

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

**Un Enfoque Generalizado del
Método de las Características**

T E S I S

que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Miguel García Figueroa

Director de Tesis: Dr. Rodrigo González González

Hermosillo, Sonora, México, 03 de julio de 2017



Universidad de Sonora

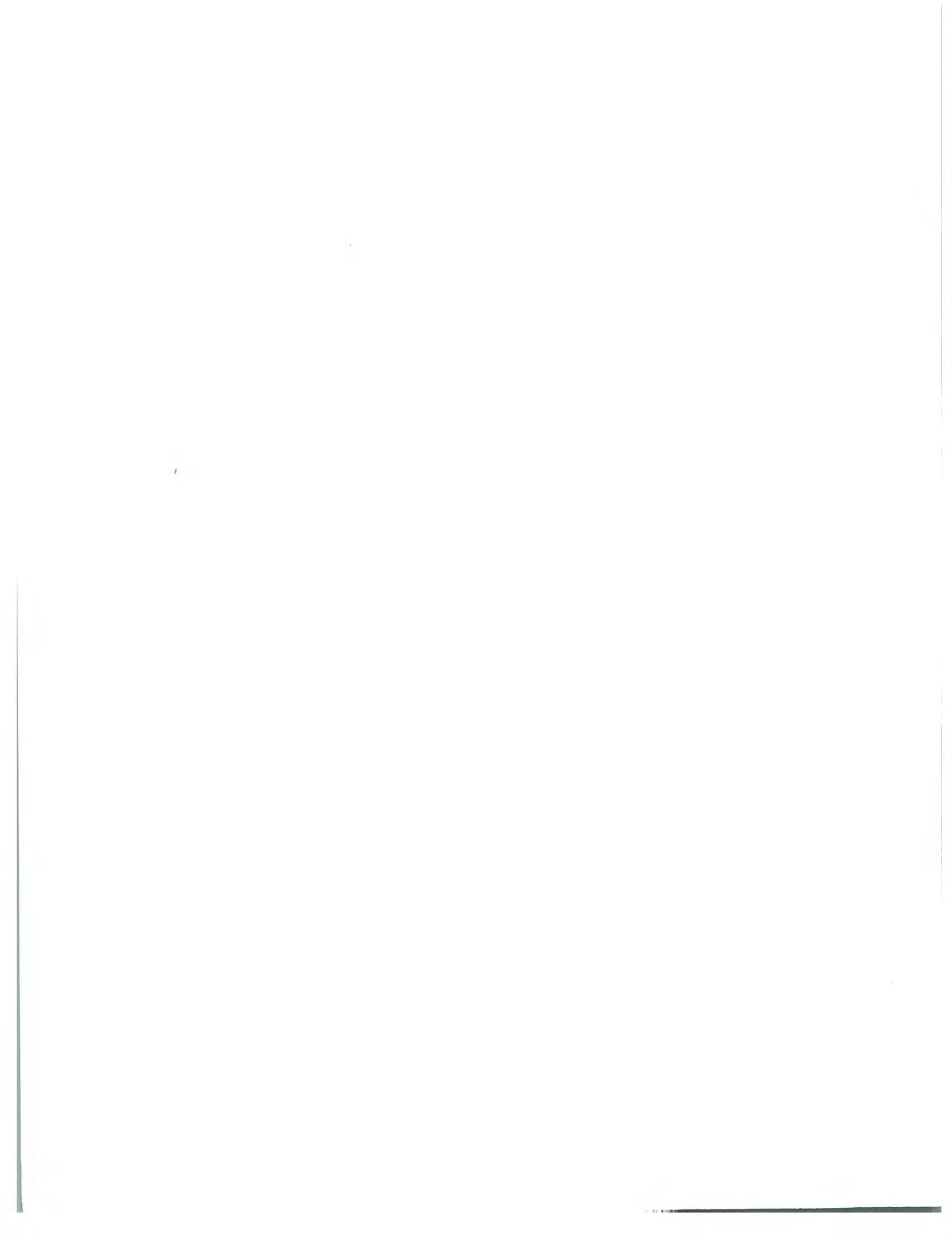
Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



SINODALES

Dr. Martín G. García Alvarado (Presidente)

Universidad de Sonora

Dr. Roberto Núñez González (Secretario)

Universidad de Sonora

Dr. Daniel Olmos Liceaga (Vocal)

Universidad de Sonora

Dr. Rodrigo González González (Vocal)

Universidad de Sonora

Contenido

	Página
PRESENTACIÓN	ii
1 El Método de las Características Clásico	1
1.1 Introducción	2
1.2 Problema de Cauchy Clásico para EDP1's	4
1.3 Ejemplos Típicos de Características Clásicas	12
2 El Método de las Características Generalizado	31
2.1 Soluciones de Viscosidad y Superficies Singulares	33
2.2 Un Prototipo Particular de EDP1 NL	46
2.3 Algunas EDP1 NL's Importantes	59
3 Aplicación. Análisis de un Problema Variacional Multidimensional	61
3.1 Soluciones No Suaves para un Problema Multi-dimensional del Cálculo de Variaciones	61
3.2 Construcción de la Superficie Singular	71
3.3 Lagrangiano Cuadrático	76
A Conceptos y Resultados Relacionados	89
A.1 Corchetes de Jacobi	89
A.2 El Teorema de la Función Implícita	93
BIBLIOGRAFIA	94

PRESENTACIÓN

El *Método de las Características* es uno de los principales resultados de la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales parciales, el cual, prácticamente, es un procedimiento de búsqueda de solución para el problema de Cauchy de una ecuación diferencial parcial de primer orden (aplicable también a cierto tipo de problemas con condiciones en la frontera), que consiste en determinar una familia de curvas a lo largo de las cuales la ecuación diferencial parcial bajo análisis se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución permite “construir localmente” la solución del problema considerado.

El objetivo del presente trabajo es presentar de forma resumida algunos aspectos fundamentales del Método de las Características Clásico, considerando en principio como prototipo específico una ecuación diferencial parcial no lineal de primer orden 2-dimensional, cuya solución es posible visualizar gráficamente. Además, se incluyen ejemplos típicos de ecuaciones casi-lineales y lineales, como muestra de los tipos de ecuaciones diferenciales parciales en los que es aplicable el método. En particular, considerándola como una oportunidad *ad hoc*, se analiza una parte importante del caso más simple posible: “el caso totalmente lineal”, principalmente en dos dimensiones, con el propósito de comprender el método *a priori* para, por un lado utilizarlo como una herramienta didáctica, y por otro, como punto de partida para establecer una línea de generalización para ecuaciones diferenciales parciales de primer orden no lineales. En este sentido, considerando la posibilidad de analizar problemas para los que se aligeran las condiciones de diferenciabilidad suficientes, se aborda una línea de generalización del método sobre un tipo especial de ecuaciones diferenciales parciales de primer y segundo orden no lineales (en general, la generalización es una tarea no trivial), adaptando el procedimiento para cubrir un aspecto global de las soluciones de acuerdo al concepto “*soluciones de viscosidad*” (soluciones globales generalizadas). Como conclusión, se plantean en general posibles aplicaciones potenciales del *Método de las Características Singulares*, dejando abierta la posibilidad para muchos casos de estudio interesantes o proyectos de investigación relevantes.

Hermosillo, Sonora, México

Miguel García Figueroa

Julio de 2017

Capítulo 1

El Método de las Características Clásico

En este capítulo se analiza esencialmente (analítica y, en la medida de lo posible, geoméricamente) el *Método de las Características Clásico* (MCC o simplemente MC), un procedimiento efectivo de búsqueda de solución para Ecuaciones Diferenciales Parciales de Primer Orden (EDP1), el cual proporciona el aspecto local tanto de la teoría lineal, así como para ciertos casos específicos de la teoría no lineal, relacionando la solución de un Problema de Valor Inicial (PVI) –condiciones especificadas en un primer estado en el que inicia el proceso, llamado también Problema de Cauchy– o de un Problema de Valor Terminal (PVT) –condiciones conocidas en el estado final considerado– con la solución de un Sistema Característico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (SCEDO).

El análisis para el caso general es complicado, pero es posible ilustrar el procedimiento de una forma relativamente sencilla, considerando en particular ejemplos específicos de EDP1 no lineales, así como algunos ejemplos típicos concretos de EDP1 casi-lineales y lineales, en especial la clase más simple (el caso “totalmente lineal”: EDP1 lineales con coeficientes lineales), en la que se tiene una relación directa con la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, visualizando gráficamente la solución para algunos ejemplos 2-dimensionales, aprovechando las propiedades geométricas naturales que poseen este tipo de ecuaciones. El propósito es comprender el método, establecerlo como un recurso didáctico para el estudio de ecuaciones de este tipo elemental y abordar una línea de generalización, considerando el aspecto global para el caso no lineal cuando las condiciones de suavidad no son suficientes, enfocando en particular el interés en ecuaciones del tipo Hamilton-Jacobi (E_H-J) y su aplicación, dejando abierta la posibilidad de estudio de ecuaciones mucho más generales como por ejemplo ecuaciones del tipo Bellman-Isaacs, entre otras.

1.1 Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP's) surgen principalmente en problemas de la Física y la Matemática cuando al modelar un proceso determinado las funciones involucradas dependen de varias variables independientes, considerando de acuerdo a las reglas del propio problema las variaciones parciales hasta el orden específico requerido. Así, es usual encontrar EDP's en problemas de vibración y dispersión, difusión y conducción de calor, dinámica de fluidos y mecánica de sólidos, óptica, elasticidad, teoría electromagnética, mecánica cuántica, geometría, procesamiento de imágenes, entre otras áreas de la Física y de otras ciencias. Cabe señalar que las EDP's por supuesto también son de gran interés teórico para la propia Matemática.

Cuando se estudian las EDP's desde el punto de vista físico o aplicado es común que las variables independientes sean el tiempo y una o más variables espaciales. Así, en general, una EDP tiene la forma

$$F\left(t, x_1, x_2, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_\ell}, \dots\right) = 0, \quad (1.1.1)$$

donde F es una función o relación dada de las variables independientes t, x_1, x_2, \dots , la *función desconocida* $u = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ y un número finito de sus derivadas parciales (expresadas en (1.1.1) con notación tipo Leibniz, donde el subíndice ℓ indica derivadas parciales mixtas de segundo orden, siguiendo después derivadas de orden superior...).

Una función u es *solución* de la ecuación (1.1.1) si al sustituirla, junto con todas sus derivadas parciales involucradas, reducen a la relación dada por (1.1.1) en una identidad en alguna región específica del espacio de las variables independientes.

El *orden* de una EDP lo determina la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación considerada.

Una EDP se dice que es *lineal* si es lineal en la función desconocida y todas sus derivadas, con coeficientes dependiendo únicamente de las variables independientes. Una EDP de orden n es llamada *casi-lineal* si es lineal en la derivada de orden n y sus coeficientes dependen de las variables independientes, la función desconocida y derivadas parciales de órdenes menores o iguales que $(n - 1)$. En otro caso, la EDP es *no lineal*.

- Ejemplos de EDP1 casi-lineales en dos variables independientes (2-dimensionales o en el plano):

En general,

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u) \quad (1.1.2)$$

En particular,

$$\begin{aligned} x(y^2 + u) u_x - y(x^2 + u) u_y &= (x^2 + y^2) u \\ u_t + u u_x + \kappa u^2 &= 0, \quad \kappa = \text{cte.} \\ (y^2 - u^2) u_x - xy u_y &= xu \end{aligned}$$

La ecuación (1.1.2) es *semi-lineal* si los coeficientes a y b son independientes de u .

- Ejemplos de EDP1 lineales 2-dimensionales:

En general,

$$a(x, y) u_x + b(x, y) u_y = c(x, y) u + d(x, y) \quad (1.1.3)$$

En particular,

$$\begin{aligned} x u_x + y u_y + \alpha u &= 0, \quad \alpha = \text{cte.} \\ (x - y^2) u_x - (\sqrt{x} - y) u_y &= (x + y) u + e^{x/y} \\ (\alpha x + \beta y) u_x + (\gamma x + \delta y) u_y &= \mu u, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ y } \mu \text{ constantes} \end{aligned}$$

Nota: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, y así respectivamente (en la notación de Lagrange).

Las EDP's lineales y casi-lineales usualmente se estudian en un curso curricular introductorio de ecuaciones diferenciales parciales: se clasifican por orden y por tipo, y se estudian diversos métodos de solución (separación de variables, características, transformaciones integrales, funciones de Green, entre otros), dependiendo del problema considerado (Cauchy, Dirichlet, Neumann, mixto, etc.), siendo el caso lineal el más ampliamente desarrollado (sobre todo la teoría de las llamadas *Ecuaciones Clásicas de la Física-Matemática*, [7]: la Ecuación de Laplace, la Ecuación de Poisson, la Ecuación de Calor, la Ecuación de Onda, la Ecuación de Helmholtz, entre otras). El caso no lineal es el más complicado; para su tratamiento es necesario contar con una herramienta matemática de nivel mucho más avanzado, salvo ciertas excepciones. En particular, en el presente capítulo el interés se enfoca específicamente sobre EDP1 y su método clásico de solución, el MC, con el propósito de comprender el proceso mediante ejemplos para posteriormente generalizar el concepto de *característica*.

1.2 Problema de Cauchy Clásico para EDP1's

En general, una Ecuación Diferencial Parcial de primer orden no lineal (EDP1 NL) es de la forma

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 0, \quad (1.2.1)$$

donde $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u = u(\mathbf{x})$ y $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \partial u / \partial \mathbf{x}$, sujeta a condiciones iniciales especificadas sobre una hipersuperficie (o variedad) $\mathcal{M} \subset \Omega$.

Nota: i) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \Omega$ es un vector n -dimensional del espacio \mathbb{R}^n , Ω es una vecindad abierta de un punto de referencia $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$. La función desconocida (solución del problema) u es una función escalar real, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ es el vector gradiente de u , $p_i = \partial u / \partial x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. La función F , denominada *Hamiltoniano*, es una función escalar real, $F : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\mathcal{N} = \Omega \times \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$ es un dominio establecido en el espacio $(2n+1)$ -dimensional de $(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$, $\mathbb{R}^{(2n+1)}$, con $\tilde{\Omega}$ una restricción o modificación de Ω debido a las derivadas respecto a x_i .

ii) Para cierto tipo de problemas de evolución comúnmente $x_k \rightarrow t$ para algún k , los índices se reacomodan y se consideran hasta la dimensión específica dada por el propio problema, que bajo condiciones apropiadas (estructura del Hamiltoniano F) algunas veces es posible resolver para la derivada en el tiempo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(t, \mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}\right) = 0, \quad (1.2.2)$$

donde $H(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ es de clase C^2 . Es natural tratar a la variable t como el tiempo y considerar el PVI suponiendo que $u|_{t=0} = u_0(\mathbf{x})$.

iii) En el caso 1-dimensional, cuando la ecuación (1.2.2) puede expresarse en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, x, u) = 0 \quad (1.2.3)$$

es llamada *ley de conservación*. Algunas veces es posible tener un sistema de leyes de conservación. Los procesos más comunes en donde surge(n) una (o varias) ley(es) de conservación son en dinámica de fluidos, transporte, calor, entre otros.

iv) Las EDP1 están presentes en una gran variedad de procesos aplicados: por ejemplo, surgen en problemas de mecánica clásica, problemas variacionales, teoría de juegos, óptica geométrica, entre otros. En general, el interés por estudiar EDP1 es para tener la herramienta mínima requerida para analizar problemas de Cálculo de Variaciones, Control Óptimo y Teoría de Juegos Diferenciales, en particular ecuaciones del tipo llamado *Hamilton-Jacobi* (EcH-J) que surgen en Cálculo de Variaciones.

1.2.1 Caso Típico de Condiciones de Frontera

Para especificar las condiciones iniciales (datos de Cauchy) para (1.2.1) se supone que se puede establecer una hipersuperficie suave parametrizada \mathcal{M} en Ω , con $\mathbf{x}^* \in \mathcal{M}$. Esto es,

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s})\}, \quad (1.2.4)$$

donde $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1})^T \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ con rango completo, esto es $\text{rank} |\partial\varphi_i/\partial s_j| = n - 1$. Aquí, \mathbf{s} es un vector de parámetros $(n - 1)$ -dimensional del dominio \mathcal{G} , mientras que $\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s}^*)$ para algún $\mathbf{s}^* \in \mathcal{G}$. La condición del rango asegura que \mathcal{M} es una hipersuperficie $(n - 1)$ -dimensional encajada en \mathbb{R}^n . En la figura siguiente se ilustra la situación (en el plano):

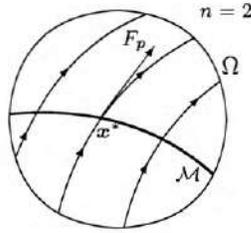


Figura 1.1 Geometría de la Condición de Frontera

De forma alterna (implícita), la superficie \mathcal{M} se puede especificar por medio de una función escalar $g(\mathbf{x})$:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid g(\mathbf{x}) = 0\}, \quad (1.2.5)$$

con $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$. Entonces, el valor de la función desconocida u sobre la superficie \mathcal{M} se especifica por

$$u(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s})) = w(\mathbf{s}), \quad (1.2.6)$$

donde $w : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada. Otra forma de especificar la condición inicial es

$$u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}, \quad (1.2.7)$$

donde $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada. Así, $v(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s})) = w(\mathbf{s})$. Nótese que el valor de $v(\mathbf{x})$ es importante sólo para los puntos de la superficie \mathcal{M} , pero no para todo el dominio Ω . Todas las funciones antes mencionadas se supone que son dos veces diferenciables (en el dominio correspondiente): $F, v, g, w, \boldsymbol{\varphi} \in C^2(\cdot)$.

A continuación se plantea el problema general de valor inicial para una EDP1 NL.

Problema General de Cauchy para una EDP1 NL: Determinar una solución dos veces diferenciables de la ecuación (1.2.1), $u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega)$, que satisfaga además la condición (1.2.6).

En general, se muestra en [7] que la solución buscada de (1.2.1) se construye a partir de la solución del $(2n+1)$ *Sistema Característico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (SCEDO):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{p}, \quad \dot{u} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{F}\mathbf{p} \rangle, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{p}F_u, \quad (1.2.8)$$

sujeto a condiciones iniciales heredadas por el propio PVI de la EDP. El punto arriba significa (de acuerdo a la notación de Newton) la derivada respecto al parámetro de las características (variable independiente, comúnmente se utiliza t), esto es $(\dot{}) = \frac{d}{dt}$. La expresión $\mathbf{F}_{\text{SUBÍNDICE}}$ significa determinar derivadas parciales (formar gradiente) de la función \mathbf{F} respecto al o a los argumento(s) correspondiente(s).

Observación: Para el caso particular

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = p_n + H(\mathbf{x}, u, \tilde{\mathbf{p}}), \quad \tilde{\mathbf{p}} = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})^T \quad (1.2.9)$$

la ecuación para la última componente de \mathbf{x} en (1.2.8) toma la forma $\dot{x}_n = 1$, lo cual significa que $x_n = t + \text{const}$ (el caso de la ecuación (1.2.2)).

En el caso cuando la función F no depende de u , $F = F(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, el sistema (1.2.8) es desacoplado, y entonces la ecuación para \mathbf{x} y \mathbf{p} toma la forma llamada *Hamiltoniana*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{F}\mathbf{x}. \quad (1.2.10)$$

A continuación se analiza la propiedad analítica principal de (1.2.8): supongamos que $u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega)$ es una solución de (1.2.1) y consideremos el campo vectorial tangente $\mathbf{F}\mathbf{p}$ en Ω que define al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{p}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x})). \quad (1.2.11)$$

Para la derivada $\dot{\mathbf{p}}$ del vector $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ en la dirección del campo vectorial $\mathbf{F}\mathbf{p}$ o equivalentemente a lo largo de una solución $\mathbf{x}(t)$ de (1.2.11), obtenemos (para cada componente)

$$\frac{d}{dt}p_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_k} F_{p_i}, \quad (1.2.12)$$

usando el hecho que $\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$.

Diferenciando (1.2.1) respecto a x_k , tenemos

$$F_{x_k} + F_u \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = 0. \quad (1.2.13)$$

Combinando (1.2.12) y (1.2.13), obtenemos

$$\dot{p}_k = -F_{x_k} - p_k F_u, \quad (1.2.14)$$

la cual es la forma componente a componente de la tercera ecuación en (1.2.8).

La ecuación $\dot{u} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{Fp} \rangle$ sigue de la regla de la cadena y (1.2.11):

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{Fp} \rangle. \quad (1.2.15)$$

Así, para una solución dada $u(\mathbf{x})$ los parámetros \mathbf{x} , u , \mathbf{p} obedecen al sistema (1.2.8), el cual es un sistema bien definido en el sentido que las funciones del lado derecho, que dependen sólo de \mathbf{x} , u , \mathbf{p} son dos veces diferenciables. Precisamente esta propiedad es la que permite la construcción "local" de una solución específica para una condición inicial dada.

1.2.2 Establecimiento de las Condiciones Iniciales

El sistema (1.2.8) está sujeto a condiciones iniciales sobre la superficie \mathcal{M} . Para \mathbf{x} y u los datos están dados en (1.2.4) o (1.2.6). Para obtener los datos correspondientes para \mathbf{p} , diferenciamos (1.2.6) con respecto a s_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$: $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_j} = \frac{\partial w}{\partial s_j}$. Nótese que (1.2.6) es una identidad con dependencia sólo en s , mientras que (1.2.7) lo es en \mathbf{x} . Estas igualdades junto con (1.2.8) forman el sistema de n ecuaciones con respecto a las n incógnitas $p_i = \partial u / \partial x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} F(\varphi(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}), \mathbf{p}) &= 0, \quad \mathbf{s} \in \mathcal{G} \\ \frac{\partial w}{\partial s_j}(\mathbf{s}) - \left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \varphi}{\partial s_j}(\mathbf{s}) \right\rangle &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

La matriz jacobiana de este sistema tiene la forma:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left[\mathbf{Fp}, \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial s_{n-1}} \right]^T, \quad \mathbf{s} \in \mathcal{G}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2.17)$$

donde el n -vector $\mathbf{Fp} = (F_{p_1}, \dots, F_{p_n})$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial s_j} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_j} \right)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ son vectores renglón de la matriz \mathbf{J} .

Sea $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^n$ un vector que satisface el sistema (1.2.16) para $\mathbf{s} = \mathbf{s}^*$. Se dice que la *condición de transversalidad* se cumple si se tiene que

$$\Delta(\mathbf{s}^*, \mathbf{p}^*) \neq 0, \quad (1.2.18)$$

donde $\Delta(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \det \mathbf{J}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$. Como los vectores $\partial\varphi/\partial s_j$ son tangentes a la superficie \mathcal{M} , entonces (1.2.18) significa que los renglones de la matriz jacobiana \mathbf{J} son linealmente independientes y por consiguiente el vector $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(\varphi(\mathbf{s}^*), w(\mathbf{s}^*), \mathbf{p}^*)$ es transversal (no tangente) a la superficie \mathcal{M} en el punto $\mathbf{x}^* \in \mathcal{M}$ (ver Figura 1.1).

La existencia de la única solución $\mathbf{p} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathcal{G}$, $\boldsymbol{\psi} \in C^1(\mathcal{G})$, $\mathbf{p}^* = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{s}^*)$ sigue de (1.2.18) y del Teorema de la Función Implícita (Anexo A.2). Así, la información inicial para el sistema (1.2.8), que por convención se refiere a $t = 0$, se resume en

$$\Sigma = \{(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s}), u = w(\mathbf{s}), \mathbf{p} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in \mathcal{G}, (t = 0)\}, \quad (1.2.19)$$

con $\boldsymbol{\varphi}, w \in C^2$, $\boldsymbol{\psi} \in C^1$, la cual se denomina *variedad no característica*, una superficie $(n-1)$ -dimensional en el espacio $(2n+1)$ -dimensional de las variables $(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$.

Nota: La construcción de los datos iniciales para el vector \mathbf{p} (sistema (1.2.16)) se simplifica si la superficie \mathcal{M} es una superficie coordenada, es decir, $x_n = a = \text{const}$. En tal caso las demás componentes del vector \mathbf{x} se utilizan como parámetros: $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})^T$.

Entonces, diferenciando la condición de frontera (1.2.6), la cual adquiere ahora la forma

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a) = w(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (1.2.20)$$

con respecto a $x_j = s_j$, se obtienen inmediatamente todos los valores iniciales, excepto la última componente: $p_j = \psi_j(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{\partial w}{\partial x_j}$, para $j = 1, 2, \dots, n-1$, los cuales, de hecho, son la

segunda igualdad en el sistema (1.2.16), ya que $\varphi_j = s_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, $\varphi_n = a$. La última componente debe encontrarse de la propia ecuación $F(\tilde{\mathbf{x}}, a, w(\tilde{\mathbf{x}}), \psi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \psi_{n-1}(\tilde{\mathbf{x}}), p_n) = 0$. La condición suficiente para resolver esta ecuación para p_n es $\frac{\partial F}{\partial p_n}(\mathbf{x}^*, u(\mathbf{x}^*), \mathbf{p}^*) \neq 0$, la cual es precisamente la condición de transversalidad (1.2.18), y la cual siempre es válida para el Hamiltoniano (1.2.9).

Observación: Todo el análisis desarrollado hasta este punto es de *carácter local*.

1.2.3 Construcción de una Solución Suave

La condición $F \in C^2$ y los datos iniciales (1.2.19) con φ, w, ψ lo suficientemente suaves significa que el sistema (1.2.8) satisface las condiciones estándar para la existencia y unicidad de EDO's y la dependencia continuamente diferenciable de la solución sobre el parámetro s (referencia [6]), lo cual se denota por

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \mathbf{s}), \quad u = U(t, \mathbf{s}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{P}(t, \mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathcal{G}, \quad |t| < t_0. \quad (1.2.21)$$

Aquí, t_0 es un número positivo lo suficientemente pequeño (válidez local de la teoría). De las condiciones iniciales (1.2.19) y la primera ecuación en (1.2.8) se tienen las siguientes relaciones para la función $\mathbf{X}(t, \mathbf{s})$ en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(0, \mathbf{s}) &= \mathbf{F}_{\mathbf{p}}(\varphi(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}), \psi(\mathbf{s})) \\ \mathbf{X}(0, \mathbf{s}) &= \varphi(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Una vez obtenida la solución de este sistema, se tiene la siguiente expresión para el jacobiano:

$$\frac{\partial(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1})} = \det J(\mathbf{s}, \psi(\mathbf{s})), \quad t = 0, \quad \mathbf{s} \in \mathcal{G},$$

con J definido en (1.2.17).

Así, la condición (1.2.18) permite resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \\ x_2 &= X_2(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \\ &\vdots \\ x_n &= X_n(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \end{aligned}$$

con respecto a t y \mathbf{s} , y entonces encontrar las funciones escalar y $(n-1)$ -vectorial, respectivamente,

$$t = T(\mathbf{x}), \quad \mathbf{s} = \mathbf{S}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2.22)$$

de clase C^1 . Sustituyendo estas funciones en la segunda y tercera relación en (1.2.21) producen las funciones escalar y n -vectorial, respectivamente,

$$u(\mathbf{x}) = U(T(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(T(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.2.23)$$

ambas de clase C^1 .

