"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Una propuesta para el estudio de la función derivada en un ambiente de geometría dinámica

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Bogar Ulises Murillo Gastelum

Director de tesis: M.C José María Bravo Tapia

Hermosillo, Sonora, México, Enero 2016

Sinodales

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Universidad de Sonora

Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Universidad de Sonora

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Universidad de Sonora

M. C José María Bravo Tapia

Universidad de Sonora

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a mi esposa Liz, que ha estado a mi lado compartiendo las experiencias tanto buenas como malas que hemos enfrentado en la universidad de la vida, a la que siempre me ha brindado su apoyo incondicional, también a nuestro pequeño André que vino a revolucionar nuestras vidas y plantearnos nuevos retos como padres, gracias por ello.

Quiero agradecer a mi padre José Luis y mi madre Argelia, a mi hermana Génesis y a mi hermano Mitch por los consejos y el apoyo incondicional que siempre nos han brindado, mas ahora en este nuevo proceso de convertirse en abuelos y tíos, gracias por ello.

A nuestros viejos amigos Baby, Mike y Niga, a nuestros nuevos amigos Joaquín y Juan que nos han brindado el apoyo incondicional en los momentos difíciles, gracias por ello.

A nuestra familia y amigos en general, que siempre está compartiendo las alegrías y dividiendo las malas rachas para hacerlas llevaderas.

A mi director de tesis M.C. José Ma. Bravo Tapia y a mis sinodales la Dr. Silvia Elena Ibarra Olmos, el Dr. Agustín Grijalva Monteverde y el Dr. Ramiro Ávila Godoy principalmente por su tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo y sus observaciones tan sutiles y muy puntuales, que me ayudaron a enriquecer la visión del mismo.

Gracias a todos por dejarme compartir el cierre de este ciclo tan importante para mí.

Bogar Ulises Murillo Gastelum

Hermosillo, Sonora

Enero 2016

Índice

Introducción

Esta tesis es un trabajo en la que se presenta una propuesta de actividades didácticas diseñadas en su totalidad con el software GeoGebra, en la que se intenta promover el significado geométrico de la derivada de manera puntual y global, así como algunas reglas de derivación. La propuesta está dirigida hacia los estudiantes los cuales se encuentran cursando la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I en el primer semestre en la Universidad de Sonora.

En este trabajo se estarán presentando cuatro capítulos de los cuales daremos una descripción de manera general para dar una pequeña panorámica del trabajo.

En el capítulo 1 introducimos elementos que nos permiten describir la problemática que existe en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial, posteriormente exponemos algunas dificultades que presentan los alumnos en el estudio de la derivada, por otro lado las reflexiones motivadas por la revisión de algunas investigaciones, nace la necesidad de abordar estas dificultades por medio de una propuesta didáctica, de las cuales damos elementos de justificación y algunos objetivos que guían nuestra propuesta.

En el capítulo 2 se hace una revisión del contenido sintético de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I, en algunas carreras de las diferentes Divisiones de la Universidad de Sonora, con el objetivo de obtener un panorama general de los contenidos que son sugeridos antes y después de iniciar con el estudio de la derivada. Posteriormente hablamos de la metodología que empleamos para desarrollar este trabajo.

Por ultimo presentamos las consideraciones teóricas que sustentan nuestra propuesta didáctica, en las que abordamos las consideraciones de R. Duval en la que sugiere la importancia y la necesidad de representar los objetos matemáticos, como el construir los conceptos de éstos, por medio de la coordinación de diferentes representaciones semióticas.

También por otro lado mencionaremos la importancia de la socialización desde el punto de vista que propone Vygotsky, donde para él, el conocimiento se desarrolla en un proceso de interacción entre el sujeto y algún medio (problema de matemáticas), es importante señalar que las nociones construidas del objeto en juego suelen ser asimétricas en los alumnos, es aquí donde el proceso de interacción juega un papel fundamental.

Una parte fundamental del diseño de esta propuesta didáctica, recae en utilizar como medio el software GeoGebra, para ello necesitamos tomar en cuenta la importancia y los beneficios que otorga este medio, desde el punto de vista de la teoría de la instrumentación que propone Rabardel.

En el capítulo 3 iniciamos con algunas descripciones de GeoGebra mostrando las ventajas que este software tiene, posteriormente abordamos las 12 actividades con su respectivo cuadernillo de trabajo, en la que describimos las características y consideraciones para el diseño de nuestra propuesta didáctica, así como el objetivo de cada actividad.

En el capítulo 4 se puso a prueba las actividades con su respectivo cuadernillo de trabajo, para identificar posibles errores en el diseño de las actividades, con el fin de no perder de vista si las preguntas son entendidas correctamente y ver qué tan accesibles son para los alumnos. Posteriormente con ayuda de la evidencia conseguida en la puesta en escena de las actividades, logramos identificar algunos cambios necesarios tanto en el diseño como el replanteamiento de algunas de preguntas.

Por último, presentamos las conclusiones de cada capítulo, así como las reflexiones personales las cuales emergieron en el desarrollo de este trabajo.

Capítulo 1. Antecedentes, Problemática, Justificación y Objetivos

1.1 Antecedentes

Trataremos de describir un panorama general sin ser exhaustivos, de la problemática en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas particularmente en la asignatura de cálculo en el tópico de la derivada donde me encuentro desarrollando mi trabajo de tesis.

Algunos profesores de matemáticas externan ciertas preocupaciones, por las diferentes dificultades que presentan sus estudiantes a la hora de abordar diferentes problemas de matemáticas, los cuales son propuestos en clase o en tareas, empiezan a identificar una problemática que se está presentando en cada rincón en el salón de clases y curiosamente en diferentes culturas, observan estas dificultades tan propias y sutiles en cada estudiante, que deciden tomar como un reto al tratar de ir más allá al indagar profundamente y entender esta problemática, más que solo abordarlo de buena fe. "...Se contaba con una problemática localizada, o quizá deba decir localizable: *la formación matemática del nuevo ciudadano.*"(Cantoral, 2010).

Por un lado citando a Freudenthal (1980) en el que externa su preocupación señalando:

> ...Los problemas que pienso que son mayores han sido escogidos de acuerdo a mi filosofía del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas... Por otro lado, estoy seguro de que mi propia experiencia es únicamente una parte infinitesimal de una vasta cantidad de conocimientos que nunca ha sido registrada, ni siquiera hecha consciente. ¿Estaríamos mejor si esta masa de conocimientos hubiera sido registrada y reportada? De ninguna manera. La teoría educativa útil no surge de una generalización ciega. Lo que necesitamos son casos paradigmáticos; paradigmas de diagnosis y prescripción, para beneficio de los *practicantes†* y, como tabiques, para los constructores de teorías... (pp. 2-4).

Freudenthal forma una parte importante en los cimientos de la disciplina de la Matemática Educativa, mencionaba la necesidad de formar una comunidad que documentara y atendiera estos problemas, ya que todo era vasado en aquel momento en experiencias y percepciones de como se aprende y se enseña, por otro lado se cuestionaba la necesidad de aprender a observa procesos de aprendizaje, lo cual para él, el observar implica analizar y comprender, también se cuestionaba:

> ...¿en dónde se pueden encontrar las fibras nerviosas que influyen en la educación? Seleccionaré dos extremos... el factor determinante más poderoso del presente y más poderoso de la educación futura, esto es,... libros de texto y formación de profesores... los profesores muy a menudo dependen fuertemente de los libros de texto... podrían ser último y único recurso (Freudenthal, 1980, p.17)

Entre otras. Entendía la importancia de atender y entender las diferentes aristas que planteaba en su conferencia. Hoy en nuestros días se ve reflejada fuertemente la evolución de la comunidad que se encarga de estudiar estos fenómenos educativos tomando fuerza en diferentes partes del mundo:

> ...como disciplina académica construyó una identidad que favoreció al desarrollo regional, permitió integrar comunidades organizadas en la vida académica...y apostó por el cambio y la crítica a un orden establecido, ya que planteó el reto de democratizar el aprendizaje de las matemáticas entre la población. De manera progresiva, la comunidad de Matemática Educativa instauró espacios académicos para formar especialistas (profesores, licenciados, maestros y doctores) que hicieran posible su titánica labor. (Cantoral, 2009).

Como podemos darnos cuenta la tremenda labor que se ha venido originando desde hace tiempo y en diferentes partes del mundo por los investigadores especialistas en el área, los cuales indagan en diferentes áreas de las matemáticas. Hoy en día las investigaciones se respaldan por diferentes teorías dentro de la disciplina, pero tienen un mismo objetivo en común entender y atender los diferentes problemas que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1.2 Descripción de la Problemática

Analizando las diferentes investigaciones realizadas alrededor de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial, observamos que el sistema algebraico es el preferido entre los profesores, ya que suele ser un tratamiento más económico y compacto en significados y en conceptos, por otro lado también se observa que los estudiantes que son formados bajo esta visión, se resisten a incorporar otras formas de trabajo, se manifiesta una inclinación fuerte en el recurso algebraico, lo cual advierten como foco de atención las siguientes investigaciones.

Por un lado sobre la resistencia que usualmente los estudiantes muestran al uso de consideraciones visuales, producto del predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, Vinner (1989) citado por Hitt (2003b) reporta: "que sus estudiantes (nivel universitario) tuvieron una tendencia a la evasión de consideraciones visuales aún después de un curso de cálculo con énfasis en representaciones gráficas y demostraciones visuales. Estos estudiantes presentaron un pensamiento analítico más que visual" (p.16).

Por otro lado en las investigaciones propuestas en Cantoral y Farfán (1998, p. 5), Hitt (2003a, p. 216), entre otros...También se advierte esta visión algorítmica, la cual denominan como un modelo tradicional, ya que el docente solamente da peso al tratamiento algorítmico preocupado por ejercitar y reproducir propiedades de algún objeto matemático, dejando de lado procesos de análisis a partir de un punto de vista gráfico, ya que en complemento, éste permitiría un acercamiento desde otra óptica del objeto en juego, esto apunta a una posible carencia de sentido y significado del objeto matemático para el alumno.

Particularmente analizamos las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje del concepto derivada, el cual se caracteriza como un fenómeno educativo en el cual predominan los procesos algebraicos y algorítmicos ante el concepto de derivada. Artigue (1995) señala:

> Si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas y resolver algunos problemas, estos se encuentran en grandes dificultades para alcanzar una verdadera comprensión de los conceptos involucrados y métodos de pensamiento que son centro de este campo de las matemáticas... Mientras el docente, evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial ya que es lo que se evalúa. (p. 97).

Por otro lado el alumno puede interpretar este proceso de evaluación de manera inconveniente, e inclinarse solamente a perfeccionar el proceso algorítmico de la derivada, dejando de lado el análisis gráfico, como también lo comparte Cantoral y Mirón (2000) donde señalan: "que esto provoca que una gran cantidad de alumnos no logren dar sentido y significado a los conceptos básicos, de modo que, aun siendo capaces de derivar una función, no pueden reconocer en cierto problema la necesidad de una derivación".

Esta tendencia tradicional alrededor de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial, puede tener diversas causas, entre ellas la concepción de las matemáticas mismas, las formas en que se aprenden y deben de enseñarse, la falta del dominio del objeto matemático en juego,... etc. Alrededor de esta tendencia giran diversos problemas relacionados con el aprendizaje de los estudiantes, los cuales trataremos de encontrar y describir con cuidado, posteriormente mencionaremos cuáles de ellos motivan este trabajo.

1.2.1 Dificultades que presentan los alumnos

Para poder describir la problemática que se percibe alrededor de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial, específicamente en la comprensión e interiorización del concepto derivada, consideramos importante analizar diferentes puntos de vista, que especialistas en el área brindan en numerosas investigaciones realizadas alrededor del estudio de la derivada.

Lo que se ha convertido en objeto de preocupación y de estudio alrededor de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial, es tratar de entender las dificultades que los alumnos presentan en el estudio de la derivada, los procesos cognitivos de los alumnos, los cuales juegan un papel sumamente importante al tratar de construir e interiorizar el concepto, también determinar qué percepciones crean los alumnos de los conceptos, las dificultades que comparten los estudiantes, etc...

Por otro lado centrándonos en las dificultades que muestran los alumnos, que documentan y describen algunas investigaciones alrededor del tema, encontramos que en consecuencia de una inclinación algorítmica y algebraica, los alumnos presentan algunas dificultades al manejar e interpretar la información en un ambiente gráfico y traducirlo a un ambiente algebraico y viceversa, en la cual se observa un déficit conceptual de la derivada en cada representación como se comparte en Artigue (1995, p.110).

Como también lo comparte Hitt (2003b, pp.7-14) donde menciona que: "el fracaso de estos estudiantes se debe a la carencia de articulación entre representaciones, provocando que el estudiante ***"camine a ciegas"*** en el sistema algebraico", por otro lado también se menciona la existencia de problemas relativos a la lectura de gráficas, que han mostrado investigaciones relacionadas en el uso de la tecnología.

En otras investigaciones los resultados en Badillo, Azcárate y Font (2011, p.199) y en Pino-Fan, Godino & Font (2015, pp.84-86) las cuales fueron desarrolladas haciendo un análisis desde el punto de vista algebraico y gráfico, advirtiendo algunas dificultades encontradas por parte de los profesores como también en alumnos, en la comprensión y asimilación en la diferencia entre la idea de función derivada en un punto $f'(a)$ y función derivada de manera global $f'(x)$.

Puntualizando entonces la dificultad para coordinar, tanto gráfica como algebraicamente, los objetos derivada de la función en un punto y el objeto pendiente de la recta tangente de la gráfica de la función en ese punto, lo que advierte la falta de apropiación de significado por parte del alumno y el profesor.

Después de revisar diferentes investigaciones alrededor de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, logramos percibir y encontrar algunas dificultades por parte de los estudiantes, que presentan en la construcción e interiorización del concepto de derivada, las dificultades encontradas forman la base de este trabajo, ya que con base en ellas se pretende realizar los diseños de las actividades didácticas, para tratar de contrarrestar las mismas.

1.3 Justificación

Después de hacer una reflexión de las diferentes dificultades que presentan los estudiantes, es de nuestro interés abordar y desarrollar el significado puntual y global de la derivada desde un punto de vista geométrico, también es notable la dificultad que demanda tratar de transitar entre diferentes representaciones de un objeto matemático, como también el modelar un fenómeno de la física que involucre el concepto derivada.

Los fenómenos físicos muchas veces están completamente excluidos de lo que pasa en el salón de clases y es ahí donde el estudiante debe de construir, descubrir y aprender matemáticas, porque una vez que el estudiante termine su preparación y salga a enfrentar los problemas que demanda la sociedad actual, en ingeniería, economía en ciencias, etc... necesitará estas herramientas básicas del cálculo.

Esta observación recae en lo que dice Duval (1998) donde señala: "que el uso de diferentes representaciones es esencial en el desarrollo del pensamiento que llega a comprender un concepto matemático esto implica realizar procesos de conversión entre diferentes representaciones" no sólo utilizarlo en las diferentes representaciones dentro de la matemática, sino también poder extender y establecer una conexión para explicar matemáticamente algún fenómeno físico.

Por otro lado centrándonos en las dificultades que presentan los alumnos que describimos en el apartado anterior, algunas investigaciones alrededor del tema como en Duval (1998) señala: "que el alumno aprende a fortalecer el concepto si es capaz de relacionar los diferentes sistemas de representación" lo cual apunta a la necesidad de atender y tratar de desarrollar un equilibrio entre el análisis tanto algebraico como geométrico y numérico en el alumno, lo cual juega un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas.

Los resultados obtenidos en algunas investigaciones, los estudiantes presentaron una inclinación al pensamiento analítico más que visual, donde Hitt (2003b) señala:" lo grave es que los resultados muestran que esos estudiantes no hacen un uso eficiente de los procesos algebraicos, por lo tanto, es necesario promover un pensamiento visual articulado a los procesos algorítmicos". (p.16). Donde menciona la importancia de promover y desarrollar la visualización matemática en los estudiantes utilizando diferentes representaciones, tratando de brindar herramientas de análisis para desarrollar una noción más rica del cálculo, en los procesos de cambio, variación, predicción,... etc.

Por otro lado también menciona el uso racional de las nuevas tecnologías, las cuales permiten dar un significado concreto a las nociones matemáticas, ya que las computadoras han hecho realidad la posibilidad de la visualización dinámica del comportamiento gráfico, como Dolores (2000) señala las ventajas como:

> Observar mediante simulaciones iterativas cómo la sucesión de secantes tiende a la tangente, de visualizar la disminución iterativa de los triángulos característicos en la presentación geométrica de la derivada, de ayudar a la visualización de la *rectitud local* de las curvas por medio de magnificaciones sucesivas, de *observar* curvas continuas en todas partes pero derivables en ningún punto, de racionalizar considerablemente el trabajo con los métodos numéricos, etc.... (p.10).

Lo cual pretendemos retomar para promover y desarrollar el significado geométrico de la derivada, partiendo desde un tratamiento geométrico, motivando un análisis visual y dinámico con ayuda del software GeoGebra, tratando de aprovechar las bondades que brinda este software, que servirá como medio para la construcción de conceptos matemáticos más profundos en este caso particular la derivada, también se tratará que los alumnos reflejen una mejora en los procesos llevados a cabo a la hora de abordar algún problema donde intervenga la derivada.

