UNIVERSIDAD DE SONORA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Homotopía en complejos simpliciales y espacios cubrientes

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Jorge Alberto Naranjo Vásquez

Director de tesis: M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá

Hermosillo, Sonora, México, Abril de 2017

SINODALES

M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Rosalía Guadalupe Hernández Amador
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jessica Yuniver Santana Bejarano
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Índice general

Introducción

Uno de los principales problemas en topología es el de la clasificación de espacios topológicos, esto es, dados dos espacios topológicos, poder saber si éstos son homeomorfos o no. Para ver que dos espacios topológicos son homeomorfos basta con exponer un homeomorfismo entre dichos espacios, lo cual puede resultar ser una tarea para nada sencilla. Por el contrario, para demostrar que dos espacios topológicos no son homeomorfos, hay que ver que no existe ningún homeomorfismo entre dichos espacios, lo cual puede resultar imposible de realizar.

Para ver que dos espacios topológicos no son homeomorfos, utilizamos el hecho de que diversas propiedades topológicas como lo son la conexidad, compacidad, separabilidad, etcétera, se preservan bajo homeomorfismos, con lo cual si un espacio topológico digamos tiene alguna de estas propiedades, y un segundo espacio no lo hace, entonces no pueden ser homeomorfos. Sin embargo, esta manera de comparar espacios topológicos no es ni suficiente ni precisa, pues existen espacios que comparten propiedades topológicas y sin embargo no son homeomorfos.

Es por ello que en topología algebraica existen también los llamados invariantes topológicos, que nos permiten distinguir de cierta manera algunos espacios topológicos de otros. En esta ocasión nos centraremos en los grupos de homotopía de un espacio topológico, en particular en el grupo fundamental.

Esta tesis consta de cinco capítulos, de los cuales el primero está destinado a presentar la teoría básica de topología que se utilizará en el resto del trabajo.

El segundo capítulo está destinado tanto a la construcción del grupo fundamental de un espacio topológico, como a la exposición de algunos de los resultados más básicos e importantes de topología algebraica en general. Asimismo se ilustra mediante ejemplos la dificultad que presenta el cálculo de grupos fundamentales.

En el tercer capítulo introduciremos el concepto de complejo simplicial y la relación que guardan con el grupo fundamental. Veremos que utilizando la teoría desrrollada es posible calcular el grupo fundamental de un gran número de espacios topológicos de una manera relativamente sencilla.

En los capítulos cuatro y cinco, hablaremos un poco acerca espacios cubrientes, los cuales trataremos como una herramienta que es útil para calcular y comparar el grupo fundamental de diversos espacios topológicos.

Capítulo 1

Preliminares

Dedicaremos este primer capítulo a presentar conceptos y resultados básicos de topología general que servirán como punto de partida para desarrollar la teoría de interés en el resto de la tesis. Nos centraremos primeramente en los conceptos de continuidad, pues este es completamente necesario para definir al homeomorfismo como nuestra equivalencia entre espacios topológicos; conexidad y compacidad, ya que en muchas ocasiones necesitaremos que nuestros espacios topológicos cuenten, por ejemplo, con algún tipo de conexidad para poder trabajar sobre ellos.

Después, daremos paso a definir los conceptos de homotopía y homotopía relativa entre funciones continuas. Enfocaremos nuestra atención sobre las homotopías entre caminos o trayectorias, debido a que el grupo fundamental de un espacio topológico es un grupo cuya construcción se basa en un tipo particular de caminos que llamaremos lazos.

1.1. Homeomorfismos entre espacios topológicos y continuidad

Sean $(X,\tau_X),(Y,\tau_Y)$ espacios topológicos. Se dice que $f : X \to Y$ es una **función continua** en $x_0 \in X$ si para cada $A \in \tau_Y$ tal que $f(x_0) \in A$, existe $B \in \tau_X$ que contiene a x_0 y satisface $f(B) \subseteq A$. Además, diremos que f es continua en X si lo es en cada uno de sus puntos.

El siguiente resultado presenta distintas caracterizaciones de la continuidad.

Teorema 1.1.1. Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos, entonces son equivalentes:

1. f es continua.

2. Para cualquier subconjunto abierto A de Y, tenemos que $f^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto de X.

3. Para cualquier subconjunto cerrado B de Y, el subconjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.

4. Para cualquier subconjunto A de X, se cumple $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Demostración. Ver [1], páginas 104-105. □

Por otro lado, el siguiente resultado nos permite extender, bajo ciertas condiciones, dos funciones continuas sobre subconjuntos de un espacio topológico a una nueva función continua.

Lema 1.1.2. (**Lema del pegado**). Sean X y Y espacios topológicos y supongamos que $X = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos cerrados de X. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces la función $h : X \to Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

es continua.

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de Y. Por teoría de conjuntos elemental tenemos que $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$, y dado que f es continua, $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y por tanto, cerrado en X. De modo similar, $g^{-1}(C)$ es cerrado en X. Así, $h^{-1}(C)$ es cerrado en X y por el Teorema 1.1.1(3) se sigue que h es continua. □

Definición 1.1.3. Sean X, Y espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$ una función biyectiva. Diremos que f es un **homeomorfismo** si tanto f como f^{-1} son funciones continuas. En tal caso diremos que los espacios X y Y son **homeomorfos**, lo cual denotaremos por $X \cong Y$.

