UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciado en Matemáticas

Grupos de Homotopía y Aplicaciones

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Jaime Lizardi Molina

Director de tesis: M.C. Carlos A. Robles Corbalá

Hermosillo, Sonora, México Enero de 2015

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a mis padres que sin ellos nada de esto hubiera sido posible. Tambien quiero agradecer a los sinodales M.C. Carolina Espinoza Villalva, Dra. Marysol Navarro Burruel, Dra. Martha Dolores Guzman Partida y M.C. Carlos Alberto Robles Corbala, por su paciencia y ayuda.

Introducción

En matemáticas, uno de los problemas principales consiste en clasificar los objetos de estudio. Para ello, generalmente se define una noción de equivalencia (dependiendo de las propiedades que nos interesen) entre dichos objetos y un problema fundamental consiste en, dados dos objetos, determinar si éstos son equivalentes o no. Por ejemplo, en geometría plana, si las propiedades que nos interesan son el tamaño y la forma, la noción de equivalencia estaría dada por el concepto de *congruencia*, así dos objetos (polígonos por ejemplo) serán equivalentes si y sólo si éstos son congruentes, es decir, si tienen la misma forma y tamaño. Si lo que nos interesa es únicamente la forma, la noción de equivalencia será la de *semejanza* y de esta manera, dos objetos serán equivalentes, si son proporcionales, no importando así su tamaño.

En el caso de la topología, la noción de equivalencia es la de *homeomorfismo*: dos espacios topológicos son homeomorfos (o equivalentes) si existe entre ellos una aplicación invertible (homeomorfismo), donde ella y su inversa sean continuas. Intuitivamente, esto quiere decir que podemos "deformar continuamente" uno de los espacios hasta obtener el otro. El problema de determinar si dos espacios son homeomorfos o no, utilizando directamente la definición de homeomorfismo, puede ser muy difícil. Para probar que son homeomorfos, tenemos que dar un homeomorfismo entre ellos, lo cual puede ser nada fácil. Por otro lado, para probar que no lo son tenemos que demostrar que no existe *ningún* homeomorfismo entre ellos, lo cuál puede ser aún más dificil. Otra forma más fácil de atacar el problema, consiste en buscar propiedades de los espacios topológicos que se preserven bajo homeomorfismo, de esta manera, si uno de los espacios posee dicha propiedad y otro no, entonces no pueden ser homeomorfos. Ejemplos de dichas propiedades son la *conexidad* y la *compacidad*.

Veamos algunos ejemplos de esta técnica. Usando el concepto de compacidad podemos ver que la recta real $\mathbb{R}$ y el círculo unitario $\mathbb{S}^1$ no son homeomorfos, ya que $\mathbb{S}^1$ es un espacio compacto, lo que equivale a decir que como subconjunto del plano euclideano es cerrado y acotado, mientras que $\mathbb{R}$ no es compacto por no ser acotado. Ahora usemos el concepto de conexidad. Intuitivamente, el que un espacio sea conexo significa que conste de un sólo "pedazo". Denotemos por $\mathbb{R}^n$ al espacio euclideano n-dimensional. Veamos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, no son homeomorfos. A primera vista, parece que la conexidad no nos ayuda a probar nuestra afirmación, ya que ambos, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son conexos, pero nos valemos del siguiente truco: supongamos que existe un homeomorfismo ϕ entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, si quitamos un punto p de $\mathbb{R}$ y su imagen bajo ϕ en $\mathbb{R}^n$ entonces seguiremos teniendo un homeomorfismo entre $\mathbb{R}\setminus\{p\}$ y $\mathbb{R}^n\setminus\{p\}$. Esto es imposible, ya que al quitarle un punto a $\mathbb{R}$ éste se separa en dos "pedazos", es decir, deja de ser conexo, mientras que $\mathbb{R}^n$ menos un punto no se separa. Por lo tanto, concluimos que no puede existir un homeomorfismo entre dichos espacios. Sin embargo, esta técnica no sirve para ver en general que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$, con $n \neq m$ y $n, m \geq 2$, no son homeomorfos, ya que $\mathbb{R}^n\setminus\{p\}$ es siempre conexo para $n \geq 2$. Para ello fueron necesarias nuevas técnicas. La búsqueda de dichas técnicas dió origen a la topología algebraica.

La idea principal en la topología algebraica es la de *invariante topológico*, la cual consiste en que a cada espacio topológico X se le asocia un objeto algebraico $h(X)$ (grupo, espacio vectorial, módulo, etc.) y a cada función continua f entre dos espacios topológicos X e Y, se le asocia una función $h(f) : h(X) \to h(Y)$ que preserva la estructura algebraica en cuestión (homomorfismo), de tal manera que si X e Y son homeomorfos, entonces $h(X)$ y $h(Y)$ son isomorfos, es decir, equivalentes como objetos algebraicos. Por lo tanto, si dos espacios X e Y son tales que $h(X) \neq h(Y)$, es decir, sus invariantes topológicos son distintos, entonces X e Y no pueden ser homeomorfos. Algunos ejemplos de invariantes topológicos son: los grupos de homotopía, los grupos de homología y los anillos de cohomología.

La primera parte de esta tesis consiste en definiciones y conceptos básicos importantes que servirán como un punto de partida para el desarrollo de los capítulos siguientes; la idea de este primer capítulo es que este trabajo sea autosuficiente.

En el segundo capítulo se introducen los conceptos de caminos y homotopías, se demuestra que la relación de homotopía es una relación de equivalencia, y además se define la multiplicación de caminos. A partir de esto se muestra que las clases de equivalencia de lazos con la multiplicación inducida por la multiplicación de caminos forma un grupo, el cual llamamos *el grupo fundamental*. Por último se generalizan esas ideas para definir los llamados *grupos de homotopía*.

En el capítulo tres se ve el efecto que tienen una aplicación continuan entre espacios topológicos sobre los grupos fundamentales, y como ésta induce un homomorfismo de grupos entre dichos grupos.

En el cuarto capítulo se calcula el grupo fundamental de la circunferencia mediante el uso de un espacio recubridor. Y por último, el quinto capítulo expone dos aplicaciones: la primera en la demostración del teorema fundamental del álgebra, y la segunda en la demostración del teorema de punto fijo de Brouwer en el plano.

Índice general

Capítulo 1

Notación y Definiciones Básicas

En este capítulo veremos las definiciones que nos servirán como punto de partida para la construcción de los grupos de homotopía y el grupo fundamental.

1.1. Espacios métricos y espacios topológicos

Definición 1.1.1. Una **topología** en un conjunto X no vacío es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

i) $\phi \in \mathcal{T}; X \in \mathcal{T}$

ii) $A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$

iii) $\{A_i\}_{i \in I} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

Definición 1.1.2. Si $\mathcal{T}$ es una topología en X, a la pareja $(X, \mathcal{T})$ la llamaremos **espacio topológico**, y los elementos que pertenecen a $\mathcal{T}$ reciben el nombre de **subconjuntos abiertos** de X.

Definición 1.1.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sean $V \subseteq X$, $x \in X$, decimos que V es **vecindad** o **entorno** de x si y solo si existe A subconjunto abierto tal que $x \in A \subseteq V$.

Definición 1.1.4. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $E \subseteq X$. Decimos que E es un **subconjunto cerrado** de $(X, \mathcal{T})$ si $X \backslash E$ es abierto, es decir, si $X \backslash E \in \mathcal{T}$.

Lema 1.1.1. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $Y \subseteq X$ entonces $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap A | A \in \mathcal{T}\}$ es una topológia en Y.

La topológia $\mathcal{T}_Y$ es llamada *topológia relativa* de X a Y.

Teorema 1.1.1. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, y $Y \subseteq X$, entonces $A \subseteq Y$ es cerrado en Y con la topología relativa de X a $Y \iff A = Y \cap C$ donde C es cerrado en X.

Demostración. A es cerrado en $Y \iff A = Y \backslash B$ con B abierto en $Y \iff A = Y \backslash (Y \cap B')$ con B' abierto en $X \iff A = (Y \backslash Y) \cup (Y \backslash B')$ con B' abierto en $X \iff A = \phi \cup (Y \backslash B')$ con B' abierto en $X \iff A = Y \cap (X \backslash B')$ con $X \backslash B'$ cerrado en X.

■

Definición 1.1.5. Supongamos que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son dos topologías sobre un conjunto X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, diremos que $\mathcal{T}'$ es *más fina* que $\mathcal{T}$.

Definición 1.1.6. Sea X un conjunto no vacío, una **base** para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tales que:

i) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico $\mathcal{B}$ que contiene a x.

ii) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, si $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ que contiene a x y es tal que $B_1 \subset B_2 \cap B_3$.

A los elementos de $\mathcal{B}$ se les llama **elementos básicos**.

Definición 1.1.7. Una **subbase** $\mathcal{S}$ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La *topología generada por la subbase* $\mathcal{S}$ se define como la colección $\mathcal{T}$ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Definición 1.1.8. Una ***métrica*** o ***distancia*** en un conjunto X no vacío es una función $d : X\text{x}X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisface los siguientes axiomas para cualesquiera $x, y, z \in X$:

i) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (desigualdad del triángulo).

Definición 1.1.9. Si X es un conjunto y d una métrica en X, entonces a la pareja (X,d) le llamaremos ***espacio métrico***.

Definición 1.1.10. Dado un espacio métrico (X,d) es posible considerar una colección de subconjuntos: para cada $x \in X$ y cada número real positivo r, tomamos el conjunto

$$B_d(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

A este conjunto le llamaremos ***bola abierta*** con centro en x y de radio r.

Teorema 1.1.2. Sea d una distancia sobre el conjunto X, entonces la colección de todas las bolas $B_d(x,\epsilon)$, con $x \in X$ y $\epsilon > 0$, es una base para una topología sobre X, la cual llamaremos *topología métrica* inducida por d.

Demostración. La primera condición de una base se cumple trivialmente, puesto que para todo $x \in X$ se cumple que $x \in B_d(x,\epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$. Para comprobar la segunda condición de una base, veamos primero que si y es un punto del elemento básico $B_d(x,\epsilon)$, entonces existe un elemento básico $B_d(y,\delta)$ que está totalmente contenido en $B_d(x,\epsilon)$. Definamos δ como el número positivo $\epsilon - d(x,y)$. Entonces, si $z \in B_d(y,\delta)$, tenemos que $d(y,z) < \epsilon - d(x,y)$, por lo cual concluimos que

$$d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z) < \epsilon.$$

De esta manera, si B_1 y B_2 son dos elementos básicos y si $y \in B_1 \cap B_2$, por lo que acabamos de ver, es posible elegir números positivos δ_1 y δ_2 de tal modo que $B_d(y,\delta_1) \subset B_1$ y $B_d(y,\delta_2) \subset B_2$. Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1,\delta_2\}$, concluimos que $B_d(y,\delta) \subset B_1 \cap B_2$.

∎

Definición 1.1.11. Sea X un espacio topológico, diremos que X es ***metrizable*** si existe una distancia d en el conjunto X que induce la topología de X.

Teorema 1.1.3. Sea X un espacio métrico con una distancia d. Se define $\overline{d} : X\text{x}X \to \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$\overline{d}(x, y) = min\{d(x, y), 1\}.$$

Entonces $\overline{d}$ es una distancia que induce la misma topología que d.

La distancia $\overline{d}$ se denomina ***distancia acotada*** correspondiente a d.

Demostración. La comprobación de las primeras dos condiciones de una distancia es trivial. Probemos la tercera condición:

$$\overline{d}(x, z) \leq \overline{d}(x, y) + \overline{d}(y, z).$$

Ahora, si $d(x, y) \geq 1$ ó $d(y, z) \geq 1$, entonces la parte derecha de esta desigualdad es, al menos, 1; puesto que la parte izquierda es (por definición) a lo más 1, la desigualdad se satisface. Falta estudiar el caso en el que $d(x, y) < 1$ y $d(y, z) < 1$. En este caso, tenemos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \overline{d}(x, y) + \overline{d}(y, z).$$

Además, por definición $\overline{d}(x, z) \leq d(x, z)$, así, la desigualdad del triángulo se cumple para $\overline{d}$. Ahora, para cualquier espacio métrico, la colección de las bolas de radio ϵ con $\epsilon < 1$ forman una base para la topología métrica, puesto que cada elemento básico que contiene a x contiene una bola de esa forma, centrada en x y de radio ϵ. Se sigue que d y $\overline{d}$ inducen la misma topología sobre X, porque las colecciones de bolas de radio ϵ, con $\epsilon < 1$, para estas dos distancias son idénticas.

∎

Teorema 1.1.4. Sean d y d' dos distancias sobre el conjunto X, y $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ las topologías que inducen, respectivamente. Entonces $\mathcal{T}'$ es mas fina que $\mathcal{T}$ si, y sólo si, para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon).$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$. Dado el elemento básico $B_d(x, \epsilon)$ para $\mathcal{T}$, existe un elemento básico B' para $\mathcal{T}'$ tal que $x \in B' \subset B_d(x, \epsilon)$. Dentro de B' podemos tomar una bola $B_{d'}(x, \delta)$ centrada en x.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición ϵ, δ. Dado un elemento básico B para $\mathcal{T}$ que contenga a x, podemos tomar dentro de B una bola $B_d(x, \epsilon)$ centrada en x. Por la condición dada, existe un δ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$. Así tenemos que $\mathcal{T}'$ es mas fina que $\mathcal{T}$.

∎

Definición 1.1.12. Dados cualesquiera $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, definimos la ***norma*** de x mediante la ecuación

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

y la ***distancia euclídea*** o ***distancia usual*** d sobre $\mathbb{R}^n$ por la ecuación

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Nótese que en el caso de los números reales $\mathbb{R}$, la distancia usual d está definida de la siguiente manera:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Definición 1.1.13. Dados cualesquiera $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, definimos la ***distancia del supremo*** ρ por la ecuación

$$\rho(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Probar que ρ es una distancia no es difícil. Sólo la desigualdad del triángulo no es trivial. De la desigualdad del triángulo para $\mathbb{R}$ se sigue que,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

Entonces, por definición de ρ,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

De esta manera tenemos,

$$\rho(x, z) = \text{máx}\{|x_i - z_i|\} \leq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

como se deseaba.

Dado un espacio métrico (X, d), la colección $\mathcal{T}_d = \phi \cup \{E \subseteq X : E$ es unión de bolas abiertas$\}$ es una topología en X que llamaremos **topología en X inducida por la métrica** d.