1.4 Objetivos

Haciendo una reflexión de las diferentes dificultades encontradas, las cuales presentan los alumnos en el estudio del cálculo particularmente en la derivada, se considera que juegan un papel importante en este trabajo, ya que con base en estas dificultades plantearemos los objetivos de este trabajo de la siguiente manera:

- **Objetivos generales**: Elaborar una secuencia de actividades didácticas diseñadas con ayuda del software GeoGebra, en conjunto de un cuadernillo de trabajo por cada actividad respectivamente, con el propósito de promover en los estudiantes el significado geométrico de la derivada, también promover algunas reglas de derivación desde un análisis gráfico, para conseguir estos objetivos generales debemos de alcanzar los siguientes objetivos específicos los cuales describimos de la siguiente manera.

- **Objetivos específicos:**

  Promover en el estudiante:
  - ✓ El significado geométrico de la derivada de manera puntual.
  - ✓ El significado geométrico de la derivada de manera global.
  - ✓ La visualización matemática.
  - ✓ Diferentes representaciones del objeto derivada.

Capítulo 2. Marco Referencial, Metodológico y Consideraciones Teóricas

2.1 Marco Referencial

En este apartado se hará una revisión del contenido sintético de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I, en algunas carreras de las diferentes divisiones de la Universidad de Sonora, en las que se imparte esta asignatura, con el objetivo de observar el contenido sintético y obtener un panorama general de los contenidos sugeridos antes y después de iniciar con el estudio de la derivada, por ultimo expondremos las sugerencias del material bibliográfico dentro del curso, con el propósito de elegir algunos libros dentro del material de apoyo, para analizar el tratamiento que le dan a la derivada y poder materializar una secuencia didáctica de manera dinámica con ayuda del software GeoGebra.

2.1.1 Cálculo Diferencial e Integral I en las Divisiones de la Universidad de Sonora

En el Capítulo 1 describimos la problemática alrededor del Cálculo Diferencial e Integral, en la que hablamos de algunas dificultades que presentan los estudiantes en el estudio de la derivada, lo cual fue retomado llevándonos primeramente a una revisión del mapa curricular en algunas carreras dentro de las diferentes Divisiones en la Universidad de Sonora, para verificar en cuál de ellas se cursa la asignatura cálculo.

A continuación presentamos las diferentes carreras en las cuales se cursa la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral.

Tabla 1 Cálculo Diferencial e Integral I en las Divisiones

División de Ingenierías	Cálculo Diferencial e Integral I
Ingeniería Civil	X
Ingeniería en Mecatrónica	X
Ingeniería en Minas	X
Ingeniería en Materiales	X
Ingeniería en Metalurgia	X
Ingeniería Química	X
Ingeniería Industrial y de Sistemas	X
Ingeniería en Sistemas de Información	X
División de Ciencias Biológicas y de la Salud	Introducción al Cálculo Diferencial e Integral
Licenciatura en Químico Clínico	X
Licenciatura en Químico en Alimentos	X
Ingeniero Agrónomo	X
Licenciatura en Biología	X
División de Ciencias Exactas y Naturales	Cálculo Diferencial e Integral I
Licenciatura en Matemáticas	X
Licenciatura en Física	X
Licenciatura en Geología	X
Ingeniería en Tecnología Electrónica	X
Entre otras Divisiones ...	X

Como podemos observar la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I se encuentra presente en algunas carreras en el eje de formación básica dentro de cada programa de las diferentes divisiones, por su importancia como herramienta al estudiar y pronosticar el cambio ya sea en alguna solución química o en el crecimiento de bacterias en un cultivo, etc...existe una variedad de problemas que estudia el cálculo, por otra parte también está seriada con algunas asignaturas como Cálculo Diferencial e Integral II, III y Ecuaciones Diferenciales, etc...

2.1.2 División de Ingeniería

Por otro lado al realizar una revisión del tríptico oficial de la asignatura en algunas carreras en la División de Ingeniería, para verificar que contenidos que se imparten antes y después de la derivada, al revisar cada tríptico podemos observar el contenido sintético el cual se presenta y se sugiere de la siguiente manera: funciones, sucesiones y convergencia, límites y continuidad, derivación y diferenciación.

En la derivación encontramos el siguiente contenido: definición de derivada como límite; interpretaciones como razón instantánea de cambio –velocidad instantánea, pendiente de la recta tangente, etc. Reglas de derivación; máximos y mínimos, monotonía, concavidad, puntos de inflexión; aplicaciones de la derivada en la optimización de problemas físicos, geométricos y de la ingeniería.

Mientras el material bibliográfico sugerido.es el siguiente:

1- Leithold, L., El Cálculo, 7ma edición, Oxford, 1998.
2- Kreyszig, E., Matemáticas avanzadas para Ingeniería, Vol.1, Tercera edición, Ed. Limusa, 1980.
3- Hughes, D., et all, Cálculo, Primera edición, Ed. Cecsa, 1998.
4- Edwards y Penney, Cálculo con Geometría Analítica, 4ta edición, Prentice may, 1996.
5- Fraga, Robert, Calculus problems for a new century, The Mathematical Association of America 1999.
6- Solow, Anita, Learning by Discovery, The Mathematical Association of America 1999.
7- Swokowsky, E., Cálculo con Geometría Analítica, Segunda edición, Grupo Ed. Iberoamérica, 1989.
8- Cruise / Lehman, Lecciones de Cálculo I, Ed. Addison Wesley, Iberoamérica, 1989.

2.1.3 División de Ciencias Biológicas y de la salud

En la revisión del tríptico oficial de la asignatura en algunas carreras en la División de Ciencias Biológicas y de la Salud encontramos el siguiente contenido sintético: tópicos de álgebra elemental, elementos de geometría analítica y funciones, problemas de optimización (un punto de vista numérico), función pendiente, razón instantánea de cambio y problemas de optimización.

A lo que respecta al contenido de la derivada encontramos lo siguiente:

Función pendiente: la pendiente de la recta secante a la gráfica de una función, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, la función pendiente.

Función derivada: la función derivada de funciones elementales, propiedades de la función derivada, la función derivada de la suma, producto y cociente de funciones, la regla de la cadena, derivada de funciones trascendentes, derivadas de orden superior.

"En esta parte cabe aclarar que cualquier libro de cálculo diferencial e integral, contiene los temas del curso descritos anteriormente, sin embargo daremos como referencia aquellos que a nuestro juicio son los más adecuados para el estudiante de ciencias biológicas". (UNISON, s.f., p.2).

Mientras que el material bibliográfico sugerido es el siguiente:

1. Notas de Clase para Cálculo Diferencial e Integral I Bravo Tapia José María, Grijalva Monteverde Agustín, Ibarra Olmos Silvia Elena. Editadas por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora.
2. Cálculo con Geometría Analítica, Earl W. Swokowski, Grupo Editorial Iberoamérica.
3. Cálculo y Geometría Analítica, Roland E. Larson y Robert P. Hostetler, Editorial McGraw-Hill.
4. El Cálculo, Louis Leithold, Oxford University Press, Séptima Edición.
5. Introducción al Álgebra Lineal, Howard Antón, Editorial Noriega-Limusa.

2.1.4 División de Ciencias Exactas y Naturales

Por último se hizo una revisión del tríptico oficial de la asignatura en algunas carreras en la División de Ciencias Exactas y Naturales, para verificar que contenidos se imparten antes y después de la derivada, al revisar cada tríptico podemos observar el contenido sintético el cual se presenta y se sugiere de la siguiente manera: funciones, derivación, reglas de derivación, la integral definida y aplicaciones de la derivada.

A lo que respecta al contenido de la derivada encontramos lo siguiente:

Derivación: velocidad media e instantánea. Razones de cambio instantáneas. Concepto intuitivo de derivada. La derivada en un punto. La función derivada. Interpretación geométrica del signo de la derivada. Notaciones. La segunda derivada (como razón de cambio).

Mientras el material bibliográfico sugerido es el siguiente:

1- Hughes, Débora, et all, Cálculo, Ed. CECSA, 2da. Ed.
2- Edwards y Penney, Cálculo con Geometría Analítica, 4ta edición, Prentice may, 1996
3- Fraga, Robert, Calculus problems for a new century, The Mathematical Association of America 1999.
4- Solow, Anita, Learning by Discovery, The Mathematical Association of America 1999.
5- Swokowsky, E., Cálculo con Geometría Analítica, Segunda edición, Grupò Ed. Iberoamérica, 1989.
6- Leithold, L., El Cálculo, 7ma edición, Oxford, 1998,
7- Cruise / Lehman, Lecciones de Cálculo I, Ed. Addison Wesley, Iberoamérica, 1989.

2.1.5 Libros que utilizaremos como base en el diseño de la secuencia didáctica

Expusimos las sugerencias del material bibliográfico dentro del curso de las diferentes carreras, con el propósito de elegir algunos libros dentro de las sugerencias, para analizar el tratamiento que le dan a la derivada y poder materializar una secuencia didáctica con ayuda del software de GeoGebra. Los libros que utilizaremos como base en el diseño de la secuencia didáctica son:

1. Cálculo y Geometría Analítica, Roland E. Larson y Robert P. Hostetler, Editorial McGraw-Hill.
2. Leithold, L., El Cálculo 7ma edición, Oxford. En los cuales exploraremos lo siguiente contenidos con base al contenido sintético de la asignatura:

- La pendiente de la recta secante a la gráfica de una función, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, la función pendiente.
- Definición de derivada como límite.
- La derivada en un punto y la función derivada.
- Reglas de derivación.

Reflexionando sobre las revisiones efectuadas en los puntos anteriores, se puede conjeturar que el contenido de arriba es abordado normalmente en un curso de Cálculo y tanto los maestros como los estudiantes, hacen una revisión del material bibliográfico sugerido en el mejor de los casos, nuestra secuencia didáctica estará diseñada para sugerir un tratamiento geométrico tanto al maestro como al alumno en estos contenidos, por otro lado no abordaremos la posible aplicación de la derivada en diversos contextos de las diferentes carreras, solamente abordaremos el significado geométrico de la derivada.

2.2 Marco Metodológico

En este apartado describiremos los aspectos metodológicos de este trabajo, en el cual proponemos el diseño de una secuencia didáctica, en la que expondremos las diferentes etapas que fueron transformando la consolidación de este trabajo, las cuales describimos a continuación.

Etapa 1: Revisión bibliográfica.

En esta etapa nos centramos en la revisión bibliográfica de las diferentes investigaciones realizadas en el área, para observar y reflexionar los antecedentes más cercanos y significativos ligados a la enseñanza de la derivada, de donde recabamos ciertos resultados importantes que nos dieron la base para justificar la secuencia didáctica que proponemos, también se revisó el programa de Cálculo Diferencial e Integral de las diferentes carreras de la Universidad de Sonora con el objetivo de observar los materiales bibliográficos de apoyo que son sugeridos para el estudiante y el maestro.

Etapa 2: Diseño de una secuencia de actividades didácticas.

La secuencia se materializó en un conjunto de 12 actividades diseñadas en GeoGebra, aprovechando las ventajas dinámicas de este software, y en complemento se diseñaron 12 hojas que forman parte del cuadernillo de trabajo. Cada hoja del cuadernillo contiene una serie de indicaciones y preguntas que orientan la actividad matemática del estudiante, en la que se trata de promover el significado geométrico de la derivada y la construcción de algunas reglas de derivación partiendo de un análisis geométrico.

Etapa 3: Puesta en escena.

Se puso a prueba la propuesta con su respectivo cuadernillo de trabajo, en una sesión de dos horas con un grupo de primer semestre de la Licenciatura en Nutrición, que cursaba la asignatura de Introducción al Cálculo Diferencial e Integral, con el objetivo de identificar posibles errores en el diseño en las actividades, cuestiones de redacción, etc... en el cual pedimos que nos hicieran observaciones en las preguntas del cuadernillo de trabajo, con el fin de no perder de vista si las preguntas son entendidas correctamente y ver qué tan accesibles son para los alumnos.

Etapa 4: Análisis e incorporación de las sugerencias de los resultados.

En esta última etapa consiste en el análisis de las actividades que trabajaron los alumno, en las que nos percatamos que no entendían algunas preguntas que estaban mal formuladas provocando confusión, también observamos que hacía falta claridad en algunas indicaciones, por el cual se decidió resaltar los incisos de cada actividad dentro del cuadernillo de trabajo de manera general, para que el docente o el estudiante identifique a primera vista en que inciso está trabajando.

2.3 Consideraciones Teóricas

Trataremos tanto de la importancia y la necesidad de representar los objetos matemáticos, como la construcción de concepciones éstos, por medio de la coordinación de diferentes representaciones semióticas que propone Duval, ya que identificar un objeto en un registro, hacer tratamientos en el registro y realizar conversiones entre registros, juega un papel fundamental en la comprensión matemática por parte del individuo.

Por otro lado mencionaremos la importancia de la socialización desde el punto de vista que propone Vygotsky, donde el conocimiento se desarrolla en un proceso de interacción entre el sujeto y algún medio, es decir, al plantear una actividad al estudiante proponemos el medio de discusión, de esta manera la interacción por parte de los alumnos resulta fundamental y enriquecedora.

Por ultimo mencionaremos la importancia de utilizar como medio el software GeoGebra, para promover la construcción geométrica de la derivada, como también los beneficios que otorga este medio, desde el punto de vista de la teoría de la instrumentación donde puntualiza una relación importante, cuando interactuamos con el artefacto (que llamaremos medio) y nuestro conocimiento. Motivando así el proceso de transformación de un artefacto en un instrumento la cual Rabardel denomina la génesis instrumental.

2.3.1 Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval

En el transcurso del curso de cálculo, el docente habla y nos muestra una función, un vector, un punto, una recta, la derivada... Los cuales representan objetos matemáticos, el construir el concepto de estos objetos juega un papel importante en la comprensión de las matemáticas por parte del individuo, no obstante cognitivamente los objetos matemáticos no son accesibles en el primer momento de contacto, posiblemente terminemos asociando imágenes mentales debido a nuestra percepción construida en el momento de contacto con ese objeto, es complicado abordar una situación de esta magnitud, por lo cual necesitamos herramientas que nos ayuden a promover y dar sentido a la construcción cognitiva de este objeto matemático por parte del individuo en particular la derivada.

Considerando los registros de representaciones semióticas[1] que presenta Raymond Duval (1993), podemos considerar un tratamiento de este objeto matemático. Por otra parte, mediante la coordinación de los diferentes registros de representación semiótica -en este caso de la derivada- tenemos una concepción más completa del objeto, pues cada registro presenta una parcela del significado total de dicho objeto.

> La coordinación de varios registros de representación semiótica aparece así como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos: es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Bajo estas dos condiciones, una representación funciona verdaderamente como representación, es decir, proporciona el acceso al objeto representado. R. Duval (1993, p.3).

Por otro lado, es importante preguntarnos ¿cómo lograr una coordinación entre las representaciones?, para esto analizamos lo siguiente, donde R. Duval (1993) observa que: "Un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas

[1] Es cualquier forma de actividad, conducta o proceso que involucre signos. Incluyendo la creación de un significado. Es un proceso que se desarrolla en la mente del intérprete; se inicia con la percepción del signo y finaliza con la presencia en su mente del objeto del signo.

a la aprehensión, o a la producción de una representación semiótica." Las cuales mencionaremos a continuación:

1- La formación de una representación identificable: es visto como el primer contacto, escritura de una formula, dibujo de una figura geométrica, esta formación implica una selección de rasgos por representar. La selección se hace en función de las reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación. La función de estas reglas es asegurar, en primer lugar, las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación y, en segundo lugar la posibilidad de su utilización para los tratamientos.

2-El tratamiento: es la transformación de una representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

3- La conversión: es la transformación de una representación semiótica en otra conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. La conversión es una transformación externa entre diferentes registros.

Lo que caracteriza la actividad matemática es la movilización simultánea de al menos dos registros de representación o la posibilidad de cambio de un registro en otro. En la actividad matemática la conversión tiene como objetivo seleccionar el registro donde el tratamiento es más económico y potente, o buscar un segundo registró el cual sirva como soporte o guía en los tratamientos efectuados en el otro registro, también dependiendo del dominio que se tiene en el tratamiento, un registro puede dominar explícitamente. Lo principal es poder cambiar de un registro a otro como lo señala R. Duval (2006, p.3) "Por tanto, se puede formular la siguiente hipótesis: la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica".

2.3.2 Teorías Pedagógicas de Lev Vygotsky

La socialización juega un papel importante en esta propuesta didáctica complementaria al curso de cálculo, ya que estas actividades pretenden un análisis geométrico de la derivada, de tal forma que el estudiante al abordar cada actividad, genere ideas de resolución, construya cuadros mentales asociados a la situación planteada en cada actividad y logre construir algún conocimiento.

Los estudiantes construyen nociones del objeto matemático en juego cuando tienen un primer contacto con un problema de matemáticas de manera individual, también lo hacen de forma asimétrica[2] respecto a los demás compañeros, es aquí donde la socialización juega un papel central en función de la comunicación. Desde el punto de vista de Vygotsky (1994):

> En el proceso del desarrollo, esta desempeña un papel formador y constructor. Ello significa simplemente que algunas categorías de funciones mentales superiores (atención voluntaria, memoria lógica, pensamiento verbal y conceptual, emociones complejas, etc.) no podrían surgir y constituirse en el proceso del desarrollo sin la contribución constructora de las interacciones sociales.

Para Vygotsky, el conocimiento se desarrolla en un proceso de discusión, de interacción entre individuos y algún medio, que puede ser un problema en nuestro caso particular de matemáticas, de esta manera el proceso de discusión por parte de los alumnos, en la discusión grupal y en equipo, generadas por el medio en el salón de clases enriquece las nociones del objeto de conocimiento.

