarias:

$$F(t) = mD_*^{\alpha}r(t).$$

Nos interesa una ecuación en la variable ángulo de la varilla $\theta(t)$, y no en la variable posición de la partícula $r(t)$. Por ser un movimiento a lo largo de un arco de circunferencia de radio L tenemos que $r(t) = L\theta(t)$, con lo que

$$D_*^{\alpha}r(t) = LD_*^{\alpha}\theta(t),$$

donde D_*^{α} es la aceleración angular.

Finalmente, juntando todo, obtenemos

$$-g\,\mathrm{sen}\,\theta = LD_*^{\alpha}\theta,$$

que nos lleva a

$$D_*^{\alpha}\theta + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0.$$

La ecuación anterior no tiene fácil solución, al no tratarse de una ecuación lineal debido al término no lineal $\mathrm{sen}(\theta(t))$. Ahora, recordemos que $\mathrm{sen}(\theta) \approx \theta$ cuando θ es pequen particular,

θ y sen(θ) coinciden en las dos primeras cifras decimales cuando $\theta < \pi/12$. Sustituyendo sen(θ) por θ obtenemos la ecuación

$$D_*^\alpha \theta + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

Esta es una ecuación diferencial de oscilación simple (como las que se estudiaron anteriormente), por lo que si suponemos las condiciones iniciales

$$\theta(t) = \theta_0,$$
$$\theta'(t) = v_0,$$

entonces la solución es

$$\theta(t) = \theta_0 E_{\alpha,1}(\frac{g}{L}t^\alpha) + v_0 t E_{\alpha,2}(-\frac{g}{L}t^\alpha).$$

Observación 3.5.1. *Para el caso $\alpha = 2$, la solución coincide con la del péndulo simple.*

3.5.2. Proyectil Fraccional

Otro problema dinámico clásico es el del movimiento de un proyectil. Se sabe que una partícula que es proyectada formando un determinado ángulo con la superficie de la Tierra, describirá una curva de tipo parabólico. Esta trayectoria está perfectamente determinada matemáticamente incluso para el caso, un poco más complicado, en el que consideremos otras fuerzas involucradas en el sistema además de la gravedad, como son las de fricción, o fuerzas externas. reas como la balística han estudiado en profundidad este tema. Aquí, siguiendo trabajos como los de Antón Lombardero (ver [5]), vamos a estudiar el movimiento de un proyectil desde el enfoque fraccionario. Para ello, tal y como hicimos con el péndulo, utilizaremos como hipótesis inicial una fórmula generalizada de la segunda Ley de Newton. Vamos a partir de unas hipótesis que simplifican el problema, de forma que la única fuerza actuante sea la gravedad:

(1) El medio no ofrece oposición al avance del proyectil ni por resistencia del aire ni por ninguna otra fricción.

(2) No hay curvatura de la superficie terrestre, que es plana y sin rugosidades.

(3) La fuerza de la gravedad es uniforme, y no disminuye con la altura del proyectil.

(4) No se tiene en cuenta la fuerza de Coriolis, debida al movimiento de rotación de la Tierra.

(5) La trayectoria está contenida en un plano.

Supongamos que se lanza el proyectil, de masa m, con una velocidad inicial de módulo v_0 y formando un ángulo ϕ con la horizontal. Escogemos el plano OXY coincidiendo con el plano de la trayectoria, de forma que el origen O se corresponda con la posición inicial de la partícula. Podemos descomponer el movimiento en sus componentes horizontal y vertical, que serán independientes una de la otra. Como la única fuerza considerada, la fuerza gravitatoria, solo tiene componente vertical, la trayectoria será la composición de un movimiento rectilíneo uniforme horizontal con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado vertical. Es decir, si $x(t)$ e $y(t)$ son las respectivas componentes horizontal y vertical del movimiento, lo anterior