Definición 1.1.14. Sean X y Y espacios topológicos. La **topología producto** sobre XxY es la topología que tiene como base la colección $\mathcal{B} = \{U\text{x}V | U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$, es decir, $\mathcal{B}$ es la colección de todos los conjuntos de la forma UxV, donde U es un subconjunto abierto de X, y V es un subconjunto abierto de Y.

Comprobemos que $\mathcal{B}$ es una base. La primera condición se cumple, puesto que XxY es un elemento básico. La segunda condición se cumple puesto que tenemos lo siguiente

$$(U_1\text{x}V_1) \cap (U_2\text{x}V_2) = (U_1 \cap U_2)\text{x}(V_1 \cap V_2)$$

en donde el último conjunto es un elemento básico porque $U_1 \cap U_2$ y $V_1 \cap V_2$ son abiertos en X e Y, respectivamente.

Ejemplo.

Las topologías sobre $\mathbb{R}^n$ inducidas por la distancia euclídea d y la distancia del supremo ρ son la misma que la topología producto sobre $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sean $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$. Es fácil comprobar que

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n}\rho(x, y).$$

La primera desigualdad nos dice que

$$B_d(x, \epsilon) \subset B_\rho(x, \epsilon)$$

para todo x y ϵ, pues si $d(x,y) < \epsilon$, entonces también $\rho(x,y) < \epsilon$. De modo similar, la segunda desigualdad nos dice que

$$B_\rho(x, \epsilon/\sqrt{n}) \subset B_d(x, \epsilon)$$

para todos x y ϵ. Se sigue por el teorema 1.1.4, que las dos topologías asociadas a las distancias son la misma.

Ahora veamos que la topología producto es la misma que la dada por la distancia ρ. En primer lugar, sea

$$B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

un elemento básico para la topología producto, y sea $x = (x_1, ..., x_n)$ un elemento de B. Para cada i, existe un ϵ_i tal que

$$(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i) \subset (a_i, b_i),$$

y sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$. Entonces $B_\rho(x, \epsilon) \subset B$. Por lo tanto, la ρ-topología es más fina que la topología producto.

Recíprocamente, sea $B_\rho(x, \epsilon)$ un elemento básico para la ρ-topología. Dado el elemento $y \in B_\rho(x, \epsilon)$, buscamos un elemento básico B para la topología producto tal que

$$y \in B \subset B_\rho(x, \epsilon).$$

Lo cual es trivial, pues

$$B_\rho(x, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$$

ya es un elemento básico de la topología producto.

■

Teorema 1.1.5. Sea $\overline{d}(a,b) = \text{mín}\{|a-b|, 1\}$ la distancia acotada usual sobre $\mathbb{R}$. Si x e y son dos puntos en $\mathbb{R}^\omega$ con ω un cardinal infinito numerable, definimos

$$D(x,y) = \sup_{i \in \omega} \left\{ \frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} \right\}.$$

Entonces D es una distancia que induce la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$.

Demostración. Las propiedades de una distancia se satisfacen trivialmente excepto para la desigualdad del triángulo, que se prueba al observar que, para todo i,

$$\frac{\overline{d}(x_i,y_i)}{i} \leq \frac{\overline{d}(x_i,y_i)}{i} + \frac{\overline{d}(y_i,z_i)}{i} \leq D(x,y) + D(y,z)$$

así

$$sup\left\{ \frac{\overline{d}(x_i,y_i)}{i} \right\} \leq D(x,y) + D(y,z).$$

El hecho de que D induce la topología producto se hace de la siguiente manera. Sea U un abierto en la topología métrica y sea $x \in U$; encontraremos un conjunto abierto V en la topología producto tal que $x \in V \subset U$. Elegimos una bola $B_D(x,\epsilon)$ que esté en U. Después elegimos N suficientemente grande para que $1/N < \epsilon$. Finalmente, sea V el elemento básico para la topología producto

$$V = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_N - \epsilon, x_N + \epsilon) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots.$$

Afirmamos que $V \subset B_D(x,\epsilon)$: dado cualquier y de $\mathbb{R}^\omega$,

$$\frac{\overline{d}(x_i,y_i)}{i} \leq \frac{1}{N} \text{ para } i \geq N.$$

Por lo tanto,

$$D(x,y) \leq \text{máx}\left\{ \frac{\overline{d}(x_1,y_1)}{1}, \cdots, \frac{\overline{d}(x_N,y_N)}{N}, \frac{1}{N} \right\}.$$

Si y está en V, esta expresión es más pequeña que ϵ, por lo que $V \subset B_D(x,\epsilon)$, como se deseaba.

Recíprocamente, consideremos un elemento básico

$$U = \prod_{i \in \mathbb{Z}_+} U_i$$

para la topología producto, donde U_i es abierto en $\mathbb{R}$ para $i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $U_i = \mathbb{R}$ para el resto de índices i. Dado $x \in U$, podemos tomar un conjunto abierto V en la topología métrica tal que $x \in V \subset U$. Tomemos un intervalo $(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i)$ en $\mathbb{R}$ centrado en x_i y contenido en U_i para $i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$; elijamos cada $\epsilon_i \leq 1$. Entonces definimos

$$\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_i/i | i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Afirmamos que

$$x \in B_D(x, \epsilon) \subset U.$$

Sea y un punto de $B_D(x, \epsilon)$. Entonces, para todo i,

$$\frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} \leq D(x, y) < \epsilon.$$

Ahora, si $i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entonces $\epsilon \leq \epsilon_i/i$, por lo que $\overline{d}(x_i, y_i) < \epsilon_i \leq 1$; se sigue que $|x_i - y_i| < \epsilon_i$. Por tanto, $y \in \prod U_i$, como se deseaba.

∎

Definición 1.1.15. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia indexada de espacios topológicos. Definimos la aplicación proyección de la siguiente manera:

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$$

en donde la función asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada β-ésima.

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in I}) = x_\beta.$$

Definición 1.1.16. Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es un par U, V de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X. Diremos que el espacio X es **conexo** si no existe una separación de X.

Obsérvese que si A es un subconjunto propio no vacío de X que es a la vez abierto y cerrado, entonces los conjuntos $U = A$ y $V = X - A$ constituyen una separación de X. Recíprocamente, si U y V forman una separación de X, entonces U es un subconjunto propio no vacío que es abierto y cerrado.
Debido a esto podemos formular la definición anterior de conexión de la siguiente manera:

Lema 1.1.2. Un espacio X es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.

Demostración. Si A es un subconjunto propio no vacío de X que es a la vez abierto y cerrado, entonces los conjuntos $U = A$ y $V = X\backslash A$ constituyen una separación de X. Recíprocamente, si U y V forman una separación de X, entonces U es un subconjunto propio no vacío de X que es abierto y cerrado.

■

Definición 1.1.17. Sea X un espacio topológico, $I = [a, b]$ y sean $x_0, x_1 \in X$. Un **camino** de x_0 a x_1 en X es una función continua $\alpha : I \to X$ que satisface $\alpha(a) = x_0$ y $\alpha(b) = x_1$.

Definición 1.1.18. Un espacio X se dice que es **conexo por caminos** si cada par de puntos de X se puede unir mediante un camino en X.

Definición 1.1.19. Un espacio X se dice que es **localmente conexo en** x si para cada entorno U de x, existe un entorno conexo V de x contenido en U. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, se dice que X es **localmente conexo.** De manera análoga, se dice que un espacio X es **localmente conexo por caminos en** x si para cada entorno U de x, existe un entorno conexo por caminos V de x contenido en U. Si X es localmente conexo por caminos en cada uno de sus puntos, se dice que X es **localmente conexo por caminos.**

Lema 1.1.3. Si los conjuntos C y D forman una separación de X, y además Y es un subespacio conexo de X, entonces Y está totalmente contenido en C, o en D.

Demostración. Como C y D son conjuntos abiertos en X, los conjuntos $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son conjuntos abiertos en Y. Estos dos conjuntos son disjuntos y su unión es Y, si ambos conjuntos fueran no vacíos, constituirían una separación de Y. De esta forma, alguno de ellos es vacío. Por tanto, Y está completamente contenido en C o en D.

■

Teorema 1.1.6. La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de un espacio X y sea p un punto de $\bigcap A_\alpha$. Veamos que el espacio $Y = \bigcup A_\alpha$ es conexo. Supongamos que $Y = C \cup D$ es una separación de Y. Luego el punto p está, en C o bien en D; sin perdida de generalidad supongamos que $p \in C$. Como A_α es conexo, se sigue que $A_\alpha \subset C$, o bien $A_\alpha \subset D$, aunque esta última posibilidad se descarta pues $p \in A_\alpha$ y $p \in C$. Por lo tanto, $A_\alpha \subset C$ para cada α, y así tenemos que $\bigcup A_\alpha \subset C$, contradiciendo el hecho de que D era no vacío.

■

Teorema 1.1.7. Sea A un subespacio conexo de X. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es también conexo.

Demostración. Sea A conexo y sea $A \subset B \subset \overline{A}$. Supongamos que $B = C \cup D$ es una separación de B. Por el Lema 1.1.3, el conjunto A cumple que $A \subset C$ o $A \subset D$; sin perdida de generalidad supongamos que $A \subset C$. Entonces $\overline{A} \subset \overline{C}$. Así $B \subset \overline{C}$, y además como $\overline{C}$ y D son disjuntos, B no puede intersecar a D. Esto contradice el hecho de que D es un subconjunto no vacío de B.

■

Teorema 1.1.8. El producto cartesiano finito de espacios conexos es conexo.

Demostración. Demostraremos este resultado para el producto de dos espacios conexos X e Y. La prueba es como sigue. Elijamos un *punto base* axb en el producto XxY. Observemos que Xxb es conexo, ya que es homeomorfo a X, y que también lo es cada xxY ya que éstos son homeomorfos a Y. Como consecuencia, cada espacio

$$T_x = (X \times b) \cup (x \times Y)$$

es conexo ya que es la unión de dos espacios conexos que tienen el punto xxb en común. Ahora, consideremos la unión $\bigcup_{x\in X} T_x$ de todos estos espacios. Como todos tienen al punto axb en común, esta unión es conexa. Finalmente, al coincidir esta unión con el propio espacio XxY, se concluye que XxY es conexo.

■

Definición 1.1.20. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que **cubre** a X, o que es un **cubrimiento** de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Se dice que $\mathcal{A}$ es un **cubrimiento abierto** de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

Definición 1.1.21. Un espacio X se dice que es **compacto** si de cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre X.

Lema 1.1.4. Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si, y sólo si, cada cubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre a Y.

Demostración. Supongamos que Y es compacto y que $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento de Y por abiertos en X. Entonces la colección

$$\{A_\alpha \cap Y | \alpha \in J\}$$

es un cubrimiento de Y por abiertos en Y; como Y es compacto, existe una subcolección finita de la forma

$$\{A_{\alpha_1} \cap Y, \ldots, A_{\alpha_n} \cap Y\}$$

que cubre a Y. Entonces $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a Y.

Recíprocamente, sea $\mathcal{A}' = \{A'_\alpha\}$ un cubrimiento de Y por abiertos de Y. Para cada α, podemos elegir un conjunto A_α abierto en X tal que

$$A'_\alpha = A_\alpha \cap Y.$$

La colección $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos en X. Por hipótesis, alguna subcolección finita $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ cubre Y. Entonces $\{A'_{\alpha_1}, \ldots, A'_{\alpha_n}\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}'$ que cubre Y.

■

Teorema 1.1.9. Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado del espacio compacto X. Dado un cubrimiento $\mathcal{A}$ por abiertos en X, podemos considerar el cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X uniendo a $\mathcal{A}$ el conjunto abierto $X\backslash Y$, es decir,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}.$$

Como X es compacto, alguna subcolección finita cubre X. Si esta subcolección contiene al conjunto $X - Y$, lo descartamos. Si no es así, la dejamos como está. En cualquier caso, la colección resultante es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y.

■

Definición 1.1.22. Un espacio topológico X se denomina **espacio de Hausdorff** si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen vecindades U_1 y U_2 de x_1 y x_2, respectivamente, que son disjuntas.

Teorema 1.1.10. Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Demostración. Sea Y un subespacio compacto del espacio de Hausdorff X. Probaremos que $X - Y$ es abierto, luego Y será cerrado. Sea x_0 un punto de $X - Y$. Vamos a demostrar que existe una vecindad de x_0 que no intersecta a Y. Para cada punto y de Y, elijamos vecindades disjuntas U_y y V_y de los puntos x_0 e y, respectivamente. La colección $\{V_y | y \in Y\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X; por tanto, podemos cubrir Y con un número finito de estos conjuntos, digamos $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. Luego el conjunto abierto

$$V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$$

contiene a Y, y es disjunto del abierto

$$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$$

que se forma al tomar la intersección de los correspondientes entornos de x_0, ya que si z es un punto de V, entonces $z \in V_{y_i}$ para algún i, por tanto, $z \notin U_{y_i}$ y así $z \notin U$. Por tanto, U es entorno de x_0 que no intersecta a Y.

■

Corolario 1.1.1. Si Y es un su subespacio compacto de un espacio de Hausdorff X y x_0 no está en Y, entonces existen abiertos disjuntos U y V de X conteniendo a x_0 y a Y respectivamente.

Un concepto básico muy importante en la topología es el de función continua. Intuitivamente, una función f definida sobre un espacio topológico X y que toma valores en otro espacio topológico Y es continua en un punto $x_0 \in X$ si manda puntos cercanos a x_0 en puntos cercanos de $f(x_0)$.

En el caso de los espacios métricos, si (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos, decimos que $f : X \to Y$ es una función continua en $x_0 \in X$ si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal modo que $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, siempre que $d_X(x, x_0) < \delta$. Utilizando notación de bolas abiertas podemos expresar lo anterior de la siguiente manera: f es continua en x_0 si y sólo si para cada bola abierta $B_{d_Y}(f(x_0), \epsilon)$ existe una bola abierta $B_{d_X}(x_0, \delta)$ que satisface $f(B_{d_X}(x_0, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(x_0), \epsilon)$.

A continuación generalizaremos estas ideas a espacios topológicos.

Definición 1.1.23. Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función entre espacios topológicos.

i) Diremos que f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si para cada $A \in \mathcal{T}_Y$ que contiene a $f(x_0)$, existe un $B \in \mathcal{T}_X$ que contiene a x_0 y que satisface $f(B) \subseteq A$.

ii) f es continua si f es continua en todos los puntos de X.

iii) f es discontinua en $x_0 \in X$ si no es continua en $x_0 \in X$.