1.2. Espacios producto y espacios cociente

El estudio de los espacios producto resulta ser bastante útil en cualquier área de las matemáticas debido a que muchos espacios topológicos podemos verlos o más bien representarlos como el producto de espacios más simples. O bien, podemos construir otros espacios a partir de espacios ya conocidos.

Definición 1.2.1. Consideremos una familia de espacios topológicos $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ donde $X_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in I$. Definimos el producto de los X_α como:

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha := \Big\{f : I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha, \forall\alpha \in I\Big\}.$$

El conjunto $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ es llamado **espacio producto** de los X_α.

Este producto entre espacios es conocido como el producto cartesiano.

Uno de los ejemplos más comunes e importantes de este tipo de espacio es $\mathbb{R}^n$, y todas las variantes que se desprenden de manera natural de éste, como sería por ejemplo el producto $[0,1] \times [0,1]$.

Otro ejemplo que vale la pena mencionar es que podemos ver al toro $\mathbb{T}$ como el producto cartesiano de la circunferencia unitaria consigo misma, es decir, $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ahora bien, dado que no hay restricción a la hora de elegir qué espacios podemos utilizar para realizar un producto, podemos entrar en problemas a la hora de dotar de una topología al espacio producto, puesto que los factores pueden estar dotados de topologías completamente distintas.
Por ejemplo, si $X = \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ es un espacio producto, entonces la colección τ de subconjuntos de la forma $U_1 \times U_2 \times \ldots$ donde cada U_α es un abierto en su respectivo X_α, es una topología en X. Ésta es la llamada **topología por cajas en** X. A pesar de que es construida de la manera más natural posible, no es la mejor topología que podemos darle a X, pues en muchas ocasiones cuando los productos tienen un número infinito de factores, no se conservan las propiedades de conexidad ó compacidad de los espacios factores en el producto.

Sin embargo, en productos cartesianos finitos la topología por cajas respeta todas las propiedades que uno esperaría, por lo que nos damos cuenta que el problema en su definición se encuentra en permitir que en sus abiertos sea posible que aparezcan subconjuntos abiertos propios en cada factor sin ningún tipo de restricción sobre el número de estos.

Es decir, si pedimos que solamente un número finito de U_α sean subconjuntos propios de X, y el resto de ellos sean iguales a su respectivo X_α, obtenemos una nueva topología que sí respeta las propiedades de los espacios que conforman el producto.

Definición 1.2.2. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos, sea $X = \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ y sea $\pi_\beta : X \to X_\beta$ la proyección sobre el β − *ésimo* factor, esto es $\pi_\beta(f) = f(\beta)$.
La **topología producto** en X es la topología generada por la sub base

$$\mathrm{S} = \left\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid U_\alpha \in \tau_\alpha\right\}.$$

Además de los espacios producto, también existen los **espacios cociente**, que de manera intuitiva podemos decir que son el resultado de "pegar" o identificar varios puntos de algún espacio topológico dado. La manera en que se identifican los puntos está dada por una relación de equivalencia. Por ejemplo, el toro puede construirse a partir de un rectángulo al identificar las aristas de una manera adecuada como se muestra en la Figura 1.1.

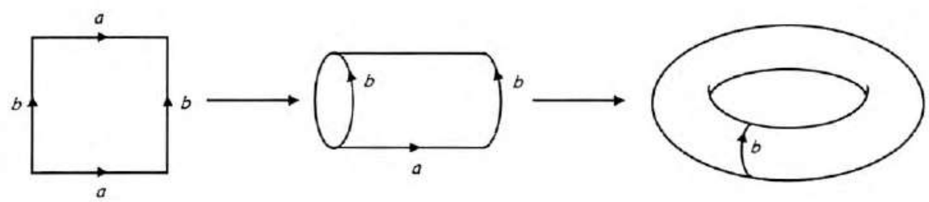

FIGURA 1.1

Esta manera de identificar puntos mediante una relación de equivalencia nos genera una partición en el espacio inicial, y es en base a esta partición que definiremos nuestro espacio cociente.

Definición 1.2.3. Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Sea $p : X \to Y$ un mapeo sobreyectivo. Diremos que p es un **mapeo cociente** si dado cualquier subconjunto B de Y, se cumple que $B \in \tau_Y$ si y sólo si $p^{-1}(B) \in \tau_X$.

Sean X un espacio topológico, A un conjunto y $p : X \to A$ un mapeo sobreyectivo, entonces existe una única topología τ_p sobre A con la cual p es un mapeo cociente. A esta topología se le llama **topología cociente**.

Ejemplo 1.1. El plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ es el espacio cociente obtenido de $\mathbb{S}^2$ identificando cada punto x de $\mathbb{S}^2$, con su punto antípoda $-x$.

1.3. Conexidad

El concepto de espacio topológico conexo es bastante sencillo, decimos que un espacio es conexo si es de una sola "pieza", es decir, si no lo podemos separar en varias partes.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es un par de abiertos U, V de X ajenos y no triviales, cuya unión es todo X. El espacio X se dice ser **conexo** si no existe una separación de X.
Equivalentemente : Un espacio X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de X que son tanto abiertos como cerrados, son el vacío y X.