Es fácil mostrar que la función $u(\mathbf{x})$ en (1.2.23) es la solución de (1.2.1) sujeta a la condición (1.2.6), mientras que $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ es su gradiente y por lo tanto $u(\mathbf{x})$ es dos veces diferenciable, ya que $\mathbf{p}(\mathbf{x}) \in C^1$. Esto es, por mostrar que

$$F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.2.24)$$

En efecto, una de las propiedades principales del sistema (1.2.8) es que el Hamiltoniano $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ es una *integral primera* del sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F &= \langle \mathbf{F}\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle + F_u \dot{u} + \langle \mathbf{F}\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}} \rangle = 0 \\ \text{o } \langle \mathbf{F}\mathbf{x}, \mathbf{F}\mathbf{p} \rangle + F_u \langle \mathbf{p}, \mathbf{F}\mathbf{p} \rangle - \langle \mathbf{F}\mathbf{p}, \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{p}F_u \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Esto significa que la igualdad $F(\mathbf{X}(t, \mathbf{s}), U(t, \mathbf{s}), \mathbf{P}(t, \mathbf{s})) = 0$ es una identidad con respecto a t y \mathbf{s} . Como el cambio de variable es invertible (1.2.22), de aquí se sigue la validez de (1.2.24). Para probar la afirmación principal

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2.26)$$

se considera la primera igualdad en (1.2.23) en las variables t y \mathbf{s} : $u(\mathbf{X}(t, \mathbf{s})) = U(t, \mathbf{s})$ y se diferencia con respecto a t y \mathbf{s} , obteniendo

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial U}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.2.27)$$

Sustituyendo $\partial u/\partial x_i$ por $P_i(t, \mathbf{s})$ e introduciendo las variables $h_n(t, \mathbf{s})$ y $h_j(t, \mathbf{s})$ como las diferencias entre los lados izquierdo y derecho, se tiene que

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^n P_i(t, \mathbf{s}) \frac{\partial X_i}{\partial t} = 0, \\ h_j &= \frac{\partial U}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n P_i(t, \mathbf{s}) \frac{\partial X_i}{\partial s_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

La anulación de h_n en (1.2.28) se debe a que $\partial \mathbf{X}/\partial t = \mathbf{F}\mathbf{p}$ y a la segunda ecuación en (1.2.8). Como $\partial h_n/\partial s_j = 0$, entonces se deduce de (1.2.28) que

$$\frac{\partial h_j}{\partial t} = \frac{\partial h_j}{\partial t} - \frac{\partial h_n}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial P_i}{\partial s_j} \frac{\partial X_i}{\partial t} - \frac{\partial P_i}{\partial t} \frac{\partial X_i}{\partial s_j} \right). \quad (1.2.29)$$

Diferenciando la identidad $F(\mathbf{X}(t, \mathbf{s}), U(t, \mathbf{s}), \mathbf{P}(t, \mathbf{s})) = 0$ respecto a s_j , lleva a

$$\left\langle \mathbf{F}\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s_j} \right\rangle + F_u \frac{\partial U}{\partial s_j} + \left\langle \mathbf{F}\mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s_j} \right\rangle = 0. \quad (1.2.30)$$

Recordando de (1.2.8) que $\partial \mathbf{P} / \partial t = -\mathbf{F} \mathbf{x} - \mathbf{p} F_u$, se obtiene de (1.2.29) y (1.2.30) que

$$\frac{\partial h_j}{\partial t} = -F_u h_j, \quad (1.2.31)$$

la cual para cada $\mathbf{s} \in \mathcal{G}$ fija es una EDO para h_j , cuya solución es

$$h_j(t, \mathbf{s}) = h_j(0, \mathbf{s}) \exp \left(- \int_0^t f(\tau, \mathbf{s}) d\tau \right), \quad (1.2.32)$$

donde $f(\tau, \mathbf{s}) = F_u(\mathbf{X}(\tau, \mathbf{s}), U(\tau, \mathbf{s}), \mathbf{P}(\tau, \mathbf{s}))$.

Ahora, en vista de las segundas relaciones en (1.2.16) y (1.2.28), se llega a que $h_j(0, \mathbf{s}) = 0$ y por consiguiente $h_j(t, \mathbf{s}) = 0$ para $\mathbf{s} \in \mathcal{G}$, $|t| < t_0$, $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Las consideraciones anteriores constituyen la demostración del siguiente resultado concerniente a la solución del problema planteado.

Teorema 1.1 (Existencia y Unicidad): Sean $F, \varphi, w \in C^2$. Entonces para cada vector $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^n$ que satisfice (1.2.16) y la condición de transversalidad (1.2.18) existe una única solución $u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega)$ definida en una vecindad lo suficientemente pequeña del punto $\mathbf{x}^* \in \mathcal{M}$. ■

Nota: i) Existen casos cuando las condiciones iniciales (1.2.19) no cumplen la condición de transversalidad (1.2.18), $\Delta(\psi(\mathbf{s}), \mathbf{s}) = 0$, para toda $\mathbf{s} \in \mathcal{G}$. Esto es, la condición de suficiencia del Teorema 1.1 no se cumple, pero aún así el Problema tiene solución de clase C^2 (bajo ciertas condiciones adicionales). En este caso, se dice que el problema de Cauchy es *irregular*. Este tipo de problema no es muy común y no se considera en el presente trabajo.

ii) En este trabajo no se consideran otros tipos de condiciones de frontera posibles como sería el caso cuando se toma como variedad inicial a una hipersuperficie de codimensión menor, $n-m$, donde $2 \leq m \leq n-1$. En este caso, el problema es referido como *Problema de Cauchy para Superficies Integrales*. Otro problema más general, muy interesante, pero cuyo material es de un nivel superior al tratado en este trabajo, es cuando se consideran las condiciones del problema (PVI) o (PVT) sobre una *frontera móvil*.

1.3 Ejemplos Típicos de Características Clásicas

Se consideran ejemplos típicos de EDP1's en dos dimensiones, esta es para dos variables independientes, con el fin de ilustrar como opera el MC en algunos casos concretos, interpretar visualmente la solución y analizar la geometría que tienen este tipo de ecuaciones para extender la teoría hacia otras líneas de generalización. Así, la ecuación (1.2.1) en dos dimensiones tiene la forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = F(x, y, u, p, q) = 0, \quad (1.3.1)$$

utilizando la notación $p = \partial u / \partial x = u_x$, $q = \partial u / \partial y = u_y$. Una solución $u = u(x, y)$, interpretada como una superficie explícita en \mathbb{R}^3 , es llamada *superficie integral* de la ecuación diferencial.

Bajo esta consideración, recordemos que la EDP1 lineal 2-dimensional (1.1.3) tiene la forma:

$$a(x, y) u_x + b(x, y) u_y = c(x, y) u + d(x, y) \quad (1.3.2)$$

Observación: El lado izquierdo de (1.3.2) representa la derivada de $u(x, y)$ en la dirección del campo vectorial formado por $\mathbf{V} = (a(x, y), b(x, y))$, llamada *Derivada de Lie* y definida en general por $L_{\mathbf{V}} u(x, y) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{V} \right\rangle$, con $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = \nabla u$. Por lo tanto, se consideran las curvas en el plano xy , cuyas tangentes en cada punto tienen éstas direcciones, es decir, la familia 1-paramétrica de curvas $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ definidas por las EDO's

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y) \quad \circ \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \quad (1.3.3)$$

de tal forma que éstas curvas tienen la propiedad de que, a lo largo de ellas $u(x, y)$ satisface la EDO

$$\frac{du}{dt} = c(x, y) u + d(x, y) \quad \circ \quad \frac{du}{dx} = \frac{c(x, y) u}{a(x, y)} \quad (1.3.4)$$

La familia 1-paramétrica de curvas definidas por la ecuación (1.3.3) es llamada conjunto de *curvas características*. Las ecuaciones (1.3.3) y (1.3.4) son precisamente las dos primeras ecuaciones en (1.2.8).

Ahora, supongamos que se le asigna un valor inicial a $u(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) en un dominio válido en el plano xy . El Teorema de Existencia y Unicidad para el Problema de Valor Inicial de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Ref., P.Ej., [6]), implica que las ecuaciones (1.3.3) definen de forma única las curvas características $x = x(t; x_0, y_0)$, $y = y(t; x_0, y_0)$ junto con $u = u(t; x_0, y_0)$, determinada de forma única por la ecuación (1.3.4). El planteamiento exacto de éste Problema de Cauchy queda incluido en el caso más general de EDP1 casi-lineales abordado a continuación.

La ecuación general casi-lineal 2-dimensional (1.1.2) se expresa en la forma:

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u) \quad (1.3.5)$$

La solución general $u(x, y)$ define una superficie integral en el espacio tridimensional. La normal a la superficie tiene por dirección a $N = (u_x, u_y, -1)$ [ver Figura 1.2]

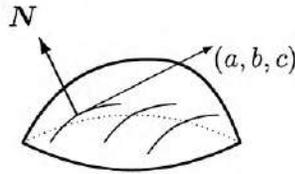


Figura 1.2 Geometría de la EDP1 Casi-Lineal 2-dimensional

Así, la ecuación (1.3.5) se interpreta como la condición mediante la cual la superficie integral, en cada punto, tiene la propiedad que el vector (a, b, c) es tangente a la superficie. Esto es, la EDP1 Casi-Lineal (1.3.5) define un campo de direcciones (a, b, c) , llamadas las *direcciones características*, con la propiedad que $u(x, y)$ es una superficie integral si y sólo si en cada punto el plano tangente contiene una dirección característica. Por lo tanto, es sugestivo entonces considerar las curvas integrales de este campo, esto es, la familia de curvas del espacio cuyas tangentes coinciden con las direcciones características. Estas son llamadas las *curvas características* y son dadas por las ecuaciones

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)} \quad (1.3.6)$$

llamando al valor común de estas *razones* dt , por lo cual (1.3.6) se puede escribir en la forma:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, u), \quad \frac{du}{dt} = c(x, y, u) \quad (1.3.7)$$

Observación: Por cada punto (x_0, y_0, u_0) pasa una curva característica

$$x = x(t; x_0, y_0, u_0), \quad y = y(t; x_0, y_0, u_0), \quad u = u(t; x_0, y_0, u_0),$$

Una propiedad importante de las curvas características es que: *cada superficie generada por una familia 1-parámetrica de curvas características es una superficie integral de (1.3.5).*

Además, la inversa también es verdadera. En efecto, sea $z = u(x, y)$ una superficie integral S dada y considerar la solución del sistema

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, u(x, y)), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, u(x, y))$$

con $x = x_0, y = y_0$ para $t = 0$.

Entonces, para las curvas correspondientes $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(x(t), y(t))$ también de (1.3.5) se tiene que

$$\frac{dz}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} = a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u) = \zeta(x, y, z)$$

Esto es, la curva satisface la condición (1.3.7) de las curvas características y por definición también descansa sobre \mathcal{S} . Así, \mathcal{S} contiene en cada punto una curva característica que pasa a través del punto. Por lo tanto, \mathcal{S} contiene las curvas integrales. Además, si dos superficies integrales pasan por un punto dado entonces se intersectan a lo largo de la curva característica que pasa a través de tal punto; y la curva de intersección de dos superficies integrales debe ser una curva característica. En este punto la solución del problema de Cauchy, esto es, el de hallar la solución $u(x, y)$ de (1.3.5) que satisface los valores iniciales dados a lo largo de una curva en el plano xy , se hace evidente. Por consiguiente, se toma como solución a la superficie integral formada por la familia de curvas características que pasan a través de cada punto inicial en el espacio.

Para el caso no lineal (1.3.1) determinar la solución también se reduce a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (1.2.8). Sin embargo, la geometría no necesariamente es tan simple como en el caso de las ecuaciones casi-lineales. El caso general lleva a la consideración de objetos geométricos más complicados, llamados **fajas** (o **tiras**) que lleva a su vez a familias de planos tangentes, las cuales forman envolventes cónicas, conocidas en la literatura como **conos de Monge**, cuya descripción no se incluye en el presente trabajo [Ref. [7]] debido al objetivo del mismo.

En general, el problema de Cauchy para una EDP1 casi-lineal se establece por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(t, \mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} &= a_0(t, \mathbf{x}, u) \quad \text{en } U, \\ u(0, \mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (0, \mathbf{x}) \in U\}, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

donde U es una vecindad abierta de $(t, \mathbf{x}) = (0, \mathbf{0})$. Sea V una vecindad abierta de $\{(0, \mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in U_0\}$ en \mathbb{R}^{n+2} y suponer que $a_i = a_i(t, \mathbf{x}, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$ y $\phi = \phi(\mathbf{x})$ son de clase C^1 en V y U_0 , respectivamente (recordemos que una función se dice ser de clase C^k si es k -veces continuamente diferenciable y $C^k(U)$ denota a la familia de funciones de clase C^k en U).

Nota: Cuando las funciones coeficiente a_i en la EDP1 (1.3.8) no dependen de la función desconocida u , esto es $a_i = a_i(t, \mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $a_0 = a_0(t, \mathbf{x})u$, la EDP1 (1.3.8) es lineal.

Las EDP1 lineales son por naturaleza las más fáciles de analizar. Sin embargo, obtener soluciones exactas de forma analítica la mayor parte de las veces no es un problema trivial (como veremos más adelante en algunos de los ejemplos abordados).

Para la solución del problema (1.3.8) se utiliza $v = v(t, \mathbf{y})$ en lugar de $u = u(t, \mathbf{x})$ para evitar confusión, pero v es igual al valor de u restringida sobre la curva solución correspondiente $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{y})$.

Teorema 1.2 *El problema de Cauchy (1.3.8) tiene solución única de clase C^1 en una vecindad del origen.*

Demostración: El resultado es válido únicamente en el dominio de definición de $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t, \mathbf{x})$, el cual es una vecindad del origen, donde el jacobiano $(D\mathbf{x}/D\mathbf{y})(t, \mathbf{y})$ no se anula.

Como $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}))$, entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \end{pmatrix}_{i,j=1,2,\dots,n} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{i,j=1,2,\dots,n} = I_{n \times n} \text{ (la matriz identidad),}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \end{pmatrix}_{i,j=1,2,\dots,n} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = 0$$

y como $u(t, \mathbf{x}) = v(t, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}))$, se tiene que $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}(t, \mathbf{y}) + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}(t, \mathbf{x})$.

De esta relación y las dos anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= a_0(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x})) - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \\ &= a_0(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x})) - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \\ &= a_0(t, \mathbf{x}, u) - \sum_{i=1}^n a_i(t, \mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Como $u(0, \mathbf{x}) = v(0, \mathbf{y}(0, \mathbf{x})) = \phi(\mathbf{x})$, entonces $u = u(t, \mathbf{x})$ satisface (1.3.8) en la vecindad del origen mencionada. Para demostrar la unicidad de tal solución, sea $u = u(t, \mathbf{x})$ cualquier solución de clase C^1 de (1.3.8) y considerar $\tilde{u}(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} u(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{y}))$, donde $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ y $v = v(t, \mathbf{y})$ son soluciones de (1.2.8). Entonces, la diferencia $w(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{u}(t, \mathbf{y}) - v(t, \mathbf{y})$ satisface el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} w(t, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n (a_j(t, \mathbf{x}, v) - a_j(t, \mathbf{x}, \tilde{u})) \frac{\partial u}{\partial x_j} + (a_0(t, \mathbf{x}, \tilde{u}) - a_0(t, \mathbf{x}, v)), \\ w(0, \mathbf{y}) = 0. \end{cases}$$

Como el lado derecho de esta ecuación diferencial puede ser estimada por $M|\tilde{u} - v| = M|w|$, se tiene que $w(t, \mathbf{y}) \equiv 0$, i.e., $\tilde{u}(t, \mathbf{y}) \equiv v(t, \mathbf{y})$ para todo (t, \mathbf{y}) en una vecindad del origen. Esto significa que la solución de clase C^1 es única a lo largo de las curvas $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{y})$. Es decir, siempre que el jacobiano $(D\mathbf{x}/D\mathbf{y})(t, \mathbf{y})$ no se anula, la solución de (1.3.8) es única en el espacio C^1 . Las soluciones C^1 son llamadas “soluciones clásicas”. ■

Nota: El resultado establecido por Teorema 1.2 se extiende en general para el problema de Cauchy (1.2.2)–(1.2.7) [Ref. [21]].

A continuación se analiza, respectivamente, la solución de algunas ecuaciones convenientemente seleccionadas, en dos dimensiones.

1.3.1 Un Problema Específico 2-Dimensional No Lineal

En esta parte consideraremos el problema de Cauchy con respecto a la función $u(x, y)$ en las dos variables reales típicas x y y en el plano:

$$\begin{aligned} F(x, y, u, p, q) &= p + \sqrt{a^2 + q^2} - x\sqrt{b^2 + q^2} = 0, \\ u(0, y) &= cy, \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

donde $p = \partial u / \partial x$, $q = \partial u / \partial y$ y a, b, c son constantes reales.

Este es un problema particular del Problema General de Cauchy para una EDP1 NL (planteado en la Sección 1.2) en el espacio 2-dimensional \mathbb{R}^2 , con el eje y como superficie frontera \mathcal{M} (1.2.4):

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y = s, s \in \mathbb{R}\}.$$

Nota: El plano xy completo constituye el dominio Ω .

Para este problema, el sistema característico (1.2.8) tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = 1, & \dot{y} &= F_q = q/\sqrt{a^2 + q^2} - xq/\sqrt{b^2 + q^2} \\ \dot{u} &= pF_p + qF_q, & \dot{p} &= -F_x = \sqrt{b^2 + q^2}, & \dot{q} &= -F_y = 0. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Como la superficie \mathcal{M} es uno de los ejes coordenados, la construcción de las condiciones iniciales se simplifica. Este es un problema regular de Cauchy, ya que en este caso la condición de transversalidad 1.2.18) para el Hamiltoniano del tipo (1.2.9) es $\Delta = F_p = 1$.

Diferenciando la condición de frontera y usando la ecuación (1.3.9), tenemos

$$q(0, y) = c, \quad p(0, y) = -\sqrt{a^2 + c^2}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (1.3.11)$$

Así, las condiciones iniciales –la *curva no característica*–(1.2.19) para el sistema (1.3.10) tiene la forma

$$x = 0, \quad y = s, \quad u = cs, \quad p = -\sqrt{a^2 + c^2}, \quad q = c, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (1.3.12)$$

Para integrar el sistema (1.3.10), observemos que la primera y la última ecuación son:

$$x = t + \text{const}, \quad q = \text{const}, \quad \dot{p} = \text{const}, \quad (1.3.13)$$

mientras que la derivada \dot{y} es lineal en x y por lo tanto en t . Usando las condiciones iniciales (1.3.12), se obtiene que la solución (1.2.21) para el sistema (1.3.10) es

$$\begin{aligned} x = X(t, s) &= t, & y = Y(t, s) &= s + \frac{ct}{\sqrt{a^2 + c^2}} - \frac{1}{2} \frac{ct^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\ u = U(t, s) &= cs - \frac{a^2 t}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{1}{2} \frac{b^2 t^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\ p = P(t, s) &= t\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + c^2}, & q = Q(t, s) &= c. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Las primeras dos ecuaciones se pueden fácilmente invertir para determinar t y s como funciones de x y y :

$$t = T(x, y) = x, \quad s = S(x, y) = y - \frac{cx}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{1}{2} \frac{cx^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \quad (1.3.15)$$

La sustitución de estas expresiones en la segunda relación de (1.3.14) proporciona la solución del problema de Cauchy (1.3.9):

$$\boxed{u(x, y) = cy + \frac{1}{2} x^2 \sqrt{b^2 + c^2} - x \sqrt{a^2 + c^2}} \quad (1.3.16)$$

la cual se ilustra en la Figura 1.3 (de forma extendida) para valores específicos de las constantes a, b y c .

Nota: Las primeras dos relaciones en (1.3.14) definen a una familia 1-paramétrica de parábolas (con s como parámetro) en el plano xy , la cual se obtiene por construcción al mover la parábola $y = -c(x - x_0)^2 / (2\sqrt{b^2 + c^2})$ a lo largo de la línea vertical $x = x_0 = \sqrt{b^2 + c^2} / \sqrt{a^2 + c^2}$, el eje de simetría de la familia. Estas líneas son las proyecciones de las curvas integrales del sistema (1.3.10) del espacio 5-dimensional de x, y, u, p, q sobre el plano xy . Estas proyecciones son las *características*.

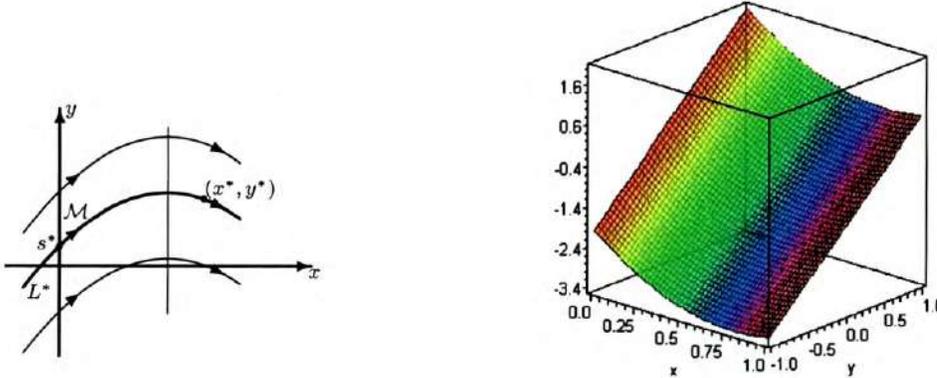


Figura 1.3 Solución de $u_x + \sqrt{a^2 + u_y^2} - x \sqrt{b^2 + u_y^2} = 0$, para $a = 2$, $b = 3$

Observación: Cada punto del plano es alcanzado por una y sólo una parábola, la cual lleva la información de la solución desde el eje y . Esta unicidad corresponde a la invertibilidad de las primeras dos relaciones en (1.3.14). Para el valor $u(x^*, y^*)$ de la solución en el punto (x^*, y^*) sólo una característica es responsable de hacerlo, la que pasa por punto $y = s^*$ sobre el eje y (la variedad inicial). Si el valor inicial es perturbado en una vecindad de s^* , entonces la solución será perturbada sólo para los puntos en la vecindad de la parábola L^* . Así, sólo un punto de la frontera es responsable del valor de la solución en cualquier punto del plano. Generalmente, este no es el caso para una EDP de segundo orden, como se verá en el Capítulo 3 para la solución generalizada de una EDP1 No Lineal. \square

1.3.2 Ecuaciones Casi-Lineales y Lineales

Utilizando la interpretación geométrica de las EDP1 casi-lineales y las propiedades de las curvas características se deduce un método de características alternativo referido como Método de Lagrange, del cual en este trabajo no se proporciona su descripción detallada; sólo su resultado principal descrito a continuación. En esta parte se incluyen ejemplos representativos de este tipo de ecuaciones.

Teorema 1.3 *La solución de (1.3.5) es $f(\phi, \psi) = 0$, donde f es una función arbitraria de $\phi(x, y, z)$ y $\psi(x, y, z)$ con $\phi = \text{constante} = c_1$, $\psi = \text{constante} = c_2$ soluciones de (1.3.6).*

Las curvas solución definidas por $\phi(x, y, u) = c_1$ y $\psi(x, y, u) = c_2$ son la familia de curvas características de la ecuación (1.3.5).

Demostración: Como $\phi(x, y, u) = c_1$ y $\psi(x, y, u) = c_2$ satisfacen (1.3.5), éstas ecuaciones deben ser compatibles con la ecuación $d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_u du = 0$, la cual es equivalente a la ecuación

$$a\phi_x + b\phi_y + c\phi_u = 0$$

Similarmente, la ecuación (1.3.5) es compatible con

$$a\psi_x + b\psi_y + c\psi_u = 0$$

Resolviendo éstas dos ecuaciones para a, b y c se obtiene

$$\frac{a}{\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, u)}} = \frac{b}{\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, x)}} = \frac{c}{\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}}$$

Se muestra que $f(\phi, \psi) = 0$ es solución de la EDP1 CL (1.3.5) si $u = u(x, y)$ satisface la ecuación

$$p \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, u)} + q \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, x)} = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}, \quad \text{donde } \frac{\partial(A, B)}{\partial(\xi, \zeta)} = \begin{vmatrix} A_\xi & A_\zeta \\ B_\xi & B_\zeta \end{vmatrix}$$

la cual se deriva de la penúltima relación, completando así la demostración. ■

Una gran variedad de problemas en Matemáticas Aplicadas, Ciencias e Ingeniería involucran EDP. Raramente se trata de encontrar o se discuten las propiedades de una solución de éstas ecuaciones en su forma más general. En la mayoría de los casos de interés, se buscan soluciones de la ecuación diferencial que satisfacen ciertas condiciones adicionales. En el caso de una EDP1 se determina una solución específica formulando un problema de valor inicial, llamado *problema de Cauchy*.

Ejemplo ECL1: Determinar la solución de la ecuación

$$F(x, y, u, p, q) = u(x + y)p + u(x - y)q - (x^2 + y^2) = 0$$

bajo la condición inicial $u = 0$ y $y = 2x$. Aquí, $p = u_x, q = u_y$.

En este caso, el sistema característico (1.2.8) es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = u(x + y) \\ \dot{y} &= F_q = u(x - y) \\ \dot{u} &= pF_p + qF_q = u(x + y)p + u(x - y)q \\ \dot{p} &= -F_x - pF_u = -up - uq + 2x - p(xp + yp + xq - yq) \\ \dot{q} &= -F_y - qF_u = -up + uq + 2y - q(xp + yp + xq - yq) \end{aligned}$$

el cual es equivalente a la relación común (1.3.6):

$$\frac{dx}{u(x+y)} = \frac{dy}{u(x-y)} = \frac{du}{x^2+y^2}$$

que implica las relaciones diferenciales $ydx + xdy - udu = 0$ y $x dx - y dy - udu = 0$, esto es, $d[(xy - \frac{1}{2}u^2)] = 0$ y $d[\frac{1}{2}(x^2 - y^2 - u^2)] = 0$, las cuales proporcionan las dos integrales $2xy - u^2 = C_1$ y $u^2 - x^2 + y^2 = C_2$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Por lo tanto, por el Teorema 1.3, la solución general es

$$f(2xy - u^2, u^2 - x^2 + y^2) = 0$$

con f una función arbitraria.

Las condiciones iniciales dadas, implican que $3C_1 = 4C_2$, lo cual lleva a la relación $3(2xy - u^2) = 4(u^2 - x^2 + y^2)$, y finalmente, a la solución de la ecuación considerada

$$\boxed{7u^2 = 6xy + 4(x^2 - y^2)} \quad (1.3.17)$$

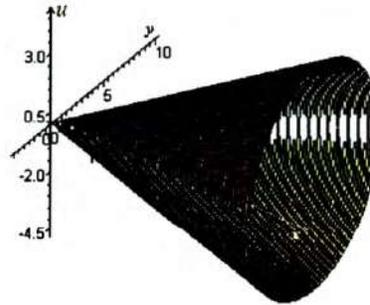


Figura 1.4 Bosquejo de la relación (1.3.17), solución de la EDP del Ejemplo ECL1

□

Ejemplo ECL2: Determinar la superficie integral de la ecuación

$$x(y^2 + u)u_x - y(x^2 + u)u_y = (x^2 - y^2)u$$

con datos iniciales: $u = 1$ a lo largo de $x + y = 0$.

La ecuación característica correspondiente es

$$\frac{dx}{x(y^2 + u)} = \frac{dy}{-y(x^2 + u)} = \frac{du}{(x^2 - y^2)u}$$

o equivalentemente

$$\frac{\frac{dx}{x}}{(y^2 + u)} = \frac{\frac{dy}{y}}{-(x^2 + u)} = \frac{\frac{du}{u}}{(x^2 - y^2)}$$

que implica la relación diferencial $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{du}{u} = 0$, de donde $\log(xyu) = \log C_1$ o $xyu = C_1$.

Por otra parte, reescribiendo la ecuación característica se tiene

$$\frac{xdx}{x^2(y^2 + u)} = \frac{ydy}{-y^2(x^2 + u)} = \frac{du}{(x^2 - y^2)u}$$

o la relación diferencial $xdx + ydy - du = 0$, que determina la relación $x^2 + y^2 - 2u = C_2$.

Utilizando la condición inicial, se tiene $C_1 = -x^2$ y $C_2 = 2x^2 - 2$ y de aquí que $C_2 = -2(C_1 + 1)$. Por lo tanto, la superficie integral está dada por

$$u = u(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + x^2 + y^2}{1 - xy}$$

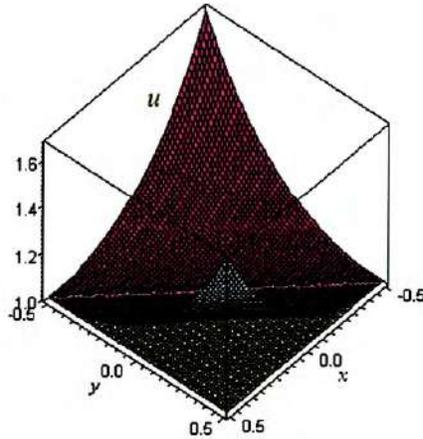


Figura 1.5 Bosquejo de la solución de la EDP del Ejemplo ECL2

□

Ejemplo EL1: La ecuación lineal $(y - z)u_x + (z - x)u_y + (x - y)u_z = 0$ tiene por solución general

$$u(x, y, z) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$$

donde f es una función arbitraria.

En efecto, las curvas características satisfacen la ecuación característica

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}$$

de donde $du = 0$, $dx + dy + dz = 0$ y $xdx + ydy + zdz = 0$, cuyas integrales son

$$u = C_1, \quad x + y + z = C_2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_3$$

para C_1, C_2 y C_3 constantes arbitrarias. Por lo tanto, por el Teorema 1.3, la solución general tiene la forma

$$u(x, y, z) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$$

Para verificar que efectivamente ésta es la solución general de la ecuación dada, se introducen tres variables independientes ξ, η, ζ definidas en términos de x, y y z por

$$\xi = x + y + z, \quad \eta = x^2 + y^2 + z^2, \quad \zeta = y + z$$

donde ζ es una combinación arbitraria de y y z . Claramente de la solución general se tiene que $u = f(\xi, \eta)$, y por lo tanto

$$u_\zeta = u_x \frac{\partial x}{\partial \zeta} + u_y \frac{\partial y}{\partial \zeta} + u_z \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

del cambio de variable realizado, se sigue que

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad 0 = 2 \left(x \frac{\partial x}{\partial \zeta} + y \frac{\partial y}{\partial \zeta} + z \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right), \quad 1 = \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

El primer y tercer términos implican $\frac{\partial x}{\partial \zeta} = -1$, y por lo tanto

$$x = y \frac{\partial y}{\partial \zeta} + z \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad y = y \frac{\partial y}{\partial \zeta} + y \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad z = z \frac{\partial y}{\partial \zeta} + z \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

Restando sucesivamente una expresión de otra, lleva a

$$x - y = (z - y) \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad x - z = (y - z) \frac{\partial y}{\partial \zeta}$$

Usando los valores para $\frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}$ y $\frac{\partial z}{\partial \zeta}$ y sustituyéndolos en la expresión para u_ζ , se obtiene

$$(z - y) \frac{\partial u}{\partial \zeta} = (y - z) \frac{\partial u}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial u}{\partial y} + (x - y) \frac{\partial u}{\partial z}$$

Si $u = u(\xi, \zeta)$ satisface la ecuación lineal dada, entonces $\frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0$, y por lo tanto la última expresión se reduce a la ecuación lineal dada. □

1.3.3 Caso Completamente Lineal

En ésta parte se analiza geoméricamente, utilizando el MC, ciertas soluciones del caso más simple posible de EDP1 lineales; cuando a su vez los coeficientes son lineales. Esto es, ecuaciones del tipo

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] \frac{\partial u}{\partial x_i} = \mu u, \quad (1.3.18)$$

con $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ la variable independiente, a_{ij} 's constantes reales, $\mu = 0$ o 1 un parámetro de homogeneidad y $u = u(\mathbf{x})$ función desconocida por determinar. En particular, como prototipo para dimensiones mayores, se consideran ejemplos típicos en el plano, para los que es posible resolver analíticamente y visualizar las soluciones gráficamente.