Teorema 1.1.11. Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función entre espacios topológicos, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i) f es continua.

ii) Para cada $A \in \mathcal{T}_Y \Longrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$.

iii) Para cada B cerrado de $Y \Longrightarrow f^{-1}(B)$ es cerrado en X.

Lema 1.1.5. **(Lema del pegado)** Sean X y Y espacios topológicos, supongamos que $X = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos cerrados de X. Si $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ son funciones continuas tales que $f(a) = g(a)$ para toda $x \in A \cap B$, entonces la función $h : X \to Y$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es continua.

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de Y. Tenemos que

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$$

Puesto que f es continua, f^{-1} es cerrado en A y, por tanto, cerrado en X. De la misma manera, $g^{-1}(C)$ es cerrado en B y por ello cerrado en X. Su unión $h^{-1}(C)$ es, de este modo, cerrada en X.

$\blacksquare$

Teorema 1.1.12. La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y supongamos que X es conexo. Veamos que el espacio imagen $Z = f(X)$ es conexo. Como la aplicación obtenida de f al restringir su rango al espacio Z es también continua, es suficiente considerar el caso de una aplicación continua y sobreyectiva

$$g : X \to Z.$$

Supongamos que $Z = A \cup B$ es una separación de Z en dos conjuntos disjuntos no vacíos y abiertos en Z. Entonces $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son conjuntos disjuntos cuya unión es X. Además son abiertos en X, pues g es continua, y no vacíos, porque g es sobreyectiva. Así, constituyen una separación de X, contradiciendo la hipótesis de que X era conexo.

$\blacksquare$

Teorema 1.1.13. La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es un espacio compacto.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua con X compacto. Si $\mathcal{A}$ un cubrimiento del conjunto $f(X)$ por abiertos de Y. La colección

$$\{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}\}$$

es un cubrimiento de X por conjuntos abiertos ya que f es continua. Por tanto, un número finito de ellos, digamos

$$f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)$$

cubren a X. entonces los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ cubren $f(X)$.

■

Otros conceptos fundamentales en la topología son los de ***homeomorfismo*** y ***espacios homeomorfos***, estos se refieren a los objetos topológicos que se consideran equivalentes.

Dada f una función continua y biyectiva entre espacios topológicos. una pregunta natural sería si f^{-1} es una función continua. La respuesta en general es negativa. En efecto, sea X un espacio con más de un punto, consideremos la función identidad $id_X : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$, con $\mathcal{T}_1$ la topología discreta en X y $\mathcal{T}_2$ es la topología indiscreta, este es un ejemplo en donde id_X es una función continua y biyectiva, mientras id_X^{-1} no es continua.

Definición 1.1.24. Llamaremos un **homeomorfismo**, a una función biyectiva $h : X \to Y$ (con X y Y espacios topológicos) si tanto ella como su inversa son funciones continuas.

Definición 1.1.25. Diremos que los espacios topológicos X y Y son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre X y Y. La expresion $X \cong Y$ denotara que los espacios X y Y son homeomorfos.

Una utilidad importante del teorema 1.1.13 es la herramienta que nos ofrece para comprobar si una aplicación es un homeomorfismo.

Teorema 1.1.14. Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Comprobaremos que las imágenes de conjuntos cerrados de X bajo la aplicación f son también cerrados en Y; con esto demostraremos la continuidad de la aplicación f^{-1}. Si A es cerrado en X, entonces A es compacto, por el teorema 1.1.9. Por tanto, el teorema 1.1.13 nos asegura que $f(A)$ es compacto. Ahora, como Y es Hausdorff, $f(A)$ es cerrado en Y, por el teorema 1.1.10.

■

Teorema 1.1.15. El producto de un número finito de espacios compactos es compacto.

Demostración. Demostraremos que el producto de dos espacios compactos es compacto; el teorema se sigue entonces por inducción sobre cualquier producto finito.

Paso 1. Sean X, Y espacios con Y compacto. Sea x_0 un punto de X, y sea N un abierto de XxY que contiene la "rebanada" x_0xY de XxY. Probaremos el siguiente resultado:

Existe una vecindad W de x_0 en X tal que N contiene por completo al

conjunto WxY.

El conjunto WxY se denomina **tubo** sobre x_0xY. En primer lugar, cubramos x_0xY por elementos básicos UxV (para la topología de XxY) de modo que Ux$V \subset N$. El espacio x_0xY es compacto ya que es homeomorfo a Y. De esta forma, podemos cubrir x_0xY con un número finito de tales elementos básicos;

$$U_1 \text{x} V_1, \ldots, U_n \text{x} V_n.$$

(Suponemos que cada uno de los elementos básicos U_ixV_i intersecta a x_0xY, ya que si no ocurriera así, lo podríamos descartar de la colección finita y seguir teniendo un cubrimiento de x_oxY.)Definamos

$$W = U_1 \cap \cdots \cap U_n.$$

El conjunto W es abierto, y contiene a x_0. Afirmamos que los conjuntos U_ixV_i, también cubren el tubo WxY. Sea xxy un punto de WxY. consideremos el punto x_0xy de la rebanada x_0xY que tiene la misma y-coordenada. Ahora, x_0xy pertenece a algún U_ixV_i para algún i, así que $y \in V_i$. Pero $x \in U_j$ para todo j (ya que $x \in W$). Así, se tiene que xx$y \in U_i$xV_i, como queriamos demostrar. Como todos los conjuntos U_ixV_i están contenidos en N, y como cubren al conjunto WxY, se tiene que el tubo WxY también está contenido en N.

Paso 2. A continuación probaremos el teorema. Sean X e Y espacios compactos. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de XxY. Dado $x_0 \in X$, la rebanada x_0xY es compacta y estará cubierta por un número finito de elementos $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathcal{A}$.

La unión $N = A_1 \cup \cdots \cup A_m$ es un abierto que contiene a x_0xY; por el paso 1, el abierto N contiene un tubo WxY sobre x_0xY donde W es abierto de X. Entonces WxY está cubierto por un número finito de elementos $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathcal{A}$.

De esta forma, para cada x en X, podemos elegir un entorno W_x de x tal que el tubo W_xxY puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. La colección de todos los entornos W_x es un cubrimiento abierto de X; por la compacidad de X, existe una subcolección finita

$$\{W_1, \ldots, W_k\}$$

cubriendo X. La unión de los tubos

$$W_1 \text{x} Y, \ldots, W_k \text{x} Y$$

es el espacio XxY, y cada uno de ellos puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$, y así XxY es compacto.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Grupos de Homotopía

Uno de los problemas básicos en la topología es determinar si dos espacios topológicos dados son homeomorfos. No hay un método para resolver este problema en general, pero existen técnicas que se aplican en casos particulares.

Demostrar que dos espacios *son* homeomorfos consiste en construir una aplicación continua y biyectiva de uno en el otro que tenga inversa continua, y existen técnicas para construir aplicaciones continuas.

Demostrar que dos espacios *no* son homeomorfos es una cuestión diferente. Para ello, debemos probar que *no* existe ninguna aplicación continua con inversa continua. Si encotramos alguna propiedad topológica que sea cierta para un espacio pero para el otro no, entonces el problema queda resuelto y los espacios no pueden ser homeomorfos. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, 1]$ no puede ser homeomorfo al intervalo abierto $(0, 1)$, puesto que el primero es un espacio compacto y el segundo no lo es. Sin embargo en ocasiones las propiedades topológicas como compacidad, conexidad, conexidad local, y metrizabilidad no son suficientes para demostrar que dos espacios son homeomorfos.

Por esto, debemos introducir nuevas propiedades y nuevas técnicas. Una de las propiedades más usuales es la de ser *simplemente conexo*, a grandes rasgos, decimos que un espacio X es simplemente conexo si toda curva cerrada en X puede contraerse a un punto en X. Así por ejemplo la propiedad de conexidad simple va a distingur entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; en efecto, quitando un punto de $\mathbb{R}^3$ el espacio obtenido sigue siendo simplemente conexo, pero al quitar un punto de $\mathbb{R}^2$ sucede lo contrario. Esta propiedad también va a distingir entre $\mathbb{S}^2$ (que es simplemente conexo) y el toro (que no lo es). Sin embargo, no va a distinguir entre dos espacios en donde ninguno de los dos sea simplemente conexo.

Existe una idea más general que el concepto de conexidad simple, una idea que incluye la conexidad simple como un caso particular. Ésta involucra cierto *grupo* conocido como *grupo fundamental* del espacio. Dos espacios que son homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos. Y la condición de conexidad simple es precisamente la condición de que el grupo fundamental de X sea el grupo trivial (grupo con un elemento).

En el presente capítulo construiremos los grupos de homotopía y el grupo fundamental de un espacio topológico X.

2.1. Homotopía de aplicaciones continuas

De aquí en adelante tomaremos un caso particular de caminos, tomando $I = [0, 1]$. Dado X un espacio topológico, $I = [0, 1]$ y $x_0, x_1 \in X$. Diremos entonces que un **camino o trayectoria** de x_0 a x_1 en X es una función continua $\alpha : I \to X$ que satisface $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$.

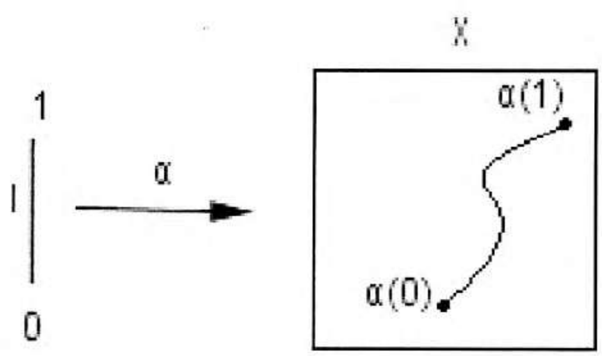

FIGURA 2.1

Definición 2.1.1. Un **lazo** en X es un caso particular de un camino en X en donde $x_0 = x_1$, es decir, un lazo en X es una función continua $\alpha : I \to X$ que satisface $\alpha(0) = \alpha(1)$. Si $\alpha(0) = x_0$ decimos que α es un **lazo basado** en x_0 en X.

Definición 2.1.2. Sean X y Y espacios topológicos, $I = [0, 1]$. Diremos que dos aplicaciones continuas $f_0, f_1 : X \to Y$ son **homotópicas** si existe una aplicación continua $F : X \times I \to Y$ que satisface:

i) $F(x, 0) = f_0(x)$ para toda $x \in X$.

ii) $F(x, 1) = f_1(x)$ para toda $x \in X$.

Esquemáticamente tenemos lo siguiente:

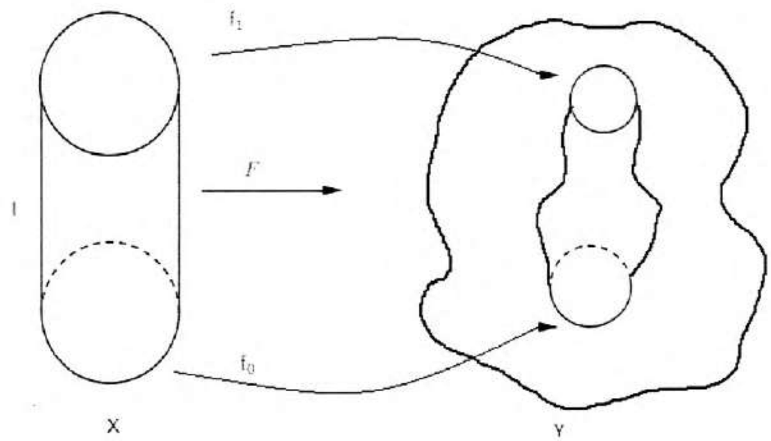

FIGURA 2.2

A la aplicación F se llama homotopía entre f_0 y f_1. La relación de homotopía se denota por $f_0 \simeq f_1$ o $F : f_0 \simeq f_1$ cuando especificamos la homotopía entre f_0 y f_1.

Intuitivamente una homotopía entre los caminos f_0 y f_1 es una deformación continua de f_0 a f_1 por medio de una familia de funciones continuas $f_t(x) = F(x, t)$, $0 \leq t \leq 1$ que dependen continuamente del parámetro t.

Si $f : I \to Y$ es un camino cualquiera en Y y ϵ_{f_0} es el camino constante en $f(0)$ en Y, es decir, $\epsilon_{f_0}(t) = f(0)$ para toda $t \in I$, entonces se cumple que $f \simeq \epsilon_{f_0}$. Para verificar esto definamos la siguiente homotopía:

$$F : I \times I \to Y \text{ tal que}$$
$$F(x, t) = f((1 - t)x), \forall x \in I, \forall t \in I.$$

Así, como f es continua, se sigue que $F(x,t)$ es continua.
Además $F(x,0) = f((1-0)x) = f(x)$, $\forall x \in I$
y $F(x,1) = f((1-1)x) = f(0) = \epsilon_{f_0}(t)$, $\forall x \in I$.

Para evitar este tipo de situaciones, definiremos un concepto más general de homotopía, el de **homotopía relativa** a un subconjunto $A \subseteq I$, en la cual pediremos que $f_0|A = f_1|A$, es decir, la homotopía deja fijo a todo punto de A.

Definición 2.1.3. Sean X y Y espacios topológicos, A un subconjunto de X y $f_0, f_1 : X \to Y$ funciones continuas. Diremos que f_0 es **homotópica a f_1 relativa a A** si existe una homotopía $F : X \times I \to Y$ entre f_0 y f_1 tal que para toda $a \in A$, $F(a,t)$ no dependa de t, es decir, F satisface lo siguiente:

i) $F(x,0) = f_0(x)$ para toda $x \in X$.

ii) $F(x,1) = f_1(x)$ para toda $x \in X$.

iii) $F(a,t) = f_0(a) = f_1(a)$ para toda $a \in A$ y para toda $t \in I$.

Denotaremos la relación de homotopía relativa a A por $f_0 \simeq f_1(relA)$ o por $F : f_0 \simeq_{relA} f_1$ si queremos especificar la homotopía relativa a A entre f_0 y f_1.

Ejemplos.

i) Sea $X = [0,1]$, $A = \{0\} \in X$, y $f_0, f_1 : X \to Y$ tal que $f_0(0) = f_1(0)$. Así tenemos que $f_0 \simeq_{relA} f_1$.