Es importante notar que emergen distintos puntos de vista, permitiendo no sólo reafirmar las nociones construidas del objeto, sino también desechar las posibles conjeturas que se creen erróneas, llevando a los estudiantes a un conocimiento uniforme construido individualmente, en pequeños equipos y de manera grupal.

[2] Referente a la diferencia de conocimientos por parte de los alumnos.

Por otro lado la intervención del docente, juega un papel muy importante ya que es mediador entre el conocimiento y el estudiante, L. Vygotsky (1994) plantea la zona de desarrollo próximo de la siguiente manera:

> La distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la capacidad del sujeto para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema, bajo la guía de un adulto o en la colaboración con otro compañero más capaz.

2.3.3 Teoría de la Instrumentación de Rabardel

Una parte fundamental del diseño de esta propuesta didáctica recae en utilizar como medio el software GeoGebra, ya que gracias a sus bondades nos permite introducir aspectos dinámicos en la construcción geométrica de la derivada, para ello necesitamos tomar en cuenta la importancia y los beneficios que otorga este medio, desde el punto de vista de la teoría de la instrumentación que propone Rabardel.

Dentro de la teoría se puntualiza una relación importante que debemos de tomar en cuenta cuando interactuamos con el artefacto (que llamaremos medio) y nuestro conocimiento, el cual juega un papel muy importante al impulsar la construcción geométrica de la derivada, es decir, en la interacción nacen dos entidades, la instrumentalización y la instrumentación.

La instrumentación gira entorno a la conexión que realizamos con el artefacto, en el sentido de apropiar su funcionamiento y sus propiedades, en la instrumentalización podemos introducir los esquemas de uso en conjunto con nuestros conocimientos y determinar los alcances y limitaciones que desprende el artefacto. Este proceso es fundamental para convertir el artefacto en instrumento, a la que Rabardel denomina la Génesis Instrumental.

Según Rabardel (2001) "el software restringe no sólo la manera de actuar, sino también la manera de pensar del usuario". Motivando así el proceso de transformación de un artefacto en un instrumento.

Es importante tomar en cuenta los procesos que vive el estudiante al interactuar con las características del software, ya que influyen en las estrategias de resolución (proceso de instrumentación), también su conocimiento y la forma de trabajar guían la manera en que utiliza el software (proceso de instrumentalización), lo cual forma una parte fundamental ya que el software puede ser instrumentado de diferentes formas en función del estudiante y el problema propuesto en las actividades diseñadas, el artefacto en manos del estudiante puede ser transformado en instrumento.

Capítulo 3 La Propuesta

3.1 Objetivo General

Elaborar una secuencia de actividades didácticas diseñadas con ayuda del software GeoGebra, en conjunto con un cuadernillo de trabajo por cada actividad respectivamente, con el propósito de promover en los estudiantes el significado geométrico de la derivada, así como promover algunas reglas de derivación desde un análisis gráfico.

3.2 Uso de GeoGebra en la Propuesta

Esta propuesta se materializa en un conjunto de 12 applets con su cuadernillo de trabajo respectivamente; los applets están diseñados en su totalidad con GeoGebra, por lo cual hablaremos un poco de las ventajas que ofrece este software.

El uso de GeoGebra facilita al estudiante el acceso a las diferentes representaciones, expresando la matemática de modo interactivo y dinámico, armonizando lo experimental y lo conceptual de un objeto matemático. También nos permite trabajar en las tres representaciones: gráfica, numérica y algebraica. En las cuales, cada representación del mismo objeto se vincula dinámicamente y se actualiza a los cambios producidos en cualquier representación, lo cual permite al alumno hacer una manipulación de las diferentes representaciones del objeto matemático.

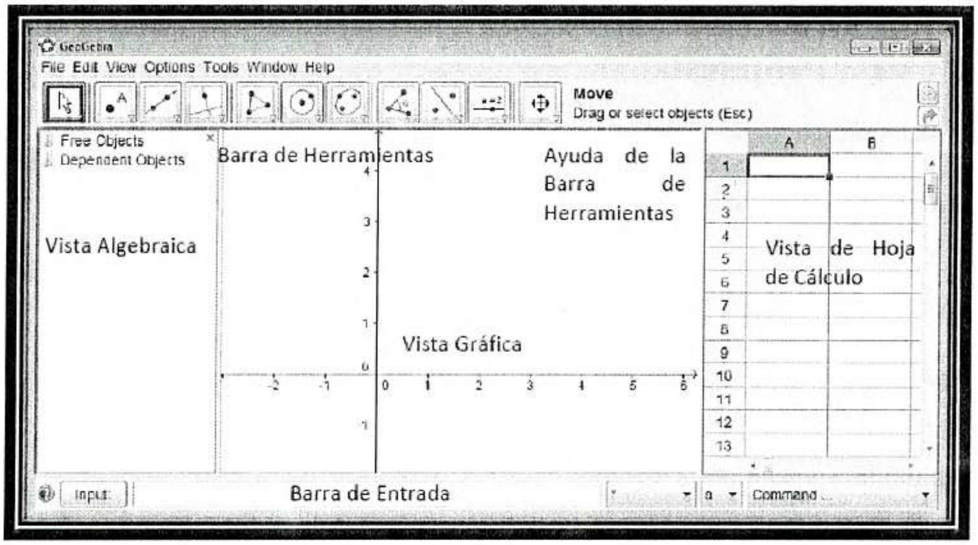


Figura 1

3.3 Aspectos considerados para el diseño de las actividades

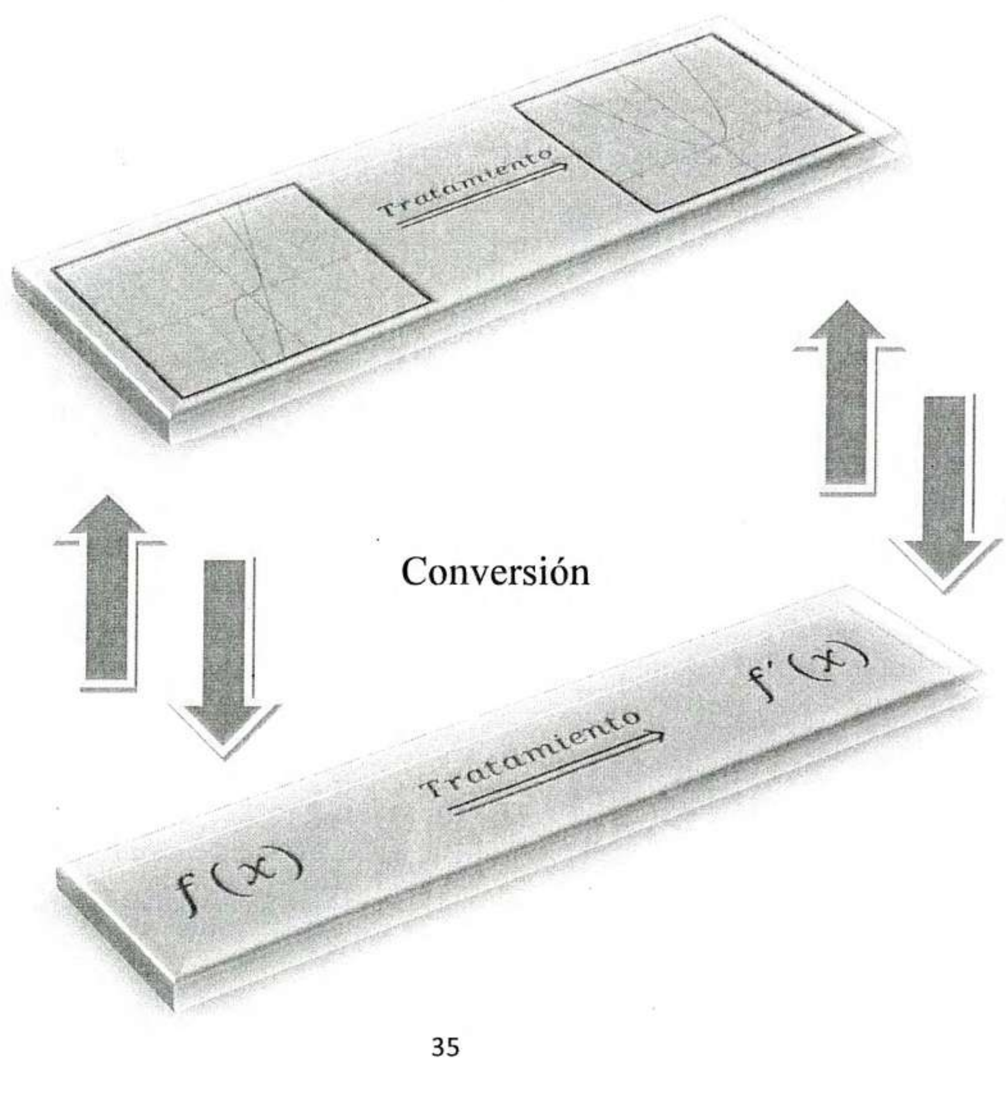
Esta propuesta busca promover un tratamiento geométrico complementando al algorítmico en el aprendizaje de la derivada, con el fin de promover por un lado la modelación en el manejo algebraico, mientras por el otro, lograr una conexión y equilibrio entre el análisis algebraico, geométrico y numérico de la derivada.

A continuación haremos una descripción de como entra en funcionamiento esta propuesta, la cual mostramos y describimos de la siguiente manera:

En la revisión efectuada en el Capítulo 1 encontramos que el tratamiento algorítmico en la enseñanza de la derivada, es una práctica que tiene mayor peso y preferencia entre los docentes posiblemente por su proceso económico, con base en ello, consideramos que esta propuesta debe tener una aportación dentro del terreno geométrico, promoviendo y utilizando la representación gráfica como punto de partida.

Por un lado el tratamiento dentro de la representación analítica de la función derivada está motivada por la definición usando límites, diferentes reglas de derivación y aplicaciones, en la cual se maneja una serie de información que se presenta de manera compacta, en la que difícilmente es comprendida por el alumno en un primer contacto. Nuestro propósito en esta parte es mostrar esta información compacta que nos brinda el terreno geométrico tratando de ampliar la visión de la derivada, ya que ahí nace precisamente el estudio de la misma.

En esta propuesta con énfasis en los registros geométricos, el tratamiento dentro de la representación gráfica de la función derivada está motivada por el estudio de la recta tangente como límite de la tendencia de la recta secante, la construcción de la gráfica de la función derivada con ayuda de la abscisa del punto de tangencia y la pendiente de la recta tangente, la cual se caracteriza como punto pendiente, de las cuales desprendemos algunas reglas de derivación, en las que introducimos en algunas actividades un tratamiento numérico, tratando de ilustrar lo mencionado anteriormente. Consideramos la siguiente imagen.



Parte de nuestra motivación surge de los libros de Cálculo Roland E. Larson y Leithold, L. en la que observamos la manera de introducir el estudio de la derivada, el cual fue retomado con el fin de dar una visión dinámica a los siguientes contenidos:

- La pendiente de la recta secante a la gráfica de una función, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.
- Definición de derivada como límite.
- La derivada en un punto y la función derivada.
- Reglas de derivación.

Al lograr que el estudiante coordine las diferentes maneras de representar el objeto derivada, se estarían promoviendo las diferentes maneras de realizar un análisis a la función derivada, con el fin de complementar y dar sentido al utilizar la representacion analítica de la funcion derivada, para esto se plantearon algunas preguntas con el fin de guiar cada actividad y promover la coordinacion entre las diferentes representaciones. Acontinuacion mostramos una tabla con la descripcion sintetica de cada actividad.

Tabla 2 Descripción sintética de las actividades.

Etapas	Actividades	Descripción
Etapa I Construcción de la Recta Tangente	**Actividad 1**	Se inicia con un análisis geométrico, promoviendo el elemento visual de la tendencia de la recta secante a la recta tangente.
	Actividad 2	Se introduce a las condiciones de existencia de la recta tangente.
	Actividad 3	Condiciones de existencia de la recta tangente.

Etapa II Construcción Gráfica de la Función Derivada	**Actividad 4**	Se identifica el punto pendiente.
Etapa III Reglas de Derivación	**Actividad 5**	Regla de la constante
	Actividad 6	Análisis de la gráfica de la función derivada de una función lineal.
	Actividad 7	Regla de la potencia con un análisis geométrico, analítico y numérico.
	Actividad 8	Introducción a la regla de la suma con un análisis geométrico y analítico.
	Actividad 9	Regla de la suma con un análisis geométrico.
	Actividad 10	Regla de la multiplicación con un análisis geométrico, analítico y numérico.
	Actividad 11	Regla del cociente con un análisis geométrico, analítico y numérico.
	Actividad 12	Regla de la cadena con un análisis geométrico, analítico y numérico.

3.4 Descripción de las actividades

Objetivo de la actividad 1: Recta secante.

En esta actividad se pretende introducir al alumno a la construcción geométrica e interpretación puntual de la derivada, para esto se hace un primer análisis de la gráfica de la función f en un punto fijo T, utilizando la recta que pasa por dos puntos, los cuales están sobre la gráfica de $f(x)$, a la cual llamaremos recta secante, se propone analizar la pendiente de la recta secante tanto izquierda como derecha, donde estas rectas cortan a la gráfica de $f(\mathrm{x})$ en el punto T, como se muestra en la siguiente figura.

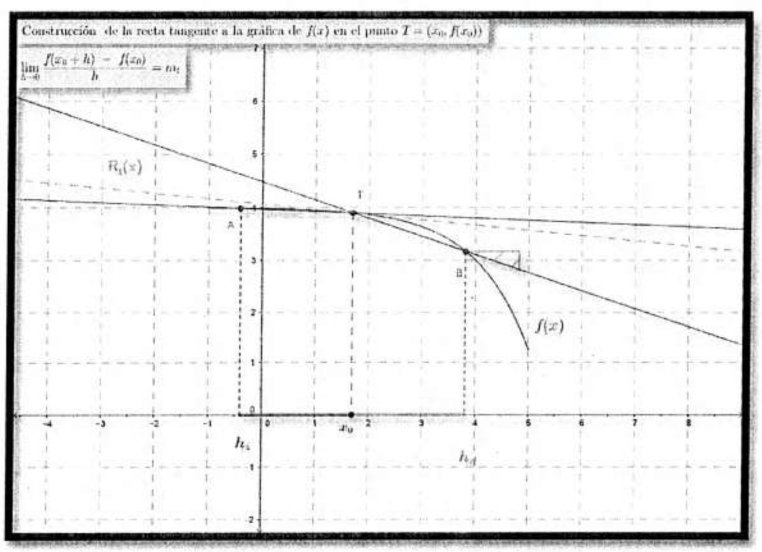


Figura 1

También se pretende que el alumno analice los valores de h_i y h_d[3], y observe cómo éstos intervienen tanto en el valor de la pendiente, como en la tendencia de la recta secante,

[3] h_i representa la distancia que existe entre las abscisas de los puntos A y P, y h_d la de P y B.

que tiende cada vez a la recta tangente, permitiendo aproximar el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(\mathrm{x})$. Por otro lado, el valor mínimo de h_i y h_d es 0.0001 y es visible por el alumno, esto da pie a la pregunta ¿Qué sucede cuando h_i y h_d tienden a cero? Lo cual da pie a establecer de manera intuitiva el valor exacto de la pendiente, obteniendo un primer acercamiento por parte del alumno a la pendiente de la recta tangente por medio de una idea intuitiva del límite de la pendiente de la recta secante izquierda y derecha.

Por otro lado, se pretende reafirmar esta idea intuitiva del estudiante, haciendo énfasis en el análisis gráfico en el inciso 2), donde la recta secante izquierda y derecha tienden al mismo tiempo a la recta tangente de la gráfica de $f(x)$ en el punto T, también se pretende validar este proceso para cualquier posición del punto T, ya que el alumno tiene la libertad de arrastrar el punto por toda la gráfica de $f(x)$.

Para finalizar se pretende analizar en cercanía del punto T las características de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en T, permitiendo la formulación por parte del alumno sobre el comportamiento lineal que hay localmente. Por otro lado, también se pretende que el alumno escriba y argumente en su cuaderno los procesos que lleva a cabo, permitiéndole desarrollar la comunicación matemática y el reordenamiento de ideas para argumentar lo que se le pide.

Actividad 1: Recta secante

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Activa las casillas Rectas secantes y mueve los puntos A y B que están sobre la gráfica de $f(x)$ con ayuda de los controles h_i y h_d.

2- Determina el dominio de la función f y argumenta tu respuesta.

3- ¿Por qué desaparece el punto B en $x = 5$?, ¿Por qué desaparece la recta secante cuando $x = 5$?, ¿De qué depende la existencia de la recta secante por la derecha?

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Analiza la tendencia de cada recta secante cuando los valores de h_i y h_d tienden a cero, argumenta tus observaciones.

2- ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T? Argumenta tu respuesta.

3- ¿Cómo puedes calcular el valor de la pendiente en la pregunta anterior? describe el proceso que llevarías a cabo.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Selecciona y arrastra el punto T a lo largo de la gráfica de $f(x)$.

2- Analiza la tendencia de cada recta secante cuando el valor de h tiende a cero, argumenta tus observaciones.

3- Realiza un zoom alrededor del punto T con ayuda de la lupa ¿Qué sucede con la gráfica de $f(x)$ y la recta tangente? argumenta tu respuesta.

4) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- ¿Qué características tienen la gráfica de $f(x)$ y la recta tangente en cercanía del punto T cuando h tiende a cero?