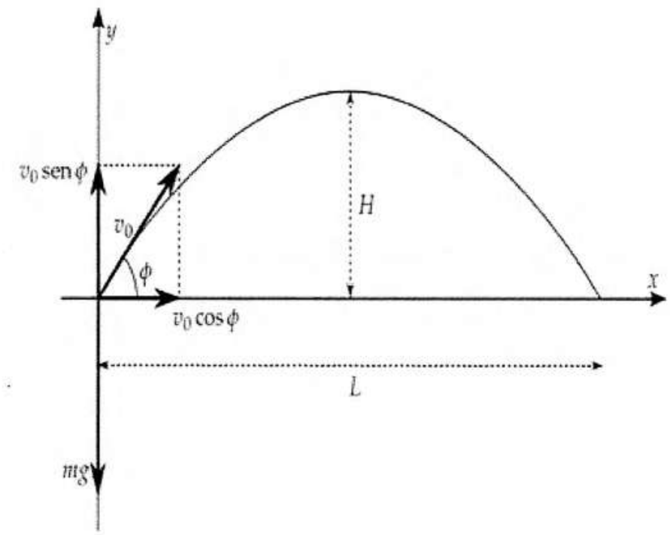

Figura 3.12: Proyectil

junto con la segunda Ley de Newton $F = ma$ nos lleva a las ecuaciones diferenciales clásicas del proyectil:

$$m\frac{d^2}{dt}x(t) = 0,$$
$$m\frac{d^2}{dt}y(t) = -mg,$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0,\ x'(0) = v_0 \cos\phi,$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = v_0 \operatorname{sen}\phi,$$

nos llevan a las conocidas ecuaciones del movimiento parabólico

$$x(t) = v_0 \cos\phi,$$
$$y(t) = v_0 t \operatorname{sen}\phi - \frac{g}{2}t^2.$$

Para aproximarnos al problema desde el punto de vista fraccionario sustituimos, tal y como hicimos al estudiar el péndulo, la fórmula clásica de Newton

$$F = ma,$$

por la generalización fraccional

$$F(t) = mD_*^\alpha x(t).$$

Así aplicando el nuevo enfoque, llegamos a las ecuaciones

$$D_*^\alpha x(t) = 0,$$
$$D_*^\alpha y(t) = -g.$$

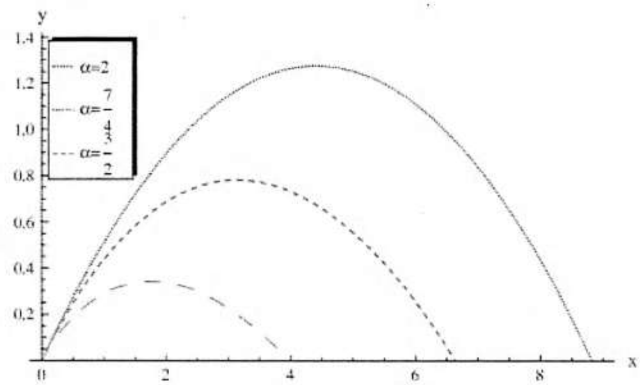

Figura 3.13: Proyectil con diferentes valores de α,$\phi = \frac{\pi}{6}$,$v_0 = 10\frac{m}{s}$

Las ecuaciones anteriores son sencillas y pueden ser resueltas de manera inmediata vía la transformada de Laplace, las soluciones son

$$x(t) = v_0 t \cos\phi,$$
$$y(t) = v_0 t \operatorname{sen}\phi - \frac{g t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Eliminando la variable t se obtiene la representación cartesiana de la trayectoria

$$y = \frac{-g x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)(v_0\cos\phi)^{\alpha}} + x\tan\phi,$$

que, al contrario que en el caso $\alpha = 2$, donde se trata de una parábola, es un polinomio fraccionario de grado α.

Apéndice A

Transformada de Laplace

Definición A.0.1. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función. La transformada de Laplace de f es una función $\mathcal{L}[f] = F$ definida como*

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

para todo valor de s donde la integral converja.

Definición A.0.2. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función. Si existen constantes k, N y $M > 0$ tales que para toda $t > N$*

$$|f(t)| < Me^{kt},$$

diremos que f es de orden exponencial.