Teorema 1.3.2. La unión de una colección de subconjuntos conexos de X que tienen un punto en común es conexa.

Demostración. Ver [1], página 150. □

El siguiente resultado nos dice que la conexidad de un conjunto se preserva bajo cerradura, es decir, si a un conjunto conexo le agregamos alguno o todos sus puntos límite, entonces el conjunto resultante es conexo igualmente.

Teorema 1.3.3. Sea A un sunconjunto conexo de X. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B también es un subconjunto conexo de X.

Demostración. Ver [1], página 150. □

Teorema 1.3.4. La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y X un espacio topológico conexo. Veamos que $Z = f(X)$ es conexo. Para ello consideremos la restricción continua y sobreyectiva $g : X \to Z$, y supongamos que $Z = C \cup D$ es una separación de Z. Entonces $g^{-1}(C) \cup g^{-1}(D) = X$ es una separación de X, lo cual contradice el hecho de que X es conexo. Así, $f(X)$ es conexo. □

En particular, el teorema anterior nos dice que la conexidad es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismos.

Teorema 1.3.5. El producto cartesiano de un número finito de espacios conexos es conexo.

Demostración. Veamos primero el caso para el producto de solamente dos espacios conexos. Sean X y Y conexos, y sea $(a,b) \in X \times Y$ un punto fijo. Notemos que $X \times \{b\}$ es conexo pues es homeomorfo a X, y $\{a\} \times Y$ es conexo pues es homeomorfo a Y. Como consecuencia de esto, el espacio

$$T_x = (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

es conexo para cada $x \in X$ ya que es la unión de dos espacios conexos que tienen el punto (b,x) en común. Ahora, como $(a,b) \in T_x$ para cada $x \in X$ tenemos por Teorema 1.3.2 que $\bigcup_{x\in X} T_x$ es conexo. Y así, como $\bigcup_{x\in X} T_x = X \times Y$, concluimos que el producto $X \times Y$ es conexo.

El caso para cualquier producto finito de espacios conexos se puede probar de manera similar utilizando el hecho de que $X_1 \times \cdots \times X_n$ es homeomorfo a $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$. □

Teorema 1.3.6. (Teorema del valor intermedio). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \neq f(b)$. Si r es un punto en $\mathbb{R}$ que se encuentra entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = r$.

Demostración. Ver [1], página 154. □

Definición 1.3.7. Sea X un espacio topológico y sean x, y dos puntos cualesquiera de X. Un **camino** de x a y es una función continua $f : [a,b] \to X$ que comienza en x y termina en y, es decir, $f(a) = x$ y $f(b) = y$.

A un camino que comience y termine en el mismo punto x, lo llamaremos **lazo** basado en x.

En muchas ocasiones nos interesará que cualquier par de puntos estén conectados por un camino, o bien, si se da el caso de que esto ocurra, necesitamos una manera de identificar dichos espacios. Para ello daremos la siguiente definición.

Definición 1.3.8. Un espacio topológico X se dice ser **conexo por caminos** si para cualquier par de puntos de X existe un camino en X que los une.

Notemos que el hecho de que un espacio sea conexo por caminos, quiere decir que no es posible separarlo como bien veremos a continuación.

Lema 1.3.9. Todo espacio conexo por caminos es conexo.

Demostración. Sea X un espacio conexo por caminos y $f : [a,b] \to X$ un camino. Supongamos que $X = C \cup D$ es una separación de X. Como $[a,b]$ es conexo, $f([a,b])$ debe estar contenido completamente en C ó en D. Por lo que no existen caminos en X que unan puntos de C con puntos de D, lo cual contradice que X sea conexo por caminos. Por lo tanto X es conexo. $\square$

El recíproco de esta afirmación no siempre es cierto, es decir, existen espacios conexos que no son necesariamente conexos por caminos como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. El subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual definido como

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = sen(\tfrac{1}{x})\}$$

es conexo pues es la imagen del intervalo $(0, 1]$ bajo una función continua. Luego, por el Teorema 1.3.3, el conjunto $\overline{S} = S \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \in [-1, 1]\}$ también es conexo. Vamos a demostrar que $\overline{S}$ no es conexo por caminos.
Sea $x_0 \in S$. Supongamos que existe un camino $f : [a, c] \to \overline{S}$ tal que $f(a) = (0, 0)$ y $f(c) = x_0$. El conjunto de los números $t \in [a, c]$ para los cuales $f(t) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \in [-1, 1]\}$ es cerrado, y por tanto, existe $b \in [a, c]$ tal que $f(t) \in S$ para toda $t \in (b, c]$. Por lo que $f : [b, c] \to \overline{S}$ es un camino tal que $f(b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \in [-1, 1]\}$ y $f(t) \in S$ para $t \in (b, c]$.
Sin pérdida de generalidad sustituyamos al intervalo $[b, c]$ por $[0, 1]$, y sea $f(t) = (x(t), y(t))$. Entonces $x(0) = 0$, mientras que $x(t) > 0$ y $y(t) = sen(\frac{1}{x(t)})$ para $t > 0$. Vamos a demostrar que existe una sucesión de puntos $t_n \to 0$ tales que $y(t_n) = (-1)^n$. Y así tendremos que la sucesión $y(t_n)$ no es convergente, contradiciendo la continuidad de f.
Así, dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos $u \in (0, x(\frac{1}{n}))$ tal que $sen(\frac{1}{u}) = (-1)^n$. Utilizando el Teorema 1.3.6 podemos encontrar $t_n \in (0, \frac{1}{n})$ tal que $x(t_n) = u$.
Por lo que concluimos que $\overline{S}$ no es conexo por caminos.