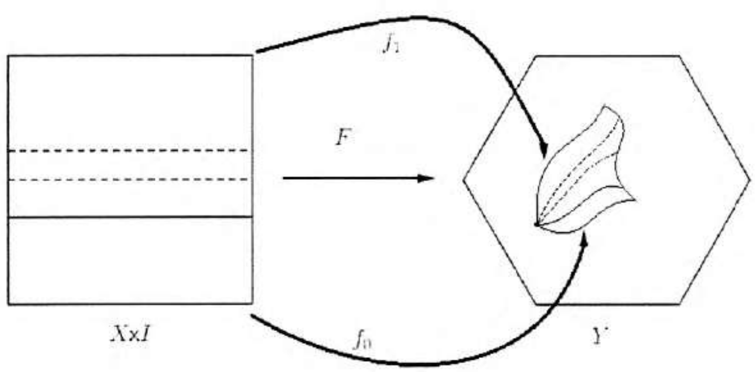

FIGURA 2.3

ii) Sea $X = [0,1]$, $A = \{0,1\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq \|x\| \leq 2\}$.

En este caso particular que se muestra en la figura, las aplicaciones f_0 y f_1 no son homotópicas relativamente a A aún cuando son homotópicas; ya que $F : I \times I \to Y$ dada por $F(x,t) = f_0((1-t)x)$ es una homotopía tal que $F : f_o \simeq \epsilon_{f_o(0)}$ y $G : I \times I \to Y$ dada por $G(x,t) = f_1((1-t)x)$ es una homotopía tal que $G : f_1 \simeq \epsilon_{f_1(0)}$, además $f_0(0) = f_1(0)$ por lo que $\epsilon_{f_0(0)} = \epsilon_{f_1(0)}$, así pues definamos $H : I \times I \to Y$ como

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ G(x,2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La continuidad de H la garantiza el lema 1.1.5, además $H(x,0) = F(x,0) = f_0(x)$ y $H(x,1) = G(x,0) = f_1(x)$; por tanto $f_0 \simeq f_1$. Sin embargo, no podemos encontrar una homotopía que mantenga fijos a $\{0,1\}$ y deforme continuamente a f_0 en f_1 debido a que se interpone el agujero.

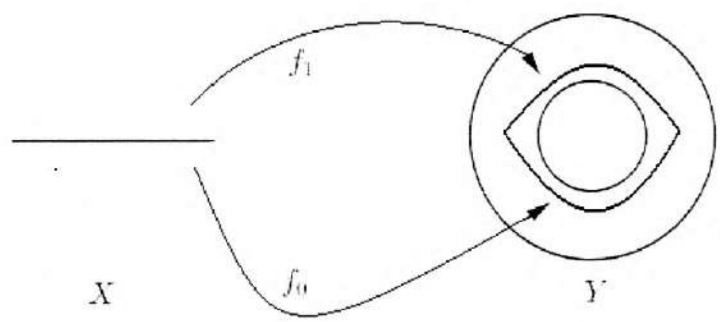

FIGURA 2.4

Lema 2.1.1. La relación $\simeq_{relA}$ define en el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y, una relación de equivalencia.

Demostración. Sea $\mathcal{C}(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y | f \text{ es continua}\}$, y sea $A \subseteq X$.
La relación es *reflexiva*, pues claramente para cualquier $f(x) \in \mathcal{C}(X,Y)$ se tiene que $F(x,t) = f(x)$ es una homotopía relativa a A entre f y ella misma.
La relación es *simétrica* ya que si $F : f_0 \simeq_{relA} f_1$ es la homotopía relativa a A que deforma continuamente f_0 a f_1, entonces

$$G : X \times I \to Y \text{ donde } G(x,t) = F(x, 1-t)$$

es una función continua pues F lo es, además

$$G(x,0) = F(x,1) = f_1(x) \text{ para toda } x \in X,$$
$$G(x,1) = F(x,0) = f_0(x) \text{ para toda } x \in X,$$

y por último

$$G(a,t) = F(a, 1-t) = f_0(a) = f_1(a) \text{ para toda } a \in A, \text{ y para toda } t \in I.$$

De esta manera G es la homotopía que deforma continuamente a f_1 en f_0 dejando fijo a todo punto de A.

Para ver que es *transitiva* supongamos que $f \simeq_{relA} g$ y $g \simeq_{relA} h$, y sean F y G las homotopías que realizan las respectivas equivalencias. Debemos encontrar una homotopía H que realice la equivalencia $f \simeq_{relA} h$; para ello definamos $H : X \times I \to Y$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que H realiza las equivalencias F y G en la mitad del tiempo original. La continuidad de H se sigue del lema 1.1.5; además tenemos que

$$H(x,0) = F(x,0) = f(x),$$
$$H(x,1) = G(x,1) = h(x).$$

Por ultimo, dado que F y G mantienen fijo a A para cualquier tiempo t, resulta que H también mantiene fijo a A para todo $t \in I$. Así H es la homotopía deseada.

■

A partir del concepto de aplicaciones homotópicas podemos definir también una relación de equivalencia entre espacios topológicos de la siguiente manera.

Definición 2.1.4. Diremos que dos espacios topológicos X y Y son del **mismo tipo de homotopía** si existen aplicaciones continuas $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tales que

$$g \circ f \simeq 1_X : X \to X,\ f \circ g \simeq 1_Y : Y \to Y.$$

A las aplicaciones f y g les llamaremos **equivalencias homotópicas**, en tal caso diremos también que X y Y son **homotópicamente equivalentes**.

La noción de tipo de homotopía generaliza a la del tipo topológico (correspondiente a la relación de homeomorfismo). Pues una consecuencia inmediata de la definición anterior es que dos espacios homeomorfos son del mismo tipo de homotopía. Efectivamente: si $X \cong Y$ entonces existe $h : X \to Y$ aplicación continua y biyectiva y con inversa $h^{-1} : Y \to X$ continua tal que

$$h \circ h^{-1} = 1_Y,$$
$$h^{-1} \circ h = 1_X,$$

así tenemos que X y Y son del mismo tipo de homotopía.

Sin embargo, el recíproco en general no es cierto. Considere $\mathbb{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ el n-disco, el cual no es homeomorfo a un punto $\{y\} \subseteq \mathbb{D}^n$, sin embargo son del mismo tipo de homotopía. Para verificar esto, consideremos la inclusión $i : \{y\} \to \mathbb{D}^n$ (dada por $i(y) = y$) y la aplicación constante $g : \mathbb{D}^n \to \{y\}$. Claramente $g \circ i = 1_{\{y\}} : \{y\} \to \{y\}$, sólo falta ver que $i \circ g \simeq 1_{\mathbb{D}^n} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$, dicha equivalencia está dada por la homotopía $F : \mathbb{D}^n \times I \to \mathbb{D}^n$, definida por $F(x,t) = tx + (1-t)y$, ya que $F(x,0) = y$ y $F(x,1) = x$ donde ambas igualdades se cumplen para todo $x \in \mathbb{D}^n$, por lo tanto $F : i \circ g \simeq 1_{\mathbb{D}^n}$.

Definición 2.1.5. Diremos que X es un espacio contractible si X es homotópicamente equivalente a un punto.

Por lo anterior, $\mathbb{D}^n$ es contraible. En general, todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es contraíble, esto lo podemos verificar de la siguiente manera: Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo y sea $\{y\} \subseteq A$, para verificar que son homotópicamente equivalentes consideremos la inclusión $i : \{y\} \to A$ y la aplicación constante $g : A \to \{y\}$. Es claro que $g \circ i = 1_{\{y\}} : \{y\} \to \{y\}$; veamos que $i \circ g \simeq 1_A : A \to A$, como A es convexo entonces para todo $x, y \in A$ el conjunto $\{tx + (1-t)y | 0 \leq t \leq 1\}$ está contenido en A, por lo que tiene sentido definir la homotopía $F(x,t) = tx + (1-t)y$, la cual realiza la equivalencia deseada puesto que $F(x,0) = y$ y $F(x,1) = x$.

Considerando el cilindro $\mathsf{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$ y la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ obtenemos un ejemplo de un par de espacios homotópicamente equivalentes. Consideremos $i : \mathbb{S}^1 \to \mathsf{C}$ la inclusión y $r : \mathsf{C} \to \mathbb{S}^1$ dada por $r(x,y,z) = (x,y,0)$.

Veamos que $r \circ i = 1_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned} r \circ i(x,y,z) &= r(i(x,y,z)) \\ &= r(x,y,z) \\ &= (x,y,0) \\ &= 1_{\mathbb{S}^1}(x,y,0) \end{aligned}$$

Así tenemos que $r \circ i \simeq 1_{\mathbb{S}^1}$.

Para ver que $i \circ r \simeq 1_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ tenemos que dar la homotopía que realice la equivalencia. Sea $F : \mathsf{C} \mathsf{x} I \to \mathsf{C}$ dada por

$$F((x,y,z),t) = (x,y,(1-t)z)$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} F((x,y,z),0) &= (x,y,z) \\ &= 1_{\mathsf{C}}(x,y,z). \\ F((x,y,z),1) &= (x,y,0) \\ &= i \circ r(x,y,z). \end{aligned}$$

Se sigue que $i \circ r \simeq 1_{\mathsf{C}}$, y por lo tanto $\mathbb{S}^1$ es homotópicamente equivalente a C. Este ejemplo da pie a las siguientes definiciones.

Definición 2.1.6. Sea X un espacio topológico. Diremos que $A \subseteq X$ es un **retracto** de X si existe una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r \circ i = 1_A$ (es decir, si $r|_A = 1_A$), donde $i : A \to X$ es la inclusión. A la aplicación r se le llama **retracción**.

Definición 2.1.7. Sea $A \subseteq X$, diremos que A es un **retracto de deformación** de X si existe una retracción $r : X \to A$ tal que $i \circ r \simeq 1_X$, donde $i : A \to X$ es la inclusión.

Esto es, A es un retracto de deformación de X si es posible encontrar una homotopía $F : X \mathsf{x} I \to X$ tal que $F(x,0) = x$ para todo $x \in X$ y $F(x,1) \in A$

para todo $x \in X$. De las definiciones anteriores tenemos que la circunferencia es un retracto de deformación del cilindro; además de las mismas se concluye que si A es un retracto de deformación de X, entonces A y X son homotópicamente equivalentes. Es más, en el ejemplo de la circunferencia y el cilindro, la aplicación $i \circ r$ es homotópica a la identidad relativamente a la circunferencia; lo que da pie a otra definición.

Definición 2.1.8. Se dice que un subconjunto A de X es un **retracto de deformación fuerte** si existe una retracción $r : X \to A$ tal que $i \circ r \simeq_{relA} 1_X : X \to X$.

Así tenemos que A es un retracto de deformación fuerte de X, si existe una homotopía $F : X\text{x}I \to X$ tal que $F(x, 0) = x$ para todo $x \in X$, $F(a, t) = a$ para todo $a \in A, t \in I$ y $F(x, 1) \in A$ para todo $x \in X$. Considerando las dos últimas definiciones tenemos que un retracto de deformación fuerte es también, un retracto de deformación. De manera intuitiva, podemos considerar que A es un retracto de deformación fuerte de X, si X puede deformarse en sí mismo a A, dejando fijo a A.

2.2. Multiplicación de caminos

Si f y g son dos caminos de X tales que $f(1) = g(0)$, entonces definimos el *producto* de f y g como el camino $f * g$ dado por

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ahora nos dedicaremos a analizar detalladamente la "multiplicación"de caminos, y precisaremos bajo que condiciones dicha multiplicación satisface los axiomas de grupo.

Definición 2.2.1. Diremos que dos caminos f y g de X son *equivalentes* si f y g son homotópicos relativamente a $\{0, 1\}$. Y denotaremos esta equivalencia por $f \sim g$.

En términos de la definición anterior deducimos que los caminos f_0 y f_1 son equivalentes si existe una aplicación continua $F : I{\times}I \to X$ tal que

$$\begin{array}{llll} F(t,0) = f_0(t) & y & F(t,1) = f_1(t) & \textit{para } t \in I \\ F(0,s) = f_0(0) = f_1(0) & y & F(1,s) = f_0(1) = f_1(1) & \textit{para } s \in I, \end{array}$$

como se muestra en la figura. También podemos escribir $F : f_0 \sim f_1$, si queremos especificar la homotopía que "liga" a f_0 y f_1.

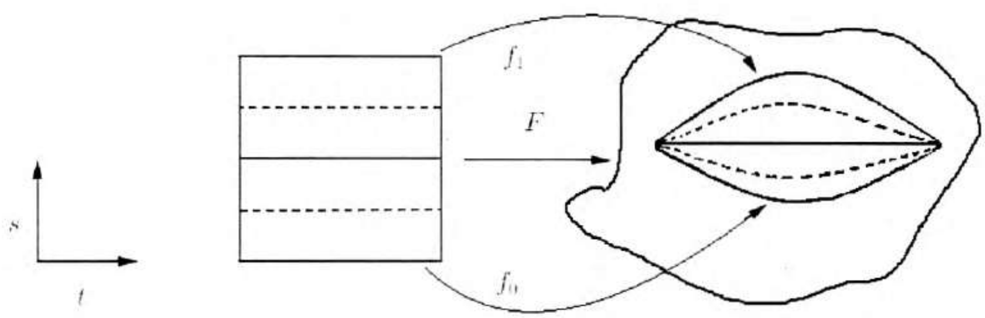

FIGURA 2.5

Ya se demostró en el lema 2.1.1 que $\simeq_{relA}$ es una relación de equivalencia en el conjunto de los caminos de X, en particular tomando $A = \{0,1\}$, tenemos que $\sim$ es una relación de equivalencia en los mismos términos. Esto da lugar a una partición del conjunto antes mencionado en clases de equivalencia; es decir, $[f] = \{g | g \textit{ es camino y } g \sim f\}$. Veremos primeramente que el producto de clases de equivalencia de caminos dado por $[f][g] = [f * g]$ esta bien definido.

Lema 2.2.1. Supongamos que f_0, f_1, g_0, g_1 son caminos en X tales que $f_0(1) = g_0(0)$ y $f_1(1) = g_1(0)$. Si $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$, entonces $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.