2- Con ayuda del control h, mueve los puntos A y B acercándote lo más que puedas al punto T, ¿Qué sucede con las rectas secantes y la recta tangente en cercanía del punto T? Argumenta tus observaciones.

3-¿Qué utilidad tiene la recta secante izquierda y derecha a la gráfica de $f(x)$?

Objetivo de la actividad 2: recta tangente.

En esta segunda actividad se pretende analizar la parte puntiaguda del lugar señalado en la gráfica de $f(x)$ como se muestra en la siguiente figura, donde f es una función a trozos, la cual se define de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & si -3 \leq x \leq 1, \\ x^3, & si \ x > 1. \end{cases}$$

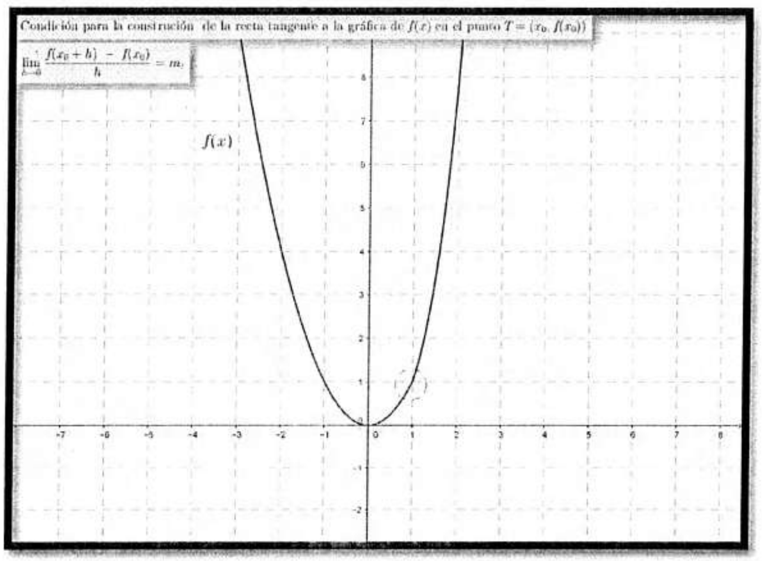


Figura 2

El análisis correspondiente se hace al tratar de construir la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $T = (1, 1)$, con ayuda de las rectas secantes tanto a la izquierda como a la derecha del punto, como se muestra en la **Figura 4**. El objetivo principal es tratar que el estudiante identifique la diferente tendencia (cuando h se acerca a cero) de la pendiente de cada recta secante, tanto por la izquierda como por la derecha, una a la vez y después simultáneamente, esto permitirá al alumno cuestionar la existencia de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T y también le permitirá relacionar la parte puntiaguda de la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$, como se mostró en la figura anterior.

Por último también se pretende trabajar con los triángulos de colores, que muestran la pendiente de cada recta secante, ya que el alumno puede mover el punto T por toda la gráfica, cuando el valor de h es muy cercano a cero y los triángulos embonan perfectamente cuando se puede construir la recta tangente a la gráfica de $f(x)$, lo cual no sucede en el punto $T = (1, 1)$, como se muestra en la **Figura 4**.

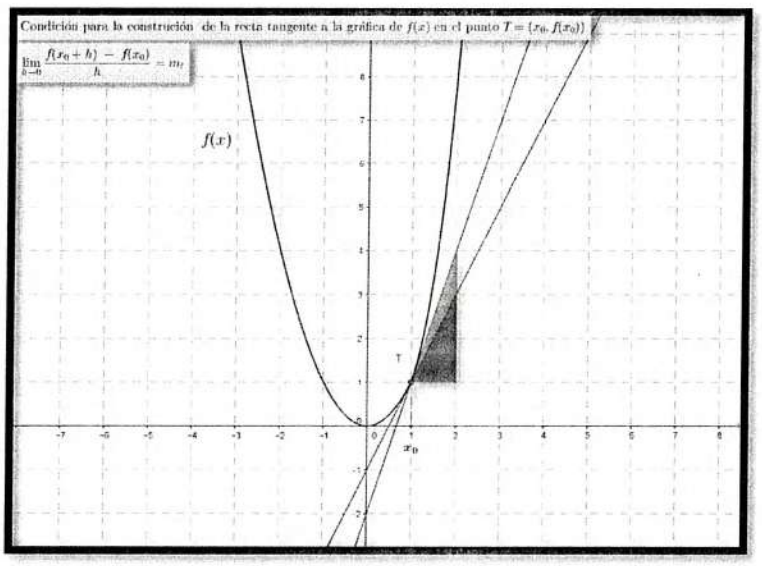


Figura 3

Actividad 2: Recta tangente.

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Activa la casilla Recta secante derecha y con ayuda del control h_d realiza el análisis por la derecha y determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T, anota tus observaciones.

2- Activa la casilla Recta secante izquierda y con ayuda del control h_i realiza el análisis por la izquierda y determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T, anota tus observaciones.

3-¿Qué valor le corresponde a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T?

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1-¿Es posible encontrar la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T?

2- Describe el contraste que puedes hacer con base en el análisis que hiciste en los incisos 1 y 2.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Con ayuda de la lupa acércate y analiza cuidadosamente la parte indicada en la gráfica de $f(x)$.

1- ¿Qué forma toma la gráfica de $f(x)$ cuando te acercas?

2- Activa la casilla Rectas tangentes.

3- ¿Existe la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T =(1 ,1)?

4- Compara tus respuestas con el inciso anterior y argumenta tus observaciones.

Desactiva la casilla Rectas tangentes para continuar.

4) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Regresa la gráfica a su tamaño inicial.

Con ayuda del control h analiza la tendencia de cada recta secante, después selecciona el punto T y colócalo en las coordenadas (-1,1) y (1,1), nuevamente analiza la tendencia de cada recta secante apoyándote de los triángulos.

1-¿Qué diferencias encontraste en los triángulos? ¿Puedes calcular el valor de la pendiente en T= (-1,1) y T= (1,1)?

2-¿Qué sucede con las rectas secantes?

3-¿Qué es necesario para la construcción de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto T? Argumenta tu respuesta.

Objetivo de la actividad 3: condiciones para la construcción de la recta tangente.

En esta actividad se analizan dos funciones a trozos, una continua y la otra discontinua en $x = 1$, en las cuales se pretende que el estudiante determine el dominio de las funciones f y g, en donde es posible calcular el valor la pendiente de la recta tangente a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en un punto respectivamente, implícitamente el estudiante estará trabajando en el dominio de la función derivada f' y g', para lograr esto se hace un análisis de la tendencia de cada pendiente de la recta secante tanto izquierda como derecha como se muestra en las **Figuras 5 y 6**.

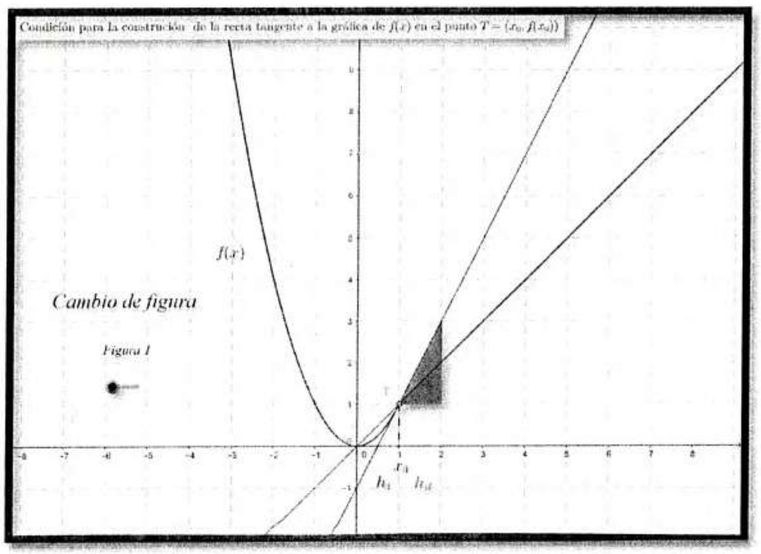


Figura 4

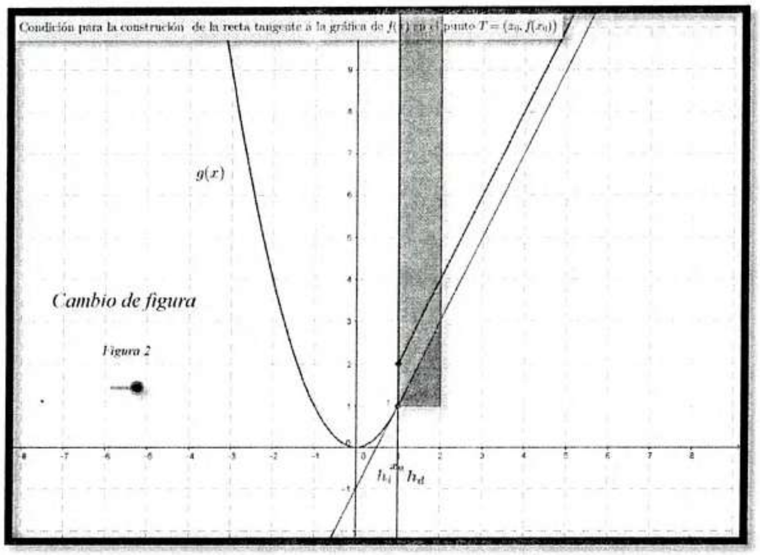


Figura 5

También se cuestiona la existencia de la pendiente de la recta tangente a en $(1,1)$ en ambas graficas permitiendo asociar dos cosas, la primera: que no es suficiente la continuidad de la gráfica para la construcción de la recta tangente en $(1,1)$, y la segunda: que asocie las características de la gráfica en $x = 1$, con la existencia de la pendiente de la recta tangente en $(1,1)$, permitiendo dar una idea del teorema en el cual se menciona que si es f derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

Por otro lado al trabajar con los triángulos de colores que muestran la pendiente de cada recta secante, el estudiante podrá obtener una idea intuitiva de cuándo no es posible la construcción de la recta tangente a la gráfica, tanto de $f(x)$ como $g(x)$, ya que en $x = 1$ en las dos gráficas los triángulos no embonan.

Actividad 3: condiciones para la existencia de la recta tangente

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

Actividad de reconocimiento figura 1.

Selecciona y arrastra el punto T a lo largo de la gráfica de $f(x)$ y contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

1- Determina el dominio de la función f donde se pueda construir la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T.

2- Describe las características de la gráfica de $f(x)$ su dominio.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas, figura 1

1-Coloca el punto T en las coordenadas $(1,1)$ y $(-1,1)$, con ayuda del control h analiza la tendencia de cada recta secante y escribe tus observaciones.

2- Calcula el valor al cual tiende cada pendiente de la recta secante tanto izquierda como derecha, cuando mueves el control h y te acercas a cero.

3-¿Cuál de los valores encontrados corresponde al de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $T = (1,1)$?

Sugerencias: Selecciona y arrastras el punto T a lo largo de la gráfica, tomando en cuenta el valor mínimo de h y observa lo que sucede con los triángulos de colores en $(1,1)$ y $(-1,1)$.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas, figura 1.

Escribe y argumenta tus respuestas.

1- Analizando la zona marcada en la gráfica y haciendo una reflexión del inciso1) ¿Qué puedes decir acerca de la existencia de la recta tangente a la curva en el punto $T = (1,1)$?

2- ¿Qué diferencia hay en cada zona? Escribe tus observaciones.

Regresa a la actividad de reconocimiento y cambia a la figura 2 para iniciar su respectivo análisis.

Actividad de reconocimiento figura 2

Contesta las siguientes preguntas:

1-¿Es continua la gráfica de $g(x)$? ¿Por qué? Argumenta tu respuesta.

2- Describe las características de la gráfica en todo su dominio.

3- Selecciona y arrastras el punto T a lo largo de la gráfica, tomando en cuenta el valor mínimo de h. ¿Qué sucede con los triángulos durante el recorrido de T?

1) Escribe en tu cuaderno lo que se te pide, análisis figura 2.

1- Activa la casilla Recta secante que pasa por el punto T y con ayuda del control h analiza la tendencia de cada recta secante, escribe tus observaciones.

2- A medida que h se acercas a cero ¿a qué valor tiende la pendiente de la recta secante por la izquierda?, ¿a qué valor tiende la pendiente de la recta secante por la derecha?

3- Activa la casilla Recta secante que pasa por el punto Q y con ayuda del control h analiza la tendencia de cada recta secante, escribe tus observaciones.

4- A medida que h se acercas a cero ¿a qué valor tiende la pendiente de la recta secante por la izquierda?, ¿a qué valor tiende la pendiente de la recta secante por la derecha?

2) Responde en tu cuaderno la siguiente pregunta, figura 2.

1- Analizando la discontinuidad en la gráfica y haciendo una reflexión del inciso 1) ¿Qué puedes decir acerca de la existencia de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en $x = 1$?

2-¿Existe la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto T y en el punto Q del inciso 1?

3- Determina el conjunto donde puedas construir la recta tangente a la gráfica de $g(x)$.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas, figura 1 y 2.

Ahora analizaremos las gráficas de las Figuras 1 y 2 simultáneamente.

Escribe y argumenta tus respuestas.

1- ¿Qué diferencia hay entre las dos gráficas?

2- Responde a esta pregunta haciendo un contraste con las actividades anteriores ¿Qué característica debe de tener la gráfica de una función para la existencia de la recta tangente a la gráfica en un punto?

3- Ahora ¿puedes determinar un conjunto del dominio de la gráfica de las funciones de las figuras 1 y 2 donde exista la recta tangente a la curva en un punto?

Objetivo de la actividad 4: Construcción de la gráfica de la derivada.

En esta actividad se pretende que el estudiante construya la gráfica de la derivada con ayuda de la pendiente de la recta tangente, para esto se analizan los puntos T y D_f que pertenecen a la gráfica de $f(x)$ y $f'(x)$ respectivamente, como se muestra en la siguiente figura.

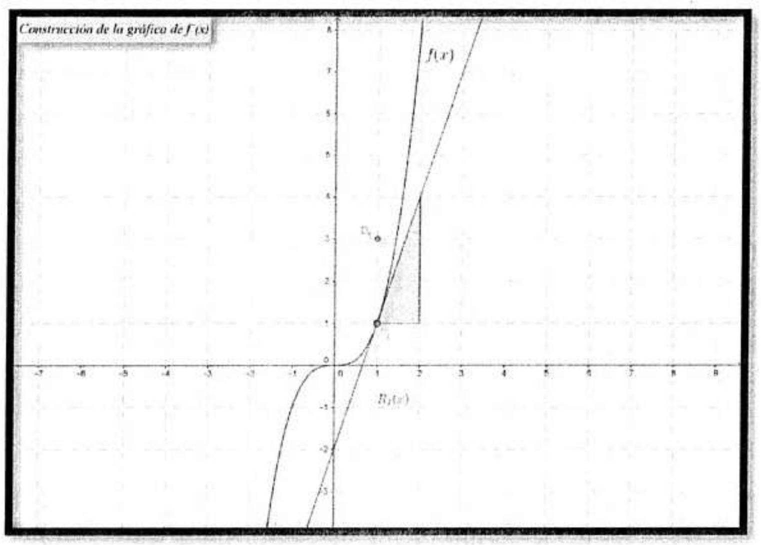


Figura 6

Se pretende que el estudiante conjeture la naturaleza del punto D_f a partir de la construcción puntual de la derivada, lo cual se lleva a cabo con el análisis de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T. También tratamos que el estudiante logre dar el significado a $f'(x_0)$ como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T.

Actividad 4: Construcción de la gráfica de la función derivada

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Selecciona y arrastra el punto T a lo largo de la gráfica de $f(x)$, describe tus observaciones.

2- ¿Qué relación hay entre las abscisas del punto T y el punto D_f?, escribe y argumenta tu respuesta.

Arrastra el punto T, de tal manera que la pendiente de la recta tangente sea 3.

3-¿Qué determina las coordenadas del punto D_f? argumenta tus respuestas.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Da clic derecho al punto D_f y selecciona Rastro.

1-¿Qué pasa cuando mueves el punto T?

2-¿Qué elementos intervienen en la construcción que hace el punto D_f? Argumenta tu respuesta.

3-¿Qué información guarda cada punto rojo que se forma al mover el punto T? Argumenta tu respuesta.

4-¿Qué puedes decir del lugar geométrico que formaste, considerando la naturaleza del punto D_f? Argumenta tu respuesta.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Si la gráfica de $f'(x)$ se obtuvo a partir de $f(x)$.

1- Determina $f'(1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ y $f'(-2)$.

2- ¿Qué interpretación tiene cada resultado de la pregunta anterior? Escribe y argumenta tu respuesta.

Objetivo de la actividad 5: regla de la constante.

Con esta actividad se pretende que el estudiante tenga contacto con dos puntos en específico; el primer punto, refiere a que el estudiante empiece a establecer una conexión y a dar sentido a la siguiente simbología $f(x)$, $R_T(x)$ y $f'(x)$, la cual se utiliza en esta actividad, a cada símbolo se le asocia su representación gráfica, la cual tiene un papel importante dentro de la actividad; el segundo punto, refiere a la construcción de la regla de la constante, partiendo el análisis de las traslaciones verticales de la gráfica, la cual denotamos de la siguiente manera $f(x)+k$, es importante que el alumno logre visualizar e interiorizar el siguiente significado, la gráfica de $f(x)+k$ no sufre cambios en su curvatura, debido a las traslaciones verticales, lo cual se traduce en que la pendiente de la recta tangente a $f(x)+k$ en un punto, no cambia y por lo tanto la gráfica de $f'(x)$ no sufre ningún cambio con las traslaciones verticales de $f(x)+k$, conjeturando que la derivada de una constante k es igual a cero, como se muestra en la **Figura 8 y 9**.