Definición 1.3.10. Dado un espacio X, definimos una relación de equivalencia en X de la siguiente manera: $x \sim y$ si existe un subconjunto conexo de X que contiene a ambos puntos. Las clases de equivalencia en este caso se denominan **componentes conexas de** X.

Para comprobar que efectivamente es una relación de equivalencia sólo basta ver que se cumple la transitividad puesto que la simetría y reflexividad son claras. Y para ello si A es un subconjunto conexo que contiene a x y y, y B es un subconjunto conexo que contiene a y y z, entonces $A \cup B$ es el subconjunto que contiene a x y z, que además es conexo por el Teorema 1.3.2 pues $y \in A$ y $y \in B$.

Teorema 1.3.11. Las componentes de X son subconjuntos ajenos y conexos de X cuya unión es todo X, de forma que cada subconjunto conexo de X no trivial intersecta tan sólo a una de ellas.

Demostración. Notemos primeramente que, dado que las componentes conexas son clases de equivalencia de X, son ajenas y su unión es todo X.

Sea $A \neq \emptyset$ un subconjunto conexo de X y sean C_1, C_2 componentes conexas de X. Supongamos que A intersecta a C_1 y a C_2, es decir, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \in A \cap C_1$ y $x_2 \in A \cap C_2$. Entonces $x_1 \sim x_2$, lo cual solamente puede ocurrir cuando $C_1 = C_2$.

Veamos ahora que cada componente conexa C de X es un subconjunto conexo de X, para lo cual tomemos un punto x_0 de C. Como C es una componente conexa de X, para cualquier $x \in C$ se cumple que $x_0 \sim x$, por lo que existen subconjuntos conexos $A_x \subset C$ tales que para cada $x \in C$,tenemos que $x, x_0 \in A_x$. Por lo tanto como el punto x_0 se encuentra en A_x para cada $x \in C$, por el Teorema 1.3.2 concluimos que $C = \bigcup\limits_{x \in C} A_x$ es conexo. □

Definición 1.3.12. Definimos otra relación de equivalencia en X dada por: $x \sim y$ si existe un camino en X de x a y. Las clases de equivalencia en este caso se denominan **componentes conexas por caminos de $\boldsymbol{X}$**.

En este caso, la reflexividad $x \sim x$ se tiene al considerar el camino constante $f : [0,1] \to X$ dado por $f(t) = x$ para todo $t \in [0,1]$. Luego, si $x \sim y$, existe un camino $f : [0,1] \to X$ de x a y, por lo cual el camino contrario $g : [0,1] \to X$ dado por $g(t) = f(1-t)$ es un camino de y a x. Finalmente para la transitividad consideramos $f : [0,1] \to X$ un camino de x a y, y $g : [1,2] \to X$ un camino de y a z. Así, por el Lema del pegado, la función $h : [0,2] \to X$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0,1] \\ g(t) & t \in [1,2] \end{cases}$$

es un camino que va de x a z.

Teorema 1.3.13. Las componentes conexas por caminos de X son subconjuntos ajenos y conexos por caminos de X cuya unión es todo X, de forma que cada subconjunto conexo por caminos de X no trivial intersecta sólo a una de ellas.

Demostración. Las componentes conexas por caminos de X forman una partición de X por lo que son ajenas y su unión es todo X.

Sea $A \neq \emptyset$ un subconjunto conexo por caminos de X y sean C_1, C_2 componentes conexas por caminos de X. Supongamos que A intersecta tanto a C_1 como a C_2, es decir, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \in A \cap C_1$ y $x_2 \in A \cap x_2$. Entonces $x_1 \sim x_2$, lo cual solamente puede ocurrir cuando $C_1 = C_2$.

Ahora, sea C cualquier componente conexa por caminos de X y sea $x_0 \in C$. Para cada $c \in C$ existe un camino $f_c : [0,1] \to C$ tal que $f_c(0) = x_0$ y $f_c(1) = c$, por lo que $x_0 \sim c$. Así, para cualquier par de puntos $c_1, c_2 \in C$ se cumple que $x_0 \sim c_1$ y $x_0 \sim c_2$, y dado que $\sim$ es una relación de equivalencia, obtenemos que $c_1 \sim c_2$. Por lo que C es conexo por caminos. □

Ahora bien, podemos definir los conceptos de conexidad y conexidad por caminos de manera local de la siguiente manera.

Definición 1.3.14. Diremos que un espacio topológico X es **localmente conexo** en un punto x de X si para cada vecindad U de x, existe una vecindad conexa V de x tal que $V \subseteq U$. De manera similar, diremos que un espacio topológico X es **localmente conexo por caminos** en un punto x de X si para cada vecindad U de x, existe una vecindad conexa por caminos V de x tal que $V \subseteq U$.