Demostración. Sean $F : f_0 \sim f_1$ y $G : g_0 \sim g_1$ las homotopías relativas a $\{0,1\}$ requeridas. Definamos la homotopía $H : I{\times}I \to X$ dada por

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(2t-1,s) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

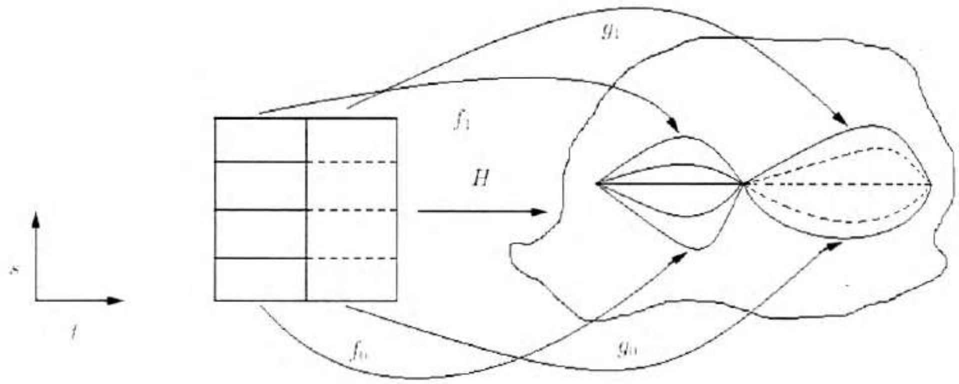

FIGURA 2.6

Dado que $F(1,s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0,s)$, H es continua (como afirma el lema 1.1.5). Ahora verificaremos que H es una homotopía relativa al $\{0,1\}$ entre $f_0 * g_0$ y $f_1 * g_1$, para ello hagamos los calculos siguientes

$$H(t,0) = \begin{cases} F(2t,0) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ G(2t-1,0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} f_0(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ g_0(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

así $H(t,0) = (f_0 * g_0)(t)$,

$$H(t,1) = \begin{cases} F(2t,1) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ G(2t-1,1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} f_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ g_1(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

así $H(t,1) = (f_1 * g_1)(t)$, y por último

$H(0,s) = F(0,s) = f_0(0) = (f_0 * g_0)(0)$ y $H(1,s) = G(1,s) = g_0(1) = (f_0 * g_0)(1)$.

Lo cual comprueba que H es la homotopía deseada.

■

La compatibilidad expresada en el lema 2.2.1 muestra que el producto definido de esa manera, no depende del representante de clase.

El siguiente resultado nos dice que la multiplicación de clases de equivalencia de caminos es asociativa; esto es

$$([f][g])[h]=[f]([g][h])$$

siempre y cuando este producto tenga sentido (es decir, si $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$). Obsérvese que puede darse $(f * g) * h \neq f * (g * h)$.

Lema 2.2.2. Supongamos que f, g, h son tres caminos de X tales que $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$, entonces $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.

Demostración. Primero observemos que

$$1)\quad ((f*g)*h)(t) = \begin{cases} (f*g)(2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \\ h(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} = \begin{cases} f(4t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ g(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ h(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$2)\quad (f*(g*h))(t) = \begin{cases} (f)(2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \\ (g*h)(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ h(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

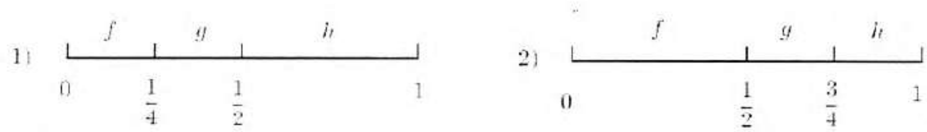

FIGURA 2.7

Para construir una homotopía entre $(f*g)*h$ y $f*(g*h)$ la idea es la siguiente: hay que expandir o comprimir linealmente los intervalos de la definición de f, g y h, de tal forma que pasemos de $(f*g)*h$ a $f*(g*h)$. Para ver en qué intervalo debemos definir f en la homotopía, procedemos de la siguiente manera: encontramos la ecuación de la recta que expande el intervalo $[0, \frac{1}{4}]$ al $[0, \frac{1}{2}]$ que son los dominios de definición de f, dicha ecuación es $s = 4t - 1$; por lo que para un valor fijo de s tomamos f en el intervalo $[0, \frac{s+1}{4}]$, g en el intervalo $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$ y h en el intervalo $[\frac{s+2}{4}, 1]$.

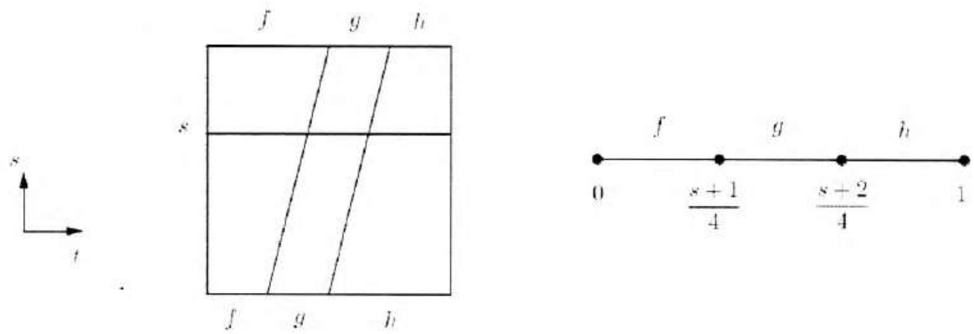

FIGURA 2.8

Así, utilizando el metodo descrito, definimos $F : I\times I \to X$ por

$$F(t,s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{1+s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t-1-s) & \text{si } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h(\frac{4t-2-s}{2-s}) & \text{si } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La función F es continua por el lema 1.1.5 y

$$F(t,0) = ((f*g)*h)(t) \qquad F(t,1) = (f*(g*h))(t)$$
$$F(0,s) = f(0) = ((f*g)*h)(0) \qquad F(1,s) = h(1) = ((f*g)*h)(1)$$

por lo que F es la homotopía que realiza las equivalencias.

■

Si $x \in X$, definimos $\varepsilon_x : I \to X$ como el camino constante, es decir $\varepsilon_x(t) = x$, para $t \in [0,1]$. Los caminos que pertenecen a la clase de equivalencia del camino constante se comportan como un elemento identidad (por la izquierda o por la derecha), esto es

$$[\varepsilon_x][f] = [f] = [f][\varepsilon_y]$$

cuando f es un camino con origen en x y final en y. Lo anterior queda resumido en el siguiente lema.

Lema 2.2.3. Sea f un camino en X con origen en x y final en y, entonces $\varepsilon_x * f \sim f$ y $f * \varepsilon_y \sim f$.

Demostración. Mostraremos únicamente que $\varepsilon_x * f \sim f$, pues mostrar $f * \varepsilon_y \sim f$ es análogo. Primeramente observemos que

$$(\varepsilon_x * f)(t) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ahora, siguiendo el procedimiento descrito en la demostración del lema 2.2.2 definamos $F : I\text{x}I \to X$ por

$$F(t, s) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f(\frac{2t-1+s}{1+s}) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

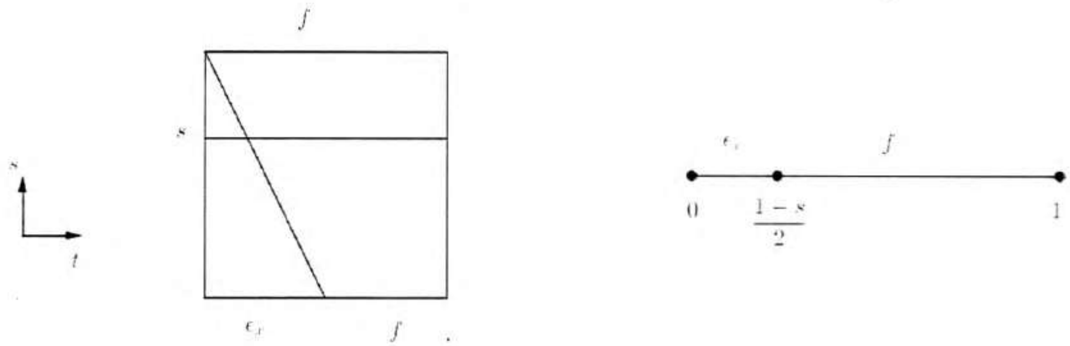

FIGURA 2.9

Efectuando algunos cálculos tenemos que

$$F(t, 0) = (\varepsilon_x * f)(t) \qquad F(t, 1) = f(t)$$
$$F(0, s) = f(0) = (\varepsilon_x * f)(0) \qquad F(1, s) = f(1) = (\varepsilon_x * f)(1)$$

Por lo que F es la homotopía deseada.

∎

Por último veremos como se pueden invertir caminos. Dado un camino $f : I \to X$, el camino $\overline{f} : I \to X$ dado por $\overline{f}(t) = f(1-t), 0 \leq t \leq 1$, recorre a f en el sentido opuesto.

Observemos que el camino $\overline{f}(t)$ así definido es compatible con la relación $\sim$, es decir, $f \sim g$ si y solo si $\overline{f} \sim \overline{g}$. Para ver esto, supongamos primero que $f \sim g$, lo cual implica que existe $F : I\mathsf{x}I \to X$ tal que

$$\begin{aligned} F(t,0) &= f(t) & \quad y \quad && F(0,s) &= f(0) = g(0) \\ F(t,1) &= g(t) & && F(1,s) &= f(1) = g(1). \end{aligned}$$

Definimos entonces, $G : I\mathsf{x}I \to X$ por $G(t,s) = F(1-t,s)$ y, así tenemos que G es continua y además

$$\begin{aligned} G(t,0) &= F(1-t,0) = \overline{f}(t) & \quad y \quad && G(0,s) &= F(1,s) = \overline{f}(0) = \overline{g}(0) \\ G(t,1) &= F(1-t,1) = \overline{g}(t) & && G(1,s) &= F(0,s) = \overline{f}(1) = \overline{g}(1). \end{aligned}$$

de donde $\overline{f} \sim \overline{g}$. La demostración en el sentido opuesto es similar.

El siguiente lema enuncia que la clase de $\overline{f}$ actúa como un inverso de la clase de equivalencia de f, es decir

$$[f][\overline{f}] = [\varepsilon_x] \qquad y \qquad [\overline{f}][f] = [\varepsilon_y]$$

para todo camino en X con origen en x y final en y.

Lema 2.2.4. Si f es un camino en X con origen en x y final en y, entonces $f * \overline{f} \sim \varepsilon_x$ y $\overline{f} * f \sim \varepsilon_y$.

Demostración. Se probará únicamente que $f * \overline{f} \sim \varepsilon_x$. Demostrar que $\overline{f} * f \sim \varepsilon_y$ es análogo. Primero veamos que en el camino $f * \overline{f}$ primero viajamos a lo largo de f, de x a y, y de nuevo a lo largo de f pero en dirección opuesta, ésto es de y a x. Además este viaje se hace al doble de la velocidad. En otras palabras $f * \overline{f}$ queda determinado por

$$(f * \overline{f})(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Para construir la homotopía entre $f * \overline{f}$ y ε_x consideramos la siguiente figura.

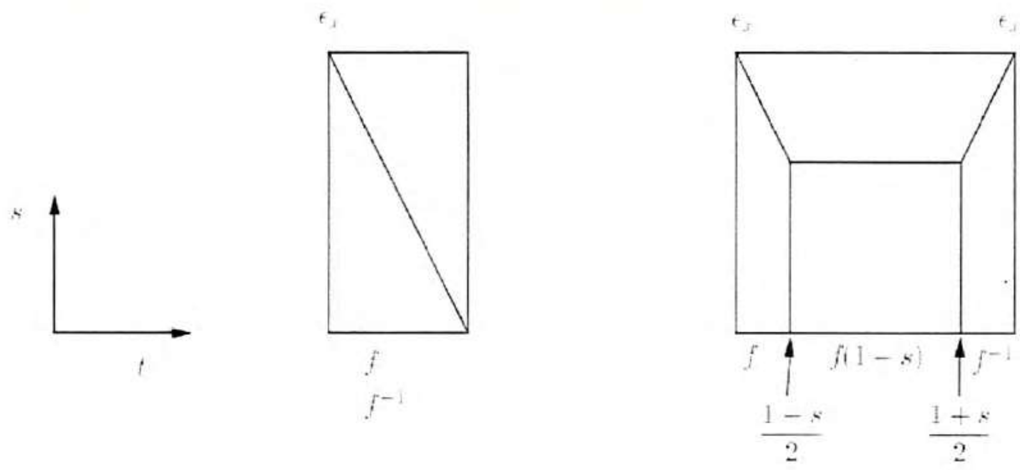

FIGURA 2.10

En la figura anterior tenemos que f y $\overline{f}$ están "sobrepuestas", puesto que $\overline{f}$ recorre en sentido contrario a f; y la recta que une a los puntos $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, 1)$ y deforma a $f * \overline{f}$ en ε_x, tiene por ecuación $s = 1 - 2t$. Luego, la idea es viajar a lo largo de f durante la primera $\frac{1-s}{2} - parte$ de nuestro tiempo, y al llegar al punto $f(1 - s)$ esperamos en él, mientras t se mueve en el intervalo $[\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}]$ y finalmente retornamos a lo largo de f durante la última $\frac{1-s}{2} - parte$ de nuestro tiempo. Tomando en cuenta lo anterior definimos $F : I \times I \to X$ por

$$F(t, s) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f(1-s) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ f(2-2t) & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Así, cuando $s = 0$ obtenemos $f * \overline{f}$, y cuando $s = 1$ permanecemos en x para toda $t \in [0, 1]$, es decir obtenemos ε_x. Por lo que, F es la homotopía que realiza la equivalencia.

■

2.3. Grupo Fundamental

Hasta aquí se ha demostrado que el conjunto de las clases de equivalencia de caminos de un espacio X, prácticamente tiene una estructura de grupo, debido a que se presenta el inconveniente de que la multiplicación no siempre está definida y, además de la necesidad de definir dos elementos que se comporten como la identidad. Con el afán de solucionar este tipo de problemas utilizaremos el concepto de lazo (definición 2.1.1).

Una consecuencia inmediata de trabajar con lazos es que el producto $f * g$ está definido para todo par de lazos con punto base en algún $x \in X$. Denotaremos por $\Pi(X, x)$ al conjunto de clases de equivalencia de lazos basados en $x \in X$. Dicho conjunto posee un producto definido por $[f][g] = [f * g]$ donde $[f], [g] \in \Pi(X, x)$ y el cual está bien definido, en virtud del lema 2.2.1. Ahora demostraremos que la multiplicación inducida en $\Pi(X, x)$ por el producto de lazos define en él una estructura de grupo.

Teorema 2.3.1. $\Pi(X, x)$ es un grupo.