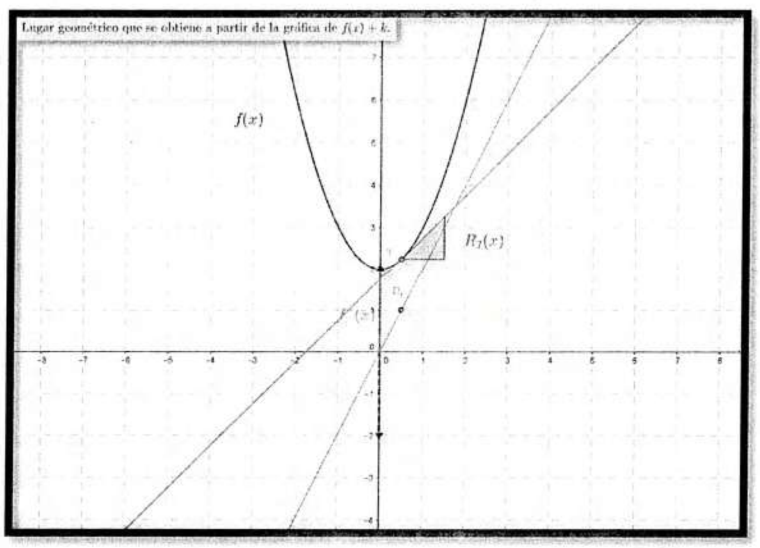


Figura 7

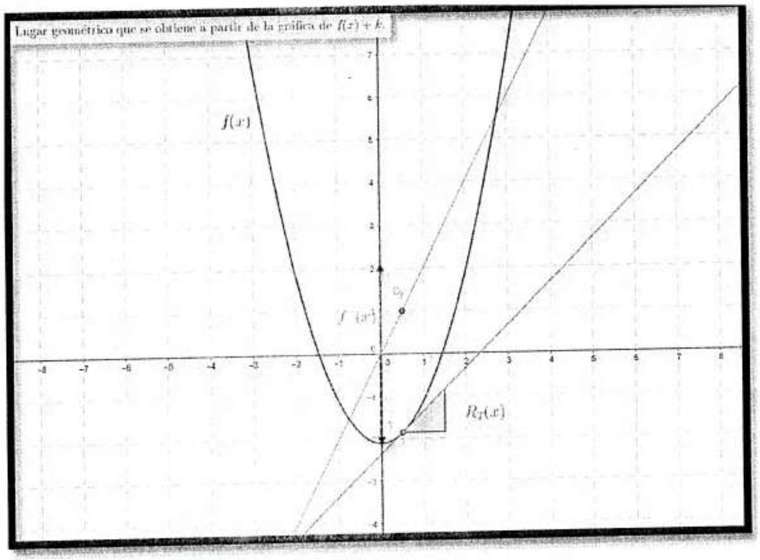

Lugar geométrico que se obtiene a partir de la gráfica de $f(x) + k$.
$f(x)$
$R_T(x)$

Figura 8

Actividad 5: Regla de la constante

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno la siguiente pregunta.

1-Si el punto D_f describe el lugar geométrico de $f'(x)$ ¿Qué pasará con la gráfica de $f'(x)$ si trasladas verticalmente hacia abajo o arriba la gráfica de $f(x)$? escribe y argumenta brevemente lo que pasará.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Ahora haz clic sobre la gráfica de $f(x)$ y trasládala hacia abajo o arriba con ayuda de las flechas de la computadora ¿Qué pasa con la gráfica de $f'(x)$? ¿A qué se debe lo sucedido?

2- ¿Qué diferencia hay entre tu respuesta del inciso 1 y lo que observaste en este segundo inciso? Escribe y argumenta lo sucedido.

3- ¿Qué cambios hay en la pendiente de la recta tangente si trasladas hacia abajo o arriba la gráfica de $f(x)$?

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Si la gráfica de $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$. ¿Cuál es la derivada de $f(x) + k$? Donde $k \neq 0$ y representa las unidades de traslación vertical. Escribe y argumenta tu respuesta.

2- Sea h la función constante definida como $h(x) := k$. ¿Cuál es la derivada de $h(x)$?

Objetivo de la Actividad 6: Derivada de una función lineal

En esta actividad se pretende que el estudiante identifique el lugar geométrico que se deriva a partir de una función lineal, para lo cual se propone un análisis, donde el estudiante logre asociar el valor de la pendiente de la recta con el lugar geométrico de $f'(x)$, es decir que logre visualizar la variación constante que presenta la función lineal como se muestra en la **Figura 10 y 11.**

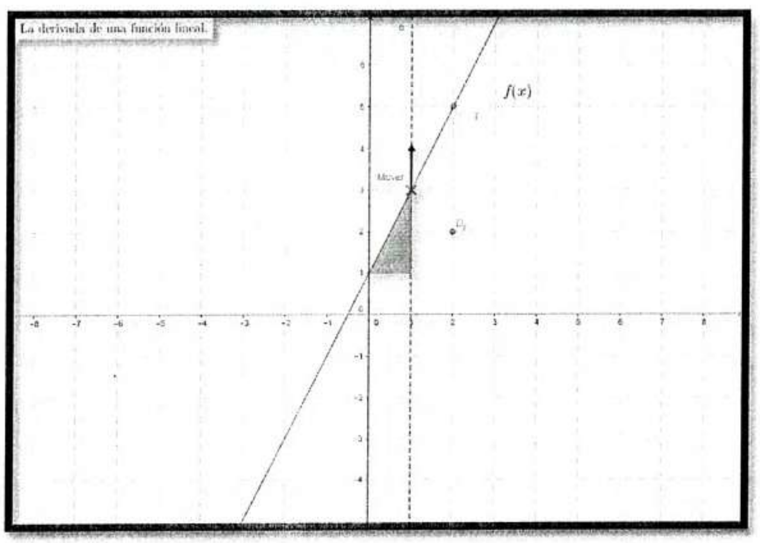


Figura 9

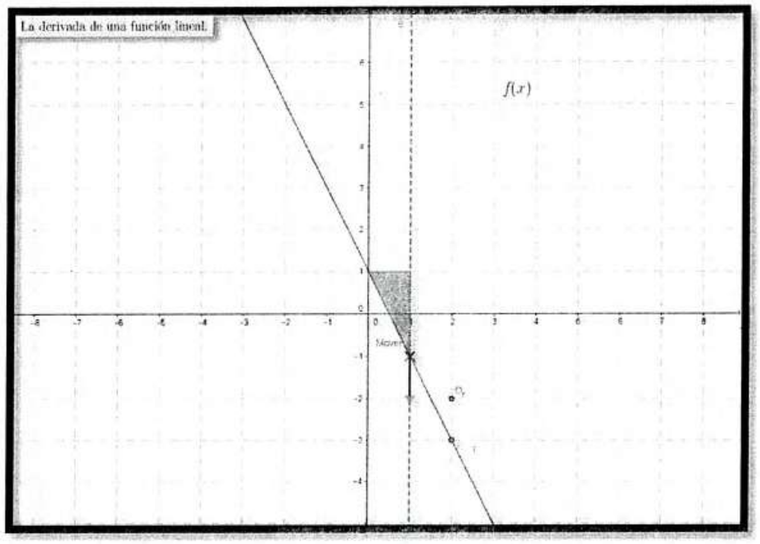


Figura 10

Actividad 6: Derivada de una función lineal

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno la siguiente pregunta.

Sea f una función la cual está definida por $f(x) := mx + b$, donde m repesenta la pendiente de la recta y b la intersección con el eje y.

Instrucciones:

Mueve la cruz que está sobre la gráfica y da una breve explicación de lo ocurrido.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Coloca la cruz de tal manera que el valor de la pendiente de la recta sea 2.

1- Selecciona y arrastra el punto T, determina el lugar geométrico que describe el punto D_f, escribe y argumenta tu respuesta.

2- Arrastra la cruz siguiendo la línea punteada, ¿Qué cambios observas en la pendiente de la recta? ¿Qué sucede con el punto D_f cuando mueves $f(x)$? argumenta lo sucedido.

3-¿Cómo determinas la gráfica de la derivada de $f(x)$? Describe de manera clara y argumenta tu respuesta.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Coloca la cruz de tal manera que el valor de la pendiente de la recta sea -2.

1- Selecciona y arrastra el punto T, determina el lugar geométrico que describe el punto D_f, escribe y argumenta tu respuesta.

2- Arrastra la cruz siguiendo la línea punteada, ¿Qué cambios observas en la pendiente de la recta? ¿Qué sucede con el punto D_f cuando mueves $f(x)$? argumenta lo sucedido.

3-¿Cómo determinas la gráfica de la derivada de $f(x)$? Describe de manera clara y argumenta tu respuesta.

Objetivo de la actividad 7: regla de la potencia

En esta actividad se pretende que el alumno construya la derivada de $f(x) = cx^{n}$, en el caso particular cuando $n = 1, 2, 3, 4$ y $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, a partir de un análisis geométrico, algebraico y numérico, permitiendo deducir la regla de la potencia y la regla de la derivada de $cf(x)$, para esto se inicia con la hoja de trabajo correspondiente a la actividad, donde se tiene una secuencia de preguntas para poder llenar la siguiente tabla.

$c = 1$	figura	$f(x)$	$f'(x)$	$c = 2$	figura	$f(x)$	$f'(x)$	$c = 3$	figura	$f(x)$	$f'(x)$
	1				1				1		
	2				2				2		
	3				3				3		
	4				4				4		
$c = -1$	figura	$f(x)$	$f'(x)$	$c = -2$	figura	$f(x)$	$f'(x)$	$c = 0$	figura	$f(x)$	$f'(x)$
	1				1				1		
	2				2				2		
	3				3				3		
	4				4				4		

Tabla 3

Con esta tabla se pretende que el estudiante logre determinar el patrón que existe en las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$ y el patrón que existe en las expresiones algebraicas de $f(x)$ y $f'(x)$, después se añade la constante para determinar el patrón de $cf(x)$ y $cf'(x)$ tanto de sus gráficas y sus expresiones algebraicas. Por otro lado también se pretende que el estudiante logre determinar la expresión algebraica de $f(x)$ y $f'(x)$ a partir de su gráfica, lo cual permite que desarrolle un trabajo cognitivo y de visualización.

Actividad 7: Regla de la potencia

Instrucciones: Como se puede observar se presenta una secuencia de gráficas, ahora sigue los siguientes pasos para hacer una exploración de las mismas.

1 - Presiona el botón rojo que está en la parte inferior izquierda.

2 - Desliza el botón figura de izquierda a derecha.

3 - Desliza el botón constante de izquierda a derecha.

4 - Repite el paso 3 con cada figura.

5 - Una vez terminado cada punto, lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Sean f y f' dos funciones definidas por $f(x)$ y $f'(x)$, donde se muestra su gráfica (empezar con la figura 1, con ayuda de la tabla 1).

1-¿Determina la expresión algebraica de $f(x)$ con ayuda de su gráfica?

2-¿Determina la expresión algebraica de $f'(x)$ con ayuda de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto T?

3-¿Qué patrón existe en las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$? ¿Qué patrón existe en las expresiones algebraicas de $f(x)$ y $f'(x)$? Repite los incisos con cada figura.

4-¿Cuál es la derivada de $f(x) = x^{n}$ donde n es una entero positivo?

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Mueve la contante de izquierda a derecha y da una breve explicación de lo que sucede con las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$ cuando c es negativa o positiva.

2- ¿Determina la expresión algebraica de $f(x)$ con ayuda de su gráfica cuando la constante toma los valores $-2, -1, 0, 2$ y 3?

3- ¿Determina la expresión algebraica de $f'(x)$ con ayuda de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$?

4- ¿Qué patrón existe en las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$? ¿Qué patrón existe en las expresiones algebraicas de $f(x)$ y $f'(x)$?

Repite las preguntas para cada figura.

5-¿Cuál es la derivada de $f(x) = cx^n$ donde c es una constante diferente de cero y n un entero positivo?

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1-¿Qué representa $f'(x)$? y ¿Qué información guarda respecto a $f(x)$?

2- ¿Cuál es la derivada de $cf(x)$ donde c es una constante diferente de cero? argumenta tu respuesta.

3 - ¿Cuál es la derivada de $f(x) = \; cx^n$ donde c es una constante diferente de cero y n un entero positivo? argumenta tu respuesta.

4 - ¿Pasará lo mismo cuando $f(x)$ tiene potencias racionales? argumenta tu respuesta.

Objetivo de la actividad 8: Regla de la suma versión introducción

En esta actividad se pretende introducir al estudiante a la regla de la suma, partiendo de la traslación horizontal de la gráfica, la cual denotamos de la siguiente manera $f(x-k)$, donde solo trabajamos los siguientes valores $k = 1, 2, -1$ y -2, que representan las unidades que se recorren horizontalmente, ya sea a la izquierda o derecha respecto al eje y, lo cual permite al alumno construir una noción, con la identificación de la expresión algebraica de la derivada a partir de su gráfica como se muestra en la **Figura 12 y 13**.

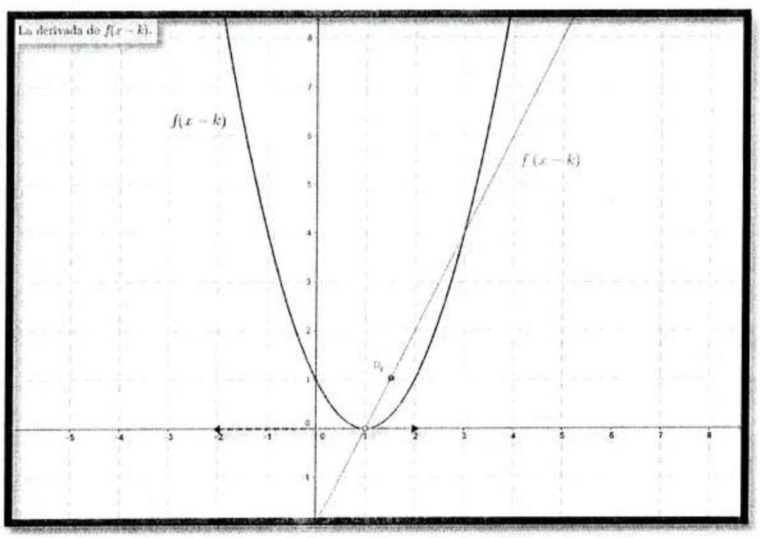


Figura 11

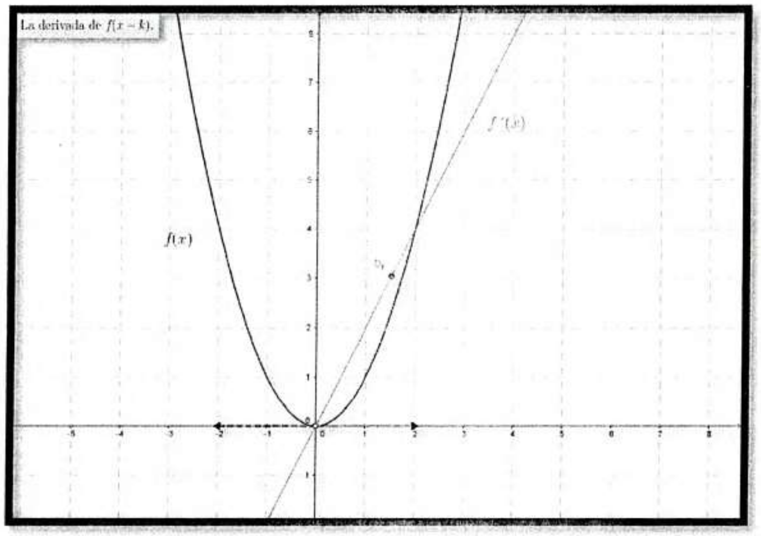


Figura 12

Por otro lado, también se trabaja con la gráfica de $f(x-k)$ y su expresión algebraica, tratando de hacer una relación con la derivada de las mismas, tanto geométricamente y algebraicamente, esto se hace con el fin de promover la intuición con diferentes maneras de asociar la derivada de una función, asociando las diferentes imágenes propuesta en la **Figura 12 y 14**.

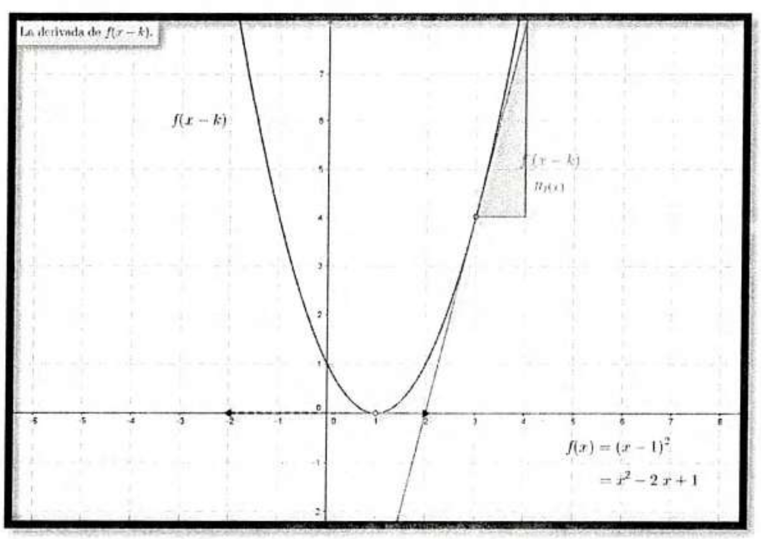


Figura 13

Actividad 8: Regla de la suma versión introducción

Instrucciones: Ahora selecciona la gráfica de $f(x)$, y con ayuda de las flechas del teclado de tu computadora, arrastra la gráfica y coloca el vértice en el origen. Una vez realizado lo que se te pide, responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno la siguiente pregunta.