Teorema 1.3.15. Sea $\{Y_j\}_{j \in J}$ una colección de subconjuntos conexos por caminos de un espacio topológico X. Si $\bigcap\limits_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$, entonces $Y = \bigcup\limits_{j \in J} Y_j$ es un subconjunto conexo por caminos.

Demostración. Sea $z \in \bigcap\limits_{j \in J} Y_j$ y sean $x, y \in Y = \bigcup\limits_{j \in J} Y_j$, entonces $x \in Y_k$ y $y \in Y_l$ para algunos $k, l \in J$.

Dado que cada Y_j es conexo por caminos y $x, z \in Y_k$, tenemos que existe un camino $f : [0,1] \to Y_k$ en Y_k de x a z. De la misma manera, existe un camino $g : [1,2] \to Y_l$ de z a y. Entonces por el Lema del pegado, la función $h : [0,1] \to Y$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0,1] \\ g(t) & t \in [1,2] \end{cases}$$

es un camino en Y de x a y, y dado que esto ocurre para cualesquiera par de puntos x y y de Y, concluimos que Y es un espacio conexo por trayectorias. □

1.4. Compacidad

Como muchas de las nociones en topología, el concepto de compacidad para un espacio topológico es una abstracción de una propiedad importante que poseen ciertos conjuntos de números reales. La propiedad que tenemos en mente es aquella expresada en el Teorema

de Heine-Borel, el cual nos dice que si X es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, entonces cualquier colección de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ cuya unión contiene a X, tiene una subcolección finita que también contiene a X.
Así, si consideramos a X como cualquier espacio topológico, podemos definir cuándo X es compacto de la siguiente manera.

Definición 1.4.1. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se dice ser una **cubierta de** X si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ es igual a X. Si todos los elementos de $\mathcal{A}$ son subconjuntos abiertos de X, entonces le llamaremos **cubierta abierta de** X.

Definición 1.4.2. Diremos que un espacio X es **compacto** si para cada cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X, existe una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a X. A tal subcolección le llamaremos **subcubierta finita** de $\mathcal{A}$ para X.

A continuación, mostramos dos teoremas que pueden parecer bastante sencillos, pero son ampliamente utilizados.

Teorema 1.4.3. La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es un espacio compacto.

Demostración. Sea X un espacio topológico compacto y sea $f : X \to Y$ una función continua. Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta del conjunto $f(X)$. La colección $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ es una cubierta abierta de X ya que f es continua. Por tanto, como X es compacto, existen $A_i \in \mathcal{A}$ para $i = 1, \ldots, n$, tal que $\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i) = X$. Así, la colección $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{A}$ para $f(X)$, por lo que $f(X)$ es compacto. □

Teorema 1.4.4. Cada subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

Demostración. Ver [1], página 165. □

Ahora bien, uno de los resultados más importantes de topología en general es aquel que nos dice que el producto de espacios compactos es compacto. Utilizaremos este hecho en repetidas ocasiones a lo largo de este trabajo, por lo cual es importante dedicarle su debida atención.

Teorema 1.4.5. (**Teorema de Tychonoff**). El producto arbitrario de espacios topológicos compactos no vacíos, es compacto respecto a la topología producto.

Demostración. Ver Apéndice A. □

De la misma manera, otro resultado al que recurriremos frecuentemente es el siguiente.

Lema 1.4.6. (**Lema del número de Lebesgue**). Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta del espacio métrico (X, d). Si X es compacto, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto de X con diámetro menor que δ, existe un elemento de $\mathcal{A}$ que lo contiene.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta para X. Si el mismo X fuera un elemento de $\mathcal{A}$, entonces este resultado se cumpliría para cualquier $\delta > 0$. Así pues, supongamos que X no es un elemento de $\mathcal{A}$.

Elegimos entonces una subcubierta finita $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de $\mathcal{A}$ para X. Para cada $i = 1, ..., n$ tomamos los conjuntos $C_i = X - A_i$ y definimos la función $f : X \to \mathbb{R}$ como sigue

$$f(x) = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$$

donde $d(x, C_i) = \text{mín}\{d(x, c) \mid c \in C_i\}$. Claramente f es una función continua. Veamos entonces que $f(x) > 0$ para toda $x \in X$.

Dado $x \in X$, existe $A_i \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A_i$ para alguna i. Como A es abierto, podemos elegir $\epsilon > 0$ de tal manera que la bola $B_\epsilon(x)$ esté completamente contenida en A_i. Entonces tenemos que $d(x, C_i) \geq \epsilon$, y así

$$f(x) = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) \geq \epsilon.$$

Ahora, como f es continua y X es compacto, f alcanza su valor mínimo, digamos δ, el cuál ya vimos que es no negativo. Veamos entonces que δ es nuestro número de Lebesgue. Tomemos un subconjunto B de X cuyo diámetro sea menor que δ. Sea x_0 un punto de B, entonces $B \subset B_\delta(x_0)$. Ahora bien, si $d(x_0, C_m) = \max\limits_{i=1,...,n} d(x_0, C_i)$ notamos que

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m).$$

De esto concluimos que la bola de radio δ centrada en x_0 está contenida en el elemento A_m de $\mathcal{A}$, es decir, $A_m \in \mathcal{A}$ es tal que $B \subset B_\delta \subset A_m$. □

En muchas ocasiones resulta bastante complicado probar la compacidad de un espacio topológico utilizando directamente la definición de compacidad, por lo que a continuación se presentan varias definiciones y teoremas que nos dan formas equivalentes de compacidad que son más faciles de aplicar en diversas situaciones.