Para el caso 2-dimensional la ecuación (1.3.18) toma la forma

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = \mu u, \quad (1.3.19)$$

con $A(x, y) = \alpha x + \beta y$, $B(x, y) = \gamma x + \delta y$. El procedimiento del MC se utiliza para obtener solución en cada caso respectivo para $\mu = 0$ o 1 . La ventaja adicional que se tiene para este caso especial, además que la reducción lleva a un SCEDO familiar, es que en el plano es posible ilustrar las soluciones gráficamente con la ayuda de cualquier paquete de graficación disponible (como ya mencionamos, en este trabajo en particular se utilizó MAPLE[®]).

En este caso, el hamiltoniano es $F(x, y, u, p, q) = A(x, y)p + B(x, y)q - \mu u$, el cual (de acuerdo a 1.2.8) implica que las *curvas características* de la ecuación (1.3.19) son la familia de curvas diferenciables $\{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \mid t_1 < t < t_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ que satisfacen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_p$ o desplegado en componentes

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = B(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (1.3.20)$$

Esto es, las características asociadas a la ecuación (1.3.19) son las trayectorias fase del sistema característico lineal (1.3.20).

En general, las funciones $A(x, y)$ y $B(x, y)$ definen un *campo vectorial* en el plano xy y a la dirección que definen en cada punto se le llama *dirección característica*.

Observemos que la expresión del lado izquierdo de la ecuación (1.3.19) es el producto interior del campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = (A, B) \equiv \mathbf{F}\mathbf{p}$ y el gradiente de la función u , $\mathbf{p} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$.

Cuando en la ecuación (1.3.19), $\mu = 0$ significa que la derivada de u en la dirección del campo vectorial es cero. Es decir,

$$L_V u(x, y) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{V} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), (ax + by, cx + dy) \right\rangle = 0, \quad (1.3.21)$$

donde $L_V u$ denota la *derivada de Lie* de la función escalar u en la dirección del campo vectorial \mathbf{V} . Por lo tanto, si la derivada de Lie de la función u se anula, entonces la función u es *constante* a lo largo de cada curva característica. En efecto, supongamos que u es una solución de la ecuación (1.3.19) y que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ es una curva característica en el dominio de definición de u , entonces por la regla de la cadena

$$\frac{du}{dt} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{r}(t)), \dot{\mathbf{r}}(t) \right\rangle = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)) \dot{y}(t), \quad (1.3.22)$$

de donde, al aplicar la definición de característica, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{du}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t))[\alpha x(t) + \beta y(t)] + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t))[\gamma x(t) + \delta y(t)] \\ &= pA + qB = \langle \mathbf{p}, \mathbf{F}\mathbf{p} \rangle \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Luego, de las ecuaciones (1.3.19) y (1.3.23) se tiene que $\frac{du}{dt}(x(t), y(t)) = 0$, lo cual implica que

$$\boxed{u(x(t), y(t)) = \text{constante}} \quad (1.3.24)$$

Similarmente, al considerar la ecuación (1.3.19), con $\mu = 1$, se tiene que

$$L_V u = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}, (ax + by, cx + dy) \right\rangle = u \quad (1.3.25)$$

y entonces $\frac{du}{dt}(x(t), y(t)) = u(x(t), y(t))$, de donde resulta que

$$\boxed{u(x(t), y(t)) = Ke^t, \quad K = \text{cte.}} \quad (1.3.26)$$

Observación: Para encontrar una solución particular de una EDP es necesario proporcionar datos adicionales, los cuales en este caso son dados por las condiciones iniciales (CI).

Para dar una formulación precisa de como determinar CI sobre cada curva característica, es necesario introducir la noción de *curva no-característica*.

Una curva $\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s))$, $s_1 < s < s_2$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ es no-característica de la ecuación (1.3.19) (condición de transversalidad) si

$$\frac{dx_0}{ds}B(x_0(s), y_0(s)) - \frac{dy_0}{ds}A(x_0(s), y_0(s)) \neq 0, \quad \text{para todo } s \in (s_1, s_2), \quad (1.3.27)$$

donde $A(x_0(s), y_0(s)) = \alpha x_0(s) + \beta y_0(s)$ y $B(x_0(s), y_0(s)) = \gamma x_0(s) + \delta y_0(s)$. Como el vector $(A(x_0(s), y_0(s)), B(x_0(s), y_0(s)))$ es el vector tangente a la característica que pasa por $(x_0(s), y_0(s))$, la relación (1.3.27) establece que el vector tangente a la no-característica no puede tener la misma dirección que el vector tangente de la característica que intersecta en el punto $(x_0(s), y_0(s))$. En particular, la curva no-característica corta transversalmente a las características (ver el esquema de la Figura 1.6).

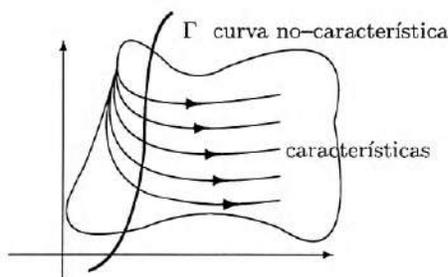


Figura 1.6 Esquemización de las Características y Condición de Transversalidad

A continuación se enuncia un resultado importante (demostración en [10]) que permite obtener solución para la condición inicial de la EDP considerada.

Teorema 1.4 Sea $\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s))$ una curva no característica y $u_0 : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Entonces, existe una vecindad de la curva Γ en la que está definida una función u que es solución de la EDP (1.3.19) y satisface

$$u(x_0(t), y_0(t)) = u_0(x_0(t), y_0(t)).$$

■

EJEMPLOS PROTOTIPO EN EL PLANO: Primero, considerando la ecuación (1.3.19) con $\mu = 0$, se tiene que $u(\mathbf{r}(t)) = \text{constante}$ a lo largo de toda curva característica $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, solución del SCEDO

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (1.3.28)$$

Observación: En este caso, las características dependen del espectro de la matriz \mathbf{A} .

CASO I: La matriz \mathbf{A} tiene forma diagonal. Es decir, el sistema (1.3.28) se puede reducir a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x, \\ \dot{y} &= \lambda_2 y, \end{aligned}$$

el cual es un prototipo de sistema lineal en el plano, ya que a este se reducen los sistemas diagonalizables, esto es, cuando los valores propios de la matriz \mathbf{A} son reales y diferentes. Cuando los valores propios son reales y de signos opuestos, el origen es un *punto silla*, mientras que si son del mismo signo, el origen es un *nodo* atractor o repulsor, respectivamente, dependiendo del signo. En este caso, las características son de la forma

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y_0 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

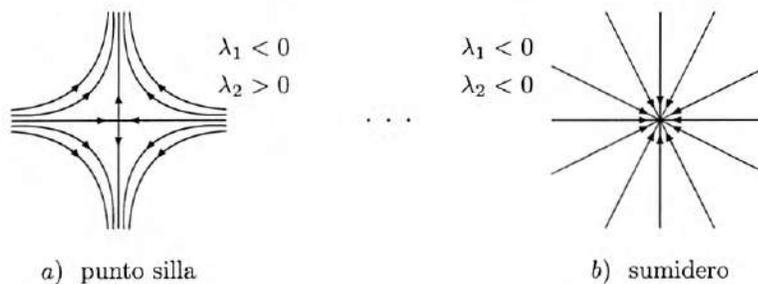


Figura 1.7 Ejemplos de características para valores propios diferentes

Ejemplo ELL1: Para la ecuación $L_{(\lambda_1 x, \lambda_2 y)} u(x, y) = 0$,
 sujeta a la CI: $u(x, x) = x$,

la solución es

$$u(x, y) = x e^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{y}{x}} = x \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 1.8 para valores específicos de las constantes λ_1 y λ_2 .

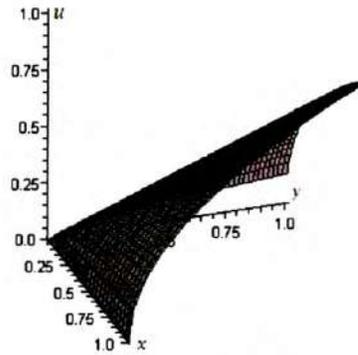


Figura 1.8 Solución de $\lambda_1 x u_x + \lambda_2 y u_y = 0$, $u(x, x) = x$, para $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$

CASO II: Otro caso típico de sistema lineal en el plano es cuando la matriz A tiene valores propios reales repetidos. Entonces, mediante un cambio de coordenadas apropiado el sistema puede reducirse a una *forma canónica de Jordan*

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{array} \quad \circ \quad \begin{array}{l} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{array}$$

donde las características en este caso para la primera forma son

$$\begin{array}{l} x(t) = e^{\lambda t} (k_1 + k_2 t), \\ y(t) = k_2 e^{\lambda t}, \end{array} \quad \begin{array}{l} k_1 = x_0, \\ k_2 = y_0, \end{array}$$

cuyo retrato fase tiene la geometría

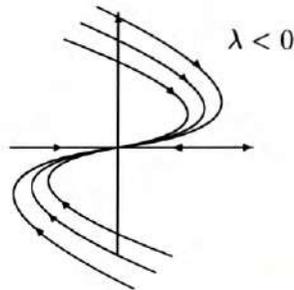


Figura 1.9 Nodo impropio (valores propios repetidos)

Ejemplo ELL2: Para el problema de Cauchy $L_{(\lambda x+y, \lambda y)} u(x, y) = 0$,
 $u(0, y) = y$,

la solución es $u(x, y) = y e^{-\lambda x/y}$ y su gráfica respectiva para un valor específico del parámetro λ se ilustra en la Figura 1.10.

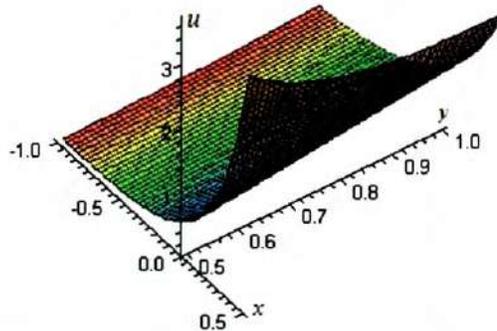


Figura 1.10 Solución de $(\lambda x + y) u_x + \lambda y u_y = 0$, $u(0, y) = y$, para $\lambda = -2$

CASO III: Cuando los valores propios de la matriz \mathbf{A} son complejos, de la teoría de los sistemas lineales se tiene que si los valores propios son $\sigma \pm i\omega$, entonces existe una base en la que el sistema toma la forma equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma x + \omega y \\ \dot{y} = -\omega x + \sigma y \end{cases}$$

En este caso, las características son

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\sigma t} (x_0 \cos \omega t + y_0 \sin \omega t), \\ y(t) &= e^{\sigma t} (-x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t), \end{aligned}$$

cuyo retrato fase es de la forma

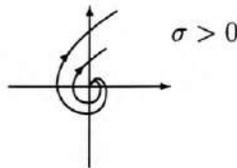


Figura 1.11 Espirales (valores propios complejos)

Ejemplo ELL3: El problema de Cauchy $L_{(\sigma x + \omega y, -\omega x + \sigma y)} u(x, y) = 0$,
 $u(0, y) = y$,

tiene la solución

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\frac{\sigma}{\omega} \tan^{-1} \frac{x}{y}}$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 1.12 para los valores dados de las constantes σ y ω .

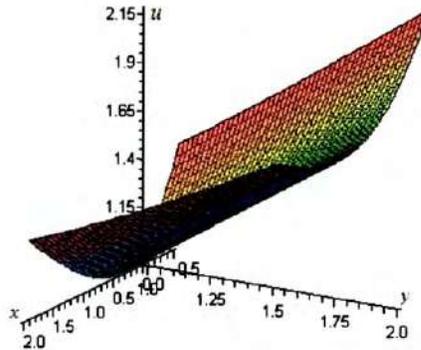


Figura 1.12 Solución de la EDP $(3x + 4y) u_x + (-4x + 3y) u_y = 0$, sujeta a $u(0, y) = y$

Para obtener la solución de la ecuación (1.3.19) para $\mu = 1$ se realiza el mismo procedimiento seguido para el caso $\mu = 0$, excepto que ahora $u(x(t), y(t)) = Ke^t$.

Ejemplo ELL4: La solución del problema de Cauchy $L_{(\sigma x + \omega y, -\omega x + \sigma y)} u(x, y) = u(x, y)$,
 $u(0, y) = y$,

es
$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} e^{\frac{1-\sigma}{\omega} \tan^{-1} \frac{x}{y}}$$

Observación: La solución para este caso es muy parecida a la del Ejemplo ELL3, razón por la cual decidimos no incluir su gráfica.

□

CONCLUSIÓN: El MC aplicado al tipo especial de EDP1 descrito por (1.3.18) funciona de forma eficaz y robusta, y el aspecto interesante que se puede resaltar además de este hecho es que revela de forma clara y evidente la relación que existe entre las EDP's y los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, para los que existe una teoría de análisis bien establecida. Los ejemplos mostrados en el plano para valores específicos de los parámetros respectivos son muy sencillos, pero pueden extenderse interactivamente para ilustrar gráficamente las distintas posibilidades, de tal forma que ésta parte se puede utilizar como una herramienta didáctica para la enseñanza de éste, y posiblemente otros tipos de ecuaciones diferenciales parciales elementales. Para dimensiones superiores los casos se analizan de forma análoga, observando que el nivel de dificultad para manipular la solución aumenta gradualmente. Similarmente, el MC es aplicable en el caso cuando las ecuaciones son lineales y casi-lineales (bajo las condiciones de suavidad requeridas, por supuesto), con cierto grado de dificultad en el proceso de obtención de la solución, salvo casos específicos, pero suficiente para cumplir con el objetivo de comprender el funcionamiento de este método particular. Para el caso no lineal el panorama es incierto y complicado (depende de cada caso de estudio); en general, el procedimiento no es aplicable directamente, pero es posible generalizar en algunas direcciones específicas. En el trabajo de tesis se considera el enfoque del *Método de las Características Singulares* (MCS), el cual utiliza el concepto de *soluciones de viscosidad*, del cual en el Capítulo 2 se presenta solamente una pequeña parte de la punta de este grande e interesante iceberg-rama importante de la Matemática.

Capítulo 2

El Método de las Características Generalizado

En algunas áreas de la Matemática y de la Física surgen problemas cuyos modelos son Ecuaciones Diferenciales Parciales de Primer Orden No Lineales (EDP1 NL's). La teoría convencional establece las condiciones de diferenciabilidad suficientes que deben satisfacer las soluciones (ser de clase C^2) para la existencia local y la unicidad, apoyándose básicamente en el MC para su determinación. Sin embargo, en otras áreas tal como Cálculo de Variaciones, Teoría de Control Óptimo y Juegos Diferenciales, frecuentemente es necesario tratar con “soluciones” continuas no diferenciables, que en los dominios de suavidad satisfacen la EDP correspondiente en el sentido clásico, pero sin necesariamente satisfacer la propiedad de unicidad. La unicidad toma lugar cuando se establecen principios o condiciones apropiadas de acoplamiento para las ramas suaves de la solución definidas en dominios cercanos, lo cual lleva al concepto de *soluciones generalizadas*, las cuales en el contexto de la Teoría del Control Óptimo también se conocen como *soluciones de viscosidad*¹.

En cada campo, se utiliza una de tales condiciones adicionales de acuerdo al problema estudiado. Por ejemplo en la Teoría de Control y Juegos Dinámicos se establece de forma natural como un *principio de optimalidad de una funcional de costo*, mientras que en problemas físicos es(son) alguna(s) de la(s) ley(es) o principios físicos que rigen al proceso. En el enfoque meramente matemático para trabajar con soluciones generalizadas se imponen criterios que permitan obtenerlas sin que necesariamente modelen o representen un fenómeno físico en particular. Esto es, en la formulación de soluciones generalizadas para un problema abstracto algunas veces hay correspondencia con el modelo de un fenómeno determinado, pero otras veces no necesariamente, lo cual podría no resultar de interés.

¹En este sentido el término significa *de aglutinamiento*, del cual se seleccionan adecuadamente y se pegan dos ramas suaves de la solución.

Un enfoque interesante y robusto para obtener soluciones generalizadas de EDP1 NL's es el *Método de las Características Generalizado*, mejor conocido como *Método de las Características Singulares* (MCS), el cual es un procedimiento relativamente reciente que trabaja con la noción de *soluciones de viscosidad*, esto es, soluciones que satisfacen parcialmente condiciones iniciales y de frontera en el sentido clásico, además de otras condiciones propias adicionales. En Cálculo de Variaciones, Teoría de Control Óptimo y Juegos Diferenciales, donde la ecuación gobernante es la *Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs* (HJBI), tal cumplimiento parcial se llama “parte utilizable” del problema. También hay problemas similares para algunas EDP's en la Física-Matemática. Debido al objetivo y nivel del presente trabajo no es posible abordar en general este tipo de problemas, sólo ciertos aspectos y ejemplos particulares.

El MCS es uno de los recursos más atractivos para obtener este tipo de soluciones generalizadas, ya que utiliza el mismo procedimiento que el MC, el cual proporciona información importante acerca de la naturaleza del problema como por ejemplo la propagación de algún tipo de perturbación, entre otras características. Sin embargo, el MC clásico no es directamente aplicable debido a la posible admisión de soluciones no suaves o las propias condiciones de diferenciabilidad del hamiltoniano de la EDP. En la Sección 2.1 se extiende la noción de característica a *característica singular*, la cual puede utilizarse para la construcción de solución en los siguientes tres casos:

- a) La solución de viscosidad generalizada no es suave mientras que el hamiltoniano podría serlo o no serlo;
- b) La solución es suave (clásica, sin necesidad de tener solución generalizada), pero el hamiltoniano no es suave;
- c) La EDP es la ecuación no lineal de segundo orden de Euler correspondiente a un problema variacional con solución no suave.

El MCS se desarrolló prácticamente en la investigación de problemas de la Teoría de Control y de Juegos Diferenciales cuando se utilizan controles singulares, sin embargo al parecer el mismo tratamiento es posible para otros tipos de problemas, lo cual abre una línea de investigación interesante para trabajo futuro.

El objetivo del trabajo (Capítulo 3) es aplicar el MCS para el caso c), ya que frecuentemente al estudiar algún problema variacional se topa con el problema de encontrar la solución de la Ecuación de Euler-Lagrange bajo condiciones de diferenciabilidad no suficientes.

2.1 Soluciones de Viscosidad y Superficies Singulares

Una solución clásica de la EDP1 NL

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, u, \partial u / \partial \mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(\mathbf{x}) &= v(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M} \subset \partial \Omega \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

en general se define como una función de clase $C^1(\Omega)$ que satisface la ecuación diferencial parcial y la condición inicial dadas. *i.e.*, $u(\mathbf{x})$ es una solución que tiene derivadas parciales $\partial u / \partial x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, que dependen continuamente de \mathbf{x} en el dominio Ω . Sin embargo, el gradiente $\mathbf{p} = \partial u / \partial \mathbf{x}$ puede llegar a tener un salto o indefinición en alguna parte de Ω , lo cual lleva a tratar el problema de una forma modificada.

Por otra parte, en muchos problemas de la Física-Matemática existe la necesidad de relacionar con la ecuación (2.1.1) alguna función continua no suave, $u(\mathbf{x}) \in C(\Omega)$, la cual entonces no satisface la ecuación en el sentido clásico para todos los puntos en el dominio Ω . Tales funciones son llamadas *soluciones generalizadas* y deben satisfacer además otros requerimientos adicionales en los puntos de no suavidad en lugar de la ecuación (2.1.1) (la cual no puede ser verificada). En los problemas de Control Óptimo, así como de otras áreas, estas condiciones se obtiene de los principios de optimalidad, mientras que en los de la Física-Matemática estas siguen generalmente de alguna(s) de las leyes físicas que gobiernan el proceso.

Matemáticamente, existen muchas formas de introducir una solución generalizada: algunas de estas pueden generar una solución que da una descripción adecuada del fenómeno modelado, mientras que otras pudiera ser que no. Así, la elección de una u otra noción de la solución generalizada debe reunir ciertos requerimientos propios de la clase de problema bajo consideración.

Para muchas aplicaciones, incluyendo Control Óptimo y Teoría de Juegos Diferenciales, la noción de las así llamadas *soluciones de viscosidad* es conveniente. Dos clases de soluciones de viscosidad se relacionan con la ecuación dada: la solución para un PVI y la solución para un PVT, los cuales esencialmente son diferentes. En este trabajo sólo se aborda el primer caso.

En algunas aplicaciones del problema (2.1.1) existe una componente específica del vector \mathbf{x} (usualmente la última componente x_n del vector \mathbf{x} , la cual se puede suponer que es la variable tiempo) tal que el dominio Ω es una capa (o semi-espacio) definido por la desigualdad $a < x_n < b$, reduciendo a la ecuación (2.1.1) a la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_n} + H(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x})) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \tilde{\mathbf{p}} = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}), \quad (F = p_n + H), \\ u(\mathbf{x}) &= v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_n = a\}, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

la cual es conocida como *Ecuación de Hamilton-Jacobi* (EcH-J).

DEFINICIÓN 2.1 Una función continua $u : \Omega \cup \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *solución de viscosidad* del PVI (2.1.1) o (2.1.2) si

- 1) $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}$,
- 2) para toda *función de prueba* $\varphi(\mathbf{x}) \in C^1(\Omega)$ tal que el mínimo [máximo] local de $u(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$ se alcanza en $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, se cumple, respectivamente, la desigualdad

$$F\left(\mathbf{x}^0, u(\mathbf{x}^0), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^0)\right) \geq 0 \quad \text{o} \quad \left[F\left(\mathbf{x}^0, u(\mathbf{x}^0), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^0)\right) \leq 0\right]. \quad (2.1.3)$$

Observación: *i)* Para la definición de solución de viscosidad para el PVT, las desigualdades en (2.1.3) se intercambian una por otra y se considera el plano $x_n = b$ como superficie \mathcal{M} para el problema (2.1.2).

ii) Diremos que una función continua $u(\mathbf{x}) \in C(\mathcal{D})$ definida en un conjunto abierto $\mathcal{D} \subset \Omega$ es una solución de viscosidad para un PVI (2.1.1) en \mathcal{D} o es una solución de viscosidad local si el requerimiento 2) de la DEFINICIÓN 2.1 se cumple para todo $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{D}$.

iii) Una función de prueba $\varphi(\mathbf{x})$ que suple el mínimo (o el máximo) no necesariamente existe; la definición supone que la condición correspondiente se cumple una vez que ésta existe.

iv) Generalmente para la formulación de un PVI diferentes partes $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$ de la frontera $\partial\Omega$ deben tomarse como \mathcal{M} . En algunos problemas $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \dots = \partial\Omega$. Determinar la parte apropiada depende del problema considerado.

v) La noción de *solución de viscosidad* fue primeramente introducida de forma sistemática por varios autores como el límite de la solución de la perturbación singular obtenida de (2.1.1) sumando derivadas de segundo orden (al Laplaciano) multiplicadas por un parámetro pequeño (una “ligera viscosidad”), además de otras técnicas que finalmente resultan equivalentes a la de las soluciones de viscosidad.

2.1.1 Singularidades de una Solución

En esta parte se introducen los diferentes tipos de singularidades que una solución de viscosidad puede presentar. Esto es, aquellos puntos alrededor de los cuales el MC no es aplicable.

DEFINICIÓN 2.2 Un punto $\mathbf{x}^* \in \Omega$ es un *punto regular* de una solución de viscosidad $u(\mathbf{x})$ de la ecuación (2.1.1) si existe una vecindad $\mathcal{D} \subset \Omega$ de éste tal que la función $u(\mathbf{x})$ es dos veces diferenciable en \mathcal{D} ($u \in C^2(\mathcal{D})$) y el Hamiltoniano $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ es dos veces diferenciable para $(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \mathcal{N}$ ($F \in C^2(\mathcal{N})$), donde $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ es una vecindad del punto $(\mathbf{x}^*, u^*, \mathbf{p}^*)$ en el espacio \mathbb{R}^{2n+1} , donde $u^* = u(\mathbf{x}^*)$ y $\mathbf{p}^* = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)$.

Todos los puntos de \mathcal{D} que no son regulares son llamados *puntos singulares* de la solución de viscosidad $u(\mathbf{x})$. Así, *curvas*, *superficies* o *variedades singulares* se forman de tales puntos singulares.

Nota: Para los puntos regulares una solución satisface la ecuación en el sentido clásico. En efecto, las funciones de prueba que proporcionan el mínimo (o máximo) en (2.1.3) en este caso existen, ya que la propia solución sirve como una función de prueba, $\varphi(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$. Para tal función de prueba tenemos que $u(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) = 0$, $\partial\varphi/\partial\mathbf{x} = \partial u/\partial\mathbf{x}$ y ambos extremos son alcanzados en cada punto $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{D}$. Así, ambas desigualdades en (2.1.3) se cumplen, $F \leq 0$, $F \geq 0$, lo cual para $\partial\varphi/\partial\mathbf{x} = \partial u/\partial\mathbf{x}$ lleva a la igualdad $F(\mathbf{x}, u, \partial u/\partial\mathbf{x}) = 0$. Lo mismo se cumple para los puntos en la vecindad en la que la solución es de clase C^1 . Sin embargo, en la DEFINICIÓN 2.2 es necesario suponer continuidad de las segundas derivadas, no sólo de las primeras, ya que el MC requiere de tal suavidad. Se ha mostrado en varios problemas particulares que considerar sólo la clase C^1 lleva a propiedades de no regularidad.

Las superficies (variedades) singulares se denotan por Γ o algunas veces utilizando un subíndice como Γ_m que indica la codimensión de la superficie en \mathbb{R}^n , $\dim \Gamma_m = n - m$. Para consideraciones locales, se asume que Γ_m es una superficie suave. Además, se espera que el gradiente de la solución $\mathbf{p} = \partial u/\partial\mathbf{x}$ también esté definido en Γ , *i.e.*, tenga (una o varias) extensiones a Γ . Así, la consideración se restringe a las superficies Γ que son parte de la frontera de algún conjunto abierto $\mathcal{D} \subset \Omega$ tal que $u(\mathbf{x}) \in C^2(\mathcal{D})$, $\Gamma \subset \mathcal{D}$ y el gradiente $\partial u/\partial\mathbf{x}$ tenga una extensión continua a la cerradura $\bar{\mathcal{D}}$ de \mathcal{D} , lo cual se denota como $u(\mathbf{x}) \in C^1(\bar{\mathcal{D}})$.

En una situación típica normal el dominio Ω puede ser partido en subdominios Ω_i que consisten de puntos regulares, mientras que todos los puntos singulares de la solución pertenecen a las fronteras $\partial\Omega_i$. La construcción con dominios abiertos Ω_i puede efectuarse usando el MC con condiciones de frontera apropiadas sobre las partes correspondientes de Ω_i . Tal esquema de solución requiere la construcción de algunas superficies singulares –partes de Ω_i . De entrada el análisis se restringe sólo para hipersuperficies, *i.e.*, superficies $(n-1)$ -dimensionales (superficies de codimensión 1), ya que para codimensiones mayores es más complicado.

Sea $u(\mathbf{x})$ una solución de viscosidad del PVI (2.1.1) continua, cuyos puntos singulares forman una hipersuperficie suave Γ en una vecindad abierta \mathcal{D} de algún punto de referencia $\mathbf{x}^* \in \Gamma \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Así, $u \in C(\mathcal{D})$ y, por definición, $u_i \in C^2(\mathcal{D}_i)$, $i = 0, 1$, donde $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ son semi-vecindades abiertas de Γ , esto es $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup \Gamma \cup \mathcal{D}_1$ y $u_i(\mathbf{x})$ es la restricción de $u(\mathbf{x})$ a \mathcal{D}_i , $i = 0, 1$ (ver Figura 2.1).