1-Si el punto D_f determina la gráfica de $f'(x)$ ¿Qué pasará con la gráfica de $f'(x)$ si trasladas de manera horizontal la gráfica de $f(x)$, ya sea primero a la izquierda y después a la derecha? escribe y argumenta brevemente lo que pasará sin mover la gráfica.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Ahora haz clic sobre la gráfica de $f(x)$ y arrastra hacia la izquierda o derecha, cuidando que la gráfica permanezca sobre el eje x.

1- ¿Qué pasa con la gráfica de $f'(x)$?

2- ¿Qué diferencia hay si mueves la gráfica de $f(x)$ hacia la izquierda o derecha?

3- ¿Qué diferencia hay entre tu respuesta del inciso 1 y lo que observaste en esta segundo inciso? Escribe y argumenta lo sucedido.

4- ¿Cuál es la expresión algebraica de $f'(x)$ cuando trasladas dos unidades a la derecha la gráfica de $f(x)$?

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Ahora haz clic sobre la gráfica de $f(x)$ y traslada hacia la izquierda o derecha, cuidando que la gráfica permanezca sobre el eje x.

1- Si $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$. ¿Cuál es la derivada de $f(x-k)$? Donde $k \neq 0$, y representa la traslación horizontal de la gráfica. Escribe y argumenta tu respuesta.

2- Determina la expresión algebraica de la derivada de $f(x-k)$ con ayuda de su gráfica cuando $k = 1, 2, -1, -2$.

3- ¿Qué reglas vistas anteriormente se utilizaron en esta actividad? ¿Puedes determinar una nueva regla?

Objetivo de la actividad 9: Regla de la suma

En esta actividad se pretende que el estudiante construya la regla de la suma para la derivada, a partir de un análisis geométrico utilizando las gráficas de $f(x)$, $g(x)$ y las gráficas de sus derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$, la idea consiste en que el alumno analice los puntos que están sobre las gráficas de la función derivada y haga un contraste con el punto D_f, para determinar su posición, para esto el estudiante deberá de sumar el valor de la derivada en un determinado x_0, es decir $f'(x_0) + g'(x_0)$ para determinar $h'(x_0)$, donde $D_h = (x_0, h'(x_0))$ como se muestra en la **Figura 15 y 16**. Lo anterior se repite con diferentes gráficas para llegar a determina la derivada de $h(x) = f(x) + g(x)$.

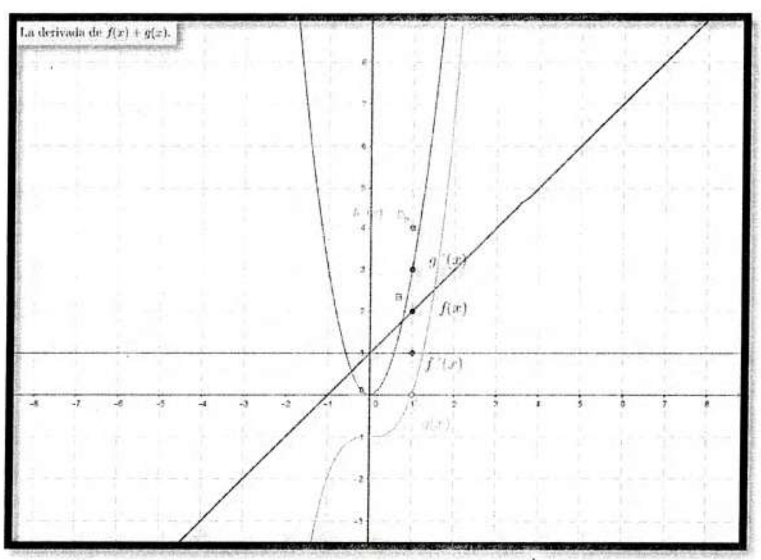


Figura 14

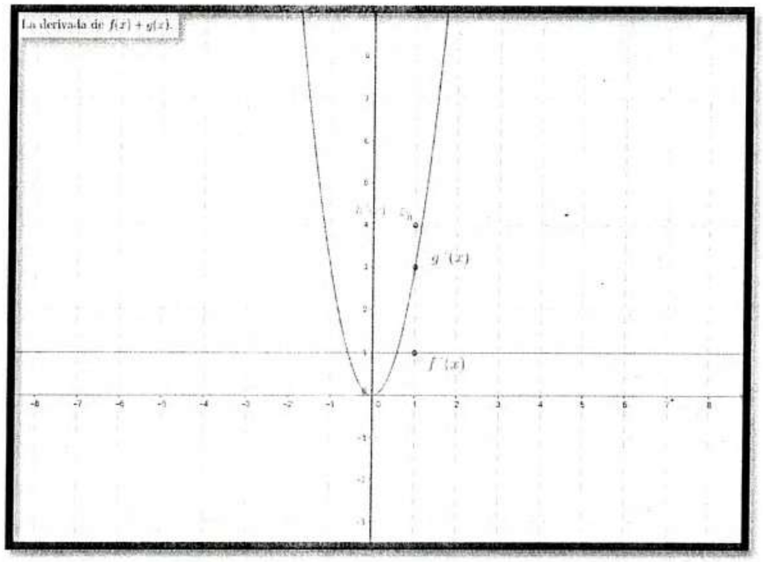


Figura 15

Actividad 9: Regla de la suma

Instrucciones: Activa las casillas que están en la parte azul y mueve de izquierda a derecha el botón negro y verde. Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

Introducción: Tenemos las funciones f' y g' que son derivadas de las funciones f y g respectivamente, con las cuales definimos la suma funciones $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$.

Sea h la función definida por $h(x) := f(x) + g(x)$ y sea D_h un punto sobre la gráfica de $h'(x)$.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0, después selecciona el punto B y arrástralo sobre la curva $f(x)$.

1-Analiza los diferentes casos: ¿Qué bosqueja el punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x) + g(x)$ determina $h'(1), h'(2), h'(0), h'(-2)\ y\ h'(-1)$ con ayuda de las gráficas.

3- Repite las preguntas 1 y 2 en cada figura.

Observación: el punto D_h está sobre la gráfica de $h'(x)$ y recuerda que puedes desactivar las casillas de las gráficas para no confundirte.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0, después presiona el botón para activar la nueva gráfica y posteriormente selecciona el punto B y arrástralo sobre la curva $f(x)$.

1-Analiza los diferentes casos: ¿Qué bosqueja el punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x) + g(x)$ determina $h'(1), h'(2), h'(0), h'(-2)$ y $h'(-1)$ con ayuda de las gráficas.

3- Repite las preguntas 1 y 2 en cada figura.

Observación: el punto D_h está sobre la gráfica de $h'(x)$ y recuerda que puedes desactivar las casillas de las gráficas para no confundirte.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0, después selecciona el punto B y arrástralo sobre la gráfica de $f(x)$. Presiona el botón para activar la nueva gráfica.

1-Analiza los diferentes casos: ¿Qué bosqueja el punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x) + g(x)$ determina $h'(1), h'(2), h'(0), h'(-2)$ y $h'(-1)$ con ayuda de las gráficas.

3- Repite las preguntas 1 y 2 en cada figura.

Observación: el punto D_h está sobre la gráfica de $h'(x)$ y recuerda que puedes desactivar las casillas de las gráficas para no confundirte.

4- Determina la derivada de $h(x) = f(x) + g(x)$ escribe y argumenta cada respuesta.

Objetivos de las actividades 10, 11 y 12: Regla de la multiplicación, Cociente y Regla de la cadena

En estas actividades se pretende que el estudiante construya las reglas para derivar la multiplicación entre dos funciones, el cociente entre dos funciones y la composición de funciones, con base en un análisis geométrico y numérico, la idea consiste en que el alumno analice los puntos que están sobre las gráficas $f(x)$, $g(x)$ y los puntos que están en las gráficas de sus derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$, para lograr hacer un contraste con el punto D_h que está sobre la gráfica de $h'(x)$ y determinar su posición, para esto el estudiante debe determinar el valor de la función derivada en un determinado x_0, es decir $h'(x_0)$, para esto utilizará la siguiente tabla.

Tabla 4

$h'(1)=$____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(2)=$____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(0)=$____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(-2)=$____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(-1)=$____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____

La cual le permitirá encontrar el siguiente valor $f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$ para determinar $D_h = (x_0, h'(x_0))$ como se muestra en la siguiente figura en el caso de la derivada de la multiplicación entre dos funciones.

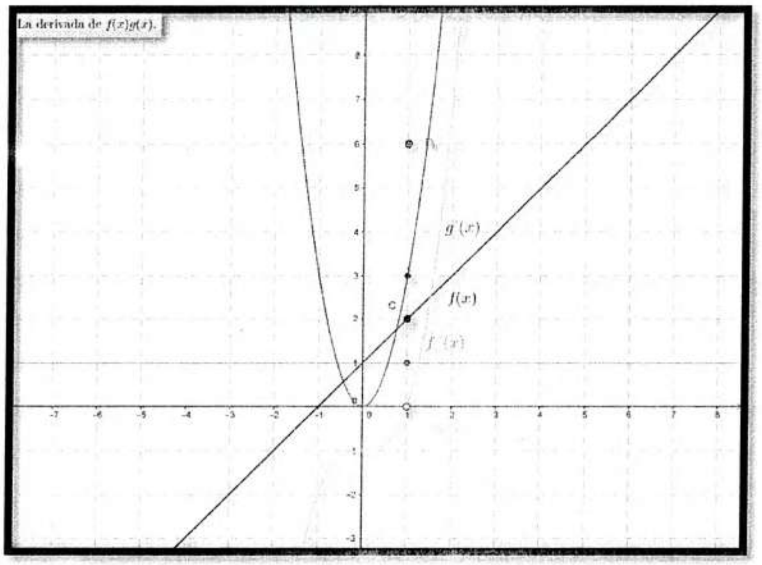


Figura 16

En el caso del de la derivada del cociente entre dos funciones, el alumno tendrá que encontrar el valor:

$$h'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Con ayuda de la siguiente tabla

Tabla 5

$h'(1/2)$=____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(-1/2)$=____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(0)$=____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(1)$=____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(-1)$=____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____

En el caso de la derivada de la composición de funciones, a la cual se conoce como la regla de la cadena, el alumno tendrá que encontrar el valor $h'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$ con ayuda de la siguiente tabla:

Tabla 6

$h'(1)=$____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(2)=$____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(0)=$____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(-2)=$____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____
$h'(-1)=$____	$f(\ )=$____	$f'(\ )=$____
	$g(\ )=$____	$g'(\ )=$____

Actividad 10: Regla de la multiplicación

Instrucciones: Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1- Activa las casillas que están en la parte inferior y mueve de izquierda a derecha los controles de la figura 1 y 2 observando con cuidado lo que sucede.

2- Sea las funciones f' y g' las derivadas de las funciones f y g, ahora exploraremos la multiplicación de dichas funciones.

3- Sea h la función definida por $h(x) := f(x)g(x)$ y sea D_h un punto que está sobre la gráfica de $h'(x)$.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0 y arrastra el punto C a lo largo de la gráfica de $f(x)$.

Presiona el botón para activar la nueva gráfica

Analiza las combinaciones posibles de los valores de las funciones $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $g(x_0)$ y $g'(x_0)$ en x_0.

1-¿Qué bosqueja el punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x)g(x)$ determina $h'(1)$, $h'(2)$, $h'(0)$, $h'(-2)$ y $h'(-1)$ con ayuda de las gráficas.

3-¿Cuál es la derivada de $h(x)$?, utiliza la tabla 2.

4- Repite las preguntas 1 y 2 con las figuras 2 y 3.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0 y arrastra el punto C a lo largo de la gráfica de $f(x)$.

Presiona el botón para activar la nueva gráfica

Analiza las combinaciones posibles de los valores de las funciones $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $g(x_0)$ y $g'(x_0)$ en x_0.

1-¿Qué determina las coordenadas del punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x)g(x)$ determina $h'(1)$, $h'(2)$, $h'(0)$, $h'(-2)$ y $h'(-1)$ con ayuda de las gráficas.

3-¿Cuál es la derivada de $h(x)$?, utiliza la tabla 2.

4- Repite las preguntas 1 y 2 con la figura 1.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0 y arrastra el punto C a lo largo de la gráfica de $f(x)$.

Presiona el botón para activar la nueva gráfica

Analiza las combinaciones posibles de los valores de las funciones $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $g(x_0)$ y $g'(x_0)$ en x_0.

1-¿Qué determina las coordenadas del punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x)g(x)$ determina $h'(1)$, $h'(2)$, $h'(0)$, $h'(-2)$ y $h'(-1)$.

3-¿Cuál es la derivada de $h(x)$?, utiliza la tabla 2.

4- Repite las preguntas 1 y 2 con las figuras 1 y 2.

Actividad 11: Regla del cociente

Lee cuidadosamente y responde las preguntas de los siguientes incisos.

Instrucciones:

1- Arrastra el punto A_f que está sobre la gráfica de $f\ (x)$ y activa las casillas de las gráficas.

2- Sea D_f el punto que determina la gráfica de $f'(x)$ y sea $D_g$el punto que determina la gráfica de $g'(x)$.

3- Sea h una función la cual está definida de la siguiente manera $h(x) := f(x)/g(x)$, con $g(x) \neq 0$.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Determina $h'(1/2), h'(-1/2)$.

2-¿Qué consideras que hace falta?

3-Reescribe la regla con lo que te hace falta.

Hint: Utiliza la regla del producto para determinar $h'(1/2)$ y $h'(-1/2)$,

Utiliza el cuadro de entrada para determinar el punto A.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Sea D_h el punto que determina la función $h'(x)$.

1- Determina $h'(1), h'(-1)$.

2-¿Qué diferencia hay al comparar el inciso 1 y 2?

3- El botón negro donde $n = 0$ ahora cámbialo a $n = 1$.

4- Repite los incisos 1, 2 y 3.

5- ¿Qué consideras que hace falta?

6- Reescribe la regla con lo que te hace falta.

Hint: Utiliza el cuadro de entrada para determinar el punto A.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- ¿Qué le hace falta a la nueva regla que estas construyendo? para que $h'(1) = -1/2$ y $h'(-1) = -1/2$, cuando $n = 0$ y $n = 1$.

2- ¿De dónde tomas el faltante de f, f', g o g'?

3- si $h(x) = f(x)/g(x)$ ¿Qué forma tiene la expresión de $h'(x)$?

4- Escribe y argumenta tu respuesta.

Actividad 12: Regla de la cadena

Lee cuidadosamente y responde las preguntas de los siguientes incisos.

Instrucciones: haz clic sobre la gráfica de la función $h(x)$ la cual está con vértice en el origen y mueve el vértice desde x = -3 hasta x = 3 con ayuda de las flechas de tu teclado y contesta las siguientes preguntas.

1- Determina $f(x)$ y $g(x)$ cuando el vértice de $h(x)$ está en el eje

x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, y 3.

2- Escribe y argumenta ordenadamente tu respuesta.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Determina cada $h'(x)$ cuando el vértice de $h(x)$ está en el eje

x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, y 3.

2- Factoriza cada h´(x).

3- Compara este inciso con el anterior y describe la diferencia que existe entre las gráficas.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Instrucciones: mueve los botones de abajo y observa que efecto tienen sobre $h(x)$.

1- Determina cada $h'(x)$ cuando el vértice de $h(x)$ está en el eje

x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, y 3. Pero ahora cuando c = -2, 2, -3, 3 y 1/2.

2- Compara los resultados con tus apuntes del inciso 1 y argumenta cual es la diferencia y a que se debe.

3- si $h(x) = f(g(x))$ ¿Qué expresión tiene $h'(x)$?

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Ahora tenemos $f(x)$ y $g(x)$ con las cuales construiremos $h(x) = f(g(x))$.

Utiliza la regla que determinaste en el inciso anterior para responder los siguientes incisos.

1- Calcular $h'(1)$ y $h(1)$.

2- Calcular $h'(2)$ y $h(2)$.

3- Calcular $h'(-1)$ y $h(-1)$.

4- Calcular $h'(-2)$ y $h(-2)$ y Calcular $h'(0)$ y $h(0)$.

5- Determina la gráfica de $h'(x)$.

Capítulo 4 Puesta en escena

Con el propósito de identificar posibles errores en el diseño de las actividades, cuestiones de redacción y otros, se pusieron a prueba las actividades con su respectivo cuadernillo de trabajo, en una sesión de dos horas con un grupo de primer semestre de la Licenciatura en Nutrición, que cursaba la asignatura de Introducción al Cálculo Diferencial e Integral. Se solicitó que hicieran observaciones en las preguntas del cuadernillo de trabajo, con el fin de no perder de vista si las preguntas eran entendidas correctamente y ver qué tan accesibles eran para los alumnos.