Definición 1.4.7. Diremos que un espacio topológico X es **compacto por punto límite** si cada subconjunto infinito de X tiene al menos un punto límite.

Teorema 1.4.8. Todo espacio compacto es compacto por punto límite.

Demostración. Sea X un espacio topológico compacto y sea A un subconjunto infinito de X. Supongamos que A no tiene puntos límite. Entonces para cada $a \in A$ podemos encontrar una vecindad U_a de a tal que $A \cap U_a = \{a\}$. De esta manera, X está cubierto por el conjunto $X \setminus A$ y los U_a para toda $a \in A$, es decir, $X = (X \setminus A) \cup (\bigcup_{a \in A} U_a)$. Luego, dado que X es compacto, tenemos que puede ser cubierto por un número finito de U_a, y ya que $A \cap U_a = \{a\}$, concluimos que el subconjunto A debe ser finito, lo cual contradice la hipótesis sobre la cardinalidad de A. □

El recíproco no siempre es cierto, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3. Sea $X = \mathbb{Z} \times Y$, donde $Y = \{a, b\}$ tiene la topología indiscreta. Este espacio es claramente compacto por punto límite ya que cada subconjunto no vacío de X cuenta con un punto límite. Sin embargo X no es compacto, pues la cubierta abierta dada por $\{n\} \times Y$ con $n \in \mathbb{Z}$, no tiene ninguna subcubierta finita que cubra a todo X.

Definición 1.4.9. Un espacio X es **sucecionalmente compacto** si cada sucesión de puntos en X contiene una subsucesión convergente.

Teorema 1.4.10. Sea X un espacio metrizable, entonces son equivalentes:

1. X es compacto.
2. X es compacto por punto límite.
3. X es sucesionalmente compacto.

Demostración. Ver [1], páginas 179-181. □

1.5. Homotopía de aplicaciones continuas

Presentamos a continuación el concepto de homotopía, el cual nos servirá para establecer una relación de equivalencia entre funciones continuas, y en particular entre caminos, esencial para la construcción del grupo fundamental de un espacio topológico.

Definición 1.5.1. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas entre espacios topológicos y sea $I = [0, 1]$. Diremos que f es **homotópica** a g si existe una función continua $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para cada $x \in X$. La función F es llamada **homotopía** entre f y g. La relación de homotopía la denotamos por $f \simeq g$ ó $F : f \simeq g$.

Esto quiere decir que podemos deformar f continuamente a g mediante una familia de funciones $f_t(x) = F(x,t)$, es decir, para cada $t \in [0,1]$ tenemos una función que depende continuamente de x.

Una consecuencia inmediata es que si $f : [0,1] \to Y$ es un camino cualquiera en Y, entonces f es homotópica a la función constante $\mathcal{E}_{f(0)}(t) : [0,1] \to Y$ dada por $\mathcal{E}_{f(0)}(t) = f(0)$ para cada $t \in [0,1]$, es decir, $f \simeq \mathcal{E}_{f(0)}$. En efecto, consideremos la función $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x,t) = f((1-t)x)$. Así, F es continua y tenemos que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = f(0) = \mathcal{E}_{f(0)}(t)$. Por lo que $F : f \simeq \mathcal{E}_{f(0)}$.

Definición 1.5.2. Sean $f,g : X \to Y$ funciones continuas entre espacios topológicos y sea A un subconjunto de X. Diremos que f es **homotópica a g relativa a A**, si existe una homotopía $F : X \times I \to Y$ entre f y g tal que para toda $a \in A$, $F(a,t)$ no dependa de t, es decir, $F(a,t) = f(a) = g(a)$ para toda $a \in A$ y toda $t \in I$. La función F es llamada homotopía entre f y g **relativa a A**. Denotaremos la relación de homotopía relativa a A por $f \simeq g(\text{rel}A)$ o por $F : f \simeq_{\text{rel}A} g$.

Lema 1.5.3. Sean $f,g : X \to Y$ funciones continuas entre espacios topológicos y sea A un subconjunto de X. Definimos una relación en $C(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ escontinua}\}$ por:

$$f \sim g \text{ si y sólo si } f \simeq g(\text{rel}A).$$

Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración. Sean $f,g,h : X \to Y$ funciones continuas. Verifiquemos las propiedades de una relación de equivalencia.

1. La relación $f \sim f$ se verifica mediante la homotopía $F : X \times I \to Y$ dada por $F(x,t) = f(x)$.

2. Si $f \sim g$, entonces existe una homotopía F entre f y g. Así, la función $G : X \times I \to Y$ dada por $G(x,t) = F(x,1-t)$, es una homotopía entre g y f, por lo que $g \sim f$.