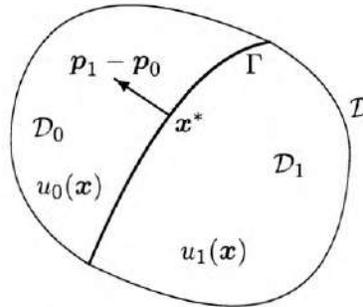


Figura 2.1 Superficie Singular de la Solución

Supongamos que hay un salto del gradiente de $u(\mathbf{x})$ en Γ , mientras que $\partial u / \partial \mathbf{x}$ tiene extensión continua de $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ a Γ . En este caso, como será demostrado en el Lema 2.1, cada función $u_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_i$, $i = 0, 1$ puede ser extendida de forma suave a \mathcal{D} . Así, una solución no suave $u(\mathbf{x})$ genera dos soluciones suaves $u_0, u_1 \in C^1(\mathcal{D})$, las tres funciones definidas en todo \mathcal{D} (ver Figura 2.2).

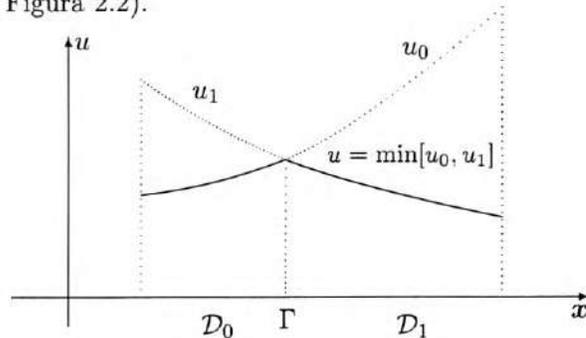


Figura 2.2 Ramas Suaves de la Solución $u(\mathbf{x})$

Se supone que $\mathbf{p}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_0(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ para $\mathbf{x} \in \Gamma$, donde $\mathbf{p}_i = \partial u_i / \partial \mathbf{x}$, $i = 0, 1$, y entonces $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ es un vector normal a Γ en cada punto $\mathbf{x} \in \Gamma$, ya que la superficie Γ puede definirse como $g(\mathbf{x}) = 0$ con $g(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x})$ y el gradiente $\partial g / \partial \mathbf{x} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ de la función $g(\mathbf{x})$ es normal a Γ . En lo que sigue, se consideran dos tipos de no suavidad. Por una parte, cuando el vector normal $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ va de \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_0 y la solución se puede expresar en términos de sus ramas suaves como $u(\mathbf{x}) = \min[u_0(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x})]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, ya que como la función $g(\mathbf{x})$ crece en la dirección de su gradiente $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$, se tiene que $u_1 < u_0$ en \mathcal{D}_1 y $u_1 > u_0$ en \mathcal{D}_0 . La segunda posibilidad es que el vector $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ está dirigido de \mathcal{D}_0 a \mathcal{D}_1 y entonces $u(\mathbf{x}) = \max[u_0(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x})]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

Ahora, considerando dos conjuntos abiertos $\mathcal{N}_i \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, las vecindades de los puntos $(\mathbf{x}^*, u(\mathbf{x}^*), \mathbf{p}_i(\mathbf{x}^*))$, $i = 0, 1$, en el espacio \mathbb{R}^{2n+1} de los vectores $(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ y suponiendo que en cada dominio $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1$ el hamiltoniano $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ en (2.1.1) es dos veces diferenciable, $F \in C^2(\mathcal{N}_i)$, o tiene alguna de las formas $F = \max[F^+, F^-]$, $F = \min[F^+, F^-]$, con $F^\pm(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in C^2(\mathcal{N}_i)$.

Las hipersuperficies singulares consideradas son variedades singulares de una solución no suave, cuando el hamiltoniano es suave o no suave. También existe el caso cuando una solución suave tiene una variedad singular, para hamiltonianos necesariamente no suaves. En cualquiera de los dos casos, la variedad Γ se llama *singularidad simple*, cuya existencia se establece en el siguiente resultado.

Lema 2.1 (Condiciones Necesarias para la Existencia de una Singularidad Simple). Para una superficie singular simple Γ sea el vector no nulo $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ dirigido de \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_0 . Entonces,

- 1) las funciones $u_i \in C^2(\mathcal{D}_i)$, restricciones de la solución de viscosidad $u \in C(\mathcal{D})$ en \mathcal{D}_i , tienen extensión de clase C^1 sobre todo el dominio \mathcal{D} con la representación $u(\mathbf{x}) = \min[u_0(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x})]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$,
- 2) no existe función de prueba alguna $\varphi(\mathbf{x}) \in C^1(\mathcal{D})$ para la que el mínimo local de $(u - \varphi)$ sea alcanzado en $\mathbf{x} \in \Gamma$,
- 3) para una familia 1-paramétrica de funciones de prueba

$$\varphi(\mathbf{x}) = \lambda u_1(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)u_0(\mathbf{x}), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

el máximo $\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} [u(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})] = 0$ es alcanzado en $\mathbf{x} \in \Gamma$. Para cualquier función de prueba $\varphi(\mathbf{x}) \in C^1(\mathcal{D})$ tal que $\max(u - \varphi)$ es alcanzado en $\mathbf{x} \in \Gamma$, el gradiente tiene la forma $\partial \varphi / \partial \mathbf{x} = \lambda \mathbf{p}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{p}_0$ para algún $\lambda \in [0, 1]$.

Corolario 2.1 Para la singularidad del tipo $u = \min[u_0, u_1]$ no es necesario verificar la primera desigualdad en (2.1.3); para verificar la segunda desigualdad en (2.1.3) es suficiente sólo hacerlo para el conjunto 1-paramétrico de funciones de prueba $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_0$.

Demostración (del Lema 2.1): Primero se considera el caso cuando Γ es un hiperplano, $x_n = 0$, mientras que \mathcal{D}_1 se define por $x_n > 0$ y \mathcal{D}_0 por $x_n < 0$. Una extensión de clase C^1 de $u_0(\mathbf{x})$ de \mathcal{D}_0 al dominio completo \mathcal{D} se puede definir por ejemplo como

$$u_0(\bar{\mathbf{x}}, x_n) = u_0(\bar{\mathbf{x}}, 0) + x_n \frac{\partial u_0(\bar{\mathbf{x}}, -0)}{\partial x_n}, \quad x_n \geq 0, \quad \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Similarmente, se puede extender u_1 de \mathcal{D}_1 a \mathcal{D} para $x_n \leq 0$.

De la suposición acerca de la dirección del vector $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ sigue que la última componente de este vector es negativa, o equivalentemente,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_n} > \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.1.4)$$

mientras que las otras componentes de \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 son iguales en Γ . Esto proporciona la representación $u = \min[u_0, u_1]$.

Si, por el contrario a lo establecido en 2), se supone que la función φ que provee $\min(u - \varphi)$ en $x_n = 0$ existe, entonces las siguientes desigualdades se satisfacen en $x_n = 0$:

$$\partial u_0 / \partial x_n \leq \partial \varphi / \partial x_n \leq \partial u_1 / \partial x_n,$$

lo cual contradice (2.1.4). Por lo tanto, tal función de prueba φ no existe.

Para una función φ que provee el $\max(u - \varphi)$ se tiene que $\partial u_0 / \partial x_n \geq \partial \varphi / \partial x_n \geq \partial u_1 / \partial x_n$, $x_n = 0$, lo cual lleva a la igualdad con cierto $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + (1 - \lambda) \frac{\partial u_0}{\partial x_n}, \quad \lambda = (u_{0x_n} - \varphi_{x_n}) / (u_{0x_n} - u_{1x_n}). \quad (2.1.5)$$

Las condiciones de necesidad para $\max(u_i(\bar{\mathbf{x}}, 0) - \varphi(\bar{\mathbf{x}}, 0))$, $i = 0, 1$ de una función suave de $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ con respecto a $\bar{\mathbf{x}}$ son

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \frac{\partial u_0}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.1.6)$$

Así, las relaciones (2.1.6) se cumplen para las otras componentes de $\partial \varphi / \partial \mathbf{x}$ con cualquier $\lambda \in [0, 1]$. Para λ en (2.1.5) se puede escribir la igualdad vectorial:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{x}} + (1 - \lambda) \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.1.7)$$

Cualquier superficie suave Γ en el \mathbf{x} -espacio se puede transformar en el plano $y_n = 0$ en el \mathbf{y} -espacio, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, mediante un cambio de variable invertible $\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$.

Para cualquier función $u(\mathbf{x})$ se tiene que $\partial u / \partial \mathbf{x} = A \partial u / \partial \mathbf{y}$, con una matriz no degenerada $A = \partial \mathbf{T} / \partial \mathbf{x}$ (la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas). Multiplicando (2.1.7) por la matriz A se obtiene una representación similar en el sistema de coordenadas original. El mismo cambio de variables proporciona la extensión de $u_0(\mathbf{x})$, $u_1(\mathbf{x})$ en base a la extensión particular definida anteriormente para el caso del hiperplano $x_n = 0$. ■

Nota: Un caso simple en el que las ramas $u_i(\mathbf{x})$ pueden tener una extensión C^2 en \mathcal{D} es cuando, por ejemplo, las características del lado \mathcal{D}_1 son transversales a Γ . Entonces, la extensión de $u_1 \in C^2(\mathcal{D}_1)$ puede definirse como la solución dos veces diferenciable del problema

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &= 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \\ u(\mathbf{x}) &= u_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \end{aligned}$$

la cual, de acuerdo al Teorema 1.1, existe y es definida en \mathcal{D} , ya que el vector $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}_1(\mathbf{x}^*)$ satisface la condición del teorema y también se satisface la condición de transversalidad.

Un mayor desarrollo del Corolario lleva al siguiente enunciado que suministra, en particular, las condiciones necesarias y suficientes para que la función descrita arriba $u \in C(\mathcal{D})$ sea una solución local de viscosidad para (2.1.1).

Lema 2.2 Para $\mathbf{x} \in \Gamma$ y toda $\lambda \in [0, 1]$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$f(\lambda) \equiv F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}_\lambda(\mathbf{x})) \leq 0, \quad \mathbf{p}_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{p}_1(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \mathbf{p}_0(\mathbf{x}). \quad (2.1.8)$$

La función $f(\lambda)$ es continua en $[0, 1]$ y tiene las siguientes propiedades que condicionan la suavidad del hamiltoniano en los puntos correspondientes:

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \langle F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}_\lambda), \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \rangle \\ f(0) &= 0, \quad f'(+0) \leq 0; \quad f(1) = 0, \quad f'(1-0) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1.9) \quad \blacksquare$$

Nota: Los valores de las derivadas $f'(0)$ y $f'(1)$ son productos escalares de la \mathbf{x} -componentes de $F_{\mathbf{p}}$ del campo característico y el vector $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ normal a la superficie Γ . Esto significa que el cumplimiento de las condiciones (2.1.8), (2.1.9) depende esencialmente del comportamiento de las características clásicas en la vecindad de Γ . En base a este comportamiento se tiene una clasificación de las singularidades simples.

Para el caso cuando el vector $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ se dirige de \mathcal{D}_0 a \mathcal{D}_1 , se hacen las siguientes modificaciones: la solución puede representarse como $u = \max[u_0, u_1]$ y sólo la primera desigualdad en (2.1.3) debe verificarse para la familia 1-paramétrica de funciones de prueba $\varphi = \lambda u_1 + (1 - \lambda) u_0$, para las que las desigualdades (2.1.8), (2.1.9) tiene signos opuestos.

2.1.2 Definición y Clasificación de las Características Singulares

Con cualquier singularidad simple Γ de una solución de viscosidad no suave $u(\mathbf{x})$ están asociadas dos superficies $(n - 1)$ -dimensionales en el espacio extendido \mathbb{R}^{2n+1} :

$$\begin{aligned}\Sigma^{(0)} &= \{(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid u = u_0(\mathbf{x}), \mathbf{p} = \partial u_0 / \partial \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \Gamma\} \\ \Sigma^{(1)} &= \{(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid u = u_1(\mathbf{x}), \mathbf{p} = \partial u_1 / \partial \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \Gamma\}\end{aligned}\quad (2.1.10)$$

correspondiendo a cada uno de los lados de Γ . En el caso de una solución suave y hamiltoniano no suave, únicamente una superficie integral Σ está asociada con Γ . Para superficies más generales Γ_m la situación es más extensa y compleja, con muchas posibilidades (se omiten en este trabajo).

Una superficie singular puede tener dos lados singulares, uno o ninguno, y asociado en cada caso el sistema de características singulares correspondiente. La construcción de una superficie con uno o dos lados singulares requiere de características tanto regulares como singulares.

La propiedad más importante de las características clásicas es que en el caso suave permiten reducir la solución de una EDP a la integración de un SEDO's. Es necesario producir características regulares de cada punto de la superficie frontera \mathcal{M} dada. Las características singulares también guardan esta idea para el caso no suave, pero en este caso es necesario producir las características regulares no sólo de los puntos en la frontera, sino también de algunos puntos internos del dominio Ω , los cuales son puntos singulares de la solución que se determina por la integración de un sistema apropiado de características singulares. Las características generalizadas se introducen como ciertos SEDO's, los cuales se especifican para realizar un análisis local para especificar el comportamiento de las características regulares en la vecindad de una singularidad.

La clasificación de una superficie singular se basa esencialmente en el comportamiento de las características regulares en una vecindad de ésta superficie, incluyendo además la dirección de movimiento del punto fase a lo largo de tales curvas características, lo cual establece tres tipos principales de superficies singulares que se describen a continuación.

- ◊ SUPERFICIE DE DISPERSIÓN: Se trata básicamente de una superficie singular que no requiere características singulares para su construcción.

Una *superficie de dispersión* es una singularidad muy simple a la que se aproximan por ambos lados las características regulares con un ángulo diferente de cero (cierta transversalidad), mientras que $F \in C^2(\mathcal{N}_i), i = 0, 1$ (ver Figura 2.3).

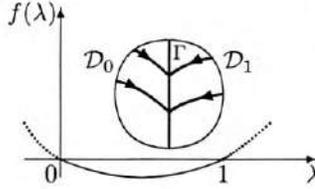


Figura 2.3 Bosquejo de una Superficie de Dispersión

Para el caso cuando el vector $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{x} \in \Gamma$ se dirige de \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_0 , la condición anterior significa que

$$\langle F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}_0), \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \rangle < 0; \quad \langle F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}_1), \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \rangle > 0. \quad (2.1.11)$$

Estas desigualdades son consistentes con la condición necesaria (2.1.9), y así, ninguno de los lados de Γ es singular. Pero, la verificación de la desigualdad $f(\lambda) \leq 0$ en (2.1.8) para $\lambda \in [0, 1]$ es aun necesaria porque puede revelar una esquina de la superficie de dispersión Γ . La función $f(\lambda)$ en la Figura 2.3 satisface ésta condición.

Para la singularidad del tipo $u = \max[u_0, u_1]$ cuando $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ se dirige de \mathcal{D}_0 a \mathcal{D}_1 , las desigualdades en (2.1.11) cambian por las opuestas y contradicen lo establecido en (2.1.8), lo cual significa que el PVI no puede tener una superficie singular de dispersión con una representación de la solución de éste tipo.

Para Hamiltonianos suaves por piezas el problema es más complicado, el cual no se considera en el presente trabajo.

- ◊ SUPERFICIE DE INCERTIDUMBRE: Este es el caso cuando en el \mathbf{x} -espacio las características se aproximan a Γ desde el lado \mathcal{D}_0 con un ángulo diferente de cero, pero salen de Γ por el lado \mathcal{D}_1 de forma tangencial. Geométricamente, para el caso considerado $u = \min[u_0, u_1]$ cuando el vector $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ se dirige de \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_0 éstas condiciones se pueden expresar como

$$\langle F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}_0), \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \rangle < 0; \quad \langle F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}_1), \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \rangle \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.1.12)$$

En este caso, u representa para el valor común en Γ a ambas ramas $u = u_0 = u_1$.

En general, es posible distinguir cuatro tipos de *superficies inciertas*, dependiendo de la representación que tenga $u = \min[u_0, u_1]$ o $u = \max[u_0, u_1]$, para un Hamiltoniano suave o para uno no suave. La primera y la más común de éstas se muestra a continuación en la Figura 2.4

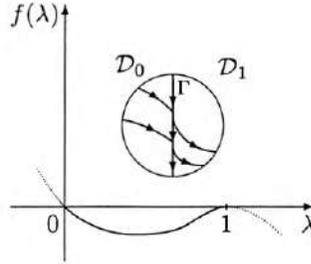


Figura 2.4 Superficie de Incertidumbre

Las relaciones (2.1.12) deben ser compatibles con las desigualdades (2.1.9). La desigualdad de la izquierda en (2.1.12) concuerda con la de (2.1.9). Para relacionar las desigualdades derechas, como se puede ver, se tienen que cumplir algunas condiciones sobre Γ desde el lado \mathcal{D}_1 , implicando que éste lado de Γ es singular. Tales condiciones depende de si el Hamiltoniano es suave o no en la vecindad \mathcal{N}_1 . Para formular el resultado correspondiente se supone que $u_0(\mathbf{x})$ es una función conocida y se introduce la función $F_1(\mathbf{x}, u) = u - u_0(\mathbf{x})$. El Paréntesis de Jacobi en el lema siguiente es en las variables $\mathbf{x}, u, \mathbf{p}$, para $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$.

Lema 2.3 Sea $F \in C^2(\mathcal{N}_i)$, $i = 0, 1$ y $u = \min[u_0, u_1]$. Entonces, la igualdad que sigue, la condición de tangencia, y las dos desigualdades –condiciones necesarias para la solución de viscosidad– son válidas sobre Γ :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \{F_1, F\} = \langle F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \mathbf{p}_1(\mathbf{x})), \mathbf{p}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_0(\mathbf{x}) \rangle = 0, \\ -f''(1) &= \{\{F_1, F\}, F_1\} \geq 0, \quad \{\{F, F_1\}, F\} \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Demostración: La función $f(\lambda)$ en (2.1.8), junto con el Hamiltoniano, son dos veces diferenciables. La igualdad en (2.1.13) sigue de comparar las desigualdades derechas en (2.1.9) y (2.1.12). Si, contrario a la desigualdad izquierda en (2.1.13), se supone que $f''(1) > 0$, entonces para un intervalo lo suficientemente pequeño $\lambda \in (1 - \varepsilon, 1)$, sigue la desigualdad $f'(\lambda) < 0$ (ya que $f'(1) = 0$), lo que significa que $f(\lambda) > 0$ (ya que $f(1) = 0$). Esto contradice la desigualdad (2.1.8).

Respecto a la desigualdad derecha (2.1.13), se puede observar que la suposición opuesta, $\langle \{F, F_1\}, F \rangle \leq 0$, también lleva a una contradicción sobre las propiedades de la función $u_1(\mathbf{x})$, lo cual completa la demostración. ■

Como el vector $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ es un vector normal a Γ , la última desigualdad en (2.1.13) significa que las características regulares en el \mathbf{x} -espacio son tangentes a la superficie Γ , la cual, por lo tanto, es la envolvente de la familia de características regulares en \mathcal{D}_1 .

De acuerdo a la dirección de movimiento del punto fase a lo largo de las características bosquejadas en la Figura 2.4, la rama $u_0(\mathbf{x})$ puede construirse antes de $u_1(\mathbf{x})$. Es por eso que al considerar la superficie incierta Γ se puede usar $u_0(\mathbf{x})$ como una función conocida. Así, la igualdad en (2.1.13) es válida para los puntos de sólo una superficie integral $\Sigma^{(1)}$ en (2.1.10), *i.e.*, para el lado \mathcal{D}_1 , el cual, por lo tanto, es un lado singular.

Observación: Otro tipo de superficies de incertidumbre es el que se relaciona con Hamiltonianos no suaves, el cual no se considera en el presente trabajo debido a la propia naturaleza de tales problemas.

- ◇ SUPERFICIE FOCAL: Es el caso cuando las características salen de la superficie singular Γ hacia ambos lados \mathcal{D}_0 y \mathcal{D}_1 con “cierta” tangencia. Existen seis tipos de *superficies focales*.

De nuevo, se considera el caso $u = \min[u_0, u_1]$ cuando el vector $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ se dirige de \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_0 . En ésta parte se utiliza la notación \mathbf{p}, \mathbf{q} junto con las variables F, u, \mathbf{p} para el lado \mathcal{D}_1 y G, v, \mathbf{q} para el lado \mathcal{D}_0 . Entonces, el comportamiento de las características regulares se puede expresar como

$$\langle F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle \leq 0; \quad \langle G_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, v, \mathbf{q}), \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.1.14)$$

Como se puede ver de las consideraciones que se establecen más adelante, ambos lados de la superficie focal son singulares.

Geoméricamente, existen los siguientes tres tipos de superficies focales:

- 1) La superficie Γ es contactada por las características regulares desde ambos lados (Figura 2.5a))
- 2) La superficie Γ es contactada por las características regulares desde uno de los lados (Figura 2.5b))
- 3) Las características salen de Γ con ángulos diferentes de cero hacia ambos lados (Figura 2.5c))

Las funciones correspondientes $f(\lambda)$ también se describen en las Figuras 2.5. La otra posible representación $u = \max[u_0, u_1]$ produce los otros tres tipos de superficies focales.

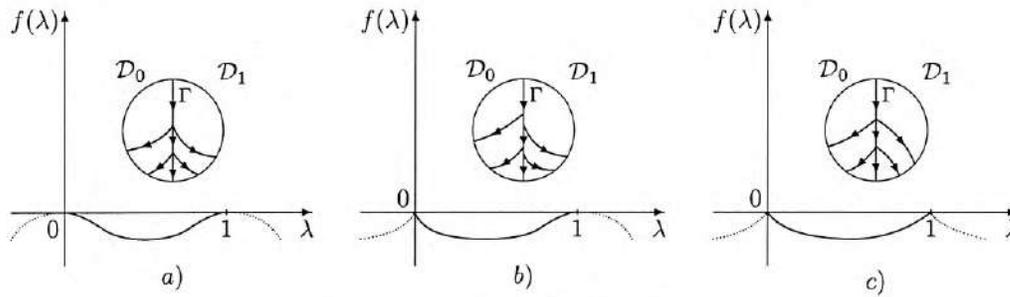


Figura 2.5 Superficies Focales

Ambas desigualdades (2.1.14) tienen signos opuestos con las condiciones necesarias (2.1.9). El análisis de las superficies de incertidumbre muestra que para hacer compatibles éstas dos superficies la función $f(\lambda)$ debe tener un máximo local (suave o no suave) en λ en el extremo correspondiente del intervalo $[0, 1]$, mientras que el Hamiltoniano suave es compatible sólo con la tangencia de las características.

El resultado del Lema 2.3 permite resumir las condiciones necesarias requeridas para cada lado \mathcal{D}_0 y \mathcal{D}_1 de Γ para cada tipo de superficie focal como sigue.

Tipo 1) Las características son tangentes desde ambos lados de Γ

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_1 & : \langle F\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = 0 \quad \{\{F_1^*, F\}, F_1^*\} \geq 0 \quad \{\{F, F_1^*\}, F\} \geq 0 \\
 \mathcal{D}_0 & : \langle G\mathbf{q}, \mathbf{q} - \mathbf{p} \rangle = 0 \quad \{\{G_1^*, G\}, G_1^*\} \geq 0 \quad \{\{G, G_1^*\}, G\} \geq 0 \\
 & F_1^*(\mathbf{x}, u) = u - w(\mathbf{x}), \quad G_1^*(\mathbf{x}, v) = v - w(\mathbf{x}); \quad F, G \in C^2
 \end{aligned}
 \tag{2.1.15}$$

Tipo 2) Las características son tangentes desde el lado \mathcal{D}_1 de Γ y transversal para el lado \mathcal{D}_0

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &: \langle F_{\mathbf{p}}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = 0 \quad \{\{F_1, F\}, F_1\} \geq 0 \quad \{\{F, F_1\}, F\} \geq 0 \\ \mathcal{D}_0 &: G^- = 0, \quad \langle G_{\mathbf{q}}^-, \mathbf{q} - \mathbf{p} \rangle \geq 0 \quad \langle G_{\mathbf{q}}^+, \mathbf{q} - \mathbf{p} \rangle \leq 0 \\ &G^+ = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_0; \quad G = \min[G^-, G^+], \\ &F_1(\mathbf{x}, u) = u - v(\mathbf{x}), \quad G_1(\mathbf{x}, v) = v - u(\mathbf{x}); \quad F, G^\pm \in C^2 \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Tipo 3) Las características son transversales desde ambos lados de Γ

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &: F^- = 0, \quad \langle F_{\mathbf{p}}^-, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle \geq 0 \quad \langle F_{\mathbf{p}}^+, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle \leq 0 \\ &F^+ = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_1; \quad F = \min[F^-, F^+], \\ \mathcal{D}_0 &: G^- = 0, \quad \langle G_{\mathbf{q}}^-, \mathbf{q} - \mathbf{p} \rangle \geq 0 \quad \langle G_{\mathbf{q}}^+, \mathbf{q} - \mathbf{p} \rangle \leq 0 \\ &G^+ = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_0; \quad G = \min[G^-, G^+], \\ &F_1(\mathbf{x}, u) = u - v(\mathbf{x}), \quad G_1(\mathbf{x}, v) = v - u(\mathbf{x}); \quad F^\pm, G^\pm \in C^2 \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Las funciones $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})$ involucradas en las funciones F_1, G_1 en (2.1.16), (2.1.17) tienen una extensión de clase C^2 de $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ a \mathcal{D} completo si las características son transversales a Γ del lado \mathcal{D}_1 al lado \mathcal{D}_0 . En el caso cuando hay tangencia, sólo existe una extensión de clase C^1 , y las funciones $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})$ no se pueden involucrar en F_1, G_1 debido a que los corchetes de Jacobi dobles $\{\{F, F_1\}, F\}$ y $\{\{G, G_1\}, G\}$ incluyen derivadas de segundo orden de $u(\mathbf{x})$ y $v(\mathbf{x})$. Esta es la razón por la que se utiliza una función auxiliar $w(\mathbf{x})$ en (2.1.15), donde el único requerimiento para $w(\mathbf{x})$ es que

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma; \quad w(\mathbf{x}) \in C^2(\mathcal{D}) \\ \mathbf{p} - \mathbf{q} &= a(\mathbf{p} - \mathbf{r}), \quad \mathbf{q} - \mathbf{p} = b(\mathbf{q} - \mathbf{r}), \quad a, b > 0; \quad \mathbf{r} = \partial w / \partial \mathbf{x} \end{aligned}$$

Se muestra que tal función $w(\mathbf{x})$ existe siempre que sobre Γ y la restricción de $u(\mathbf{x})$ sobre Γ sean dos veces diferenciables. En efecto, en el sistema coordenado especial en el que Γ es el hiperplano $x_n = 0$ tal función $w(\mathbf{x})$ se representa por

$$w(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + cx_n, \quad c = (p_n(\mathbf{x}^* + q_n(\mathbf{x}^*))/2 = \text{const.}$$

Para singularidades de la forma $u = \max[u_0, u_1]$ las desigualdades en (2.1.15)-(2.1.17) se invierten y los Hamiltonianos deben tener la forma $F = \max[F^+, F^-]$, $G = \max[G^+, G^-]$.

2.2 Un Prototipo Particular de EDP1 NL

Para el PVI que vamos a analizar consideraremos la misma EDP1 NL (1.3.9), pero con diferente condición inicial, la cual introduce un término no suave

$$\begin{aligned} F(x, y, u, p, q) &= p + \sqrt{a^2 + q^2} - x \sqrt{b^2 + q^2} = 0, \\ u(0, y) &= -|y| + cy, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

donde de nuevo $p = \partial u / \partial x$, $q = \partial u / \partial y$, pero $x > 0$ y a, b, c constantes reales positivas. El valor de c se restringe a $0 \leq c < 1$, ya que el caso $-1 < c < 0$ es reducido al anterior mediante la transformación $y \rightarrow -y$. La misma transformación muestra que para $c = 0$ el problema es simétrico respecto al eje x , el cual se analiza primeramente como punto de partida.

El problema (2.2.1) tiene la forma particular (2.1.2), cuyo dominio Ω es el semi-plano derecho y la superficie frontera \mathcal{M} es el eje y . Así, el objetivo es construir la solución de viscosidad del problema (2.2.1) usando el MC. El Hamiltoniano $F \in C^2$, mientras que el valor inicial tiene no suavidad del tipo $u(0, y) = \min\{y + cy, -y + cy\}$, la cual se espera que esté presente también en la solución generalizada como una singularidad.