4.1 Cuadernillo de trabajo piloteado en la Propuesta Inicial

Actividad 1: Recta secante

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Activa las casillas Rectas secantes y mueve los puntos A y B que están sobre la gráfica de $f(x)$ con ayuda de los controles h_i y h_d.
2- Determina el dominio de la función f y argumenta tu respuesta.
3- ¿Por qué desaparece el punto B en $x = 5$?, ¿Por qué desaparece la recta secante cuando $x = 5$?, ¿De qué depende la existencia de la recta secante por la derecha?

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Analiza cada recta secante a la gráfica de $f(x)$, cuando h_i y h_d se acercan a cero, ¿Qué sucede cuando tienden a cero? argumenta tus observaciones.

2- ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T? Argumenta tu respuesta.

3- ¿Cómo lograste calcular la pendiente en la pregunta anterior? Describe el proceso que llevaste a cabo.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Selecciona y arrastra el punto T a lo largo de la gráfica de $f(x)$.

2- Analiza el comportamiento de las rectas secantes cuando h tiende a cero argumenta tus observaciones.

3- Acércate lo más que puedas al punto T con ayuda de la lupa, observa la gráfica de $f(x)$ y la recta tangente ¿Qué observación puedes hacer? Argumenta tu respuesta.

4) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- ¿Qué características tienen la gráfica de $f(x)$ y la recta tangente en cercanía del punto T cuando h tiende a cero?

2- Con ayuda del control h, mueve los puntos A y B acercándote lo más que puedas al punto T, ¿Qué sucede con las rectas secantes y la recta tangente en cercanía del punto T? Argumenta tus observaciones.

3-¿Qué utilidad tiene la recta secante izquierda y derecha a la gráfica de $f(x)$?

Actividad 2: Recta tangente.

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Activa la casilla Recta secante derecha y con ayuda del control h_d realiza el análisis por la derecha y calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T, anota tus observaciones.

2- Activa la casilla Recta secante izquierda y con ayuda del control h_i realiza el análisis por la derecha y calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T, anota tus observaciones.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- ¿Es posible calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T? argumenta tu respuesta.

2 - Describe el proceso que llevaste acabo en la pregunta 1.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Con ayuda de la lupa acércate y analiza cuidadosamente la parte indicada en la gráfica de $f(x)$.

1- ¿Qué características de la gráfica puedes observar?

2- Activa las casillas de las rectas tangentes.

3- ¿Puedes calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto P =(1 ,1)?

4- ¿Existe la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T =(1 ,1)?

5- compara tus respuestas con el inciso anterior y argumenta tus observaciones.

4) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Regresa la gráfica a su tamaño inicial.

Contesta las siguientes preguntas utilizando el control h y moviendo el punto T (selecciona y mueve), también reflexiona los incisos 2) y 3).

1-¿Qué es necesario para la construcción de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto T? Argumenta tu respuesta.

2- Realiza un análisis al rededor del punto T, tanto por la izquierda y derecha analizando las rectas secantes ¿Qué diferencias encontraste? Argumenta tu respuesta.

Actividad 3: condiciones para la existencia de la recta tangente

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

Actividad de reconocimiento figura 1.

Selecciona y arrastra el punto T a lo largo de la gráfica de $f(x)$ y contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

1- Determina el dominio de la función f donde podamos calcular la pendiente la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T.

2- Describe las características de la gráfica de $f(x)$ en todo su dominio.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas, figura 1

Coloca el punto en $T = (1,1)$, y con ayuda de las rectas secantes analiza y argumenta tus respuestas.

1- Calcula el valor al cual tiende cada pendiente de la recta secante tanto izquierda como derecha, cuando mueves el control h y te acerca a cero.

2-¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T? ¿Existe el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T?

Selecciona y arrastras el punto T a lo largo de la gráfica, tomando en cuenta el valor mínimo de h y observa los que sucede con los triángulos de colores.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas, figura 1.

Escribe y argumenta tus respuestas.

1- Analizando la zona marcada en la gráfica y haciendo una reflexión del inciso1) ¿Qué puedes decir acerca de la existencia de la recta tangente a la curva en el punto $T = (1,1)$?

2- Con ayuda de la lupa acércate a las zonas marcadas una a la vez.

a) ¿Qué diferencia hay en cada zona?

b) ¿Qué diferencia observas en la gráfica mientras te acercas?

Ahora regresa a su estado inicial la gráfica y pasa a la siguiente figura, comienza de nuevo las actividades desde la actividad de reconocimiento analizando una gráfica diferente.

Actividad de reconocimiento figura 2

Contesta las siguientes preguntas:

1-¿Es o no continua la gráfica de $g(x)$? Argumenta tu respuesta en caso de serlo o no serlo.

2- Describe las características de la gráfica en todo su dominio.

3- Selecciona y mueve el punto T y haz una exploración con ayuda del control h.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas, figura 2.

1- Con el punto en $T = (1,1)$ y activando las casillas de las rectas secantes contesta y argumenta tus respuestas.

2- Determina la tendencia del valor de cada pendiente de la recta secante tanto izquierda como derecha, cuando mueves el control y h te acerca a cero.

3- ¿Existe la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto T y en el punto Q?

2) Responde en tu cuaderno la siguiente pregunta, figura 2.

1- Analizando la discontinuidad en la gráfica y haciendo una reflexión del inciso 1) ¿Qué puedes decir acerca de la existencia de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en $x = 1$?

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas, figura 1 y 2.

Ahora analizaremos las gráficas de las Figuras 1 y 2 simultáneamente.

Escribe y argumenta tus respuestas.

1- ¿Qué diferencia hay entre las dos gráficas?

2- Responde a esta pregunta haciendo un contraste con las actividades anteriores ¿Qué característica debe de tener la gráfica de una función para la existencia de la recta tangente a la gráfica en un punto?

3- Ahora ¿puedes determinar un conjunto del dominio de la gráfica de las funciones de las figuras 1 y 2 donde exista la recta tangente a la curva en un punto?

Actividad 4: Construcción de la gráfica de la función derivada

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Selecciona y arrastra el punto T a lo largo de la gráfica de $f(x)$.

1- ¿Qué relación hay entre el punto T y el punto D_f?, escribe y argumenta tu respuesta.

Arrastra el punto T, de tal manera que la pendiente de la recta tangente sea 3.

2-¿Qué determina las coordenadas del punto D_f? argumenta tus respuestas.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Da clic derecho al punto D_f y selecciona Rastro.

1-¿Qué pasa cuando mueves el punto T?

2-¿Qué elementos intervienen en la construcción que hace el punto D_f? Argumenta tu respuesta.

3-¿Qué información guarda cada punto rojo que se forma al mover el punto T? Argumenta tu respuesta.

4-¿Qué puedes decir del lugar geométrico que formaste, considerando la naturaleza del punto D_f? Argumenta tu respuesta.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Si la gráfica de $f'(x)$ se obtuvo a partir de $f(x)$.

1- Determina $f'(1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ y $f'(-2)$.

2- ¿Qué interpretación tiene cada resultado de la pregunta anterior? Escribe y argumenta tu respuesta.

Actividad 5: Regla de la constante

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas

1-Si el punto D_f describe el lugar geométrico de $f'(x)$ ¿Qué pasará con la gráfica de $f'(x)$ si trasladas verticalmente hacia abajo o arriba la gráfica de $f(x)$? escribe y argumenta brevemente lo que pasará.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Ahora haz clic sobre la gráfica de $f(x)$ y muévela hacia abajo o arriba con ayuda de las flechas de la computadora.

1- ¿Qué pasa con el lugar geométrico de $f'(x)$?

2- ¿Qué diferencia hay si mueves hacia abajo o arriba?

3- ¿Qué diferencia hay entre tu respuesta de la inciso 1 y lo que observaste en este segundo inciso? Escribe y argumenta lo sucedido.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Si la gráfica de $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$. ¿Cuál es la derivada de $f(x)+k$? Donde $k \neq 0$ y representa las unidades de traslación vertical. Escribe y argumenta tu respuesta.

2- Sea h la función constante definida como $h(x) := k$. ¿Cuál es la derivada de $h(x)$?

Actividad 6: Derivada de una función lineal

Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno la siguiente pregunta.

Sea f una función la cual está definida por $f(x) := mx + b$, donde m repesenta la pendiente de la recta y b la intersección con el eje y.

Instrucciones:

Mueve la cruz que está sobre la gráfica y da una breve explicación de lo ocurrido.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas

Coloca la cruz en el punto $(1, 2)$.

1- Selecciona y arrastra el punto T, determina el lugar geométrico que describe el punto D_f, escribe y argumenta tu respuesta.

2- Arrastra la cruz siguiendo la línea punteada, ¿Qué cambios observas en la recta? ¿Qué sucede con el punto D_f cuando mueves $f(x)$? argumenta lo sucedido.

3-¿Cómo determinas la gráfica de la derivada de $f(x)$? Describe de manera clara y argumenta tu respuesta.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas

Coloca la cruz en el punto $(1, -2)$.

1- Selecciona y arrastra el punto T, determina el lugar geométrico que describe el punto D_f, escribe y argumenta tu respuesta.

2- Arrastra la cruz siguiendo la línea punteada, ¿Qué cambios observas en la recta? ¿Qué sucede con el punto D_f cuando mueves $f(x)$? argumenta lo sucedido.

3-¿Cómo determinas la gráfica de la derivada de $f(x)$? Describe de manera clara y argumenta tu respuesta.

Actividad 7: Regla de la potencia

Instrucciones: Como se puede observar, se presenta una secuencia de gráficas, ahora sigue los siguientes pasos para hacer una exploración de las mismas.

1 - Presiona el botón rojo que está en la parte inferior izquierda.

2 - Desliza el botón figura de izquierda a derecha.

3 - Desliza el botón constante de izquierda a derecha.

4 - Repite el paso 3 con cada figura.

5 - Una vez terminado cada punto, lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Sean f y f' dos funciones definidas por $f(x)$ y $f'(x)$, donde se muestra su gráfica (empezar con la figura 1, con ayuda de la tabla 1).

1-¿Determina la expresión algebraica de $f(x)$ con ayuda de su gráfica?

2-¿Determina la expresión algebraica de $f'(x)$ con ayuda de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto T?

3-¿Qué patrón existe en las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$? ¿Qué patrón existe en las expresiones algebraicas de $f(x)$ y $f'(x)$? Repite los incisos con cada figura.

4-¿Cuál es la derivada de $f(x) = x^n$ donde n es una entero positivo?

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1- Mueve la contante de izquierda a derecha y da una breve explicación de lo que sucede con las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ cuando c es negativa o positiva.

2- ¿Determina la expresión algebraica de $f(x)$ con ayuda de su gráfica cuando la constante toma los valores $-2, -1, 0$,2 y 3?

3- ¿Determina la expresión algebraica de $f'(x)$ con ayuda de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$?

4- ¿Qué patrón existe en las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$? ¿Qué patrón existe en las expresiones algebraicas de $f(x)$ y $f'(x)$?

Repite las preguntas para cada figura.

5-¿Cuál es la derivada de $f(x) = cx^{n}$ donde c es una constante diferente de cero y n un entero positivo?

3) Responde en cuaderno las siguientes preguntas.

1-¿Qué representa $f'(x)$? y ¿Qué información guarda respecto a $f(x)$?

2- ¿Cuál es la derivada de $cf(x)$ donde c es una constante diferente de cero? argumenta tu respuesta.

3 - ¿Cuál es la derivada de $f(x) = \ cx^{n}$ donde c es una constante diferente de cero y n un entero positivo? argumenta tu respuesta.

4 - ¿Pasará lo mismo cuando $f(x)$ tiene potencias racionales? argumenta tu respuesta.

Actividad 8: Regla de la suma versión introducción

Instrucciones: Ahora selecciona la gráfica de $f(x)$, y con ayuda de las flechas del teclado de tu computadora, arrastra la gráfica y coloca el vértice en el origen. Una vez realizado lo que se te pide, responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1) Responde en tu cuaderno la siguiente pregunta.

1-Si el punto D_f determina la gráfica de $f'(x)$ ¿Qué pasará con la gráfica de $f'(x)$ si trasladas de manera horizontal la gráfica de $f(x)$, ya sea primero a la izquierda y después a la derecha? escribe y argumenta brevemente lo que pasará sin mover la gráfica.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Ahora haz clic sobre la gráfica de $f(x)$ y arrastra hacia la izquierda o derecha, cuidando que la gráfica permanezca sobre el eje x. .

1- ¿Qué pasa con la gráfica de $f'(x)$?

2- ¿Qué diferencia hay si mueves la gráfica de $f(x)$ hacia la izquierda o derecha?

3- ¿Qué diferencia hay entre tu respuesta del inciso 1 y lo que observaste en esta segundo inciso? Escribe y argumenta lo sucedido.

4- ¿Cuál es la expresión algebraica de $f'(x)$ cuando trasladas dos unidades la gráfica de $f(x)$ respecto al eje y?

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas

Ahora haz clic sobre la gráfica de $f(x)$ y traslada hacia la izquierda o derecha, cuidando que la gráfica permanezca sobre el eje x.

1- Si $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$. ¿Cuál es la derivada de $f(x-k)$? Donde $k \neq 0$, y representa la traslación horizontal de la gráfica. Escribe y argumenta tu respuesta.

2- Construye la gráfica de la derivada de $f(x-k)$ y determina su expresión algebraica cuando $k = 1, 2, -1, -2$.

3- ¿Qué características existe entre la expresión algebraica de $f(x-k)$ y la derivada de $f(x-k)$?

4- ¿Qué reglas vistas anteriormente se utilizaron en esta actividad? ¿Puedes determinar una nueva regla?

Actividad 9: Regla de la suma

Instrucciones: Activa las casillas que están en la parte azul y mueve de izquierda a derecha el botón negro y verde. Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

Introducción: Tenemos las funciones f' y g' que son derivadas de las funciones f y g respectivamente, con las cuales definimos la suma funciones $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$.

Sea h la función definida por $h(x) := f(x) + g(x)$ y sea D_h un punto sobre la gráfica de $h'(x)$.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0, después selecciona el punto B y arrástralo sobre la curva $f(x)$.

1-Analiza los diferentes casos: ¿Qué determina las coordenadas del punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x) + g(x)$ determina $h'(1), h'(2), h'(0), h'(-2)$ y $h'(-1)$.

3- Repite las preguntas 1 y 2 en cada figura.

Observación: el punto D_h está sobre la gráfica de $h'(x)$.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0, después selecciona el punto B y arrástralo sobre la curva $f(x)$. Después presiona el botón para activar la nueva gráfica

1-Analiza los diferentes casos: ¿Qué determina las coordenadas del punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x) + g(x)$ determina $h'(1), h'(2), h'(0), h'(-2)$ y $h'(-1)$.

3- Repite las preguntas 1 y 2 en cada figura.

Observación: el punto D_h está sobre la gráfica de $h'(x)$.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0, después selecciona el punto B y arrástralo sobre la gráfica de $f(x)$. Presiona el botón para activar la nueva gráfica.

1-Analiza los diferentes casos: ¿Qué determina las coordenadas del punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x) + g(x)$ determina $h'(1), h'(2), h'(0), h'(-2)$ y $h'(-1)$.

3- Repite las preguntas 1 y 2 en cada figura.

Observación: el punto D_h está sobre la gráfica de $h'(x)$.

4- Determina la derivada de $h(x) = f(x) + g(x)$ escribe y argumenta cada respuesta.

Actividad 10: Regla de la multiplicación

Instrucciones: Lee cuidadosamente y responde a las preguntas de los siguientes incisos.

1- Activa las casillas que están en la parte inferior y mueve de izquierda a derecha los controles de la figura 1 y 2 observando con cuidado lo que sucede.

2- Sea las funciones f' y g' las derivadas de las funciones f y g, ahora exploraremos la multiplicación de dichas funciones.

3- Sea h la función definida por $h(x) := f(x)g(x)$ y sea D_h un punto que está sobre la gráfica de $h'(x)$.

1) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0 y arrastra el punto C a lo largo de la gráfica de $f(x)$.

Presiona el botón para activar la nueva gráfica

Analiza las combinaciones posibles de los valores de las funciones $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $g(x_0)$ y $g'(x_0)$ en x_0.

1-¿Qué determina las coordenadas del punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x)g(x)$ determina $h'(1)$, $h'(2)$, $h'(0)$, $h'(-2)$ y $h'(-1)$.

3-¿Cuál es la derivada de $h(x)$?, utiliza la tabla 2.

4- Repite las preguntas 1 y 2 con las figuras 2 y 3.

2) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0 y arrastra el punto C a lo largo de la gráfica de $f(x)$.

Presiona el botón para activar la nueva gráfica

Analiza las combinaciones posibles de los valores de las funciones $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $g(x_0)$ y $g'(x_0)$ en x_0.

1-¿Qué determina las coordenadas del punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x)g(x)$ determina $h'(1)$, $h'(2)$, $h'(0)$, $h'(-2)$ y $h'(-1)$.

3-¿Cuál es la derivada de $h(x)$?, utiliza la tabla 2.

4- Repite las preguntas 1 y 2 con la figura 1.

3) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

Inicia con la figura 0 y arrastra el punto C a lo largo de la gráfica de $f(x)$.

Presiona el botón para activar la nueva gráfica

Analiza las combinaciones posibles de los valores de las funciones $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $g(x_0)$ y $g'(x_0)$ en x_0.

1-¿Qué determina las coordenadas del punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x)g(x)$ determina $h'(1)$, $h'(2)$, $h'(0)$, $h'(-2)$ y $h'(-1)$.

3-¿Cuál es la derivada de $h(x)$?, utiliza la tabla 2.