3. Supongamos que $f \sim g$ y $g \sim h$. Sea F una homotopía entre f y g, y sea F' una homotopía entre g y h. Entonces la función $G : X \times I \to Y$ dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F'(x,2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es una homotopía entre f y h, por lo que $f \sim h$.

□

Y de igual manera que podemos establecer relaciones entre funciones en un mismo espacio topológico, podemos establecer cuándo dos espacios topológicos son equivalentes respecto al concepto de homotopía de la siguiente manera.

Definición 1.5.4. Diremos que dos espacios topológicos X y Y son del mismo tipo de homotopía si existen aplicaciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que

$$g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X : X \to X \quad \text{y} \quad f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y : Y \to Y.$$

A las aplicaciones f y g les llamaremos **equivalencias homotópicas**. Además, diremos que los espacios X y Y son **homotópicamente equivalentes.**

Se sigue inmediatamente de la definición de homeomorfismo que si dos espacios topológicos son homeomorfos, entonces son también del mismo tipo de homotopía. Sin embargo, el recíproco en general no es verdadero, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4. Consideremos $\mathbb{D}^n$ el disco unitario de dimensión n como subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea $y \in \mathbb{D}^n$ fijo. Así, $\mathbb{D}^n$ claramente no es homeomorfo al punto $\{y\} \subset \mathbb{R}^n$, sin embargo, sí son del mismo tipo de homotopía. En efecto, consideremos la inclusión $f : \{y\} \to \mathbb{D}^n$ dada por $f(y) = y$, y la aplicación $g : \mathbb{D}^n \to \{y\}$ tal que $g(x) = y$ para toda $x \in \mathbb{D}^n$. Claramente $g \circ f = \mathrm{Id}_{\{y\}}$, por lo que $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_{\{y\}}$. Ahora sólo falta ver que $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{\mathbb{D}^n}$, y para ello definimos $F : \mathbb{D}^n \times I \to \mathbb{D}^n$ dada por $F(x,t) = tx + (1-t)y$, y así, tenemos que F es una aplicación continua y además $F(x,0) = y = f \circ g(X)$ y $F(x,1) = x = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}^n}(x)$ para toda $x \in \mathbb{D}^n$, por lo que $F : f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{\mathbb{D}^n}$.

Como acabamos de ver, el hecho de ser homotópicamente equivalente es más débil que el de ser homeomorfo, y este hecho se hace aún más evidente con los siguientes enunciados.

Definición 1.5.5. Diremos que un espacio topológico X es **contractible** si X es homotópicamente equivalente a algún punto de X.

El disco $\mathbb{D}^n$ es un espacio contractible como bien hemos visto en el Ejemplo 1.4.

Lema 1.5.6. Sea K cualquier subconjunto de un espacio contractible X. Entonces K se deforma a un punto de X.

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y sea $H : X \times I \to X$ tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$ para toda $x \in X$. Definimos la función $F : K \times I \to X$ dada por $F(x,t) = H(x,t)$ para toda $x \in X$ y toda $t \in I$. Así, es claro que F es una homotopía que deforma el subconjunto K al punto x_0.

□

Definición 1.5.7. Diremos que un subconjunto A de un espacio topológico X es un **retracto** de X si existe una función continua $r : X \to A$, llamada **retracción**, tal que $r(a) = a$ para toda $a \in A$.

Definición 1.5.8. Un subconjunto A de X es un **retracto por deformación** de X si existe una retracción $r : X \to A$ y una homotopía $F : X \times I \to X$ tal que $F(x, 0) = x$ y $F(x, 1) = r(x)$ para toda $x \in X$.

Notemos que si A es un retracto por deformación de X, entonces la retracción $r : X \to A$ y la inclusión $i : A \to X$ son equivalencias homotópicas, por lo que A y X son homotópicamente equivalentes.

Ejemplo 1.5. Tomemos la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ y el cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$ y veamos que estos espacios son del mismo tipo de homotopía. Consideremos la inclusión $i : \mathbb{S}^1 \to C$ y la aplicación $r : C \to \mathbb{S}^1$ dada por $r((x, y, z)) = (x, y, 0)$.
Luego, $r \circ i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es tal que

$$\begin{aligned} r \circ i(x, y, z) &= r(i(x, y, z) \\ &= r((x, y, z)) \\ &= (x, y, 0) \\ &= \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}(x, y, 0). \end{aligned}$$

Por lo que $r \circ i \simeq 1_{\mathbb{S}^1}$.
Ahora veamos que $i \circ r \simeq 1_C$. Para ello definimos la función $F : C \times I \to C$ dada por $F((x, y, z), t) = (x, y, (1 - t)z)$. Así, F es continua y tenemos que

$$\begin{aligned} F((x, y, z), 0) &= (x, y, z) \\ &= \mathrm{Id}_C(x, y, z), \\ F((x, y, z), 1) &= (x, y, 0) \\ &= i \circ r(x, y, z). \end{aligned}$$

Por lo que $F : \mathrm{Id}_C \simeq i \circ r$, de donde concluimos que $\mathbb{S}^1$ y C son homotópicamente equivalentes.