El sistema de características regulares (1.2.8) y las condiciones iniciales correspondientes (obtenidas de las condiciones de frontera (1.2.20)) para el problema (2.2.1) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = 1, & \dot{y} &= F_q = q/\sqrt{a^2 + q^2} - xq/\sqrt{b^2 + q^2} \\ \dot{u} &= pF_p + qF_q, & \dot{p} &= -F_x = \sqrt{b^2 + q^2}, & \dot{q} &= -F_y = 0, \\ p &= -\sqrt{a^2 + k_+^2}, & q &= c - 1 = k_+, & x &= 0, & y > 0, \\ p &= -\sqrt{a^2 + k_-^2}, & q &= c + 1 = k_-, & x &= 0, & y < 0, \\ u &= -|y| + cy, & x &= 0, & y &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Como $\dot{x} = 1$ se puede considerar a la variable x como el “tiempo” (el parámetro de diferenciación en (2.2.2)). Como q es constante a lo largo de la solución de (2.2.2) y y es lineal en x la integración de esta ecuación proporciona las características regulares del problema (2.2.2), una familia 1-paramétrica de parábolas en el plano xy con eje vertical de simetría en $x = x_s$:

$$y - C = \frac{qx}{\sqrt{a^2 + q^2}} - \frac{qx^2}{2\sqrt{b^2 + q^2}}, \quad C = \text{const}, \quad x_s = \sqrt{\frac{b^2 + q^2}{a^2 + q^2}}. \quad (2.2.3)$$

Usando las condiciones iniciales $q = k_+$ y $q = k_-$ para la parte superior e inferior, respectivamente, del eje y se obtienen familias de características con ejes de simetría en

$$x_s^+ = \sqrt{\frac{b^2 + k_+^2}{a^2 + k_+^2}}, \quad x_s^- = \sqrt{\frac{b^2 + k_-^2}{a^2 + k_-^2}}. \quad (2.2.4)$$

Las familias superior e inferior de parábolas definen dos ramas suaves de la solución, $u^+(x, y)$ y $u^-(x, y)$. Integrando la ecuación para u en (2.2.2), la cual es lineal en x , con los valores iniciales $q = k_+$ y $q = k_-$ para los valores positivos y negativos de y se obtienen las ramas que forman la *solución primaria*

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \min\{u^+(x, y), u^-(x, y)\}, \\ u^\pm(x, y) &= k_\pm y + \frac{1}{2}x^2\sqrt{b^2 + k_\pm^2} - x\sqrt{a^2 + k_\pm^2}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Las familias superior e inferior de parábolas se intersectan en algún subdominio del plano xy donde están definidas ambas ramas u^\pm . Igualando las dos ramas se encuentra que en tal subdominio la parábola que satisface la condición de continuidad $u^+ = u^-$ está dada por

$$\Gamma_0 : \quad y = \alpha x - \beta x^2/2, \quad (2.2.6)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + k_-^2} - \sqrt{a^2 + k_+^2} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{b^2 + k_-^2} - \sqrt{b^2 + k_+^2} \right).$$

Se obtiene, a partir de (2.2.2) y (2.2.6), que una parábola de la familia de características regulares superiores (respectivamente inferiores) alcanza, de forma crítica, la parábola de continuidad Γ_0 en el punto (x_t^+, y_t^+) (respectivamente (x_t^-, y_t^-)), con

$$x_t^\pm = \frac{1 - \alpha^2}{1 - \beta^2} x_s^\pm, \quad y_t^\pm = \alpha x_t^\pm - \beta (x_t^\pm)^2/2. \quad (2.2.7)$$

Se obtiene también que las coordenadas de la cima de la parábola Γ_0 están en

$$x^* = \alpha/\beta \quad y^* = \alpha^2/2\beta, \quad (2.2.8)$$

lo cual se ilustra a continuación en la Figura 2.6

Analizando la ecuación (2.2.2) se determina que el comportamiento de las características regulares en la vecindad de la parábola Γ_0 para el intervalo $x \in (0, x_m)$, $x_m = \min\{x_t^+, x_t^-\}$, corresponde a la superficie (línea) de dispersión, que se discutió en general en la Sección 2.1.

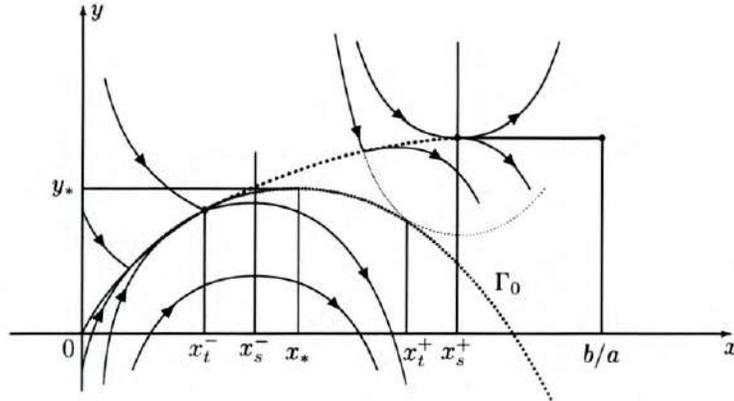


Figura 2.6 Ejemplo Específico de Características Singulares

Se muestra que una parte de Γ_0 es una superficie de dispersión real. La parte del dominio $x > 0$ arriba (debajo) de Γ_0 se denota por D_0^+ (o por D_0^-). Aquí, la notación u^+, u^-, D_0^+, D_0^- corresponde a u_1, u_2, D_1, D_0 de la Sección 2.1.

En el caso simétrico, cuando $c = 0$, la parábola (2.2.6) degenera en una línea recta. En este caso los cinco números x_s^\pm, x_t^\pm, x_* tienen el mismo valor denotado por x_0 en la parte positiva del eje x . La solución primaria es simplificada a

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \min\{u^+, u^-\} = -|y| + \frac{1}{2}x^2\sqrt{b^2 + 1} - x\sqrt{a^2 + 1}, \\ u^\pm(x, y) &= \mp y + \frac{1}{2}x^2\sqrt{b^2 + 1} - x\sqrt{a^2 + 1}. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

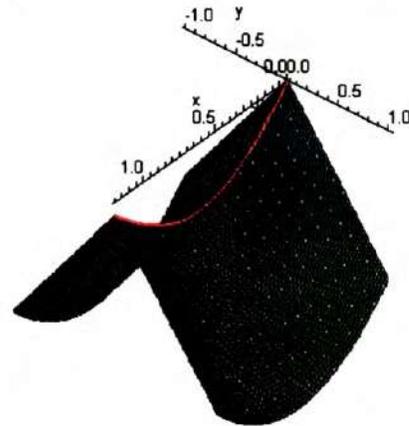


Figura 2.7 Solución primaria del tipo $u(x, y) = \min\{u^+, u^-\}$

En lo que sigue, se considera el caso simétrico mucho más simple, para posteriormente dar las modificaciones necesarias para el caso $c \neq 0$. Tomando en consideración la relación de los otros dos parámetros involucrados en el problema, es conveniente distinguir los tres casos siguientes:

$$\begin{aligned} 1) & a < b \quad (1 < x_0 < x_1 < x_2), \\ 2) & a = b \quad (1 = x_0 = x_1 = x_2), \\ 3) & a > b \quad (1 > x_0 > x_1 > x_2), \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\text{donde } x_0 = \sqrt{\frac{b^2 + 1}{a^2 + 1}}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{\sqrt{b^2 + 1} - b}, \quad x_2 = \frac{b}{a}.$$

Lo primero que hay que hacer es identificar la parte de dispersión de Γ_0 verificando la desigualdad (2.1.8). Los gradientes laterales en D^+ y D^- tienen las componentes:

$$p^+ = p^- = x \sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{a^2 + 1}, \quad q^+ = q^- = -1, \quad x \geq 0, \quad y = 0.$$

Introduciendo el nuevo parámetro $\theta = 2\lambda - 1$ en lugar de λ en (2.1.8) se puede escribir la desigualdad como:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= F\left(x, 0, \frac{1+\theta}{2}p^+ + \frac{1-\theta}{2}p^-, \frac{1+\theta}{2}q^+ + \frac{1-\theta}{2}q^-\right) \\ &= x \sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{a^2 + \theta^2} - x \sqrt{b^2 + \theta^2} \leq 0, \quad |\theta| \leq 1. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Ahora, ésta relación se analizará por separado para cada caso.

CASO 1) $a < b$

Se puede verificar para este caso que la desigualdad (2.2.11) se cumple para todo θ y $0 \leq x \leq x_0$. Así, todos los puntos del segmento $[0, x_0]$, una parte de Γ_0 , la cual se comporta geoméricamente como una superficie de dispersión, cumple con la prueba de viscosidad. Por otro lado, para $x > x_0$ se tiene la desigualdad $f'(1) < 0$, lo cual contradice (2.1.8). Esto significa que la superficie de dispersión termina en el punto $(x_0, 0)$.

Ambas parábolas críticas tocan Γ_0 (el eje x) en el punto $(x_0, 0)$, lo cual sugiere que el punto $(x_0, 0)$ sirve como origen de una línea focal. Como el Hamiltoniano es suave, para un problema 2-dimensional se cumplen las condiciones de colinearidad establecidas en la Sección 2.1 y las ecuaciones para la superficie (línea) focal tienen la forma (2.1.16).

Para este problema en particular la situación es más sencilla; para la línea focal se satisface la ecuación

$$\dot{y} = F_q = 0 \quad (2.2.12)$$

De hecho, para cada lado de la línea focal la ecuación (2.2.1) y la condición de tangencia (2.1.15) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} p + \sqrt{a^2 + q^2} - x \sqrt{b^2 + q^2} &= 0, & p &= p^\pm, & q &= q^\pm \\ p^+ - p^- + (q^+ - q^-)F_q(x, q) &= 0, & q &= q^\pm \\ F_q &= \frac{q}{\sqrt{a^2 + q^2}} - \frac{xq}{\sqrt{b^2 + q^2}}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Este es un sistema de cuatro ecuaciones con respecto a p^\pm, q^\pm , el cual tiene una solución trivial con $p^+ = p^-, q^+ = q^-$ y una solución no trivial con $p^+ = p^-, q^+ = -q^-$. Para la segunda solución, la cual corresponde a la superficie singular, se sigue de (2.2.13) que $F_q = 0$. Así, la superficie focal es también una línea recta, una parte del eje x . También, de la relación (2.2.13) se determina el valor de q en el punto $x = \xi, y = 0$ por ambos lados del eje x

$$\begin{aligned} q^\pm &= \mp a \sqrt{(x_2^2 - \xi^2)/(\xi^2 - 1)}, & x_0 &\leq \xi \leq x_2 \\ 0 &\leq |q| \leq 1, & x &= \xi, & y &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Como el problema tiene simetría respecto al eje x , consideraremos sólo la parte superior omitiendo el índice “+” (esto es, las cantidades sin subíndice se referirán al primer cuadrante). Sustituyendo q de (2.2.14) en (2.2.3) se obtiene la familia de características correspondiente a $C = \pm \frac{\xi}{2} \sqrt{(x_2^2 - \xi^2)/(x_2^2 - 1)}$, $x_0 \leq \xi \leq x_2, x \geq x_s = \xi$, la cual cubre la parte restante del semi-plano $x \geq 0$. Así, la línea focal termina en $x = x_2$. Las últimas dos características que pasan a través del punto $(x_2, 0)$ de la familia superior e inferior conciden una y otra y también con el semi-eje $x > x_2$. La Figura 2.8 ilustra este comportamiento.

El valor de la función u en el punto (x, y) se determina integrando la tercera ecuación de (2.2.2) a lo largo de las características

$$u(x, y) = \int_{\xi}^x (p + qF_q) dx \quad (2.2.15)$$

Aquí $\xi = \xi(x, y)$ corresponde a la característica que pasa por el punto (x, y) ; el valor $q(\xi)$, el cual es constante a lo largo de una característica regular, debe tomarse de (2.2.14) y p determinarse de la ecuación $F = 0$.

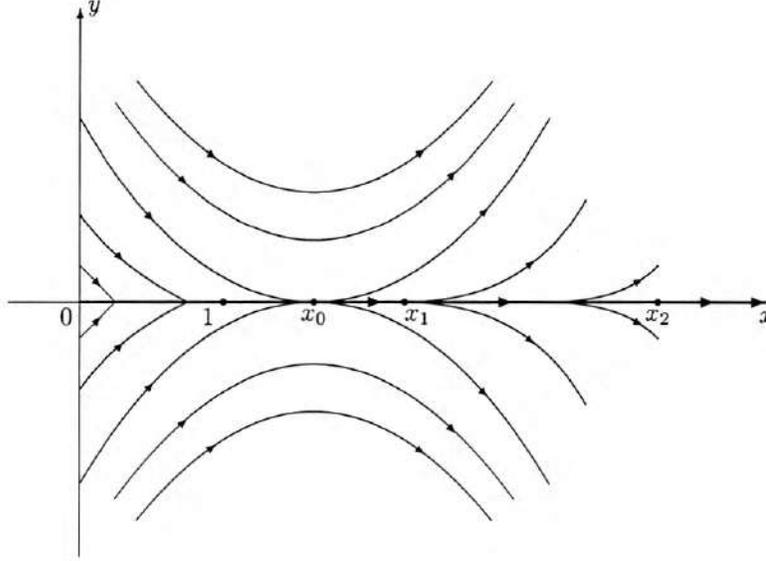


Figura 2.8 Características Singulares para el Caso Simétrico, $a < b$

La función que resulta es continua en Ω y suave dondequiera en Ω excepto en el segmento $[0, x_2)$. A lo largo de este segmento satisface las condición necesaria de una solución de viscosidad y satisface la ecuación (2.2.2) en el resto del dominio considerado. Esto significa que la función construida es la única solución de viscosidad para el PVI formulado en (2.2.2). Así, existen dos curvas singulares para este caso: un segmento focal y uno de dispersión. Nótese que aún cuando la solución es suave para $x \geq x_2$, $y = 0$, se puede mostrar que las segundas derivadas tienen diferentes límites desde el lado de arriba y de abajo, lo cual hace que el semi-eje también sea una superficie singular.

CASO 2) $a = b$

En este caso el punto x_2 coincide con x_0 , esto es, $x_2 = x_0 = 1$, el segmento focal se disipa y se forma un canal en forma de embudo de una familia 1-paramétrica de características (con parámetro q), iniciando en el punto $(x_0, 0)$:

$$y(x) = -\frac{q(x-1)^2}{2\sqrt{a^2+q^2}}, \quad |q| \leq 1. \quad (2.2.16)$$

El segmento $(x_0, 0)$ es de nuevo una línea de dispersión (ver Figura 2.9).

La integral (2.2.15) se puede calcular a lo largo de las características dadas por (2.2.16) con $a = b$ y $\xi = 1$ generando la así llamada *solución secundaria* definida en el dominio a la izquierda de la parábola crítica (con $|q| = 1$ en (2.2.16)). La solución secundaria se denota por

$$\begin{aligned} v(x, y) = u(x, y) &= -\frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}} + a\sqrt{\frac{(x-1)^4}{4} - y^2}, \\ |y| &\leq \frac{(x-1)^2}{2\sqrt{a^2 + 1}}, \quad x \geq 1. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Las funciones (2.2.9) y (2.2.17) representan la única solución de viscosidad para este caso. Es una función suave en todas partes excepto en el segmento $[0, x_0]$. Las líneas extremas del embudo son también superficies singulares.

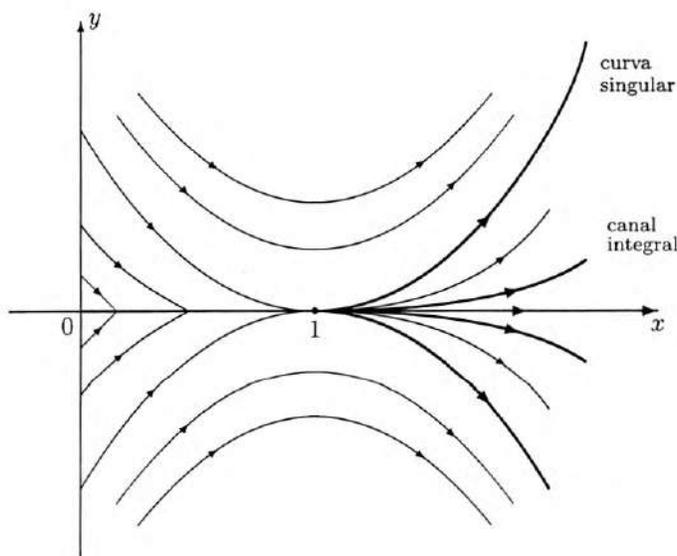


Figura 2.9 Características Singulares para el Caso Simétrico, $a = b$

De hecho, calculando las segundas derivadas de las funciones (2.2.9) y (2.2.17) sobre las parábolas que limitan al embudo se tiene que

$$u_{yy} = 0, \quad v_{yy} = -2(a^2 + 1)^{3/2}/a^2(x-1)^2 \neq 0.$$

En el tercer caso esta singularidad provoca la aparición de curvas difusas o inciertas.

De la construcción usando (2.2.16) y directamente de la fórmula (2.2.17) el gradiente de la rama $v(x, y)$ no tiene extensión continua hasta el punto $(1, 0)$. El valor límite de la componente q del gradiente a lo largo de diferentes curvas de la familia (2.2.16) es diferente.

CASO 3) $a > b$

En este caso no todos los puntos del segmento $[0, x_0]$, $y = 0$ pasan la prueba (2.2.11) para ser incluidos en la superficie de dispersión. Para $a > b$ la función $f(\theta)$ en (2.2.11) puede tener un máximo interno como se muestra en la Figura 2.10

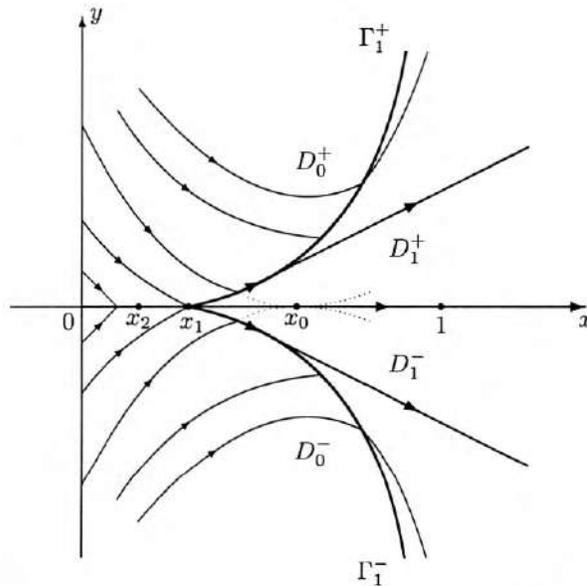


Figura 2.10 Características Singulares para el Caso Simétrico, $a > b$

La ecuación $f'(\theta) = 0$ para la función en (2.2.11) no tiene más de tres raíces y únicamente una de las raíces, $\theta = 0$ corresponde al máximo interno. Así, la condición (2.2.11) es equivalente a la desigualdad $f(0) < 0$, la cual se cumple únicamente para $x \in [0, x_1]$ y $f(0) > 0$ si $x > x_1$, donde el valor de x_1 se determina resolviendo la siguiente ecuación obtenida de (2.2.11):

$$f(0) = x(\sqrt{b^2 + 1} - b) - \sqrt{a^2 + 1} + a = 0. \quad (2.2.18)$$

Esto implica que el segmento (x_1, x_0) , a pesar del comportamiento geométrico disperso de las características, no es una parte de la superficie de dispersión y tiene que excluirse de tal consideración. Así, la superficie de dispersión termina en $x = x_1$, como se muestra en la Figura 2.10. Las características regulares se aproximan a Γ con ángulos diferentes de cero, con lo cual no se cumplen los requerimientos geométricos para una superficie focal.

Para identificar la superficie solución, la cual debe seguir la singularidad de dispersión, consideremos el punto $\theta^* \in [-1, 1]$ del máximo interno de $f(\theta)$ en el cual la función misma también se anula:

$$f'(\theta^*) = 0, \quad f(\theta^*) = 0. \quad (2.2.19)$$

Consideremos también el vector correspondiente (ver (2.2.11)):

$$p^* = \frac{1 + \theta^*}{2} p^+ + \frac{1 - \theta^*}{2} p^-, \quad q^* = \frac{1 + \theta^*}{2} q^+ + \frac{1 - \theta^*}{2} q^-. \quad (2.2.20)$$

Usando (2.1.8) se muestra que los vectores (p^+, q^+) , (p^*, q^*) satisfacen la igualdad de la condición (2.2.12), como los vectores (p_0, q_0) y (p_1, q_1) para la superficie incierta (Figura 2.4). El otro par de vectores (p^-, q^-) , (p^*, q^*) posee la misma propiedad. Esto implica que en el punto $x = x_1$ se originan dos líneas difusas Γ_1^+ , Γ_1^- , *i.e.*, se forma una bifurcación.

De acuerdo a lo anterior, el semi-plano Ω está constituido por $\Omega = D_0 + D_1$, donde $D_0 = D_0^+ + D_0^-$ es el dominio primario localizado a la izquierda de las curvas difusas $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ + \Gamma_1^-$ y $D_1 = D_1^+ + D_1^-$ es el dominio a la derecha de éstas (ver Figura 2.10). En D_0 la solución de (2.2.1) es dada por (2.2.9). Para la solución en el dominio D_1 se utiliza la notación $v(x, y)$. Para el Hamiltoniano suave en (2.2.1) las ecuaciones de las características singulares (2.2.15) con $F_1 = u - u^+$ para la rama superior Γ_1^+ y con $F_1 = u - u^-$ para la rama inferior Γ_1^- tienen la forma

$$\dot{y} = F_q, \quad \dot{q} = \frac{\sqrt{b^2 + k^2} - (b^2 + kq)/\sqrt{b^2 + q^2}}{(q - k)F_{qq}}, \quad x \geq x_1 \quad (2.2.21)$$

$$y(x_1) = 0, \quad q(x_1) = q^* = 0 \quad (q = \partial v / \partial y, \quad k = k_{\pm} = \mp 1).$$

La ecuación $\dot{x} = F_p = 1$ se omite aquí, así como la ecuación para p , ya que una vez que se integra (2.2.21) se determinan de la igualdad $F = 0$. El valor de q^* se toma de (2.2.20), el cual se anula ya que $\theta^* = 0$ y $q^+ = -q^-$. Usando el mismo q^* para ambas ramas implica que la función $v(x, y)$ tiene gradiente continuo hasta el punto $(x_1, 0)$.

Debido a la baja dimensión del problema se tiene una simplificación del sistema (2.2.15) en (2.2.21). El análisis muestra que las ecuaciones (2.2.21) determinan dos curvas suaves, para los valores $k = k_{\pm}$, tangentes al eje x en $x = x_1$ y $q \rightarrow k$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Para obtener la solución secundaria $v(x, y)$ en el dominio D_1 el sistema de características regulares (2.2.2) deben ser integradas desde los puntos de la curva incierta Γ_1 con los valores de p y q obtenidos sobre ésta en su construcción. Hay una característica regular con $q = q^*$ tocando ambas ramas Γ_1^+ y Γ_1^- (ver Figura 2.10, la cual para el caso simétrico $c = 0$ coincide con el semi-eje $x \geq x_1$). Aunque la función $v(x, y)$ es suave sobre ésta, se muestra que las segundas derivadas no son continuas sobre ésta, lo cual hace que este semi-eje sea una línea singular.

La solución de viscosidad resultante de (2.2.1) es una función suave en todas partes excepto en el segmento de dispersión y en las curvas inciertas, donde ésta satisface las condiciones de viscosidad establecidas en la Sección 2.1.

Modificaciones para el Caso No Simétrico

Para $c > 0$ la línea de dispersión Γ es una parte de la parábola (2.2.6). Usando en (2.2.11) las derivadas de la función (2.2.5) y las coordenadas $(x, \alpha x - \beta x^2/2)$ de un punto de la parábola (2.2.6) como los primeros dos argumentos de F se obtiene la condición (2.2.11) con la función modificada

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\alpha_1 + \beta_1 x + (\alpha - \beta x)\theta + \sqrt{a^+ + (\theta - c)^2} - x\sqrt{b^2 + (\theta - c)^2} \leq 0, \quad |\theta| \leq 1 \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + k_-^2} + \sqrt{a^2 + k_+^2} \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{b^2 + k_-^2} + \sqrt{b^2 + k_+^2} \right), \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

donde α, β están definidas en (2.2.6).

El Caso $a < b$. En este caso los puntos (2.2.4), (2.2.7) y (2.2.8) están ordenados como sigue (ver Figura 2.6):

$$1 < x_t^- < x_s^- < x_* < x_t^+ < x_s^+.$$

La condición (2.2.22) se satisface para $x \in [0, x_t^-]$ y no se cumple para $x > x_t^-$; aquí x_t^- definida en (2.2.7) es el punto de contacto de la parábola crítica inferior a Γ_0 . Las condiciones en la vecindad de x_t^- muestran que la línea de dispersión debe ser seguida por una línea incierta para ser construida numéricamente integrando (2.2.21) con $k = k_+$ y la condición inicial

$$y(x_t^-) = y_t^-, \quad q(x_t^-) = k_-.$$

La línea incierta termina cuando la parábola primaria superior también toca la línea incierta en algún punto (x_f, y_f) preparando las condiciones para el surgimiento de una línea focal. Las condiciones (2.2.13) deben de cumplirse en (x_f, y_f) , produciendo

$$x_f = x_s^+, \quad q^+ = -q^- = k_+,$$

donde x_s^+ está definida en (2.2.4).

El análisis de la línea focal, la cual termina en $x = b/a$, es similar al caso simétrico. Así, la perturbación del problema simétrico tomando c diferente de cero, origina una superficie de dispersión curvilínea (parabólica) e introduce un segmento de línea incierta entre las líneas de dispersión y focal, la última permaneciendo como un segmento de línea recta (ver Figura 2.6).

El Caso $a = b$. Este es el caso límite para el caso previo cuando tanto la superficie incierta como la focal degeneran en un punto

$$x = x_f = x_s^\pm = x_t^\pm = x_* = 1, \quad y = y_* = \alpha/2,$$

el cual está en la cima (2.2.8) de la parábola Γ_0 . Existe un embudo completo 1-paramétrico de características dado por la generalización de (2.2.16)

$$y(x) = \frac{\alpha}{2} - \frac{q(x-1)^2}{2\sqrt{a^2 + q^2}}, \quad k_+ \leq q \leq k_-. \quad (2.2.23)$$

La solución secundaria correspondiente (2.2.17) tiene la forma

$$v(x, y) = \frac{1}{4} \left(k_+ \sqrt{a^2 + k_-^2} - k_- \sqrt{a^2 + k_+^2} \right) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{(x-1)^4 - (2y - \alpha)^2}. \quad (2.2.24)$$

Así, comparando con el caso simétrico, la figura es la misma, sólo la línea de dispersión es ahora una parábola en vez de una línea recta (ver Figura 2.6).

El Caso $a > b$. Los puntos (2.2.4), (2.2.7) y (2.2.8) están ordenados como sigue:

$$x_s^+ < x_t^+ < x_* < x_s^- < x_t^- < 1.$$

Para c lo suficientemente pequeño, $0 \leq c < c^*$, la figura es similar a la correspondiente para $c = 0$ con la línea parabólica de dispersión en vez de la línea recta (ver Figura 2.10). El punto (x_e, y_e) donde la línea de dispersión termina es determinada por las condiciones (2.2.19) resultando que la ecuación $f(\theta) = 0$ tiene una raíz doble en algún punto interior $\theta \in [-1, 1]$. Ambas líneas inciertas se construyen integrando (2.2.21) con las condiciones iniciales

$$y(x_e) = \alpha x_e - \beta x_e^2/2, \quad q(x_e) = q^*,$$

donde q^* tiene la forma (2.2.20).

Para c relativamente grande, $c^* \leq c < 1$, todos los puntos geoméricamente dispersos correspondientes a $x \in [0, x_t^+]$ pasan la prueba (2.2.22) y las relaciones (2.2.19) se cumple para $\theta^* = 1$. Así, el valor crítico c^* puede ser determinado como el valor más pequeño para el que la doble raíz de $f(\theta) = 0$ está en $\theta = 1$. En este caso no hay bifurcación y, tal como lo indican las condiciones en el extremo de la superficie de dispersión, únicamente existe una línea inferior de incertidumbre Γ_1^- .

CONCLUSIÓN: Las superficies (líneas) singulares para este problema son del tipo $u = \min\{u_0, u_1\}$ heredadas de las condiciones iniciales. Para los Casos 1) y 2) se tiene cierta suavidad para las soluciones cuando la línea de salto del gradiente termina en $x = b/a$. En el Caso 3) esta clase de singularidad tiende a infinito a lo largo de una o dos líneas inciertas.

La presencia de las líneas singulares cambian la situación cuando únicamente un punto de la frontera es responsable del valor de la solución en algún punto interior fijo del dominio Ω . Por ejemplo, la información de la solución en algunos puntos del plano xy es llevada desde los puntos de la línea focal, Caso 1). El origen de la línea focal está en el extremo derecho de la línea de dispersión, la cual es determinada por las características que inician en los puntos $|y| < y_c$ de la frontera, donde $\pm y_c$ corresponde a las parábolas críticas.

Si se perturba la condición de frontera de la forma $u(0, y) = -|y| + cy + w(y)$, donde $w(y)$ es alguna función suave lo suficientemente pequeña que se anula fuera del intervalo $|y| < y_c$, entonces la terminación de la superficie de dispersión es también perturbada. Esto causa la perturbación de la línea focal y por ende la perturbación de la solución en los puntos donde la solución es generada desde la línea focal. Así, para tales puntos el dominio de influencia es el segmento completo $(-y_c, y_c)$ en vez de un sólo punto de la frontera. Tal característica se sabe que es inherente a los problemas de valor en la frontera de segundo orden.