Demostración. El enunciado de este teorema es consecuencia de la sección anterior. Ya observamos que el producto de lazos está siempre definido. El elemento $[\varepsilon_x]$ es el elemento identidad, en vista del lema 2.2.3. Si $[f] \in \Pi(X, x)$ el lema 2.2.4 demuestra que $[f]^{-1} = [\overline{f}]$. Y por último la asociatividad se deduce del lema 2.2.2.

■

El grupo fundamental $\pi(X, x_0)$ a veces es denotado por $\pi_1(X, x_0)$, el "1" viene del hecho de que utilizamos caminos (aplicaciones continuas de $I \subseteq \mathbb{R}^1$) para definir el grupo fundamental. De manera análoga podemos definir $\pi_n(X, x_0)$ usando aplicaciones de $I^n \subseteq \mathbb{R}^n$ en X. Este es llamado el n-ésimo grupo de homotopía de X en x_0. Brevemente indicaremos las definiciones apropiadas;
Sea ∂I la frontera de I^n, es decir,

$$\partial I^n = \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in I^n | t_i = 0 \text{ o } 1 \text{ para algún } i\}.$$

El conjunto $\pi_n(X, x_0)$ consiste de las clases de homotopía relativas a ∂I^n de las aplicaciones continuas $f : I^n \to X$ tal que $f(\partial I^n) = x_0$. El producto de clases está definido por

$$[f][g] = [f * g],$$

en donde

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Se puede verificar que el producto está bien definido y da a $\pi_n(X, x_0)$ la estructura de grupo. Claro que si $n = 1$ obtenemos el grupo fundamental. El grupo fundamental no es necesariamente abeliano, sin embargo $\pi_n(X, x_0)$ siempre es un grupo abeliano si $n \geq 2$. Los siguientes enunciados se pueden demostrar de manera análoga a como se hacen con $\pi(X, x_0)$ (salvo por el último inciso):

a) $\pi_n(X, x_0)$ es un grupo.

b) Si existe un camino en X de x_0 a x_1 entonces $\pi_n(X, x_0)$ y $\pi_n(X, x_1)$ son isomorfos.

c) Una aplicación continua $\varphi : X \to Y$ induce una aplicación $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, \varphi(x_0))$, φ_*, la cual es un homeomorfismo (en donde $\varphi_*[f] = [\varphi f]$).

d) Espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos de homotopía isomorfos.

e) Si $n \geq 2$ entonces $\pi_n(X, x_0)$ es un grupo abeliano.

Capítulo 3

Efectos de una aplicación continua sobre $\pi(X, x)$

Veremos ahora el efecto que tiene una aplicación continua entre espacios topológicos sobre los grupos fundamentales. Supongamos que $\varphi : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) Si f es un camino en X entonces φf es un camino en Y.

2) Si $f \sim g$, entonces $\varphi f \sim \varphi g$.

3) Si f es un lazo en X con punto base $x \in X$, entonces φf es un lazo en Y con punto base $\varphi(x)$.

En efecto,

1) Si $f : I \to X$ es continua tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$ entonces $\varphi f : I \to Y$ es una aplicación bien definida y continua tal que $\varphi f(0) = \varphi(x)$ y $\varphi f(1) = \varphi(y)$, por lo que φ es un camino en Y.

2) Por hipótesis $f \sim g$, entonces existe $F : I\text{x}I \to X$ continua tal que

$$\begin{aligned} F(t,0) &= f(t) & \qquad F(0,s) &= f(0) = g(0) \\ F(t,1) &= g(t) & \qquad F(1,s) &= f(1) = g(1). \end{aligned}$$

Definamos $G : IxI \to Y$ por $G(t, s) = \varphi F(t, s)$, notemos que

$$G(t,0) = \varphi F(t,0) = \varphi f(t) \qquad G(0,s) = \varphi F(0,s) = \varphi f(0) = \varphi g(0)$$
$$G(t,1) = \varphi F(t,1) = \varphi g(t) \qquad G(1,s) = \varphi F(1,s) = \varphi f(1) = \varphi g(1)$$

por lo tanto $\varphi f \sim \varphi g$.

3) Por hipótesis f es una aplicación continua tal que $f(0) = f(1) = x$, así φf es una aplicación continua y además $\varphi f(0) = \varphi f(1) = \varphi(x)$, por lo tanto φf es un lazo en Y con punto base $\varphi(x)$.

Quedando así demostradas nuestras afirmaciones.

Definamos ahora

$$\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$$

dada por $\varphi_*[f] = [\varphi f]$. La cual por las afirmaciones anteriores está bien definida.

Lema 3.0.1. La aplicación $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Sean $[f], [g]$ elementos de $\pi(X, x)$ entonces

$$\begin{aligned}\varphi_*([f][g]) &= \varphi_*[f * g]\\ &= [\varphi(f * g)]\\ &= [\varphi f * \varphi g]\\ &= [\varphi f][\varphi g]\\ &= \varphi_*[f]\varphi_*[g]\end{aligned}$$

■

Definición 3.0.1. Si $\varphi : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces el homomorfismo $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ definido por $\varphi_*[f] = [\varphi f]$, se llama el homomorfismo *inducido* por φ.

Teorema 3.0.2. 1) Si $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ son aplicaciones continuas, entonces $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$.

2) Si $1 : X \to X$ es la identidad en X, entonces 1_* es el homomorfismo identidad de $\pi(X, x)$.

3) Si $\varphi \simeq_{rel_{\{x\}}} \psi$ entonces $\varphi_* = \psi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$; es decir, los homomorfismos inducidos son el mismo.

Demostración. 1) Sea $[f] \in \pi(X, x)$ entonces

$$\begin{aligned}(\psi\varphi)_*[f] &= [(\psi\varphi)f] \\ &= [\psi(\varphi f)] \\ &= \psi_*[\varphi f] \\ &= \psi_*\varphi_*[f].\end{aligned}$$

2) Sea $[f] \in \pi(X, x)$ entonces

$$\begin{aligned}1_*[f] &= [1(f)] \\ &= [f].\end{aligned}$$

3) Si $F : \varphi \simeq_{rel_{\{x\}}} \psi$ y $[f] \in \pi(X, x)$ entonces $G(t, s) = F(f(t), s)$ realiza la equivalencia.

■

Veamos ahora que el grupo fundamental es un invariante topológico.

Corolario 3.0.1. Sea $\varphi : X \to Y$ un homeomorfismo, entonces $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ es un isomorfismo.

Demostración. Como $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo, existe $\varphi^{-1} : Y \to X$, aplicando 1) y 2) del teorema 3.0.2 a las relaciones $\varphi\varphi^{-1} = 1_Y$ y $\varphi^{-1}\varphi = 1_X$ tenemos que $\varphi_*\varphi_*^{-1} = 1_{Y*}$ y $\varphi_*^{-1}\varphi_* = 1_{X*}$. ■

Cuando elegimos dos puntos distintos $x, y \in X$, en principio, $\pi(X, x)$ y $\pi(X, y)$ no tienen por qué guardar relación alguna. Sin embargo, si existe un camino de x a y, entonces los correspondientes grupos fundamentales están relacionados en el siguiente sentido.

Teorema 3.0.3. Sean $x, y \in X$. Si existe un camino en X de x a y, entonces los grupos $\pi(X, x)$ y $\pi(X, y)$ son isomorfos.

Demostración. Sea f un camino en X de x a y. Si g es un lazo con punto base x, entonces $\overline{f} * g * f$ es un lazo con punto base y. Definimos

$$u_f : \pi(X, x) \to \pi(X, y)$$

por

$$u_f[g] = [\overline{f} * g * f].$$

Veamos primero que u_f está bien definida: es decir, que no depende de la elección del representante de clase de lazos basados en x. Para esto, supongamos que g y h son dos lazos basados en x tales que $g \sim h$, entonces

$$\begin{aligned} [g] &= [h] \\ \Rightarrow [g][f] &= [h][f] \\ \Rightarrow [\overline{f}][g][f] &= [\overline{f}][h][f] \\ \Rightarrow [\overline{f} * g * f] &= [\overline{f} * h * f] \\ \Rightarrow u_f[g] &= u_f[h] \end{aligned}$$

por lo tanto u_f está bien definida.
u_f es un homomorfismo de grupos, pues si $[g], [h] \in \pi(X, x)$ entonces

$$\begin{aligned} u_f([g][h]) &= u_f([g * h]) \\ &= [\overline{f} * g * h * f] \\ &= [\overline{f} * g * f * \overline{f} * h * f] \\ &= [\overline{f} * g * f][\overline{f} * h * f] \\ &= u_f[g]u_f[h]. \end{aligned}$$

Ahora, utilizando el camino $\overline{f}$ de y a x definimos

$$u_{\overline{f}} : \pi(X, y) \to \pi(X, x)$$

por

$$u_{\overline{f}}[h] = [f * h * \overline{f}].$$

Sean $[g] \in \pi(X, x)$ y $[h] \in \pi(X, y)$, notemos que

$$\begin{aligned} u_{\overline{f}} u_f[g] &= u_{\overline{f}}[\overline{f} * g * f] \\ &= [f * \overline{f} * g * f * \overline{f}] \\ &= [g] \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} u_f u_{\overline{f}}[h] &= u_f[f * h * \overline{f}] \\ &= [\overline{f} * f * h * \overline{f} * f] \\ &= [h] \end{aligned}$$

Esto implica que u_f es biyectiva y, por lo tanto, un isomorfismo entre $\pi(X, x)$ y $\pi(X, y)$. ■

Corolario 3.0.2. Si X es un espacio conexo por caminos entonces $\pi(X, x)$ y $\pi(X, y)$ son grupos isomorfos para todo par de puntos $x, y \in X$.

Demostración. Sean $x, y \in X$ un par de puntos cualesquiera, como X es conexo por caminos existe un camino f en X tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$, así, aplicando el teorema anterior obtenemos el resultado deseado. ■

En vista del corolario 3.0.2, se puede pensar que no es necesario especificar el punto base al referirnos al grupo fundamental de un espacio conexo por caminos, sin embargo, esto *no* es recomendable, pues no hay un isomorfismo canónico entre $\pi(X, x)$ y $\pi(X, y)$, es decir, *diferentes caminos* de x a y inducen diferentes isomorfismos. La pregunta seria: ¿bajo que condiciones estos caminos inducen el mismo isomorfismo?

Sea $[h] \in \pi(X, x)$, f y g dos caminos en X tal que $f(0) = g(0) = x$ y $f(1) = g(1) = y$. Supongamos que ambos caminos inducen el mismo isomorfismo, así tenemos que:

$$\begin{aligned} & & u_f[h] &= u_g[h] \\ &\Longleftrightarrow & u_{\overline{g}} u_f[h] &= [h] \\ &\Longleftrightarrow & u_{\overline{g}}[\overline{f} * h * f] &= [h] \\ &\Longleftrightarrow & [g * \overline{f} * h * f * \overline{g}] &= [h] \\ &\Longleftrightarrow & [g * \overline{f}][h][f * \overline{g}] &= [h] \\ &\Longleftrightarrow & [g * \overline{f}][h][f * \overline{g}][g * \overline{f}] &= [h][g * \overline{f}] \\ &\Longleftrightarrow & [g * \overline{f}][h][f * \overline{g} * g * \overline{f}] &= [h][g * \overline{f}] \\ &\Longleftrightarrow & [g * \overline{f}][h] &= [h][g * \overline{f}]. \end{aligned}$$

Así, una condición necesaria para que estos caminos induzcan el mismo isomorfismo es: $[\overline{g} * f] \in Z(\pi(X,x))$, en donde Z el centro de un grupo G está definido por

$$Z(G) = \{a \in G | ab = ba \text{ } para \text{ } toda \text{ } b \in G\}.$$

Observamos que la condición es tambien suficiente, es decir, si f,g son caminos tal que $f(0) = g(0) = x$ y $f(1) = g(1) = y$ y además $[\overline{g} * f] \in Z(\pi(X,x)) \Rightarrow u_f[h] = u_g[h]$.

Resulta entonces que $\pi(X,x)$ es abeliano si y sólo si el isomorfismo inducido no depende del camino que va de x a y.

El siguiente resultado nos muestra la relación que existe entre los homomorfismos inducidos por aplicaciones continuas cuando éstas son homotópicas.

Teorema 3.0.4. Sean $\varphi, \psi : X \to Y$ aplicaciones continuas entre espacios topológicos y sea $F : \varphi \simeq \psi$ una homotopía. Si $f : I \to Y$ es un camino de $\varphi(x_0)$ a $\psi(x_0)$ dado por $f(t) = F(x_o, t)$, entonces los homomorfismos inducidos

$$\varphi_* : \pi(X, x_o) \to \pi(Y, \varphi(x_0))$$

y

$$\psi_* : \pi(X, x_o) \to \pi(Y, \psi(x_0))$$

están relacionados por $\psi_* = u_f \varphi_*$ donde u_f es el isomorfismo de $\pi(Y, \varphi(x_0))$ a $\pi(Y, \psi(x_0))$ determinado por el camino f.

Demostración. Mostraremos que si $[g] \in \pi(X, x_0)$ entonces $[\psi g] = [\overline{f} * \varphi g * f]$. Es decir, tenemos que mostrar que $(\overline{f} * \varphi g) * f$ y ψg son equivalentes. Para ello, primero consideremos que

$$((\overline{f} * \varphi g) * f)(t) = \begin{cases} f(1-4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \varphi g(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Utilizando el hecho de que $f(t) = F(x_0, t)$, podemos escribir lo anterior como

$$((\overline{f} * \varphi g) * f)(t) = \begin{cases} F(x_0, 1-4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t-1), 0) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además, puesto que $F : X\times I \to Y$ realiza la homotopía $\varphi \simeq \psi$ entonces

$$F(x, 0) = \varphi(x) \qquad\qquad y \qquad\qquad F(x, 1) = \psi(x),$$

por lo que

$$\psi g(t) = F(g(t), 1).$$

Ahora, para construir una homotopía entre $(\overline{f} * g) * f$ y ψg tomemos en cuenta el hecho de que ψg es equivalente a $(\epsilon_x * \psi g) * \epsilon_x$, donde $x = \psi(x_0)$. Utilizando la igualdad anterior tenemos que $(\epsilon_x * \psi g) * \epsilon_x$ es de la forma

$$(\epsilon_x * \psi g) * \epsilon_x(t) = \begin{cases} F(x_0, 1) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t-1), 1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definimos ahora $H : I\times I \to Y$ por

$$H(t, s) = \begin{cases} F(x_0, 1-4t(1-s)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t-1), s) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 1+2(t-1)(1-s)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

H está bien definida y es continua por el lema del pegado, y además tenemos que

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= ((\overline{f} * \varphi g) * f)(t) \\ H(t, 1) &= (\epsilon_x * \psi g) * \epsilon_x(t) \\ H(0, s) &= F(x_0, 1) = \psi(x_o) \\ H(1, s) &= F(x_0, 1) = \psi(x_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\overline{f} * \varphi g) * f \sim (\epsilon_x * \psi g) * \epsilon_x \sim \psi g$, y así $u_f \varphi_* = \psi_*$.