Proposición A.0.1. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en el intervalo $[0, N]$ y de orden exponencial para $t > N$. Entonces la trasformada de Laplace de f existe para $s > k$.*

Demostración. Es claro que

$$\int_0^N e^{-st} f(t)dt,$$

existe, por lo que basta ver que

$$\int_N^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

converja.

$$\begin{aligned} \left| \int_N^b e^{-st} f(t)dt \right| &\leq \int_N^b \left| e^{-st} f(t) \right| dt \\ &< M \int_N^b e^{t(k-s)} dt \\ &= \frac{M}{k-s} \left[e^{b(k-s)} - e^{N(k-s)} \right]. \end{aligned}$$

El lado derecho converje a

$$\frac{M}{s-k} \left[e^{N(k-s)} \right],$$

cuando $b \to \infty$, esto prueba la proposición. □

Teorema A.0.1. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$, entonces*

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0).$$

Demostración. Usando integración por partes se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'] &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f'(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[f(b)e^{-sb} - f(0) + \int_0^b e^{-st} f(t)dt \right] \\ &= s\mathcal{L}[f] - f(0),\end{aligned}$$

tal cual se quería probar. □

Corolario A.0.1. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$, entonces*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0).$$

Demostración. El caso $n = 1$ ya se tiene, supongamos que es cierto para n, así por la hipótesis de inducción se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(n+1)}] &= \mathcal{L}[(f^{(n)})'] \\ &= s\mathcal{L}[f^{(n)}] - f^{(n)}(0) \\ &= s\left[s^n \mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \right] - f^{(n)}(0) \\ &= s^{n+1}\mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n} s^k f^{(n-k)},\end{aligned}$$

lo cual termina la prueba. □

Definición A.0.3. *Sean $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones integrables, se define la función $f * g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x - t)dt,$$

y la llamamos la convolución de f con g.

Teorema A.0.2. *Sean $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones cuya transformada de Laplace existe, entonces*

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g].$$

siempre que $f * g$ exista.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f * g] &= \int_0^\infty e^{-st}(f * g)(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right] \\
&= \int_0^\infty f(u)\left[\int_u^\infty e^{-st}g(t-u)dt\right]du,
\end{aligned}$$

ahora, tomando el cambio de variable $t = u + z$. Así

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f * g] &= \int_0^\infty f(u)\left[\int_0^\infty e^{-s(z+u)}g(z)dz\right]du \\
&= \int_0^\infty e^{-su}f(u)du \int_0^\infty e^{-st}g(z)dz \\
&= \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g],
\end{aligned}$$

lo cual completa la prueba. □

Apéndice B

Diferenciación bajo el signo de integral

Lema B.0.1. *Sea $f(x,t) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua con derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_c^d f(x,t)dt\right) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt,$$

para cuales quiera c y d tal que $a \leq c < d \leq b$

Demostración. Utilizando el primer y segundo Teorema Fundamental del Cálculo se tiene

$$\begin{aligned}
\int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt &= \int_c^d \frac{\partial}{\partial u} f(u,t)dt \\
&= \frac{d}{dx}\left[\int_a^x \int_c^d \frac{\partial}{\partial u} f(u,t)dtdu\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\int_c^d \int_a^x \frac{\partial}{\partial u} f(u,t)dudt\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\int_c^d \left[f(x,t) - f(a,t)\right]dt\right] \\
&= \frac{d}{dx}\int_c^d f(x,t)dt - \frac{d}{dx}\int_c^d f(a,t)dt \\
&= \frac{d}{dx}\int_c^d f(x,t)dt,
\end{aligned}$$

tal cual se quería probar. □

Teorema B.0.3. *Sea $f(x,t) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua con derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(x,t)dt\right) = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt.$$