2.3 Algunas EDP1 NL's Importantes

Las EDP1 NL's surgen sistemáticamente en problemas de optimización dinámica: Cálculo de Variaciones, Control Óptimo y Juegos Diferenciales, y aunque de forma no tan localizada también en otras áreas de la ciencia, la ingeniería y la tecnología. En Cálculo de Variaciones la ecuación que se obtiene al optimizar una funcional determinada se conoce como *Ecuación de Hamilton-Jacobi* (Ec.H-J), mientras que en Control Óptimo se tiene la *Ecuación de Bellman* y en la Teoría de Juegos se trabaja con la *Ecuación de Isaacs*. Esto es,

▷ ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, \mathbf{x}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right) = 0. \quad (2.3.1)$$

▷ ECUACIÓN DE BELLMAN:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{U}} \left(\left\langle \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u) \right\rangle + L(t, \mathbf{x}, u) \right) = 0. \quad (2.3.2)$$

donde \mathbf{f} es el campo vectorial de un sistema dinámico y L es el Lagrangiano de una funcional de costo dada.

▷ ECUACIÓN DE ISAACS:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{v \in \mathcal{V}} \min_{u \in \mathcal{U}} \left(\left\langle \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u, v) \right\rangle + L(t, \mathbf{x}, u, v) \right) = 0. \quad (2.3.3)$$

donde \mathbf{f} es el campo vectorial de un sistema dinámico y L es el Lagrangiano de una funcional de costo dada, correspondiente a un juego diferencial de suma cero entre dos jugadores (antagonistas).

Nota: De éstas tres, la más conocida y simple de abordar es la Ecuación de Hamilton-Jacobi. Sin embargo, no se incluye la deducción ni el análisis de ninguna de éstas porque se sale del objetivo de este trabajo de tesis.

Capítulo 3

Aplicación. Análisis de un Problema Variacional Multidimensional

En esta parte se considera el caso para el que las características singulares determinan la superficie singular de la solución no suave de la *Ecuación Euler-Lagrange*, una ecuación diferencial parcial de segundo orden no lineal asociada a un problema variacional multi-dimensional. El interés particular por el cual se analiza este caso es porque en Cálculo de Variaciones cuando se considera el problema de optimizar una funcional que depende de una función de varias variables casi siempre el problema no se puede resolver completamente debido a que es necesario determinar la solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden no lineal, bajo condiciones de suavidad no suficientes, no disponiendo en tal punto de la herramienta matemática adecuada para hacerlo. En específico, en este trabajo se aborda un ejemplo simple para el que es posible aplicar de forma analítica el MCS, como base de estudio para el análisis de otros problemas más generales.

3.1 Soluciones No Suaves para un Problema Multi-dimensional del Cálculo de Variaciones

El Problema Fundamental del Cálculo de Variaciones se refiere a la optimización de la funcional

$$J[u(\mathbf{x})] = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \leftarrow \text{Opt}\{u(\mathbf{x})\}, \quad (3.1.1)$$

donde $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \partial u / \partial \mathbf{x}$ es el gradiente de la función desconocida $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, sujeta a condiciones de frontera específicas: $B[u(\mathbf{x})]_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0$ (condiciones de frontera definidas por piezas; diferentes en las distintas partes que conforman la frontera $\partial\Omega$), elegidas de un conjunto admisible

$$\mathcal{A} = \{(u^*(\mathbf{x}), \Omega^*) \mid u^* \in \text{CP}^2(\Omega^*), \Omega^* \text{ dominio correspondiente de } u^*\}. \quad (3.1.2)$$

Nota: La función $u^*(\mathbf{x})$ se define en su propio dominio Ω^* , la cual es dos veces diferenciable por piezas en el interior de éste, lo cual se denota por $CP^2(\Omega^*)$. La notación $\leftarrow \text{Opt}\{u(\mathbf{x})\}$ significa determinar una función apropiada $u(\mathbf{x})$ tal que $J[u(\mathbf{x})]$ alcance su valor óptimo (máximo o mínimo). El Lagrangiano F se asume que es lo suficientemente suave (esto es, tiene al menos derivadas parciales continuas de tercer orden).

De acuerdo al análisis del Cálculo de Variaciones (por ejemplo, [12]), una solución dos veces diferenciable de (3.1.1) satisface la ecuación diferencial parcial de segundo orden

$$F_u - \text{div } F_{\mathbf{p}} = 0, \quad (3.1.3)$$

la cual se llama *Ecuación de Euler-Lagrange* (o simplemente Ecuación de Euler), donde $\text{div } F_{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_{p_i}}{\partial x_i}$. En la Subsección 3.1.1 se obtiene formalmente (3.1.3), así como las demás condiciones que deben satisfacerse.

Observación: En general, el problema variacional (3.1.1) puede ser resuelto por una función no suave en \mathcal{A} . Sin embargo, para tal función la Ecuación de Euler (3.1.3) se satisface únicamente para los puntos de suavidad. En general, sin condiciones adicionales impuestas o naturales sobre las superficies de no suavidad (superficies singulares) la solución no es única.

Para extender el conjunto de posibles soluciones de la ecuación (3.1.3) a la clase \mathcal{A} se define una *solución generalizada* de la ecuación (3.1.3) como una función de clase $CP^2(\Omega)$ que satisfaga la condición

$$\delta J[u(\mathbf{x}); \delta u(\mathbf{x})] = 0 \quad (3.1.4)$$

para funciones admisibles $\delta u(\mathbf{x})$, donde δJ es la *primera variación* (derivada) de la funcional (3.1.1) correspondiente a la variación $\delta u(\mathbf{x})$ de la función de referencia $u(\mathbf{x})$. Así, una solución generalizada deberá satisfacer la ecuación (3.1.3) en los puntos de su dominio de suavidad y en los puntos de no suavidad deberá satisfacer ciertas condiciones que se desprenden de la relación (3.1.4). En esta etapa, aún no se considera el asunto de la unicidad de una solución de este tipo; la existencia se establece a partir del propio método de construcción utilizado. Por lo tanto, para la ecuación diferencial parcial de segundo orden del tipo (3.1.3) es posible obtener una solución generalizada usando principios variacionales. Para ecuaciones de otro tipo es necesario introducir una base matemática (o principio físico) apropiada(o) para obtener una solución generalizada.

3.1.1 Primera Variación y Condiciones Necesarias para la Existencia de Superficies Singulares

El conjunto \mathcal{A} en (3.1.2), dominio de definición de la funcional $J[u(\cdot)]$ dada en (3.1.1), no es un espacio lineal debido a que Ω no es fijo. Así que para obtener la primera variación es necesario una técnica más sofisticada que el caso simple unidimensional (referirse por ejemplo a [8] o [12]). Sin embargo, en cierto sentido el proceso es similar, el cual se establece a continuación.

Considerar una familia 1-paramétrica de funciones admisibles $(u(\mathbf{x}, \varepsilon), \Omega^\varepsilon)$, una curva en la variedad \mathcal{A} y suponer que existe una transformación invertible entre los espacios n -dimensionales \mathbb{R}_x^n y \mathbb{R}_y^n tal que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_x^n &\rightarrow \mathbb{R}_y^n, & \mathbf{y} &= \Phi(\mathbf{x}, \varepsilon), & \Phi(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{x} \\ \Psi : \mathbb{R}_y^n &\rightarrow \mathbb{R}_x^n, & \mathbf{x} &= \Psi(\mathbf{y}, \varepsilon), & \Psi(\mathbf{y}, 0) &= \mathbf{y} \\ \Phi(\Psi(\mathbf{y}, \varepsilon), \varepsilon) &= \mathbf{y}, & \Psi(\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon), \varepsilon) &= \mathbf{x}, & |\varepsilon| &\leq \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

donde $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)$ son funciones vectoriales suaves.

Ahora, introducir una función vectorial $\phi(\mathbf{x}) = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ y un dominio $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}_y^n$ de la siguiente forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}, 0) \quad (3.1.6)$$

$$\Omega^\varepsilon = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_y^n \mid \mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}, \varepsilon), \mathbf{x} \in \Omega^0\}.$$

La primera igualdad de la primera relación en (3.1.6) es la propia definición de $\phi(\mathbf{x})$, mientras que la segunda se obtiene diferenciando la identidad $\Phi(\Psi(\mathbf{y}, \varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{y}$ con respecto a ε utilizando una consecuencia simple de las relaciones (3.1.5): $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

En lo que sigue, se fijan dos elementos de \mathcal{A} : $(u(\mathbf{x}), \Omega)$, $(h(\mathbf{x}), \Omega)$ con funciones suaves $u(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x})$ y $\Omega = \Omega^0$, y se define la familia 1-paramétrica

$$(w(\mathbf{y}, \varepsilon), \Omega^\varepsilon) : w(\mathbf{y}, \varepsilon) = u(\Psi(\mathbf{y}, \varepsilon)) + \varepsilon h(\Psi(\mathbf{y}, \varepsilon)), \quad \mathbf{y} \in \Omega^\varepsilon, \quad (3.1.7)$$

con Ω^ε dado en (3.1.6). Para $\varepsilon = 0$ se tiene que $\Omega^\varepsilon = \Omega^0 = \Omega$ y $w(\mathbf{x}, 0) = u(\mathbf{x})$, ya que $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. De aquí en adelante la función $w(\mathbf{x}, 0)$ se denotará con $u_0(\mathbf{x})$, así que el elemento referencia será $(u_0(\mathbf{x}), \Omega^0)$.

La familia (3.1.7) consiste de infinitas curvas que pasan por el punto $(u_0(\mathbf{x}), \Omega^0)$. Se puede construir una de tales curvas que conecte $(u_0(\mathbf{x}), \Omega^0)$ con $(\nu(\mathbf{x}), \Omega^\nu)$. Para hacerlo, se tiene que establecer una transformación (3.1.5) tal que $\Omega^{\varepsilon_1} = \Omega^\nu$ para algún $\varepsilon_1 > 0$ y definir

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_1} [\nu(\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon_1)) - u(\mathbf{x})].$$

Entonces, la familia (3.1.7) para $\varepsilon = \varepsilon_1$ proporciona $(\nu(\mathbf{x}), \Omega^\nu)$.

En la función de referencia $(u_0(\mathbf{x}), \Omega^0)$ la primera variación de la funcional (3.1.1), correspondiente a la variación $\delta u(\mathbf{x})$, se define como

$$\delta J[u(\mathbf{x}); \delta u(\mathbf{x})] \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (3.1.8)$$

$$J(\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} F \left(\mathbf{y}, w(\mathbf{y}, \varepsilon), \frac{\partial w(\mathbf{y}, \varepsilon)}{\partial \mathbf{y}} \right) d\mathbf{y}.$$

Observación: La diferenciación de una integral múltiple con respecto a un parámetro, cuando el dominio de integración también depende de éste (como en el caso de Ω^ε), no es tan sencillo como en el caso escalar (en el que se utiliza la fórmula de diferenciación de Euler). Lo que procede es cambiar el dominio a un dominio estándar, digamos Ω^0 .

El cambio de variable en la integral múltiple (3.1.8) de \mathbf{y} a \mathbf{x} usando las fórmulas de la transformación (3.1.5) implica:

$$J(\varepsilon) = \int_{\Omega^0} F \left(\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon), w(\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon), \varepsilon), \frac{\partial w(\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \mathbf{y}} \right) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right| d\mathbf{x}, \quad (3.1.9)$$

donde $|\partial \Phi / \partial \mathbf{x}|$ es el jacobiano de la transformación (3.1.5), esto es, el determinante de la matriz $\partial \Phi / \partial \mathbf{x}$. Como el dominio Ω^0 no depende de ε , para calcular la primera variación sólo se tiene que diferenciar el integrando en (3.1.9), obteniendo

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left(F \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right| \right) \right|_{\varepsilon=0} &= F \operatorname{div} \phi + \left. \frac{d}{d\varepsilon} F \right|_{\varepsilon=0}, \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} F \right|_{\varepsilon=0} &= F_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) + F_u \left(\left\langle \frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{y}}, \phi(\mathbf{x}) \right\rangle + \frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \varepsilon} \right) \\ &\quad + \left\langle \frac{\partial^2 w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{y}^2} \phi(\mathbf{x}), F_{\mathbf{p}} \right\rangle + \left\langle F_{\mathbf{p}}, \frac{\partial^2 w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{y} \partial \varepsilon} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

al utilizar las dos primeras igualdades de las siguientes propiedades de la transformación (3.1.5) para $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{I}, & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left| \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{x}} \right| &= \operatorname{div} \phi(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{y}} &= \mathbf{I}, & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{y}} &= -\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Para $\varepsilon = 0$ también se verifican las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F\phi) &= F \operatorname{div} \phi + F_{\mathbf{x}}\phi + F_u \left\langle \frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{y}}, \phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{y}^2} \phi, F_{\mathbf{p}} \right\rangle, \\ \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \varepsilon} F_{\mathbf{p}} \right) &= \left\langle \frac{\partial^2 w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{y} \partial \varepsilon}, F_{\mathbf{p}} \right\rangle + \frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \varepsilon} \operatorname{div} F_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Las relaciones (3.1.12) simplifican la expresión (3.1.10) a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \left(F \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right| \right) \Big|_{\varepsilon=0} &= (F_u - \operatorname{div} F_{\mathbf{p}}) \frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \varepsilon} + \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \varepsilon} F_{\mathbf{p}} + F\phi \right), \\ &\left(\text{con } F = F \left(\mathbf{x}, w(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \mathbf{y}} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

la cual finalmente proporciona la primera variación (3.1.8)

$$\delta J = \int_{\Omega^0} \left[(F_u - \operatorname{div} F_{\mathbf{p}}) \frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \varepsilon} + \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \varepsilon} F_{\mathbf{p}} + F\phi(\mathbf{x}) \right) \right] d\mathbf{x}. \quad (3.1.14)$$

Esta forma para la primera variación expresada en términos de la derivada $\partial w(\mathbf{x}, 0)/\partial \varepsilon$ no permite identificar las funciones y los parámetros, pudiéndose elegir arbitrariamente y considerarse como la variación δu de la función de referencia $u(\mathbf{x})$. La familia $w(\mathbf{x}, \varepsilon)$ se especifica para cada tipo de problema; para el problema con frontera fija se toma $w(\mathbf{x}, \varepsilon) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon h(\mathbf{x})$ y se tiene que $\partial w/\partial \varepsilon = h(\mathbf{x})$, donde $h(\mathbf{x})$ es una función suave arbitraria que se anula en $\partial\Omega$. Para el problema con frontera móvil se introduce la familia (3.1.7), para la cual usando (3.1.5) y (3.1.11) se tiene

$$\frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \varepsilon} = \bar{h}(\mathbf{x}) \equiv h(\mathbf{x}) - \left\langle \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \phi(\mathbf{x}) \right\rangle, \quad (3.1.15)$$

donde $h(\mathbf{x})$ generalmente no se anula sobre $\partial\Omega$ y debe ser consistente con las condiciones de frontera $B[u(\mathbf{x})]_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0$ dadas para el problema (3.1.1).

En este caso la primera variación (3.1.14) es una funcional lineal de dos funciones, la función escalar $h(\mathbf{x})$ y la función vectorial n dimensional $\phi(\mathbf{x})$, la cual representa la variación de la solución referencia:

$$\delta u(\mathbf{x}) = (h(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})) = (h(\mathbf{x}), \phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})). \quad (3.1.16)$$

Nota: El problema escalar queda incluido en la fórmula (3.1.14).

Como se mencionó anteriormente acerca de que los valores de $h(\mathbf{x})$ sobre la frontera $\partial\Omega$ deben ser consistentes con las condiciones de frontera especificadas, su justificación por ejemplo para el caso $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, en términos de la familia (3.1.7) se tiene

$$w(\mathbf{y}, \varepsilon) = u(\Psi(\mathbf{y}, \varepsilon)) + \varepsilon h(\Psi(\mathbf{y}, \varepsilon)) = v(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial\Omega^\varepsilon$$

o después de aplicar la transformación a la variable \mathbf{x} :

$$u(\mathbf{x}) + \varepsilon h(\mathbf{x}) = v(\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon)), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^0.$$

Diferenciando ésta última identidad con respecto a ε se obtiene

$$h(\mathbf{x}) = \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^0.$$

El valor correspondiente sobre la frontera de la función $\bar{h}(\mathbf{x})$ definida en (3.1.15) es

$$\frac{\partial w(\mathbf{x}, 0)}{\partial \varepsilon} = \bar{h}(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \phi \right\rangle, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^0. \quad (3.1.17)$$

Así, en la frontera la expresión (3.1.7) contiene únicamente una función vectorial arbitraria $\phi(\mathbf{x})$.

Sea entonces el par $(u(\mathbf{x}), \Omega)$ la solución del problema (3.1.1) y considerar primero el caso cuando la función $u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega)$. Usando el Teorema de Gauss, la primera variación (3.1.14) se transforma en

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\Omega} [(F_u - \operatorname{div} F_{\mathbf{p}})\bar{h}(\mathbf{x}) + \operatorname{div}(\bar{h}(\mathbf{x})F_{\mathbf{p}} + F\phi(\mathbf{x}))] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (F_u - \operatorname{div} F_{\mathbf{p}})\bar{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \langle \bar{h}(\mathbf{x})F_{\mathbf{p}} + F\phi(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

donde $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ es la normal externa a la frontera en el punto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, normal al elemento de superficie $d\sigma$. Esta fórmula muestra que para la primera variación de la funcional sólo los valores de $\phi(\mathbf{x})$ sobre la frontera $\partial\Omega$ son de hecho importantes, aun cuando la función $\phi(\mathbf{x})$ está también involucrada en la expresión para $\bar{h}(\mathbf{x})$ en (3.1.15).

Considerando las variaciones correspondientes a la frontera fija y valor fijo de $u(\mathbf{x})$ sobre ésta, *i.e.*, la función $\phi(\mathbf{x})$ en (3.1.16) es idénticamente cero y $h(\mathbf{x})$ se anula en $\partial\Omega$, se tiene para este tipo de variaciones que la segunda integral en (3.1.18) se anula y la primera, de acuerdo a (3.1.4), debe también anularse para cualquier $\bar{h}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ (ver (3.1.15)). A partir del Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones se obtiene la ecuación de Euler (3.1.3). El análisis de la segunda integral en (3.1.18) sujeta a otras variaciones admisibles produce las condiciones de transversalidad apropiadas.

Ahora, se supone que la solución $(u(\mathbf{x}), \Omega)$ del problema (3.1.1) es tal que la función $u(\mathbf{x})$ tiene un salto del gradiente en alguna superficie suave $\Gamma \in \Omega$, la cual divide al dominio Ω en dos subdominios abiertos denotados por $\Omega^-, \Omega^+ : \Omega = \Omega^- + \Gamma + \Omega^+$ como se muestra a continuación en la Figura 3.1:

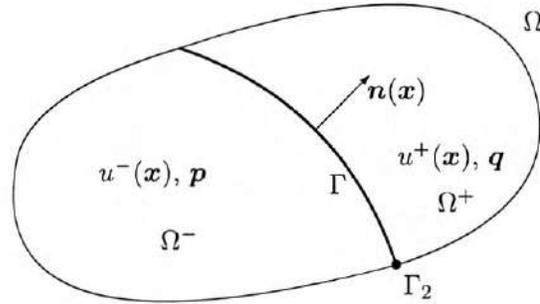


Figura 3.1

Las restricciones de la solución a los dominios Ω^-, Ω^+ se denotan como $u^-(\mathbf{x}), u^+(\mathbf{x})$ y sus gradientes como

$$\mathbf{p} = \frac{\partial u^-(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^-; \quad \mathbf{q} = \frac{\partial u^+(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+. \quad (3.1.19)$$

Se supone además que éstas funciones son dos veces diferenciables, $u^-(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega^-)$, $u^+(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega^+)$ y que los vectores $\mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{q}(\mathbf{x})$ tienen extensiones continuas de los dominios Ω^-, Ω^+ a la superficie Γ . Bajo estas suposiciones, siguiendo las consideraciones del Capítulo 2, las funciones tienen extensiones localmente suaves al espacio completo Ω . Para evitar la introducción de nuevas notaciones locales, se supone que el propio dominio Ω es suficientemente pequeño.

Para derivar las condiciones de optimalidad necesarias para la superficie Γ , se representa la funcional (3.1.1) como una suma de dos funcionales:

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Omega} F\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}\right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega^-} F\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}\right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega^+} F\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}\right) d\mathbf{x} = J^- + J^+. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Usando variaciones apropiadas de las ramas suaves de $u(\mathbf{x})$ se muestra que la Ecuación de Euler (3.1.3) se satisface en cada dominio Ω^-, Ω^+ . Considerando la variación de la funcional (3.1.20)

$$\delta J = \delta J^- + \delta J^+ \quad (3.1.21)$$

correspondiente a la variación de la solución $(u(\mathbf{x}), \Omega)$ con frontera fija y condiciones de frontera sobre ésta, pero con Γ móvil. En términos de las funcionales J^-, J^+ se tienen las variaciones

$$\delta u^-(\mathbf{x}) = (h^-(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})), \quad \delta u^+(\mathbf{x}) = (h^+(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})) \quad (3.1.22)$$

en las que las funciones h^\mp y ϕ se anulan sobre $\partial\Omega$ pero no sobre Γ . Usando para las funcionales J^-, J^+ la fórmula (3.1.18), en la que la primera de las integrales se anula debido a la Ecuación de Euler, se puede escribir la igualdad (3.1.21) sujeta a las variaciones (3.1.22) como

$$\begin{aligned} \delta J = \delta J^- + \delta J^+ &= \int_{\Gamma} \langle \bar{h}^-(\mathbf{x}) F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) + F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \phi(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \langle \bar{h}^+(\mathbf{x}) F_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}) + F(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}) \phi(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma \\ &\quad (\bar{h}^-(\mathbf{x}) = h^- - \langle \mathbf{p}, \phi \rangle^-, \quad \bar{h}^+(\mathbf{x}) = h^+ - \langle \mathbf{q}, \phi \rangle^+). \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Como se ilustra en la Figura 3.1, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$ es un vector normal a Γ exterior para el dominio Ω^- , y por consiguiente, el vector normal exterior para Ω^+ es $-\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Los primeros dos argumentos de la función F y sus derivadas son los mismos sobre los lados Ω^- y Ω^+ de Γ , ya que $u(\mathbf{x})$ es continua en Γ , $u^-(\mathbf{x}) = u^+(\mathbf{x})$. El tercer argumento puede ser \mathbf{p} o \mathbf{q} ; la notación $F_{\mathbf{p}}$ o $F_{\mathbf{q}}$ significa que la diferenciación es con respecto a \mathbf{p} o \mathbf{q} , respectivamente. La continuidad de la solución implica también la siguiente restricción para la variación (3.1.22)

$$h^-(\mathbf{x}) = h^+(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.1.24)$$

Como una condición necesaria de optimalidad para Γ , la variación (3.1.23) debe anularse para $h(\mathbf{x})$ y $\phi(\mathbf{x})$ arbitrarias definidas sobre Γ . Combinando las dos integrales en (3.1.23) se tiene

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\Gamma} [h^- \langle F_{\mathbf{p}}, \mathbf{n} \rangle - h^+ \langle F_{\mathbf{q}}, \mathbf{n} \rangle \\ & + \langle (F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - F(\mathbf{x}, u, \mathbf{q})) \mathbf{n} - \langle F_{\mathbf{p}}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{p} + \langle F_{\mathbf{q}}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{q}, \phi \rangle] d\sigma. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Aplicando ahora la condición (3.1.24) y el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones se tiene que el multiplicador escalar en $h(\mathbf{x})$ y el multiplicador vectorial en $\phi(\mathbf{x})$ en (3.1.25) deben anularse en Γ :

$$\begin{aligned} \langle F_{\mathbf{p}} - F_{\mathbf{q}}, \mathbf{n} \rangle &= 0 \\ (F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - F(\mathbf{x}, u, \mathbf{q})) \mathbf{n} - \langle F_{\mathbf{p}}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{p} + \langle F_{\mathbf{q}}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{q} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Nótese que el vector $\mathbf{p} - \mathbf{q}$, como una normal a Γ (debido a la continuidad de $u(\mathbf{x})$), es colineal con \mathbf{n} . Es decir, la igualdad es válida para algún escalar λ tal que

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{p}(\mathbf{x}) - \mathbf{q}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.1.27)$$

Esta representación lleva a la siguiente igualdad:

$$\langle F_{\mathbf{q}}, \mathbf{n} \rangle (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \langle F_{\mathbf{q}}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle \mathbf{n},$$

la cual junto con la primera igualdad en (3.1.26) permite reescribir la segunda condición en (3.1.26) como

$$[F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - F(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}) - \langle F_{\mathbf{q}}, (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \rangle] \mathbf{n}.$$

Como la normal \mathbf{n} es distinta de cero, el multiplicador escalar en el vector \mathbf{n} debe ser cero. Combinando esto con la primera condición en (3.1.26) simplificada por (3.1.27) implica finalmente que las siguientes dos igualdades escalares se cumplen en Γ :

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - F(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}) - \langle F_{\mathbf{q}}, (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \rangle &= 0 \\ \langle F_{\mathbf{p}} - F_{\mathbf{q}}, (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Estas igualdades son generalizaciones de las conocidas condiciones de esquina de Erdmann-Weierstrass del problema variacional escalar. Nótese que a partir de la segunda condición en (3.1.28) se tiene que

$$\langle F_{\mathbf{p}}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = \langle F_{\mathbf{q}}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle$$

y por lo tanto el último término de la primera condición en (3.1.28) tiene dos formas equivalentes.

La fórmula (3.1.25) también permite obtener la condición necesaria para algunos otros problemas. Considerar que la solución del problema $u(\mathbf{x})$ tiene un salto en la superficie Γ : $u^-(\mathbf{x}) \neq u^+(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \Gamma$. Entonces las variaciones $h^-(\mathbf{x}), h^+(\mathbf{x})$ son diferentes sobre Γ , no se cumplen las condiciones (3.1.24) y se tienen tres funciones arbitrarias en (3.1.26): $h^-(\mathbf{x}), h^+(\mathbf{x})$ y $\phi(\mathbf{x})$. De forma similar al caso previo, se obtienen las siguientes tres condiciones necesarias para la superficie Γ :

$$F(\mathbf{x}, u^-, \mathbf{p}) - F(\mathbf{x}, u^+, \mathbf{q}) = 0, \quad \langle F_{\mathbf{p}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad \langle F_{\mathbf{q}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle = 0. \quad (3.1.29)$$

En este caso el vector normal $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ no puede expresarse en términos de \mathbf{p} y \mathbf{q} como en (3.1.27) debido a la discontinuidad de $u(\mathbf{x})$.

Por otra parte, considerando el problema cuya solución es dos veces diferenciable, pero una parte de la frontera $\partial\Omega$ es libre, la cual también se denota por Γ , se tiene de acuerdo con (3.1.23) que $\delta J = \delta J^-$, el conjunto Ω^+ es vacío y Γ es una parte de $\partial\Omega$. La elección arbitraria de las variaciones $h(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})$ lleva de la condición de necesidad (3.1.4) a las siguientes dos igualdades válidas en Γ :

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 0, \quad \langle F_{\mathbf{p}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle = 0. \quad (3.1.30)$$

Si el valor de $u(\mathbf{x})$ no es libre y es igual a una función dada $v(\mathbf{x})$ sobre Γ , entonces usando (3.1.7) se obtiene la siguiente condición necesaria sobre Γ , la cual junto con el valor requerido en la frontera, tiene la expresión

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) + \left\langle F_{\mathbf{p}}, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{p} \right\rangle = 0, \quad u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.1.31)$$

3.2 Construcción de la Superficie Singular

En esta parte se aplica el MCS en el proceso de construcción de la superficie Γ sobre la cual la solución del problema (3.1.1) no es suave. Sobre tal superficie Γ están asociadas dos superficies integrales $(n-1)$ -dimensionales de la 1-forma $\alpha = du - p d\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \Sigma^- &= \left\{ (\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid u = u^-(\mathbf{x}), \mathbf{p} = \frac{\partial^-(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \Gamma \right\}, \\ \Sigma^+ &= \left\{ (\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid u = u^+(\mathbf{x}), \mathbf{p} = \frac{\partial^+(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \Gamma \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

La técnica desarrollada en el Capítulo 2 muestra que es posible construir una de tales superficies Σ siempre que se tenga una variedad apropiada de codimensión 3 en el espacio \mathbb{R}^{2n+1} de las variables $(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$. En este caso es necesario que se satisfagan tres igualdades de la forma $F_i(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 0$ sobre Σ ; dos de éstas las proporcionan las condiciones Erdmann-Weierstrass (3.1.28), mientras que la condición de continuidad (como en el caso de la superficie singular confusa descrita en el Capítulo 2) juega el papel de la tercera. Las notaciones para la rama $u^+(\mathbf{x})$ y su gradiente se modifican ligeramente escribiendo simplemente $u(\mathbf{x})$ y \mathbf{p} , mientras que la rama $u^-(\mathbf{x})$ se denota por $v(\mathbf{x})$ con gradiente \mathbf{q} . Para aplicar la técnica del Capítulo 2 es necesario considerar una de las ramas como conocida y la otra por determinar. Las relaciones (3.1.28) son casi simétricas respecto a ambas ramas u, \mathbf{p} y v, \mathbf{q} . Para una determinación precisa se considera que las funciones $v(\mathbf{x}), \mathbf{q}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ sean conocidas antes de construir la superficie Γ , conociendo también la otra rama u, \mathbf{p} . A continuación se escriben las tres condiciones antes mencionadas y se define la variedad W_3 , introduciendo las funciones $H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), R(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), F_1(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$.