■

El teorema anterior también puede ser enunciado afirmando la existencia del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi(X, x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & \pi(X, \varphi(x_0)) \arrow[d, "u_f"] \\ & \pi(X, \psi(x_0)) \end{tikzcd}$$

Teorema 3.0.5. Si $\varphi : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ es un isomorfismo para todo $x \in X$.

Demostración. Como φ es una equivalencia homotópica, existe una aplicación continua $\psi : Y \to X$ tal que $\psi\varphi \simeq 1_X : X \to X$ y $\varphi\psi \simeq 1_Y : Y \to Y$. Luego, usando el hecho de que $\psi\varphi \simeq 1_X$ y aplicando el teorema 3.0.4 tenemos que

$$u_f(\psi\varphi)_* = 1_{X*}$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \pi(X, x_0) \arrow[r, "(\psi\varphi)_*"] \arrow[dr, "1_{X*}"'] & \pi(X, \psi\varphi(x_0)) \arrow[d, "u_f"] \\ & \pi(X, x_0) \end{tikzcd}$$

Dado que u_f y 1_{X*} son isomorfismos, también lo es $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$ puesto que $(\psi\varphi)_* = u_{\overline{f}}$ y $u_{\overline{f}}$ es isomorfismo.
Luego, se sigue que:

i) φ_* es inyectiva En efecto, dado que $\psi_*\varphi_*$ es inyectiva, tenemos que si $[g] \neq [h]$ entonces $\psi_*\varphi_*[g] \neq \psi_*\varphi_*[h]$. Supongamos que φ_* no es inyectiva, es decir, existen $[g] \neq [h]$ tal que $\varphi_*[g] = \varphi_*[h]$ lo cual implica que $\psi_*\varphi_*[g] = \psi_*\varphi_*[h]$, y esto contradice el hecho de que $\psi_*\varphi_*$ es inyectiva.

ii) ψ_* es suprayectiva

Efectivamente, dado que $\psi_*\varphi_*$ es suprayectiva, tenemos que para cada $[h] \in \pi(X, \psi\varphi(x))$ existe $[g] \in \pi(X, x)$ tal que $\psi_*\varphi_*[g] = [h]$. Supongamos que ψ_* no es suprayectiva, entonces existe $\alpha \in \pi(X, \psi\varphi(x))$ tal que para toda $\beta \in \pi(X, \varphi(x))$, $\psi_*\beta \neq \alpha$ lo cual contradice que $\psi_*\varphi_*$ sea suprayectiva.

Por lo tanto φ_* es inyectiva y ψ_* es suprayectiva. Además, puesto que $\varphi\psi \simeq 1_Y$, obtenemos análogamente que φ_* es suprayectiva y que ψ_* es inyectiva. Por lo tanto φ_* es un isomorfismo.

∎

Definición 3.0.2. Un espacio topológico es simplemente conexo si es conexo por caminos y $\pi(X, x) = \{1\}$ para todo $x \in X$.

Teorema 3.0.6. Todo espacio contractible es simplemente conexo.

Demostración. Sea X un espacio contractible, entonces, existen aplicaciones continuas $\varphi : X \to \{x\}$ y $\psi : \{x\} \to X$ tales que $F : \psi\varphi \simeq 1_X$ y $G : \varphi\psi \simeq 1_{\{x\}}$. Luego, aplicando el teorema anterior a $\varphi : X \to \{x\}$ tenemos que $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(\{x\}, \{x\})$ es un isomorfismo; esto es, $\pi(X, x) = \{1\}$.

∎

Teorema 3.0.7. Sean X y Y dos espacios topológicos conexos por caminos. El grupo fundamental del producto XxY es isomorfo al producto de los grupos fundamentales de X y Y.

Demostración. Denotemos por

$$p : X\text{x}Y \to X \qquad y \qquad q : X\text{x}Y \to Y$$

las proyecciones. Puesto que p y q son continuas, inducen los homomorfismos $p_* : \pi(X\text{x}Y, (x_0, y_0)) \to \pi(X, x_0)$ y $q_* : \pi(X\text{x}Y, (x_0, y_0)) \to \pi(Y, y_0)$ definidos por

$$p_*[f] = [pf] \qquad y \qquad q_*[f] = [qf]$$

para $[f] \in \pi(X\text{x}Y, (x_0, y_0))$.
Definamos ahora

$$\varphi : \pi(X\text{x}Y, (x_0, y_0)) \to \pi(X, x_0)\text{x}\pi(Y, y_0)$$

dada por

$$\varphi[f] = (p_*[f], q_*[f]) = ([pf], [qf]).$$

Veamos primero que φ está bien definida. Si $[f] = [g]$, entonces existe una aplicación continua $F : I\text{x}I \to X\text{x}Y$ tal que

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= f(t) \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad F(0, s) = F(1, s) = (x_0, y_0). \\ F(t, 1) &= g(t) \end{aligned}$$

Así, componiendo cada proyección con la homotopía anterior obtenemos que $pF : I\text{x}I \to X$ es una aplicación continua que cumple con

$$\begin{aligned} pF(t, 0) &= p(f(t)) = pf(t) \qquad \text{y} \qquad pF(0, s) = pF(1, s) = p(x_0, y_0) = x_0 \\ pF(t, 1) &= p(g(t)) = pg(t) \end{aligned}$$

de donde $pf \backsim pg$, es decir $[pf] = [pg]$; y $qF : I\text{x}I \to Y$ es una aplicación continua que cumple con

$$\begin{aligned} qF(t, 0) &= q(f(t)) = qf(t) \qquad \text{y} \qquad qF(0, s) = qF(1, s) = q(x_0, y_0) = y_0 \\ qF(t, 1) &= q(g(t)) = qg(t), \end{aligned}$$

de donde $qf \backsim qg$, es decir $[qf] = [qg]$.
Por lo anterior, $([pf], [qf]) = ([pg], [qg])$, como queríamos mostrar. Veamos ahora que φ es el isomorfismo deseado.

- φ es un homomorfismo de grupos. Si $f, g : I \to X\text{x}Y$ son caminos para los cuales está definido $f * g$ entonces $p(f * g) = pf * pg$ y $q(f * g) = qf * qg$, así

$$\begin{aligned} \varphi([f][g]) &= \varphi[f * g] = (p_*[f * g], q_*[f * g]) \\ &= ([p(f * g)], [q(f * g)]) \\ &= ([pf * pg], [qf * qg]) \\ &= ([pf][pg], [qf][qg]) \\ &= ([pf], [qf])([pg], [qg]) \\ &= \varphi[f]\varphi[g]. \end{aligned}$$

- φ es suprayectiva. Supongamos que $([f_1], [f_2]) \in \pi(X, x_0) \mathsf{x} \pi(Y, y_0)$, y consideremos la aplicación continua $f : I \to X\mathsf{x}Y$ dada por $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Luego, $\varphi[f] = ([pf], [qf]) = ([f_1], [f_2])$.

- φ es inyectiva. Supongamos que $\varphi[f] = \varphi[g]$, es decir, $([pf], [qf]) = ([pg], [qg])$, entonces $[pf] = [pg]$ y $[qf] = [qg]$; esto es $pf \backsim pg$ y $qf \backsim qg$. Sean pues, $F_1 : I\mathsf{x}I \to X$ y $F_2 : I\mathsf{x}I \to Y$ las homotopías que realizan las equivalencias correspondientes, entonces

$$F_1(t, 0) = pf(t) \qquad\qquad F_1(0, s) = F_1(1, s) = x_0$$
$$F_1(t, 1) = pg(t)$$

y

$$F_2(t, 0) = qf(t) \qquad\qquad F_2(0, s) = F_2(1, s) = y_0.$$
$$F_2(t, 1) = qg(t)$$

Definamos ahora $F : I\mathsf{x}I \to X\mathsf{x}Y$ por $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$, así

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= (F_1(t, 0), F_2(t, 0)) = (pf(t), qf(t)) = f(t) \\ F(t, 1) &= (F_1(t, 1), F_2(t, 1)) = (pg(t), qg(t)) = g(t) \\ F(0, s) = (F_1(0, s), F_2(0, s)) &= (F_1(1, s), F_2(1, s)) = (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Esto es, $F : f \backsim g$ o equivalentemente $[f] = [g]$.

Por lo tanto, φ es un isomorfismo de grupos.

■

Capítulo 4

El grupo fundamental del círculo

Ahora mostraremos que el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es el grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$. Primero veamos esto de forma intuitiva: un camino cerrado f de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ con punto base en 1 da un cierto número de vueltas alrededor de la circunferencia, es decir, si empezamos en $f(0)$ y consideramos $f(t)$ cuando t crece, por cada vuelta dada a la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj anotamos un tanto positivo, y por cada vuelta dada en sentido de las manecillas del reloj anotamos un tanto negativo. La suma de los tantos anotados es el número de vueltas o grado de f. Así pues, a cada camino cerrado f con punto base $1 \in \mathbb{S}^1$ le asociamos un entero. Lo anterior nos permite establecer la siguiente clase de equivalencia: dos lazos son equivalentes (homotópicos relativos al 1) si y sólo si tienen el mismo grado. Por último, para cada entero n existe un lazo que da n vueltas en la circunferencia.

Ahora, obtengamos una definición más precisa del grado de un camino cerrado mediante la aplicación exponencial

$$\begin{aligned} e : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ t &\to e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

mediante la cual, podemos pensar a los números reales como una espiral, siendo proyectados por e en $\mathbb{S}^1$, como se muestra en la siguiente figura:

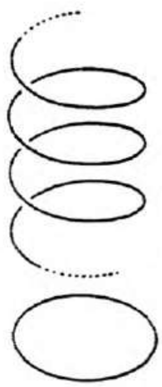

FIGURA 4.1

Notemos que $e^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. La idea ahora es que dada una $f : I \to \mathbb{S}^1$ con $f(0) = f(1) = 1$ mostremos que existe una única aplicación $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(0) = 0$ y $e\tilde{f} = f$ (la aplicación $\tilde{f}$ sera llamada *levantamiento* o *elevación* de f). Como $f(1) = 1$ se sigue que $\tilde{f}(1) \in e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$; este número entero se define como el *grado* de f. Demostraremos despues que si f_0 y f_1 son caminos equivalentes en $\mathbb{S}^1$ entonces $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$. Esto nos define una aplicación $\pi(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ la cual mostraremos es un isomorfismo de grupos.

Lema 4.0.2. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{S}^1 - \{1\}$ y sea $V = I \cap e^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}$. Entonces $e^{-1}(U)$ es la unión disjunta de los conjuntos abiertos $V + n = \{v + n | v \in V\}, n \in \mathbb{Z}$, en donde cada uno se aplica homeomórficamente sobre U.

Demostración. Asumimos que U es un intervalo abierto, es decir

$$U = \{e^{2\pi i t} | 0 \leq a < t < b \leq 1\}$$

para algun a, b. Sea $V = (a, b)$ y $V + n = (a + n, b + n)$. Es claro que $e^{-1}(U)$ es la unión disjunta de los abiertos $V + n (n \in \mathbb{Z})$.
Denotemos por e_n la restricción de e a $(a + n, b + n)$ sobre su imagen; claramente e_n es continua y biyectiva. Afirmamos ahora que e_n^{-1} es continua; para ello, consideremos $(a + n, b + n)$ y sea $W \subseteq (a + n, b + n)$ un subconjunto cerrado (y por lo tanto compacto). Como W es compacto y S^1 es Hausdorff, e_n induce un homeomorfismo $W \to e_n(W)$. En particular $e_n(W)$ es compacto y por lo tanto cerrado. Esto muestra que si W es un subconjunto cerrado entonces $e_n(W)$ tambien lo es; se sigue que e_n^{-1} es continua y por lo tanto e_n es un homeomorfismo.

■

Observar que lo anterior es válido para $\mathbb{S}^1 - \{x\}$, donde x es un punto arbitrario en $\mathbb{S}^1$

Corolario 4.0.3. Si $f : X \to \mathbb{S}^1$ no es suprayectiva es nulhomotópica es decir, es homotópica a la aplicación constante.

Demostración. Si $x \notin Im(f)$ entonces $\mathbb{S}^1 - \{x\}$ es homeomorfo a $(0,1)$ el cual es contractible. ($x = e^{2\pi i s}$ para algún s y $\mathbb{S}^1 = \{e^{2\pi i t} | s \leq t < 1 + s\}$.)

■

Teorema 4.0.8. Toda aplicación continua $f : I \to \mathbb{S}^1$ tiene una elevación $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$. Más aún, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $e(x_0) = f(0)$ existe una única elevación $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}(0) = x_0$.

Demostración. Por cada $x \in \mathbb{S}^1$ sea U_x una vecindad abierta de x tal que $e^{-1}(U_x)$ es la unión disjunta de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, cada uno de los cuales se aplica por e homeomórficamente sobre U_x. El conjunto $\{f^{-1}(U_x) | x \in \mathbb{S}^1\}$ puede ser expresado de la forma $\{(x_j, y_j) \cap I | j \in J\}$ que es un recubrimiento por abiertos de I. Como I es compacto existe una subcubierta finita de la forma

$$[0, t_1 + \epsilon_1), (t_2 - \epsilon_2, t_2 + \epsilon_2), \ldots, (t_n - \epsilon_n, 1]$$

con $t_i + \epsilon_i > t_{i+1} - \epsilon_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ahora elegimos $a_i \in (t_{i+1} - \epsilon_{i+1}, t_i - \epsilon_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ tal que

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = 1.$$

Claramente $f([a_i, a_{i+1}]) \subset \mathbb{S}^1$, pero más aún $f([a_i, a_{i+1}])$ está contenido en un subconjunto abierto S_i de $\mathbb{S}^1$ tal que $e^{-1}(S_i)$ es la unión disjunta de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente sobre S_i. Definamos los levantamientos $\tilde{f}_k$ inductivamente sobre $[0, a_k]$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ tal que $\tilde{f}_k(0) = x_0$. Para $k = 0$ esto es trivial: $\tilde{f}_0(0) = x_0$, no hay otra opción.