4- Repite las preguntas 1 y 2 con las figuras 1 y 2.

4.2 Modificaciones

Con base en los resultados obtenidos en el pilotaje, realizado con alumnos de la Licenciatura en Nutrición, se decidió realizar algunas modificaciones al diseño de las actividades. Decidimos resaltar los incisos de cada actividad dentro del cuadernillo de trabajo de manera general, para que el docente o el estudiante identifiquen a primera vista en que inciso están trabajando, ya que cuando preguntábamos no identificaban en qué parte estaban desarrollando la actividad, entre otras modificaciones las cuales describimos enseguida.

Modificaciones en la actividad 1

Enseguida describimos las modificaciones realizadas en los diseños, a la vez argumentaremos porque slas razones para la decisión tomada:

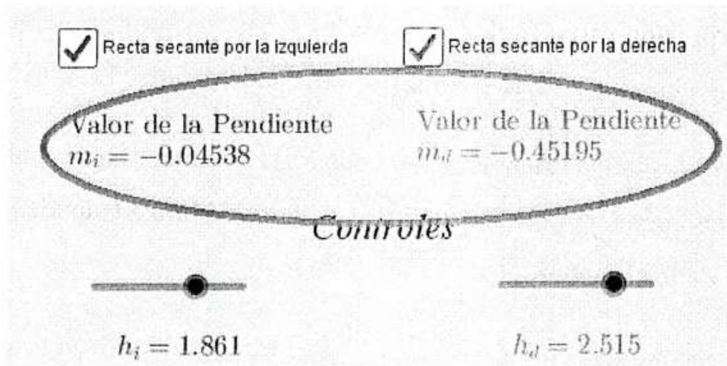
En la actividad 1, inciso 2, indicación 1, podemos rediseñar la indicación de la siguiente manera:

1- Analiza la tendencia de cada recta secante cuando los valores de h_i y h_d tienden a cero, argumenta tus observaciones. Esta indicación estaba confusa para los estudiantes.

Inciso 3, indicación 2 podemos rediseñar la indicación de la siguiente manera.

2- Analiza la tendencia de cada recta secante cuando el valor de h tiende a cero, argumenta tus observaciones.

Por otro lado se consideró poner etiquetas en el panel de control al valor de la pendiente de cada recta secante, ya que el alumno lo confundía con los valores de h_i y h_d, los cuales representan la distancia que hay entre las abscisas de los punto A y B tanto izquierda como derecha de la abscisa del punto T.



Modificaciones en la actividad 2

En la actividad 2, inciso 1, consideramos agregar una tercera pregunta la cual diseñamos y la presentamos de la siguiente manera:

3-¿Cuál valor corresponde a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T?, la cual nos permite dar un cierre en el inciso 1 poniendo en duda la existencia del valor de la pendiente, promoviendo una reflexión del alumno.

En el inciso 2, pregunta 1, rediseñamos la pregunta de la siguiente manera:

1-¿Es posible encontrar la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto T?

Y también la indicación 2, la cual presentamos de la siguiente manera:

2- Describe el contraste que puedes hacer entre el inciso 1 y 2. Con el propósito de relacionar cada inciso y una reflexión de diferentes puntos de vista.

En el inciso 3, pregunta 1, rediseñamos la pregunta de la siguiente manera:

1- ¿Qué forma toma la gráfica de $f(x)$ cuando te acercas?, ya que en un principio se pedían las características cuando se realiza un zoom en la parte marcada de la gráfica de $f(x)$, y el alumno solo describió un cambio en la cuadricula del plano cartesiano.

El inciso 4 fue reformulado por completo, ya que las preguntas estaban demasiado abiertas y no había una conexión con los anteriores incisos, quedando de la de la siguiente manera:

Con ayuda del control h analiza la tendencia de cada recta secante, después selecciona el punto T y colócalo en las coordenadas $(-1,1)$ y $(1,1)$, nuevamente analiza la tendencia de cada recta secante apoyándote de los triángulos.

1-¿Qué diferencias encontraste en los triángulos? ¿Puedes calcular el valor de la pendiente en T= (-1,1) y T= (1,1)?

2-¿Qué sucede con las rectas secantes?

3-¿Qué es necesario para la construcción de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto T? Argumenta tu respuesta.

Modificaciones en la actividad 3

Se modificó la estructura de las preguntas en general de toda la actividad, partiendo de un análisis de la tendencia de cada recta secante, después un análisis de la tendencia del valor de la pendiente de cada recta secante, por último se propone un contraste entre los diferentes valores de la pendiente encontrados en $T = (1,1)$, enseguida se muestra el rediseño de las indicaciones y preguntas, el cual mostramos de la siguiente manera:

1-Coloca el punto T en las coordenadas $(1,1)$ y $(-1,1)$, con ayuda del control h analiza la tendencia de cada recta secante, describe tus observaciones.

2- Calcula el valor al cual tiende cada pendiente de la recta secante tanto izquierda como derecha, cuando mueves el control h y te acercas a cero.

3-¿Cuál de los valor encontrados corresponde al de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $T = (1,1)$?

Sugerencia: Selecciona y arrastras el punto T a lo largo de la gráfica, tomando en cuenta el valor mínimo de h y observa lo que sucede con los triángulos de colores en $(1,1)$ y $(-1,1)$.

Modificaciones a la Actividad 3, figura 2, incisos 1 y 2

Inciso 1

1- Activa la casilla Recta secante que pasa por el punto T y con ayuda del control h analiza la tendencia de cada recta secante, describe tus observaciones.

2- A medida que h se acercas a cero ¿a qué valor tiende la pendiente de la recta secante por la izquierda?, ¿a qué valor tiende la pendiente de la recta secante por la derecha?

3- Activa la casilla Recta secante que pasa por el punto Q y con ayuda del control h analiza la tendencia de cada recta secante, escribe tus observaciones.

4- A medida que h se acercas a cero ¿a qué valor tiende la pendiente de la recta secante por la izquierda?, ¿a qué valor tiende la pendiente de la recta secante por la derecha?

Inciso 2

1- Analizando la discontinuidad en la gráfica y haciendo una reflexión del inciso 1) ¿Qué puedes decir acerca de la existencia de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en $x = 1$?

2-¿Existe la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto T y en el punto Q del inciso 1?

3- Determina el conjunto donde puedas construir la recta tangente a la gráfica de $g(x)$.

Observamos que los estudiantes sentían aisladas las preguntas y decidimos reordenar, tratando de cuidar la secuencia que describimos al inicio, también se quitaron algunas preguntas las cuales no estaban al alcance de los alumnos.

Modificaciones a la actividad 4

Observamos algunas inconsistencias en las respuestas dadas por los estudiantes, ya que algunas preguntas estaban muy abiertas, y no puntualizaban con precisión el objetivo, las modificaciones realizadas en el inciso 1 son las siguientes:

1- Selecciona y arrastra el punto T a lo largo de la gráfica de $f(x)$, describe tus observaciones.

2- ¿Qué relación hay entre las abscisas del punto T y el punto D_f?, escribe y argumenta tu respuesta.

Modificaciones en la actividad 5

Observamos algunas preguntas en el inciso 2 planteadas de manera muy abierta, lo cual los estudiantes externaron en sus respuestas, por lo cual se decidió reformular el inciso 2 por completo, planteando una estructura más llevadera para el estuante, como lo podemos ver a continuación:

1- Ahora haz clic sobre la gráfica de $f(x)$ y trasládala hacia abajo o arriba con ayuda de las flechas de la computadora ¿Qué pasa con la gráfica de $f'(x)$? ¿A qué se debe lo sucedido?

2- ¿Qué diferencia hay entre tu respuesta del inciso 1 y lo que observaste en este segundo inciso? Escribe y argumenta lo sucedido.

3- ¿Qué cambios hay en la pendiente de la recta tangente si trasladas hacia abajo o arriba la gráfica de $f(x)$?

Modificaciones en la actividad 6

Observamos que en los incisos 2 y 3 faltaba dirección en las preguntas propuestas, aunque eran del alcance de los alumnos, sólo cambiamos la instrucción del inciso 2 y 3 la pregunta 2 de cada inciso, tratando de pedir más argumentos con relación a la pendiente de la recta, las modificaciones se muestran enseguida:

Coloca la cruz de tal manera que el valor de la pendiente de la recta sea 2.

Coloca la cruz de tal manera que el valor de la pendiente de la recta sea -2.

Esta pregunta es la misma en el inciso 2 y 3.

2- Arrastra la cruz siguiendo la línea punteada. ¿Qué cambios observas en la pendiente de la recta? ¿Qué sucede con el punto D_f cuando mueves $f(x)$? argumenta lo sucedido.

Modificaciones en la actividad 7

No hay modificaciones.

Modificaciones en la actividad 8

En esta actividad observamos que en el inciso 3, pregunta 2, el sentido de la pregunta no iniciaba con un análisis gráfico, lo cual nos llevó a rediseñar la pregunta de tal manera que partiera de la gráfica a una representación algebraica, lo cual mostramos de la manera siguiente:

2- Determina la expresión algebraica de la derivada de $f(x-k)$ con ayuda de su gráfica cuando $k = 1, 2, -1, -2$.

En esta actividad observamos que en el inciso 3, pregunta 4, que los estudiantes se confundieron con la pregunta, ya que se entendió como una traslación vertical, la cual se modificó de la siguiente manera:

4- ¿Cuál es la expresión algebraica de $f'(x)$ cuando trasladas dos unidades a la derecha la gráfica de $f(x)$?

La pregunta 3 del inciso 3, se descartó de la actividad, ya que estaba mal formulada y los estudiantes no la entendían.

Modificaciones a la actividad 9

En esta actividad de manera general agregamos algunas indicaciones como se muestra enseguida:

1-Analiza los diferentes casos: ¿Qué bosqueja el punto D_h?

2- Sea $h(x) = f(x) + g(x)$ determina $h'(1), h'(2), h'(0), h'(-2)\ y\ h'(-1)$ con ayuda de las gráficas.

Nos dimos cuenta que necesitábamos introducir algunas observaciones para guiar al estudiante, como se muestra en seguida:

Observación: el punto D_h está sobre la gráfica de $h'(x)$ y recuerda que puedes desactivar las casillas de las gráficas para no confundirte.

Modificaciones en la actividad 10

En esta actividad no hay cambios.

Conclusiones

En este apartado abordamos las conclusiones obtenidas en el desarrollo de nuestro trabajo, también algunas reflexiones de naturaleza personal. Nuestro trabajo de tesis está enfocado en el diseño de una secuencia de actividades didácticas, en el que nuestro interés es promover en el alumno el significado geométrico de manera puntual y global de la derivada, complementando con la construcción de algunas reglas de derivación, en la que obtenemos 4 capítulos los cuales se abordarán a continuación.

En el primer capítulo, la revisión del material bibliográfico de las diferentes investigaciones alrededor de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial, fue sumamente importante ya que identificamos elementos que nos ayudaron a describir la problemática que se vive específicamente al enseñar y aprender la derivada, en la que nos motiva a una reflexión cuidadosa de una posible manera abordar las dificultades que viven los estudiantes.

Asimismo, obtuvimos elementos de justificación, en la que nace la necesidad de promover e incorporar un análisis gráfico en nuestro trabajo con el objetivo de complementar al algebraico, también comprendimos la importancia de promover la coordinación entre las diferentes representaciones de la función derivada, al mismo tiempo obtuvimos nociones básicas de algunas consideraciones teóricas que podríamos necesitar para respaldar y guiar nuestra propuesta didáctica.

En el segundo capítulo después de una revisión del mapa curricular y del contenido sintético de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I, obtuvimos un panorama general de los contenidos sugeridos antes y después de iniciar con el estudio de la derivada, también se efectuó la revisión de las sugerencias del material bibliográfico dentro del curso, con el propósito de elegir algunos libros como material de apoyo para los diseños.

Por otro lado en nuestras consideraciones teóricas introducimos la importancia y la necesidad de representar los objetos matemáticos, como el construir cognitivamente los conceptos de éstos, por medio de la coordinación de diferentes representaciones semióticas que propone Duval, ya que el identificar un registro, tratarlo y realizar la conversión a otro registro, juega un papel fundamental en la comprensión de las matemáticas por parte del individuo.

Por otro lado mencionamos la importancia de la socialización desde el punto de vista que propone Vygotsky, donde el conocimiento se desarrolla en un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, es decir, al plantear una actividad al estudiante proponemos el medio de discusión, de esta manera en la interacción por parte de los alumnos resulta fundamental y enriquece el objeto conocimiento.

Por ultimo mencionamos la importancia en utilizar como medio el software GeoGebra, para promover la construcción geométrica de la derivada, desde el punto de vista de la teoría de la instrumentación en el que se puntualiza una relación importante, cuando interactuamos con el artefacto (que llamaremos medio) y nuestro conocimiento. Motivando así el proceso de transformación de un artefacto en un instrumento la cual Rabardel denomina la génesis instrumental.

En el tercer capítulo describimos la propuesta que se materializó en un conjunto de 12 actividades diseñadas en GeoGebra, en complemento se diseñaron 12 hojas que forman parte del cuadernillo de trabajo, cada hoja contiene una serie de indicaciones y preguntas que orientan la actividad, en la que se trata de promover el significado geométrico de la derivada y la construcción de algunas reglas de derivación partiendo de un análisis geométrico.

En esta parte influyo fuertemente nuestro conocimiento de la derivada de manera analítica desarrollado en el trascurso de la licenciatura, como el nuevo adquirido al abordar la interpretación geométrica de la derivada, lo cual nos permitió coordinar el conocimiento de estas dos representaciones en el diseño de la secuencia didáctica, para tratar de promover los conocimientos adquiridos el cual fue un verdadero reto.

En el cuarto capítulo encontramos los resultados obtenidos en la puesta en escena de nuestra propuesta, en la que se interpretaron las respuestas escritas por los estudiantes con base en nuestra óptica debido a la formación dentro de la Licenciatura de Matemáticas, encontramos respuestas más desarrolladas que otras, se planteaban las preguntas con el interés de enfocarse precisamente en identificar como abordaban las preguntas, si eran accesibles para los estudiantes al nivel de los estudiantes, si las entendían correctamente con el objetivo de no perder de vista la secuencia de las mismas.

Reflexiones personales

En la revisión efectuada en las diferentes propuestas para la enseñanza de la derivada nos encontramos que, aunque son numerosas, cada una de ellas tiene su propia esencia ya que se abordan desde diferentes puntos de vista.

Al terminar este trabajo de tesis me he envuelto en una serie de reflexiones sobre la importancia y la sutileza que conlleva el diseño de actividades didácticas, ya que fue un verdadero reto plasmar mis ideas y mi concepción de las matemáticas en cada actividad, una parte importante fue la toma de decisiones, en donde se tomó en cuenta los conocimientos previos de los alumnos que resultan de tópicos anteriores dentro de la asignatura, los cuales son necesarios para poder abordar cada actividad, en las que se necesita nociones de una recta tangente y recta secante, la pendiente de una recta, nociones de límite, etc…

Sentí y viví en carne propia la génesis instrumental por un lado al transformar el artefacto de GeoGebra en un instrumento para promover en este caso particular la interpretación geométrica de la derivada y por otro lado poder instrumentar GeoGebra para resolver problemas y poder utilizarlo para aprender matemáticas.

Por otro lado las aportaciones personales en significado que me deja el coordinar las diferentes representaciones de la función derivada, son reconfortantes ya que aprendí a trabajar dentro de la representación gráfica, dando sentido al trabajar analíticamente con la derivada en este caso particular, considero esta manera de trabajar, cómo una nueva estrategia de análisis para abordar problemas, me cambio la manera de pensar y de abordar los problemas de matemáticas.

La puesta en escena me deja una reflexión importante como diseñador, ya que detrás de cada actividad hay un propósito, en la que se busca la manera de guiar al alumno por medio

R- T180025

de preguntas y sugerencias. Observe que, aunque yo tenga una manera de guiar la actividad los alumnos toman sus propias decisiones de cómo abordar la actividad, exponiendo su forma de pensar entre ellos tan diferente y única de manera individual, el promover y potenciar estas iniciativas de los alumnos juega un papel importante en el diseño de actividades didácticas.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica*. 97-140.

Arcavi, A. (2006). Lo cotidiano y lo académico en matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *63*, 3-23.

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *29*(2), 191-206.

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *42*(14), 3.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3* (3), 265-292.

Cantoral, Ricardo. (2009). Identidad y desarrollo: matemática educativa y Relime. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *12*(2), 145-150.

Cantoral, Ricardo. (2010). Matemática Educativa: una disciplina de múltiples perspectivas.*Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(2), 123-128.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa.*

Freudenthal, H. (1981). Problemas mayores de la educación matemática.

Hitt, F. (2003a). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Edición Especial: Educación Matemática*, 213.

Hitt, F. (2003b). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).*

Ibarra, S., Bravo, J., & Grijalva, A. (2001). El Papel de los Registros de Representación Semiótica en la enseñanza del Cálculo Diferencial.

Ivic, I. (2010). *Lev Semionovich Vygotsky*. Fundação Joaquim Nabuco, *773-799*.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA, 29*(51), 60 – 89.

RABERDEL, P. (2001). Instrumented mediated activity in situations, en Blandford A., Vanderdonckt J., Gray P. (eds). *People and computers XV-interactions without frontiers*, pp. 17 30. Berlín: Springer-Verlag.

Salinas, Patricia, & Alanís, Juan Antonio. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 12*(3), 355-382.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11*(2), 267-296.

Índice