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &= F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - F(\mathbf{x}, v(\mathbf{x}), \mathbf{q}(\mathbf{x})) - \langle F_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, v(\mathbf{x}), \mathbf{q}(\mathbf{x})), \mathbf{p} - \mathbf{q}(\mathbf{x}) \rangle = 0 \\ R(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &= \langle F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - F_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, v(\mathbf{x}), \mathbf{q}(\mathbf{x})), \mathbf{p} - \mathbf{q}(\mathbf{x}) \rangle = 0 \\ F_1(\mathbf{x}, u) &= u - v(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

La función $H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ se llama *Hamiltoniano*. En general, el Hamiltoniano singular se escribe en base a éstas tres funciones y un sistema correspondiente de características singulares. Una observación importante e interesante es que la función $R(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ se puede expresar como el paréntesis de Jacobi de las otras dos funciones en (3.2.2):

$$R(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = \{F_1, H\}. \quad (3.2.3)$$

De hecho, calculando la derivada de la función H en (3.2.2) y el paréntesis de Jacobi: $H_{\mathbf{p}} = F_{\mathbf{p}} - F_{\mathbf{q}}$, $\{F_1, H\} = \langle H_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle$ se obtiene la representación (3.2.3) para la función R en (3.2.2). Esto proporciona una interpretación invariante de las condiciones Erdmann-Weierstrass. Comparando (3.2.2) y (3.2.3) se puede ver que la condición (3.2.2) coincide con la de la envolvente de una superficie incierta (para el caso de un Hamiltoniano suave). Esto permite, escribir el sistema de características singulares sobre la variedad (3.2.2) en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{p}}, \quad \dot{u} = \langle \mathbf{p}, H_{\mathbf{p}} \rangle, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}} - H_u - \frac{\{\{H, F_1\}, H\}}{\{\{F_1, H\}, F_1\}}(\mathbf{p} - \mathbf{q}(\mathbf{x})). \quad (3.2.4)$$

Generalmente, una superficie singular puede iniciar en alguna variedad $\Gamma_2 \subset \partial\Omega$, $\dim \Gamma_2 = n - 2$ (ver Figura 3.1) y propagarse en Ω de acuerdo a (3.2.4). Para construir Γ se necesita una condición inicial en Γ_2 .

En general, una superficie singular Γ_2 en la que puede iniciar Γ corresponde a una irregularidad de las condiciones de frontera dadas para (3.1.1), digamos la no suavidad de los valores de frontera. Varias ondas de choque pueden iniciar en la misma Γ_2 en cuyo caso se tienen que especificar varias condiciones iniciales para (3.2.4). Por ejemplo, a continuación se considera la construcción de las condiciones iniciales para el caso cuando Γ_2 pertenece a una parte suave de $\partial\Omega$, la cual se supone que localmente es un hiperplano. También, sin pérdida de generalidad, se considera el caso 2-dimensional, $n = 2$, cuando Γ_2 es un punto; el caso general tiene un análisis similar. Así, considerar como Ω al semiplano superior, $x_2 > 0$, y suponer que m ondas de choque inician en el origen, el cual es Γ_2 (ver Figura 3.2).

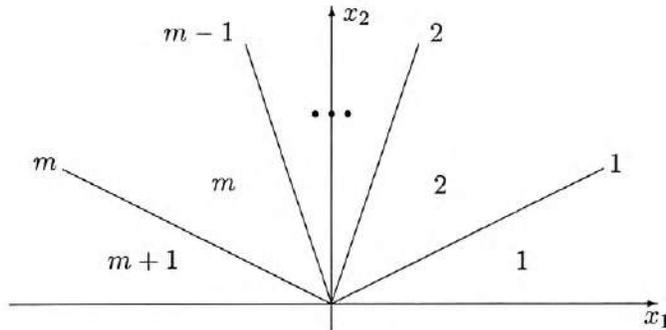


Figura 3.2

Se supone que ninguna de las ondas toca a otras ni al eje x_1 (la frontera $\partial\Omega$). Para cada sector (enumerado de 1 a $m + 1$) existen límites de $\partial u/\partial x_1(x_1, x_2)$ y $\partial u/\partial x_2$ cuando $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$. El sector será regular si tal límite no depende de la trayectoria y la solución $u(\mathbf{x})$ es una restricción al sector de alguna función diferenciable en $x = 0$. Un sector irregular es aquel para el cual estos límites dependen de la trayectoria, en particular, límites que son distintos a lo largo de los diferentes lados del sector.

Las consideraciones a continuación están relacionadas principalmente al caso cuando todos los sectores son regulares. Denotando la restricción de $u(\mathbf{x})$ al i -ésimo sector como $u_i(\mathbf{x})$ se consideran las expansiones lineales de Taylor:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2) &= a_i x_1 + b_i x_2 + c, \quad i = 1, 2, \dots, m + 1 \\ a_i &= \frac{\partial u_i}{\partial x_1}(0, 0), \quad b_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_2}(0, 0), \quad c = u_i(0, 0). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

La constante c no depende de i debido a la continuidad de $u(\mathbf{x})$, de forma que cada expansión se especifica por los parámetros a_i, b_i , mientras que a cada sector irregular están relacionados cuatro parámetros: $a_i^+, a_i^-, b_i^+, b_i^-$, donde (a_i^+, b_i^+) (respectivamente, (a_i^-, b_i^-)) es el límite del gradiente a lo largo del lado derecho (izquierdo) del sector.

Cada onda de choque es una curva descrita por una ecuación $x_2 = g_i(x_1), g_i(0) = 0$, cuya expansión lineal es

$$x_2 = k_i x_1, \quad k_i = \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(0), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2.6)$$

La continuidad de la solución en una onda de choque significa que

$$u_i(x_1, g_i(x_1)) = u_{i+1}(x_1, g_i(x_1)), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

la cual, debido a (3.2.5) y (3.2.6), implica las siguientes igualdades:

$$a_{i+1} - a_i + k_i(b_{i+1} - b_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2.7)$$

Además de (3.2.7) las condiciones Erdmann-Weierstrass generalizadas deben cumplirse en cada onda de choque, llevando a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \bar{H}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, c) &= 0, \\ \bar{R}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, c) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

donde las funciones \bar{H}, \bar{R} son definidas a partir de (3.2.2):

$$\begin{aligned}
\bar{H}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, c) &= F(0, 0, c, a_i, b_i) - F(0, 0, c, a_{i+1}, b_{i+1}) \\
&\quad - F_{q_1}(0, 0, c, a_{i+1}, b_{i+1})(a_i - a_{i+1}) - F_{q_2}(0, 0, c, a_{i+1}, b_{i+1})(b_i - b_{i+1}) \\
\bar{R}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, c) &= (F_{p_1}(0, 0, c, a_i, b_i) - F_{q_1}(0, 0, c, a_{i+1}, b_{i+1}))(a_i - a_{i+1}) \\
&\quad + (F_{p_2}(0, 0, c, a_i, b_i) - F_{q_2}(0, 0, c, a_{i+1}, b_{i+1}))(b_i - b_{i+1}).
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Así, respecto a las incógnitas en el punto $x_1 = 0, x_2 = 0$:

$$c, k_1, k_2, \dots, k_m, a_1, a_2, \dots, a_{m+1}, b_1, b_2, \dots, b_{m+1} \tag{3.2.10}$$

se tiene en total $3m$ ecuaciones (3.2.7), (3.2.8). Como algunos de los parámetros (3.2.10) se especifican por las condiciones de frontera del problema original (3.1.1) el balance final entre las incógnita y las ecuaciones depende de condiciones particulares. Se consideran tres casos.

CASO 1: El valor de la función $u(\mathbf{x})$ y el de su derivada normal $\partial u / \partial \mathbf{n}$ son especificados sobre $\partial\Omega$, *i.e.* para $x_2 = 0$:

$$u(x_1, 0) = w(x_1), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \psi(x_1) \tag{3.2.11}$$

donde $w(x_1), \psi(x_1)$ no necesariamente son suaves en $x_1 = 0$. Las condiciones (3.2.11) llevan al valor de 5 parámetros $c, a_1, b_1, a_{m+1}, b_{m+1}$ en la serie (3.2.10):

$$\begin{aligned}
c = w(0), \quad a_1 &= \frac{\partial w}{\partial x_1}(0^+), \quad b_1 = \psi(0^+) \\
a_{m+1} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}(0^-), \quad b_{m+1} = \psi(0^-).
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Así, el número de incógnitas en (3.2.10) es

$$3(m+1) - 5 = 3m - 2 \tag{3.2.13}$$

sujeto a $3m$ ecuaciones (3.2.7), (3.2.8), el cual es un sistema sobre-determinado para cualquier $m \geq 1$, lo cual generalmente significa que no existe solución para la que todos los sectores sean regulares.

Nota: Hay dos formas en las que es posible obtener un número igual de incógnitas y ecuaciones. Primero, al considerar libres dos de los cuatro parámetros $a_1, b_1, a_{m+1}, b_{m+1}$ en (3.2.12), se puede obtener el número total de parámetros igual a $3m$. Esto da la posibilidad de buscar condiciones de frontera especiales que son compatibles con un número m de ondas, la cual por supuesto no es una opción favorable. La otra forma es permitir que uno de los sectores sea irregular, lo cual involucra a dos nuevas incógnitas adicionales, *i.e.* cuatro parámetros $a_k^+, a_k^-, b_k^+, b_k^-$ en vez de los dos parámetros a_k, b_k para el k -ésimo sector (el que se supone irregular). Estos parámetros deben aparecer en la ecuación correspondiente del sistema (3.2.8).

En el caso particular cuando el Lagrangiano $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ es cuadrático en \mathbf{p} , dos condiciones Erdmann-Weierstrass (3.2.2), como se observa a continuación, son dependientes. $R \equiv 2H$, lo cual reduce el número de ecuaciones a $2m$. Igualando este número con el número de incógnitas (3.2.13) implica

$$2m = 3m - 2 \quad (3.2.14)$$

esto es, $m = 2$. Así, para el caso de un Lagrangiano cuadrático las condiciones necesarias permiten una solución con exactamente dos ondas de choque en tres sectores regulares.

CASO 2: Únicamente la función $u(\mathbf{x})$ se especifica sobre $\partial\Omega$. Los parámetros c, a_1, a_{m+1} son conocidos, el total de incógnitas es igual al número de ecuaciones $3m$. Formalmente ninguna onda es excluida. Este caso necesita una consideración especial. En algunos problemas el número m puede determinarse por el análisis de la solución del sistema (3.2.8). Otra posibilidad es que existan infinitas ondas con brinco infinitesimales del gradiente, *i.e.* la solución es suave.

CASO 3: Sólo la derivada normal es la que se especifica sobre $\partial\Omega$. Los parámetros b_1, b_{m+1} son conocidos, teniendo como número total de incógnitas $3m + 1$. El sistema (3.2.7), (3.2.8) es indeterminado. Si la condición inicial es suave, *i.e.* $a_1 = a_{m+1}$, pero $b_1 \neq b_{m+1}$, entonces el número de incógnitas y el de ecuaciones son iguales y la situación es similar al caso anterior.

3.3 Lagrangiano Cuadrático

En muchos problemas de la Física-Matemática el lagrangiano es cuadrático en \mathbf{p} :

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(\mathbf{x}, u) \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle, \quad (3.3.1)$$

donde \mathbf{A} es una matriz simétrica, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, con elementos a_{ij} que dependen en general de \mathbf{x} y u . En este caso, el Hamiltoniano (3.2.2) tiene la forma

$$H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(\mathbf{x}, u) (\mathbf{p} - \mathbf{q}(\mathbf{x})), \mathbf{p} - \mathbf{q}(\mathbf{x}) \rangle \equiv F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p} - \mathbf{q}(\mathbf{x})), \quad (3.3.2)$$

el cual, por la propiedad de simetría de \mathbf{A} ; $\langle \mathbf{A}\mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{A}^T \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{A}\mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$, se reduce a la forma

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \mathbf{A}\mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{A}\mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle - 2 \langle \mathbf{A}\mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle) \\ &= F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) + F(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}) - \langle \mathbf{A}\mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Observación: Usando las propiedades del lagrangiano cuadrático:

$$F_{\mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \mathbf{A}\mathbf{q}, \quad \langle F_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}), \mathbf{q} \rangle = 2F(\mathbf{x}, u, \mathbf{q})$$

el hamiltoniano (3.2.2) se reduce a la misma forma (3.3.3).

De (3.2.2) y (3.3.1) se calcula

$$H_{\mathbf{p}} = F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - F_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, u) \mathbf{p} - \mathbf{A}(\mathbf{x}, u) \mathbf{q} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, u) (\mathbf{p} - \mathbf{q}),$$

el cual proporciona para $R(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ en (3.2.2) como un paréntesis de Jacobi (3.2.3) la igualdad:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &= \{F_1, H\} = \langle H_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), \mathbf{p} - \mathbf{q}(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle F_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - F_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}), \mathbf{p} - \mathbf{q}(\mathbf{x}) \rangle = 2H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Para el paréntesis doble de Jacobi involucrado en el sistema (3.2.4) la relación (3.3.4) implica

$$\{\{F_1, H\}, F_1\} \equiv -4H, \quad \{\{H, F_1\}, H\} \equiv 0. \quad (3.3.5)$$

La relación (3.3.4) muestra que la variedad W_3 en el caso del lagrangiano cuadrático tiene codimensión 2, ya que dos de las tres funciones en (3.2.2) coinciden (salvo una constante multiplicadora, 2 en este caso). Para tal variedad la condición de suficiencia descrita en el Capítulo 2 para la existencia del campo característico no se cumple.

El vector $\lambda = (\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1)$ en la expresión del hamiltoniano singular es un vector nulo sobre W_3 :

$$\begin{aligned} \mu H^\sigma &= \lambda_{-1} F_{-1} + \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 \\ F_0 &= H, \quad F_1 = u - v(\mathbf{x}), \quad F_{-1} = \{F_1, F_0\} = 2H \\ \lambda_{-1} &= \{F_0, F_1\} = -2H, \quad \lambda_0 = \{F_1, F_{-1}\} = 4H = 0, \quad \lambda_1 = \{F_{-1}, F_0\} = 2\{H, H\} = 0. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Además, para este caso se tiene una variedad W_2 de codimensión 2 definida por dos igualdades con las funciones específicas H y F_1

$$W_2: \quad H = 0, \quad F_1 = 0, \quad (\{F_1, H\} = 2H). \quad (3.3.7)$$

Se podría pensar que existen infinitas superficies integrales $\Sigma = \Sigma^+$, con $\dim \Sigma = n + 1$, ver (3.2.1), pasando por una superficie dada

$$\Sigma_2 \subset \Sigma \subset W_2, \quad \dim \Sigma_2 = n - 2 \quad (3.3.8)$$

e infinitas proyecciones $\Gamma = \pi\Sigma$.

De hecho, en vez de R , se puede elegir una función arbitraria F_1 con el único requerimiento que $\{F_1, F_{-1}\} \neq 0$ y considerar las características singulares sobre la variedad

$$W_3: \quad H = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_{-1} = 0, \quad (\{F_1, F_{-1}\} \neq 0). \quad (3.3.9)$$

Entonces para la superficie dada Σ_2 cada función F_{-1} genera la solución única Σ y $\Gamma = \pi\Sigma$. Obviamente hay una cantidad infinita de tales funciones F_{-1} . Pero, debido a una propiedad especial de las funciones, que definen a W_2 en (3.3.7), $\{F_1, H\} = 2H$, se obtiene que aun cuando para diferentes funciones F_{-1} el sistema correspondiente de características singulares produce diferentes superficies integrales $\Sigma = \Sigma^+$ en (3.2.1), la proyección $\Gamma = \pi\Sigma$ es la misma (bajo las mismas condiciones iniciales).

En particular, la misma superficie Γ es generada por el sistema de características regulares correspondientes al sistema Hamiltoniano $H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p} - \mathbf{q}(\mathbf{x}))$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= H\mathbf{p} = F\mathbf{p}, & \dot{u} &= \langle \mathbf{p}, F\mathbf{p} \rangle, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -H\mathbf{x} - \mathbf{p}H_u = -F\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} F\mathbf{p} - \mathbf{p}F_u. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Este sistema puede reescribirse en términos del vector de salto $\xi = p - q$ y la función $F(x, u, \xi)$:

$$\dot{x} = F_\xi, \quad \dot{\xi} = -F_x - (\xi + q)F_u, \quad \dot{u} = \langle q, F_\xi \rangle \quad (3.3.11)$$

si se utilizan las siguientes igualdades

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial x} F_p, \quad \langle \xi, F_\xi(x, u, \xi) \rangle = 2F(x, u, \xi) = 0, \quad p = \xi + q. \quad (3.3.12)$$

Aquí $\partial q / \partial x = v_{xx}$ es la matriz simétrica de las segundas derivadas de $v(x)$.

El sistema (3.3.11) se puede simplificar aun más para la construcción de Γ en la forma siguiente

$$\dot{x} = F_\xi, \quad \dot{\xi} = -F_x - qF_u, \quad \dot{u} = \langle q, F_\xi \rangle, \quad (\xi = p - q). \quad (3.3.13)$$

Nota: La función $F(x, u, \xi)$ no juega el papel del Hamiltoniano en 3.3.11 ni en (3.3.13), ya que el sistema característico tendría la forma

$$\dot{x} = F_\xi, \quad \dot{\xi} = -F_x - \xi F_u, \quad \dot{u} = \langle \xi, F_\xi \rangle,$$

el cual, en general, difiere de ambos.

Nótese también que el sistema característico (3.3.10) o (3.3.11) con el Hamiltoniano H asegura la existencia de una superficie integral Σ que satisface (3.3.8), ya que de acuerdo a la igualdad $\{F_1, H\} = 2H$ en (3.3.7) la función $F_1(x, u)$ es una integral primera del sistema (3.3.10). La unicidad se establece en el Teorema 3.1 y es válida sólo para la proyección $\Gamma = \pi\Sigma$ y no para la propia Σ .

Teorema 3.1 Sea Σ_2 una variedad dada de $\dim \Sigma_2 = n - 2$ tal que el vector H_p es transversal a $\Gamma_2 = \pi\Sigma_2$ en algún punto $(x^*, u^*, p^*) \in \Gamma_2$. Entonces, cualquier superficie integral Σ tal que $\Sigma_2 \subset \Sigma \subset W_3 \subset W_2$, donde la variedad W_3 corresponde a alguna F_{-1} , con $\{F_1, F_{-1}\} \neq 0$, tiene la misma proyección $\Gamma = \pi\Sigma$, $\dim \Gamma = n - 1$, la cual coincide con la superficie producida por el sistema (3.3.13) con las condiciones iniciales en Σ_2 .

Demostración: Fijar alguna F_{-1} tal que $\{F_1, F_{-1}\} \neq 0$ y escribir el sistema de características singulares usando el Hamiltoniano singular de la forma (3.3.6) con la F_{-1} elegida y $\mu = \{F_1, F_{-1}\}$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p = F_\xi = A\xi, \\ \dot{u} &= \langle p, H_p \rangle = \langle p, F_\xi \rangle = \langle \xi + q, F_\xi \rangle = \langle \xi, F_\xi \rangle + \langle q, F_\xi \rangle = \langle q, F_\xi \rangle, \\ \dot{p} &= -F_x + \frac{\partial q}{\partial x} F_p - pF_u - \frac{\{F_{-1}, H\}}{\{F_1, F_{-1}\}} \xi. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Usando las igualdades (3.3.12) se reescribe este sistema como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= F_{\xi}, & \dot{u} &= \langle \mathbf{q}, F_{\xi} \rangle, \\ \dot{\xi} &= -F_{\mathbf{x}} - \mathbf{q}F_u - V\xi, & \left(V(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &= F_u + \frac{\{F_{-1}, H\}}{\{F_1, F_{-1}\}} \right). \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Multiplicando el lado derecho del sistema (3.3.15) por un escalar $\alpha \neq 0$ (lo cual es equivalente al cambio de variable independiente: $dt = \alpha dt'$) e introduciendo el vector $\boldsymbol{\eta}$ como $\xi = \beta\boldsymbol{\eta}$ para un escalar $\beta > 0$ (incluyendo, en particular, las propiedades de homogeneidad de segundo orden del Lagrangiano), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{\beta}\boldsymbol{\eta} + \beta\dot{\boldsymbol{\eta}}, & F_{\xi} &= \mathbf{A}\xi = \beta\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}, \\ F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u, \xi) &= \beta^2 F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\eta}), & F_u(\mathbf{x}, u, \xi) &= \beta^2 F_u(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

El sistema (3.3.15) se reduce a la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \alpha\beta\mathbf{A}(\mathbf{x}, u)\boldsymbol{\eta} = \alpha\beta F_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\eta}), & \dot{u} &= \alpha\beta\langle \mathbf{q}, F_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\eta}) \rangle, \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= -\alpha\beta [F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{q}F_u(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\eta})] - \frac{1}{\beta} \left(\dot{\beta} + \alpha\beta V(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \right) \boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Por último, se imponen los siguientes requerimientos sobre la elección de α, β como funciones del tiempo:

$$\alpha\beta = 1, \quad \dot{\beta} + \alpha\beta V(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{p}(t)), \quad \beta(0) = 1,$$

donde $\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{p}(t)$ es la solución del sistema (3.3.14) sujeto a las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad u(0) = u^0, \quad \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^0, \quad (\mathbf{x}^0, u^0, \mathbf{p}^0) \in \Sigma_2.$$

Entonces las funciones $\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\eta}(t)$ son también una solución particular del sistema reducido (3.3.13), tomando $\boldsymbol{\eta}$ como ξ , con condiciones iniciales

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad u(0) = u^0, \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{p}^0 - \mathbf{q}^0, \quad (\mathbf{x}^0, u^0, \mathbf{p}^0) \in \Sigma_2.$$

Considerar las soluciones $\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\eta}(t)$ y $\mathbf{x}(t'), u(t'), \mathbf{p}(t')$ de los sistemas (3.3.13) y (3.3.14), respectivamente, sujetas a las condiciones iniciales dadas. Las funciones $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}(t')$ definen la misma curva en \mathbb{R}_x^n descrita en términos de diferentes parámetros t y t' , las variables independientes de los sistemas (3.3.13) y (3.3.14), lo cual significa que estos sistemas producen la misma Γ , completando con esto la demostración. ■

Ahora, consideraremos el problema (3.1.1) con una Perturbación del Lagrangiano Cuadrático:

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = Q(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) + \varepsilon P(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), \quad Q(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{A}(\mathbf{x}, u)\mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle, \quad (3.3.17)$$

donde $P(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ es una función suave dada.

El Hamiltoniano en la primera condición (3.2.2) toma la siguiente forma perturbada:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &= F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - F(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}) - \langle F_{\mathbf{q}}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = Q(\mathbf{x}, u, \mathbf{p} - \mathbf{q}) + \varepsilon G(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), \\ G(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &= P(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - P(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}) - \langle P_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{q}), \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

La función R en la segunda condición (3.2.2) toma la forma:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &= \langle F_{\mathbf{p}} - F_{\mathbf{q}}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = 2Q(\mathbf{x}, u, \mathbf{p} - \mathbf{q}) + \varepsilon \{F_1, G\}, \\ F_1(\mathbf{x}, u) &= u - v(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

En este caso la variedad W_3 se define por

$$H = Q + \varepsilon G = 0, \quad R = 2Q + \varepsilon \{F_1, G\} = 0, \quad F_1 = 0. \quad (3.3.20)$$

Excluyendo ε de las dos primeras igualdades lleva a la descripción equivalente de

$$W_3: \quad H = Q + \varepsilon G = 0, \quad 2G - \{F_1, G\} = 0, \quad F_1 = 0. \quad (3.3.21)$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ la variedad (3.3.20) se degenera, pierde una codimensión, ya que las primeras dos ecuaciones se convierten en la misma. En general, la variedad (3.3.21) se mantiene de codimensión 3 si se requiere, en particular, que la función $2G - \{F_1, G\}$ no se anule, *i.e.*, G no sea cuadrática en $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ o P no sea cuadrática en \mathbf{p} .

El sistema de ecuaciones características para la variedad (3.3.21) es regularmente perturbado y tiende a la forma (tomando en cuenta que $\{F_1, Q\} = 2Q$):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= Q_{\mathbf{p}}, & \dot{u} &= \langle \mathbf{p}, Q_{\mathbf{p}} \rangle, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -Q_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} Q_{\mathbf{p}} - \mathbf{p} Q_u - \frac{\{F_{-1}, Q\}}{\{F_1, F_{-1}\}} (\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ & & (F_{-1} &= 2G - \{F_1, G\}). \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Sea Σ_ε la única (bajo condiciones apropiadas) superficie integral definida por la variedad (3.3.21) y alguna inicial Σ_2 . El límite de Σ_ε cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ está definido por el sistema (3.3.22) y Σ_2 . Es claro que tal límite depende de la G particular (P particular), mientras que el límite de la proyección $\Gamma_\varepsilon = \pi \Sigma_\varepsilon$ es el mismo para toda G . El sistema (3.3.22) puede también reducirse a la forma (3.3.11) utilizando la transformación del Teorema 3.1.

La no unicidad de Σ y la unicidad de $\Gamma = \pi\Sigma$ significa que la superficie singular en el problema cuadrático puede construirse de forma única, pero el salto en el gradiente $\xi = \mathbf{p} - \mathbf{q}$ puede encontrarse salvo un múltiplo escalar: la dirección del vector $\xi = \mathbf{p} - \mathbf{q}$ se puede encontrar, pero no la longitud. El análisis del sistema (3.3.22) muestra que diferentes perturbaciones P (o G) lleva a diferentes valores límite de la longitud de $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ sobre Γ . En el ejemplo siguiente tal no unicidad no es esencial y lleva a resultados únicos.

De acuerdo a lo establecido en la Sección 3.2, es posible tener dos ondas de choque en el problema con Lagrangiano cuadrático. Consideremos de nuevo el caso 2-dimensional con condiciones de frontera de la forma (3.2.11) para el dominio Ω dado por $X_2 > 0$. Las funciones H y R en (3.2.2) se hacen dependientes, definiendo una condición:

$$R(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 2H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{A}(\mathbf{x}, u)(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = 0. \quad (3.3.23)$$

Así, el sistema (3.2.8) se reduce a una ecuación que se cumple para cada una de las ondas de choque

$$(a_i - a_{i+1}, b_i - b_{i+1}) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i - a_{i+1} \\ b_i - b_{i+1} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.3.24)$$

Usando la homogeneidad de esta ecuación se puede reducir a la ecuación cuadrática con respecto a k , cuyos valores (definidos en (3.2.8)) son las dos raíces de esta ecuación:

$$\alpha_{11}k^2 - 2\alpha_{12}k + \alpha_{22} = 0, \quad \left(k = \frac{a_i - a_{i+1}}{b_i - b_{i+1}} \right), \quad (3.3.25)$$

$$k_1 = \frac{\alpha_{12} - \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}}}{\alpha_{11}}, \quad k_2 = \frac{\alpha_{12} + \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}}}{\alpha_{11}}.$$

Las entradas α_{ij} de la matriz \mathbf{A} se toman en el punto $x_1 = x_2 = 0$, $u = c$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(0, 0, c)$. La matriz \mathbf{A} es simétrica, y por consiguiente $\alpha_{12} = \alpha_{21}$. Además, suponemos que el determinante de \mathbf{A} y la entrada α_{11} son negativos:

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 < 0, \quad \alpha_{11} < 0, \quad (3.3.26)$$

de forma que las relaciones (3.3.25) representan dos raíces reales $k_1 > k_2$ de la ecuación cuadrática, las cuales una vez que se encuentran se consideran las ecuaciones

$$k_1 = -\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}, \quad k_2 = -\frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2}, \quad (3.3.27)$$

respecto a dos incógnitas a_2, b_2 . Los parámetros c, a_1, b_1, a_3, b_3 son dados en (3.2.12) para $m = 2$. Por lo tanto, las incógnitas restantes tienen los valores

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{k_1 a_3 - k_2 a_1}{k_1 - k_2} + \frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2} (b_3 - b_1), \\ b_2 &= \frac{a_1 - a_3}{k_1 - k_2} + \frac{k_1 b_1 - k_2 b_3}{k_1 - k_2}. \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

EJEMPLO 2-DIMENSIONAL ESPECÍFICO DEL PROBLEMA (3.3.1).

Considerar el Lagrangiano Cuadrático de la forma particular

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} (-\alpha(u)p_1^2 + p_2^2) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(u)\mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle, \tag{3.3.29}$$

el cual corresponde a una matriz diagonal \mathbf{A} con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -\alpha(u) < 0, & \alpha_{12} &= \alpha_{21} = 0, & \alpha_{22} &= 1, \\ \det(\mathbf{A}(u)) &= -\alpha(u) < 0. \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Así, la única entrada de la matriz \mathbf{A} que depende de u es $a_{11} = -\alpha(u)$, bajo la suposición que la función $\alpha(u)$ es positiva para cualquier u .