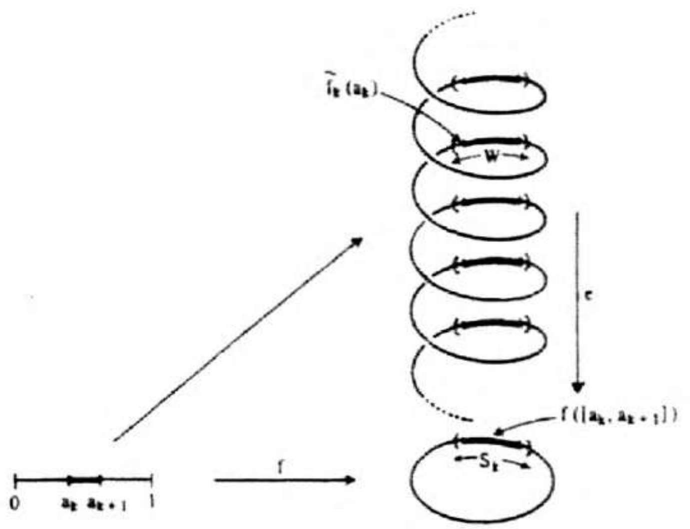

FIGURA 4.2

Supongamos que $\tilde{f}_k : [0, a_k] \to \mathbb{R}$ está definida y es única. Recordemos que $f([a_k, a_{k+1}]) \subseteq S_k$ y que $e^{-1}(S_k)$ es la unión disjunta de $\{W_j | j \in J\}$ con $e|_{W_j} : W_j \to S_k$ un homeomorfismo para cada $j \in J$. Ahora $\tilde{f}_k(a_k) \in W$ para un único elemento W de $\{W_j | j \in J\}$; ver figura 4.2. Cualquier extensión $\tilde{f}_{k+1}$ debe aplicar $[a_k, a_{k+1}]$ sobre W pues $[a_k, a_{k+1}]$ es conexo por caminos. Como la restricción $e|_W : W \to S_k$ es un homeomorfismo, existe una única aplicación $\rho : [a_k, a_{k+1}] \to W$ tal que $e\rho = f|_{[a_k, a_{k+1}]}$ (de hecho $\rho = (e|_W)^{-1} f$). Ahora definimos $\tilde{f}_{k+1}$ como

$$\tilde{f}_{k+1}(s) = \begin{cases} \tilde{f}_k(s) & \text{si } 0 \leq s \leq a_k, \\ \rho(s) & \text{si } a_k \leq s \leq a_{k+1}, \end{cases}$$

la cual es continua por el lema del pegado puesto que $\tilde{f}_k(a_k) = \rho(a_k)$ y es única por construcción. Así obtenemos $\tilde{f}$.

∎

Utilizando este teorema podemos definir el grado de un camino cerrado en $\mathbb{S}^1$. Sea f un camino cerrado en $\mathbb{S}^1$ basado en el 1 y sea $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ el único levantamiento tal que $\tilde{f}(0) = 0$. Como $e^{-1}(f(1)) = e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ vemos que $\tilde{f}(1)$ es un número entero, el cual se define como el grado de f. Para mostrar que caminos equivalentes tienen el mismo grado primero veremos que caminos equivalentes tienen levantamientos equivalentes. Para esto substituimos I por I^2 en el teorema anterior para obtener lo siguiente.

Lema 4.0.3. Cualquier aplicación continua $F : I^2 \to \mathbb{S}^1$ tiene un levantamiento $\tilde{F} : I^2 \to \mathbb{R}$. Más aún, dada $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $e(x_0) = F(0,0)$, existe un único levantamiento $\tilde{F}$ tal que $\tilde{F}(0,0) = x_0$.

Demostración. La prueba es similar a la demostración del teorema 4.0.8. Como I^2 es compacto tenemos

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1,$$
$$0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_m = 1.$$

De manera que $F(R_{i,j}) \subset \mathbb{S}^1$, en donde $R_{i,j}$ es el rectángulo

$$R_{i,j} = \{(t,s) \in I^2 | a_i \leq t \leq a_{i+1}, b_j \leq s \leq b_{j+1}\}.$$

El levantamiento $\tilde{F}$ está definido inductivamente sobre los rectángulos

$$R_{0,0}, R_{0,1}, \ldots, R_{0,m}, R_{1,0}, R_{1,1}, \ldots$$

por un proceso similar al teorema 4.0.8.

∎

Como corolario del teorema anterior obtenemos el llamado teorema de *monodromía* para $e : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, el cual afirma que caminos equivalentes tienen el mismo grado.

Corolario 4.0.4. Supongamos que f_0 y f_1 son caminos equivalentes de $\mathbb{S}^1$ con punto base en 1. Si $\tilde{f}_0$ y $\tilde{f}_1$ son levantamientos tal que $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$ entonces $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$.

Demostración. Sea F la homotopía relativa a $\{0,1\}$ entre f_0 y f_1. Sus levantamientos son únicos para $\tilde{F} : I^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{F}(0,0) = \tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(1)$. Como $F(t,0) = f_0(t)$ y $F(t,1) = f_1(t)$, obtenemos que $\tilde{F}(t,0) = \tilde{f}_0(t)$ y $\tilde{F}(t,1) = \tilde{f}_1(t)$. Además, $\tilde{F}(1,t)$ es un camino de $\tilde{f}_0(1)$ a $\tilde{f}_1(1)$ pues $F(1,t) = f_0(1) = f_1(1)$. Pero $\tilde{F}(1,t) \in e^{-1}(f_0(1)) = \mathbb{Z}$, lo cual significa que $\tilde{F}(1,t)$ es una constante y por lo tanto $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$. Notemos que de hecho $\tilde{F}$ es la homotopía relativa a $\{0,1\}$ entre $\tilde{f}_0$ y $\tilde{f}_1$.

■

Ahora calculemos el grupo fundamental de la circunferencia.

Teorema 4.0.9. $\pi(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Definimos $\varphi : \pi(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ por $\varphi([f]) = grad(f)$, el grado de f. Recordemos que $grad(f) = \tilde{f}(1)$ en donde $\tilde{f}$ es el único levantamiento de f tal que $\tilde{f}(0) = 0$. La función φ está bien definida por el corolario 4.0.4. Mostremos ahora que φ es un isomorfismo de grupos.
Veamos primero que φ es un homomorfismo. Denotemos por $\gamma_a(f)$ el levantamiento que comienza en $a \in e^{-1}(f(0))$. Como $\gamma_0(f) = \tilde{f}$ y $\gamma_a(f)(t) = \tilde{f}(t) + a$ para un camino en $\mathbb{S}^1$ que comienza en 1, es claro que

$$\gamma_a(f * g) = \gamma_a(f) * \gamma_b(g)$$

en donde $b = \tilde{f}(1) + a$. Por lo tanto, si $[f], [g] \in \pi(\mathbb{S}^1, 1)$ entonces

$$\begin{aligned}
\varphi([f][g]) &= \varphi([f * g]) = \widetilde{f * g}(1) \\
&= \gamma_0(f * g)(1) \\
&= (\gamma_0(f) * \gamma_b(g))(1) & \text{donde } b = \tilde{f}(1) \\
&= \gamma_b(g)(1) \\
&= b + \tilde{g}(1) \\
&= \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) \\
&= \varphi([f]) + \varphi([g]).
\end{aligned}$$

Para mostrar que es sobreyectiva hacemos lo siguiente: dada $n \in \mathbb{Z}$ consideramos $g : I \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = nt$, luego $eg : I \to \mathbb{S}^1$ es un camino cerrado con punto base en 1. Como g es el levantamiento de eg tal que $g(0) = 0$ tenemos que $\varphi([eg]) = grad(eg) = g(1) = n$, por lo tanto φ es sobreyectiva.
Para mostrar que φ es inyectiva supongamos que $\varphi([f]) = 0$, es decir $grad(f) = 0$. Esto quiere decir que el levantamiento $\tilde{f}$ de f satisface $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$. Como $\mathbb{R}$ es contraible tenemos que $\tilde{f} \simeq_{rel\{0,1\}} \epsilon_0$; en otras palabras existe una aplicación $F : I^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F(t, 0) = \tilde{f}(t)$, $F(t, 1) = 0$ y $F(0, s) = F(1, s) = 0$. De hecho, la homotopía esta dada por $F(t, s) = (1 - t)\tilde{f}(s)$. Así $eF : I^2 \to \mathbb{S}^1$ es tal que $eF(t, 0) = e\tilde{f}(t) = f(t)$, $eF(t, 1) = e(0) = 1$ y $eF(0, s) = eF(1, s) = e(0) = 1$, lo cual prueba que φ es inyectiva y por lo tanto φ es un isomorfismo.

■

Como resultado inmediato del teorema anterior y el teorema 3.0.7 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.0.5. El grupo fundamental del toro es $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$.

Capítulo 5

Aplicaciones

La primera aplicación que exhibiremos es una prueba alternativa del teorema fundamental del álgebra.

Teorema 5.0.10. Todo polinomio complejo no constante tiene una raíz.

Demostración. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que nuestro polinomio es de la forma

$$p(z) = a_o + a_1 z + \ldots + a_{k-1} z^{a_{k-1}} + z^k$$

con $k \geqslant 1$. Supongamos que p no tiene raíces. Definimos entonces la función $G : I\times[0, \infty) \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ por

$$G(t, r) = \frac{p(re^{2\pi it})}{|p(re^{2\pi it})|} \frac{|p(r)|}{p(r)}$$

para $0 \leq t \leq 1$ y $r \geqslant 0$. Es claro que G es continua. Definimos ahora $F : I^2 \to \mathbb{S}^1$ por

$$F(t, s) = \begin{cases} G(t, \frac{s}{1-s}) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s < 1, \\ e^{2\pi ikt} & \text{si } 0 \leq t \leq 1, s = 1. \end{cases}$$

Al observar que

$$\lim_{s\to 1} F(t, s) = \lim_{s\to 1} G(t, \frac{s}{1-s}) = \lim_{r\to\infty} G(t, r) = (e^{2\pi it})^k$$

notamos que F es continua. También vemos que F es una homotopía relativa al $\{0, 1\}$ entre $f_0(t) = F(t, 0)$ y $f_1(t) = F(t, 1)$. Pero $f_0(t) = 1$ y $f_1(t) = e^{2\pi ikt}$, de esta manera $grad(f_0) = 0$ mientras $grad(f_1) = k$, lo cual es una contradicción (salvo en el caso que $k = 0$).

■

La segunda aplicación que mostraremos es una prueba del teorema de punto fijo de *Brouwer* en el plano. Este teorema también es válido en dimensiones superiores, pero para demostrarlo no bastan las herramientas que proporciona el grupo fundamental.

Teorema 5.0.11. Toda aplicación continua $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ tiene un punto fijo x tal que $f(x) = x$.

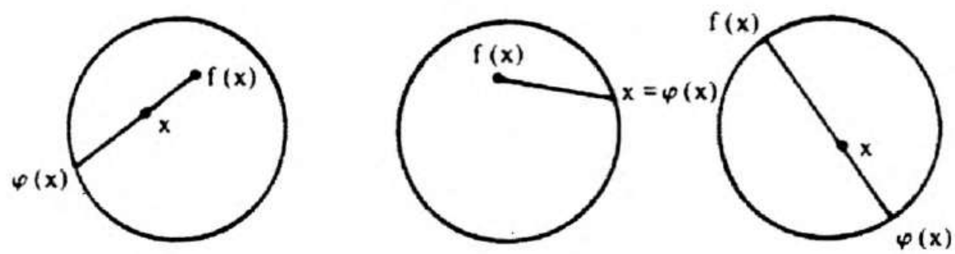

FIGURA 5.1

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, $x \neq f(x)$ para toda $x \in \mathbb{D}^2$. Así podemos definir la aplicación $\varphi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ de la siguiente manera: consideramos la semirecta que comienza en $f(x)$ se extiende por x y se prolonga hasta intersectarse con $\mathbb{S}^1$, luego $\varphi(x)$ es ese punto de intersección; ver figura 5.1. Que φ es continua es claro. Sea $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{D}^2$ la inclusión, entonces $\varphi i = 1$ y tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathbb{S}^1 \\ & \mathbb{D}^2 \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Lo que nos lleva al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi(\mathbb{S}^1,1) \arrow[rr, "1_*"] \arrow[dr, "i_*"] & & \pi(\mathbb{S}^1,1) \\ & \pi(\mathbb{D}^2,1) \arrow[ur, "\varphi_*"] & \end{tikzcd}$$

Pero como $\pi(\mathbb{D}^2,1) = 0$, pues $\mathbb{D}^2$ es contraible, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[rr, "1_*"] \arrow[dr, "i_*"] & & \mathbb{Z} \\ & 0 \arrow[ur, "\varphi_*"] & \end{tikzcd}$$

lo cual es imposible. Así queda probado el resultado.

$\blacksquare$

Conclusiones

En esta tesis se dieron las definiciones apropiadas para definir el grupo fundamental de un espacio topológico, asi como demostrar que esté es efectivamente un grupo, además se generalizaron las ideas para definir los grupos de homotopía de orden superior. Luego estudiamos los efectos que tienen las aplicaciones inducidas entre dos grupos fundamentales, es decir, el efecto que tiene una aplicación continua entre espacios topológicos sobre los grupos fundamentales.

En el cuarto capítulo precisamos los conceptos adecuados para calcular el grupo fundamental del círculo. Y por último se exhibieron dos aplicaciones: una demostración alternativa para el teorema fundamental del álgebra, y la segunda, una demostración del teorema de punto fijo de Brouwer para el plano.

Además de servir como herramienta para saber si dos espacios topológicos no son homeomorfos, los grupos de homotopía tienen utilidad en diversas áreas de las matemáticas, como lo es en la teoría de categorías y la teoría de variedades de dimensiones bajas.

Bibliografía

[1] Fidel Casarrubias Segura, Ángel Tamariz Mascarúa, "Elementos de Topología General," *Aportaciones Matemáticas*, 1a Edición, 2012.

[2] James R. Munkres, *Topología*, Pearson Educación, S.A. Madrid, 2a Edición, 2002.

[3] Czes Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, 1980.

[4] William S. Massey, "Algebraic Topology: An Introduction," *Springer*, 1990.

[5] James Dugundji, "Topology," *Allyn and Bacon, Inc.*, 1966.

[6] Marvin J. Greenberg, John R. Harper, "Algebraic Topology: A First Course," *Westview Press*, 1981.