Demostración. Sea $\varphi(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$\varphi(x) := \int_a^x f(x,t)dt,$$

así

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_a^{x+h} f(x+h,t)dt - \int_a^x f(x,t)dt$$

$$= \int_a^x f(x+h,t)dt + \int_x^{x+h} f(x+h,t)dt - \int_a^x f(x,t)dt$$

$$= \int_a^x [f(x+h,t) - f(x,t)]\, dt + \int_x^{x+h} f(x+h,t)dt,$$

ahora usando el Teorema del Valor Medio, existe $\xi \in [x, x+h]$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(x+h,t)dt = hf(x+h,\xi),$$

por lo que

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^x [f(x+h,t)-f(x,t)]dt + hf(x+h,\xi)\right]$$

$$= \int_a^x \left[\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}\right] dt + f(x+h,\xi),$$

cuando $h \to 0$ se tiene que $\xi \to x$, así al tomar el límite cuando h tiende a cero obtenemos

$$\varphi'(x) = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt,$$

lo cual es

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(x,t)dt\right) = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt.$$

□

Apéndice C

Integración por partes

Teorema C.0.4. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones con primera derivada integrable, entonces*

$$\int_a^b fg' = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b g'f.$$

Demostración. Por la regla del producto se tiene $(fg)' = f'g + fg'$, por lo que

$$\int_a^b fg' = \int_a^b (fg)' - \int_a^b f'g$$

$$= [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b g'f.$$

□

Teorema C.0.5. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones con e-nésima derivada integrable, entonces*

$$\int_a^b fg^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i[f^{(i)}(b)g^{(n-i-1)}(b) - f^{(i)}(a)g^{(n-i-1)}(a)] + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g.$$

Demostración. Procedamos por inducción, el caso $n = 1$ es el teorema anterior, ahora supongamos que esto es cierto para n y mostremos para $n + 1$

$$\begin{aligned}
\int_a^b fg^{n+1} &= \int_a^b f(g')^{(n)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i[f^{(i)}(b)(g')^{(n-i-1)}(b) - f^{(i)}(a)(g')^{(n-i-1)}(a)] + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g' \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i[f^{(i)}(b)g^{(n-i)}(b) - f^{(i)}(a)g^{(n-i)}(a)] + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g' \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i[f^{(i)}(b)g^{(n-i)}(b) - f^{(i)}(a)g^{(n-i)}(a)] + \\
&\qquad + (-1)^n \left[(f^n(b)g(b) - f^n(a)g(a)) - \int_a^b f^{(n+1)}g\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[f^{(i)}(b)g^{(n-i)}(b) - f^{(i)}(a)g^{(n-i)}(a)] + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{n+1}g.
\end{aligned}$$

□

Bibliografía

[1] Ebaid A. Analysis of proyectile motion in view of fractional calculus, CSIM courses and lectures, 2011.

[2] Gorenflo Rudolf; Mainardi Francesco Fractional Calculus Integral and Differential Equations, CSIM Lectures Notes, 2008.

[3] Kimeu Joseph. Fractional Calculus: Definitions and Applications, 2009.

[4] Kilbas, A. A.; Srivastava, H. M.; Trujillo, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Math. Studies, vol. 204, Elsevier (North-Holland), Amsterdam, 2006.

[5] Lombardero O. Antón. Cálculo Fraccionario y Dinámica Newtoniana,2014.

[6] Matignon, D., [1996]: Stability results on fractional differential equations with applications to control processing, *Proc. of Computational Eng. in Syst. and Application Multiconference*, vol. 2, IMACS, IEEE-SMC, pp. 963968.

[7] Matignon, D.[1998] Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM Proc.* 5, 145-158. DOI: 10.1051/proc:1998004.

[8] Prieto C. Rafael. El cálculo generalizado y funciones fraccionarias, 2009.

[9] Shantanu Das. Functional Fractional Calculus. Springer, Mumbai, India, 2011.

[10] Velasco C. María Pilar Modelos Diferenciales y Funciones del Cálculo Fraccionario. Universidad Complutense de Madrid, 2008.

[11] Wheeler Nicolas. Construction & physical application of the fractional calculus. Reed College Physics Department (1997)