En lo que sigue se utilizará la notación $x = x_1, y = x_2$. El dominio Ω es el semi-plano $y > 0$. En términos de (3.3.29) y las condiciones de frontera consideradas la Ecuación de Euler (3.1.3) tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \alpha(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \alpha'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ u(x, 0) &= w(x), & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} &= \psi(x). \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

Las funciones $w(x), \psi(x)$ son suficientemente suaves en todas partes excepto en el origen, $x = 0$, donde $w(x)$ puede ser no suave (pero continua) y la función $\psi(x)$ puede también tener un salto finito.

La ecuación (3.3.31) es una ecuación de onda casi-lineal con velocidad de onda $a(u) = \sqrt{\alpha(u)}$ que depende de la solución u . El uso de α en lugar de a^2 es más conveniente para los cálculos posteriores. Se puede utilizar la región rectangular $|x| \leq l, 0 \leq y \leq T$ como Ω , ya que para el análisis local que se realiza para este ejemplo no es esencial considerarla más general.

Las irregularidades de las funciones $w(x)$, $\psi(x)$ generan una solución no suave para el problema (3.3.31) con dos ondas de choque (líneas de no suavidad de $u(x, y)$) que parten del origen. Las pendientes de estas dos rectas en $x = 0$ están dadas en (3.3.25), las cuales para el caso (3.3.30) se expresan por

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha(u)}}, \quad k_2 = -k_1 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha(u)}}. \quad (3.3.32)$$

Las dos ondas de choque dividen al semi-plano $y \geq 0$ en tres sectores (como en la Figura 3.2, con $m = 2$). En lo que sigue se considera sólo el primer cuadrante, el cual contiene una onda de choque, que corresponde a k_1 de (3.3.32). En caso de condiciones de frontera simétricas en (3.3.31), lo cual no necesariamente sucede, el problema tiene simetría respecto al eje y .

De acuerdo a la notación utilizada en esta sección, la solución primaria, la función $u(x, y)$ en el primer sector Ω^+ (referirse a Figura 3.1, con Γ_2 el origen y Γ la primera onda de choque) se denota por $v(x, y)$ y su gradiente por $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, $q_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$ y $q_2 = \frac{\partial v}{\partial y}$.

En este caso el hamiltoniano (3.3.5) toma la forma

$$\begin{aligned} H(x, y, u, p_1, p_2) &= F(x, y, u, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} (-\alpha(u)\xi_1^2 + \xi_2^2) \\ \xi_1 &= p_1 - q_1(x, y), \quad \xi_2 = p_2 - q_2(x, y). \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Usando de nuevo notación componente a componente $\xi = \xi_1$, $\gamma = \xi_2$ se pueden escribir las ecuaciones de las características singulares (3.3.15) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha(u)\xi, \quad \dot{y} = \gamma, \quad \dot{u} = -q_1\alpha(u)\xi + q_2\gamma \\ \dot{\xi} &= \frac{1}{2}q_1\alpha'(u)\xi^2, \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{2}q_2\alpha'(u)\xi^2. \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

Las condiciones iniciales para el sistema (3.3.34), en base a (3.3.28), (3.3.32) y la notación utilizada, se escriben como

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = c, \\ \xi(0) &= \xi_0 = a_2 - a_1 = \frac{a_3 - a_1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha(c)}}(b_3 - b_1) \\ \gamma(0) &= \gamma_0 = b_2 - b_1 = \frac{b_3 - b_1}{2} - \frac{\sqrt{\alpha(c)}}{2}(a_3 - a_1) = -\xi_0\sqrt{\alpha(c)}. \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

Así, los parámetros (3.3.28) para el caso (3.3.32) tienen la forma

$$a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha(c)}}(b_3 - b_1), \quad b_2 = \frac{b_3 + b_1}{2} - \frac{\sqrt{\alpha(c)}}{2}(a_3 - a_1). \quad (3.3.36)$$

Para integrar el sistema (3.3.34) sujeto a las condiciones iniciales (3.3.35) se tiene que determinar primeramente el gradiente $q_1(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}$, $q_2(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}$ de la solución primaria $v(x, y)$. La función $v(x, y)$ satisface la ecuación con las condiciones de frontera (3.3.31) para $x \geq 0$ y debe encontrarse en un dominio Ω^v más grande que el sector Ω^+ . Tal construcción puede efectuarse localmente usando una expansión de Taylor.

Consideremos los primeros términos de la expansión de Taylor para las funciones frontera en (3.3.31):

$$\begin{aligned} w(x) &= c + a_1x + A_1\frac{x^2}{2} + D_1\frac{x^3}{6} \\ \psi(x) &= b_1 + B_1x + E_1\frac{x^2}{2} \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

Los parámetros c, a_1, b_1 están dados en (3.2.12) y los demás coeficientes en (3.3.37) se determinan de las funciones dadas $w(x)$ y $\psi(x)$.

Consideremos además la expansión de Taylor de la solución primaria $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= c + a_1x + b_1y + \frac{1}{2}(A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2) \\ &\quad + \frac{1}{6}(D_1x^3 + 3E_1x^2y + 3F_1xy^2 + G_1y^3) \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

la cual extiende la fórmula (3.2.5), así como la expansión para $\alpha(u)$ en (3.3.30), tomando $u = v$

$$\alpha(u) = \alpha_0 + \alpha_1(v - c) + \alpha_2\frac{(v - c)^2}{2} + \alpha_3\frac{(v - c)^3}{6}. \quad (3.3.39)$$

Los parámetros comunes $c, a_1, b_1, A_1, B_1, D_1, E_1$ se utilizan en ambas expansiones (3.3.37) y (3.3.38) para tener las condiciones de frontera $v(x, 0) = w(x)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) = \psi(x)$. El resto de los multiplicadores en (3.3.38) se determinan usando la Ecuación de Euler (3.3.31) y la expansión (3.3.39):

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1\alpha_0 + a_1^2\frac{\alpha_1}{2}, \quad F_1 = D_1\alpha_0 + 2a_1A_1\alpha_1 + a_1^3\frac{\alpha_2}{2}, \\ G_1 &= E_1\alpha_0 + (b_1A_1 + a_1B_1)\alpha_1 + a_1^2b_1\frac{\alpha_2}{2}. \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

De acuerdo a la notación utilizada en (3.2.6), la onda de choque Γ está dada por la igualdad $y = g_1(x)$, la cual se puede expandir como

$$y = Y_1 x + Y_2 \frac{x^2}{2} + Y_3 \frac{x^3}{6}. \quad (3.3.41)$$

De la definición de k_1 en 3.2.6) se tiene que $Y_1 = k_1 = 1/\sqrt{\alpha_0}$, valor que también se obtiene en el procedimiento general que se trabaja a continuación.

Representemos las expansiones de la solución del problema de valor inicial (3.3.34)-(3.3.35) en la forma

$$\begin{aligned} x &= x_1 t + x_2 \frac{t^2}{2} + x_3 \frac{t^3}{6}, & y &= y_1 t + y_2 \frac{t^2}{2} + y_3 \frac{t^3}{6}, \\ \xi &= \xi_0 + \xi_1 t + \xi_2 \frac{t^2}{2} + \xi_3 \frac{t^3}{6}, & \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 \frac{t^2}{2} + \gamma_3 \frac{t^3}{6}. \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

La expansión para u no se utiliza porque se puede usar en (3.3.34) ya sea $\alpha(u)$ o $\alpha(v)$, ya que $u = v$ sobre Γ . La sustitución de las primeras dos expresiones en (3.3.42) en (3.3.41) lleva a la siguiente expresión para Y_i en términos de x_i, y_i :

$$Y_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad Y_2 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^3}, \quad Y_3 = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{x_1^4} - 3Y_2 \frac{x_2}{x_1^2}. \quad (3.3.43)$$

Sustituyendo las derivadas parciales $q_1 = \partial v / \partial x$, $q_2 = \partial v / \partial y$ de la función (3.3.38) en el sistema (3.3.34), utilizando la expansión (3.3.42) e igualando los coeficientes de las potencias similares de t , se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= -\xi_0 \alpha_0, & x_2 &= -\xi_0 \gamma_0 b_1 \alpha_1, \\ x_3 &= -\xi_0^3 b_2^2 \alpha_1^2 - \xi_0 \gamma_0^2 C_1 \alpha_1 - \xi_0 \gamma_0^2 b_1^2 \alpha_2 - \xi_0^2 \gamma_0 a_1 b_1 \alpha_0 \alpha_2 + \xi_0^2 \gamma_0 B_1 \alpha_0 \alpha_1 - \xi_0^3 \gamma_0 a_1 b_1 \alpha_1^2, \\ y_1 &= \gamma_0, & y_2 &= \xi_0^2 b_1 \alpha_1, \\ y_3 &= -\xi_0^3 a_1 b_1 \alpha_0 \alpha_2 - \xi_0^2 \gamma_0 b_1^2 \alpha_2 - \xi_0^3 B_1 \alpha_0 \alpha_1 + \xi_0^2 C_1 \alpha_1 + 2\xi_0^3 a_1 b_1 \alpha_1^2. \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

Estos valores implican los valores correspondientes de Y_i en (3.3.43):

$$\begin{aligned} Y_1 &= -\frac{\gamma_0}{\xi_0 \alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} = k_1, \\ Y_2 &= \frac{b_1 \alpha_1}{\alpha^2(c)} \left(1 - \frac{\gamma_0^2}{\xi_0^2 \alpha_0} \right) = 0, \\ Y_3 &= \gamma_0^4 b_1 \left[2a_1 \alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0} \left(a_1 + \frac{b_1}{\sqrt{\alpha_0}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

Aquí se utiliza la igualdad $\gamma_0 = -\xi_0 \sqrt{\alpha_0}$ dada en (3.3.42) para $\alpha(c) = \alpha_0$.

Como el segundo término en (3.3.41) se anula, entonces la onda de choque es dada por

$$y = k_1 x + Y_3 \frac{x^3}{6}, \tag{3.3.46}$$

la cual en una vecindad del origen es convexa si $Y_3 > 0$ y es concava si $Y_3 < 0$

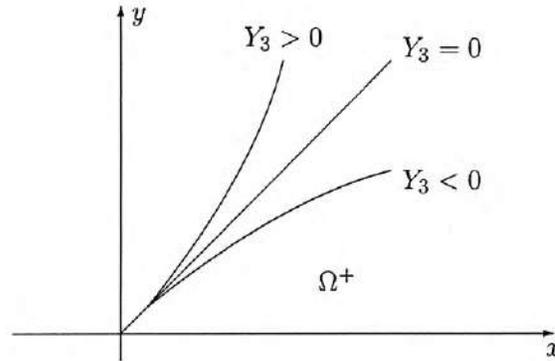


Figura 3.3

En particular, se pueden considerar algunos casos simples para este problema. Por ejemplo, si la función $\alpha(u)$ es constante, $\alpha(u) \equiv \alpha_0$, entonces la integración de (3.3.34) sujeta a las condiciones (3.3.35) proporciona la conocida característica de la ecuación de onda lineal

$$x + \sqrt{\alpha_0} y = 0. \tag{3.3.47}$$

Las expresiones para ξ_0, γ_0 en (3.3.35) muestran que estas cantidades se anulan simultáneamente si la función inicial $w(x)$ es suave (en cuyo caso $a_3 = a_1$) y la función $\psi(x)$ es continua (teniendo entonces $b_3 = b_1$), ver (3.2.12). Así, en general, la existencia de ondas de choque se debe a la no suavidad de la función $w(x)$ y/o a la discontinuidad de $\psi(x)$. En otro caso, *i.e.*, para $\xi_0 = \gamma_0 = 0$, el sistema (3.3.34) tiene una solución de equilibrio $x = y = 0, u = c, \xi = \gamma = 0$, y la existencia de una onda de choque requiere un análisis adicional.

Introduciendo para el sistema (3.3.34) una nueva variable para el tiempo y una nueva variable para la fase mediante las relaciones

$$\tau = - \int_0^t \xi(\sigma) d\sigma, \quad \delta = -\frac{\gamma}{\xi}, \tag{3.3.48}$$

se puede reescribir en la forma (considerando que $\frac{d}{d\tau} = ()'$)

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha(u), & y' &= -\frac{\gamma}{\xi} = \delta, & u' &= q_1\alpha(u) - q_2\delta, \\
\xi' &= \frac{1}{2}q_1\frac{d\alpha}{du}\xi, & \gamma' &= \frac{1}{2}q_2\frac{d\alpha}{du}\xi, & \delta' &= \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{du}(q_1\delta + q_2).
\end{aligned} \tag{3.3.49}$$

Se observa que el subsistema con las componentes x, y, u, δ está desacoplado de las otras dos ecuaciones involucradas y junto con las condiciones iniciales (3.3.35), las cuales también proporcionan la condición para δ , se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha, & y' &= \delta, & u' &= q_1\alpha - q_2\delta, & \delta' &= \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{du}(q_1\delta + q_2) \\
x(0) &= 0, & y(0) &= 0, & u(0) &= c, & \delta(0) &= \sqrt{\alpha(c)}.
\end{aligned} \tag{3.3.50}$$

Así, el orden del sistema para las características singulares (3.3.34) se reduce de 5 a 4. Además, el sistema (3.3.50) es conveniente también en otro aspecto: no tiene singularidad para ξ, γ pequeños y proporciona una descripción regular de la onda de choque si se toma $\xi = 0$ y $\gamma = 0$ (este es el efecto que produce el tiempo lento τ).

Por otra parte, si el término lineal en la expansión (3.3.37) para w no está presente, $a_1 = 0$, entonces (3.3.45) proporciona

$$Y_3 = -\gamma_0^4 b_1^2 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0 \sqrt{\alpha_0}},$$

i. e., la onda de choque es cóncava. Si el término lineal en la expansión (3.3.39) está ausente, $\alpha_1 = 0$, entonces

$$Y_3 = 2\gamma_0^4 a_1 b_1 \alpha_2.$$

En este caso la onda de choque es cóncava para $a_1 b_1 \alpha_2 < 0$ y es convexa para $a_1 b_1 \alpha_2 > 0$. Una continuación más detallada de este panorama local podría revelar (para el último caso, quizá con una dependencia más general $\alpha(x, y, u)$) una clase de reflexión interna de la onda de choque (sin embargo, tal análisis tendría que hacerse numéricamente).

CONCLUSIÓN: El MCS es aplicable a casos más generales y de interés práctico, lo cual lo posiciona como un buen candidato para casos de estudio interesantes o proyectos de investigación relevantes.

Apéndice A

Conceptos y Resultados Relacionados

En esta parte se introducen algunos conceptos y resultados auxiliares, relativamente independientes entre sí, los cuales son necesarios como apoyo para el establecimiento de algunos de los resultados particulares del trabajo elaborado.

A.1 Corchetes de Jacobi

DEFINICIÓN A1: Sean F, G y H funciones escalares lo suficientemente suaves de la $(2n+1)$ variable $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.

El *Paréntesis* o *Corchete de Jacobi* de dos funciones F y G es una nueva función suave de \mathbf{z} , denotada por $\{F, G\}$ y definida por

$$\begin{aligned} \{F, G\} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial u} \right) \frac{\partial G}{\partial p_i} - \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial G}{\partial u} \right) \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ &\equiv \langle F\mathbf{x} + \mathbf{p}F_u, G\mathbf{p} \rangle - \langle G\mathbf{x} + \mathbf{p}G_u, F\mathbf{p} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A1.1})$$

con $F\mathbf{x} = (F_{x_1}, F_{x_2}, \dots, F_{x_n}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n, \dots$ y $F_u = \frac{\partial F}{\partial u}$.

De la Definición (A1.1), se tienen las propiedades

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= -\{G, F\} && \text{(Anti-simetría),} \\ \{F, F\} &= 0 && \text{(Auto-anulación),} \\ \{aF + bG, H\} &= a\{F, H\} + b\{G, H\} && \text{(Linealidad),} \end{aligned}$$

con a, b constantes.

En el caso cuando F y G no dependen de u , esto es, $F = F(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ y $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, la expresión (A1.1) es llamada *Corchete de Poisson* o *conmutador*, el cual tiene la forma más simple:

$$\{F, G\} = \sum_{i=0}^n \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right]. \quad (\text{A1.2})$$

Para el Corchete de Poisson doble, aplicado a tres funciones F, G y H , se satisface la identidad:

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0, \quad (\text{A1.3})$$

llamada *Identidad de Jacobi*.

Observación: Todos los términos de la expresión del lado izquierdo de (A1.3) contienen derivadas de segundo orden, las cuales se cancelan entre sí. Para el caso del Corchete de Jacobi, el lado izquierdo también contiene términos con derivadas parciales de primer orden y se satisface:

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = \{F, G\}H_u + \{G, H\}F_u + \{H, F\}G_u, \quad (\text{A1.4})$$

la cual se conoce como *Identidad de Jacobi Generalizada*.

DEFINICIÓN A2: Una transformación invertible del espacio \mathbb{R}^{2n+1} en si mismo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}), & u &= U(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}), & \mathbf{p} &= \mathbf{P}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Y}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), & v &= V(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), & \mathbf{q} &= \mathbf{Q}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (\text{A1.5})$$

de las variables originales $(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ en las nuevas variables $(\mathbf{y}, v, \mathbf{q})$, y viceversa, es llamada *Transformación de Contacto* si deja invariante al Corchete de Jacobi, *i.e.*, si para todas las funciones suaves $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), G(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ es válida la siguiente identidad:

$$\{F, G\} = \{\tilde{F}, \tilde{G}\}, \quad (\text{A1.6})$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \tilde{F}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}) = F(\mathbf{X}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}), U(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}), \mathbf{P}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q})), \\ \tilde{G} &= \tilde{G}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}) = G(\mathbf{X}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}), U(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}), \mathbf{P}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q})). \end{aligned}$$

Nota: *i)* El corchete $\{\tilde{F}, \tilde{G}\}$ se calcula en términos de las variables $(\mathbf{y}, v, \mathbf{q})$.

ii) Una transformación $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, \mathbf{q}), \mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{y}, \mathbf{q}), \mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ que deja invariante al Corchete de Poisson es llamada *Transformación Canónica*.

Ejemplos: A1. Para $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $u = v + \omega(\mathbf{x})$, $\mathbf{p} = \mathbf{q} + \omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$, con $\omega(\mathbf{x})$ una función escalar dada, cuya inversión es muy simple y del mismo tipo, se tiene una transformación de contacto (la demostración de ésta afirmación es un ejercicio entretenido, la cual se deja al lector).

A2. Otro ejemplo típico es la transformación de contacto puntual

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \phi(\mathbf{y}), & u &= v, & \mathbf{p} &= A^{-1}\mathbf{q} = B\mathbf{q}, \\ \mathbf{y} &= \psi(\mathbf{x}), & v &= u, & \mathbf{q} &= B^{-1}\mathbf{p} = A\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

con $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}$ y $B = [b_{ij}]$, $b_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}$ matrices cuadradas ($n \times n$). Como las transformaciones $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{y})$ y $\mathbf{y} = \psi(\mathbf{x})$ son mutuamente inversas, también lo son las matrices A y B :

$$AB = I, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}, \quad \text{con } \delta_{ii} = 1, \delta_{ik} = 0, \text{ para } i \neq k \quad (\text{la delta de Kronecker}).$$

La matriz A (matriz B) aparece si, al considerar una función $u(\mathbf{x})$ (función $v(\mathbf{y})$), se introduce la función $v(\mathbf{y}) = u(\phi(\mathbf{y}))$ ($u(\mathbf{x}) = v(\psi(\mathbf{x}))$) y se deriva esta identidad respecto a y_i (a x_i):

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\partial v}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}p_j \\ p_i &= \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n b_{ij}q_j \end{aligned}$$

Para las funciones dadas $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$, $G(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ se tienen las respectivas funciones transformadas de las nuevas variables (A1.5):

$$\bar{F}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}) = F(\phi(\mathbf{y}), v, B(\mathbf{y})\mathbf{q}), \quad \tilde{G}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}) = G(\phi(\mathbf{y}), v, B(\mathbf{y})\mathbf{q}), \quad (\text{A1.8})$$

y su corchete (A1.1) en las nuevas variables,

$$\begin{aligned} \{\bar{F}, \tilde{G}\} &= \langle \bar{F}\mathbf{y} + \mathbf{q}\bar{F}_v, \tilde{G}\mathbf{q} \rangle - \langle \tilde{G}\mathbf{y} + \mathbf{q}\tilde{G}_v, \bar{F}\mathbf{q} \rangle = \left\langle A\bar{F}\mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(B\mathbf{q})\bar{F}\mathbf{p} + F_u A\mathbf{p}, B^T \tilde{G}\mathbf{p} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle A\tilde{G}\mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(B\mathbf{q})\tilde{G}\mathbf{p} + G_u A\mathbf{p}, B^T \bar{F}\mathbf{p} \right\rangle \\ &= \{F, G\} + \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(B\mathbf{q})\bar{F}\mathbf{p}, B^T \tilde{G}\mathbf{p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(B\mathbf{q})\tilde{G}\mathbf{p}, B^T \bar{F}\mathbf{p} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

se obtiene utilizando las propiedades del producto escalar y la transposición de matrices:

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T \mathbf{y} \rangle, \quad A^T B^T = (BA)^T = I$$

y la siguiente notación para la matriz cuadrada D :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(B\mathbf{q}) = D = [d_{ki}], \quad d_{ki} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_k} q_j.$$

Los últimos dos términos en (A1.9) en forma componente se representan como

$$\sum_{ik} F_{p_i} G_{p_k} \left(\sum_j q_j \sum_l \left(b_{kl} \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_l} - b_{il} \frac{\partial b_{kj}}{\partial y_l} \right) \right) \quad (\text{A1.10})$$

sumando de 1 a n . Pero, utilizando la Regla de la Cadena en (A1.7) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{b_{ij}}{\partial x_k} &= \sum_l \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} = \sum_l \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_l} b_{ks} \\ \frac{b_{ij}}{\partial x_k} &= \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial b_{kj}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Estas relaciones muestran que las sumas internas en (A1.10) se anulan y la relación (A1.9) se reduce a la igualdad $\{\tilde{F}, \tilde{G}\} = \{F, G\}$, lo cual prueba que (A1.7) es una transformación de contacto. \square

Una propiedad distintiva de una transformación de contacto es que el sistema característico de una EDP1 (en términos de su hamiltoniano) es invariante. Esto es,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{F}\mathbf{p}, & \dot{u} &= \langle \mathbf{p}, \mathbf{F}\mathbf{p} \rangle, & \dot{\mathbf{p}} &= -\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{p}\mathbf{F}_u \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} &= \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{q}, & \dot{v} &= \langle \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{q} \rangle, & \dot{\mathbf{q}} &= -\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{y} - \mathbf{q}\tilde{\mathbf{F}}_u \end{aligned} \quad (\text{A1.11})$$

De hecho para la transformación (A1.7) esto se puede constatar fácilmente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= B^T \dot{\mathbf{x}} = B^T \mathbf{F}\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, v, \mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{q} \\ \dot{v} &= \dot{u} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{F}\mathbf{p} \rangle = \langle B\mathbf{q}, \mathbf{F}\mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, B^T \mathbf{F}\mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{q} \rangle \\ \dot{\mathbf{q}} &= \dot{\mathbf{A}}\mathbf{p} + A\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{p} + A(-\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{p}\mathbf{F}_u) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(B\mathbf{q})\mathbf{F}\mathbf{p} - A\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}_u A\mathbf{p} = -\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{y} - \mathbf{q}\tilde{\mathbf{F}}_u \end{aligned}$$

El término $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{p}$ se reduce a $-\partial/\partial \mathbf{y}[(B\mathbf{q})\mathbf{F}\mathbf{p}]$, primero diferenciando $AB = I$: $\dot{A}B + A\dot{B} = 0$, lo cual implica que $\dot{A} = -A\dot{B}$, y luego utilizando la relación $\mathbf{p} = B\mathbf{q}$ para llegar a la relación $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{p} = -A\dot{B}B^{-1}B\mathbf{q} = -A\dot{B}\mathbf{q}$. Finalmente, la Regla de la Cadena y las relaciones que siguen a (A1.10) permiten representar las entradas de la matriz B :

$$\dot{b}_{ij} = \sum_k \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_k} \dot{y}_k = \sum_{k,l} \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_k} b_{lk} \mathbf{F}_{p_l} = \sum_{k,l} \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_k} b_{ik} \mathbf{F}_{p_l},$$

lo cual lleva a la siguiente expresión para $A\dot{B}\mathbf{q}$ (en componentes):

$$\sum_i a_{mi} \sum_j \dot{b}_{ij} q_j = \sum_{i,j,k,l} a_{mi} b_{ik} \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_k} q_j \mathbf{F}_{p_l} = \sum_{j,l} \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_m} q_j \mathbf{F}_{p_l}$$

La última expresión se simplifica usando la propiedad que A y B son mutuamente inversas y la regla de sustitución de índices para la delta de Kronecker, lo cual completa la justificación de la expresión para $\dot{\mathbf{q}}$. \square

A.2 El Teorema de la Función Implícita

Considerar un sistema de m ecuaciones con respecto a m incógnitas y_1, y_2, \dots, y_m :

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \end{aligned} \tag{A2.1}$$

el cual en notación vectorial tiene la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = 0, \quad \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^m \tag{A2.2}$$

donde \mathbf{z} es un vector extendido de $n + m$ componentes y x_1, x_2, \dots, x_n se consideran como parámetros.

El Jacobiano (el determinante de la Matriz Jacobiana) para el sistema (A2.1), (A2.2) tiene la forma

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \tag{A2.3}$$

Teorema de la Función Implícita: Sean $F_i(\mathbf{z})$ m funciones diferenciables con respecto a $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ hasta orden k , esto es, $F_i \in C^k(\mathcal{D}_z)$, $i = 1, \dots, m$, donde \mathcal{D}_z es una vecindad de un punto $\mathbf{z}^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \mathcal{D}_z \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y sea $\det \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right) \neq 0$. Entonces, existen vecindades $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}^m$ de los puntos $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$, respectivamente, y un único conjunto de funciones $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ definidas en \mathcal{D}_x :

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) \\ \mathbf{x} &= (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_x \end{aligned}$$

tal que $\mathbf{y}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_y$; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C^k(\mathcal{D}_x)$.

Demostración: Algún texto formal de Cálculo Vectorial. ■

Bibliografía

- [1] APOSTOL T.M., *Calculus*, Vol. 2
Academic Press, San Diego, California, 1995
- [2] ARFKEN G.B. & WEBER H.J., *Mathematical Methods for Physicists*
Editorial Reverté, Barcelona, España, 1980
- [3] ARNOLD V.I., *Ordinary Differential Equations*
The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1991
- [4] BLEECKER D. & CSORDAS G., *Basic Partial Differential Equations*
International Press, Cambridge Massachusetts, 1996
- [5] CARATHÉODORY C., *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*
Chelsea Publishing Company, New York, 1982
- [6] CODDINGTON E.A. & LEVINSON N., *Theory of Ordinary Differential Equations*
McGraw-Hill, New York, 1955
- [7] COURANT R. & HILBERT D., *Methods of Mathematical Physics*
InterScience Publishers, New York 1953 (Vol.I), 1962 (Vol.II)
- [8] ELSGOLC L.E., *Calculus of Variations*
Addison-Wesley Publishing Co., Massachusetts, 1962
- [9] FRIEDMAN B., *Lectures on Applications-Oriented Mathematics*
John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991
- [10] FRITZ J., *Partial Differential Equations*
Springer-Verlag, New York, 1982
- [11] GARABEDIAN P.R., *Partial Differential Equations*
Chelsea Publishing Company, New York, 1986

- [12] GELFAND I.M. & FOMIN S.V., *Calculus of Variations*
Dover Publications, New York, 1963
- [13] HABERMAN R., *Elementary Applied Partial Differential Equations*
Prentice-Hall, New Jersey, 1983
- [14] HILDEBRAND F. B., *Advanced Calculus for Applications*
Prentice-Hall Inc., Englewood Clifs, 1976
- [15] MARSDEN J.E. & TROMBA A.J., *Cálculo Vectorial*
Addison-Wesley, México, 1987
- [16] MELIKYAN A.A., *Generalized Characteristics of First Order PDEs. Applications in Optimal Control and Differential Games*
Birkhäuser, Boston, 1998
- [17] PETROVSKY I.G., *Lectures on Partial Differential Equations*
Dover Publication Inc., New York, 1991
- [18] RAUCH J., *Partial Differential Equations*
Springer-Verlag, New York, 1991
- [19] STAKGOLD I., *Green's Functions and Boundary Value Problems*
John Wiley & Sons Inc., New York, 1979
- [20] ZILL D.G., *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*
Thompson Editores, 1997
- [21] TRAN DUC VAN, MIKIO TSUJI, NGUYEN DUY THAI SON, *The Characteristic Method and its Generalization for First-Order Partial Differential Equations*
Chapman & Hall/CRC, 2000
- [22] WEINSTOCK R., *Calculus of Variations*
Dover Publications, New York, 1952