Capítulo 2

Propiedades y cálculos de $\pi_1(X, x_0)$

En este capítulo definiremos el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ de un espacio topológico X y veremos algunas de sus propiedades. En particular, cómo se comporta bajo el efecto de aplicaciones continuas, pues esto nos llevará a mostrar que efectivamente es un invariante topológico, hecho que es de suma importancia a la hora de abordar problemas topológicos, puesto que podríamos reducirlos a problemas puramente algebraicos de grupos y homomorfismos.

Comenzaremos dando las definiciones y propiedades básicas del grupo fundamental, para posteriormente realizar algunos cálculos sencillos del grupo fundamental de espacios topológicos conocidos.

2.1. Grupo fundamental

A continuación mostraremos la construcción del grupo fundamental, comenzando por definir la operación que utilizaremos en él.

Definición 2.1.1. Sean $f, g : [0, 1] \to X$ caminos en X tales que $f(1) = g(0)$. Definimos el **producto de caminos** de f por g como $f * g : [0, 1] \to X$ dado por

$$(f * g)(x) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \,. \end{cases}$$

Definición 2.1.2. Dos caminos f y g en X son equivalentes si son homotópicos relativos a los extremos, es decir, $f \simeq g(\text{rel}\{0, 1\})$. Lo cual denotamos por $f \sim g$.

Ya vimos previamente que $f \simeq g(\text{rel}A)$ es una relación de equivalencia en $C(I, X)$, por lo que si tomamos $A = \{0, 1\}$, obtenemos que $\sim$ es también una relación de equivalencia en $C(I, X)$. Así, si $f \in C(I, X)$, tenemos que las clases de equivalencia inducidas por esta relación estan dadas por $[f] = \{g \in C(I, X) \mid f \sim g\}$.

Definición 2.1.3. Si $f, g \in C(I, X)$ tales que $f(1) = g(0)$, definimos el **producto de clases de equivalencia de caminos** como sigue

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Veamos que dicho producto se encuentra efectivamente bien definido.

Lema 2.1.4. Supongamos que f_0, f_1, g_0, g_1 son caminos en X tales que $f_0(1) = g_0(0)$ y $f_1(1) = g_1(0)$. Si $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$, entonces $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.

Demostración. Sean $F : f_0 \simeq f_1(\text{rel}\{0, 1\})$ y $G : g_0 \simeq g_1(\text{rel}\{0, 1\})$ las homotopías necesarias. Definimos pues la homotopía $H : I \times I \to X$ dada por

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como $F(1, s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0, s)$, del Lema 1.1.2 se sigue que H es una función continua. Ahora realizamos los cálculos correspondientes:

$$H(t, 0) = \begin{cases} F(2t, 0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, 0) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} f_0(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_0(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

así, $H(t, 0) = (f_0 * g_0)(t)$ para cada $t \in I$;

$$H(t, 1) = \begin{cases} F(2t, 1) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

así, $H(t, 1) = (f_1 * g_1)(t)$ para cada $t \in I$. Ahora,

$$H(0, s) = F(0, s) = f_0(0) = (f_0 * g_0)(0),$$
$$H(1, s) = G(1, s) = g_0(1) = (f_1 * g_1)(1).$$

Por lo que concluimos que $H : f_0 * g_0 \simeq f_1 * g_1(\text{rel}\{0, 1\})$. □

Con esto hemos probado que el producto de clases de equivalencia no depende de los representantes de clase que tomemos.

A continuación mostraremos que el producto de estas clases de equivalencia es asociativo, es decir, dados f, g, h caminos en X tales que $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$, tenemos que se cumple

$$([f] * [g]) * [h] = [f] * ([g] * [h]).$$

Lema 2.1.5. Supongamos que f, g, h son tres caminos en X tales que $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$, entonces

$$(f * g) * h \sim f * (g * h).$$

Demostración. De la definición de producto de caminos sabemos que

$$1) \quad ((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ g(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$2) \quad (f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ h(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que, $s = 4t - 1$ es la ecuación de la recta que describe la expansión del dominio de la función f al pasar de 1) a 2). Así pues, para cada valor fijo de s tomemos f en el intervalo $[0, \frac{s+1}{4}]$, g en el intervalo $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$ y h en el intervalo $[\frac{s+2}{4}, 1]$.

Definamos ahora $F : I \times I \to X$ por

$$F(t, s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{s+1}) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t - s - 1) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La función F es continua por el Lema 1.1.2 y

$$F(t, 0) = \begin{cases} f(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ g(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = ((f * g) * h)(t),$$

$$F(t,1) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ h(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} = (f * (g * h))(t).$$

Además,

$$F(0, s) = f(0) = ((f * g) * h)(0),$$
$$F(1, s) = h(1) = (f * (g * h))(1).$$

Por lo que $F : (f * g) * h \simeq f * (g * h)(\text{rel}\{0,1\})$. □

Es importante recordar que esta asociatividad solamente nos dice que los productos de los caminos son homotópicos y no necesariamente iguales, es decir, es posible que el camino $(f * g) * h$ sea distinto de $f * (g * h)$.

A continuación mostramos que los caminos constantes en alguno de los puntos final ó inicial de un camino cualquiera, se comportan como identidad respecto a la relación de homotopía.

Lema 2.1.6. Sea f un camino en X con $f(0) = x$ y $f(1) = y$, entonces $\mathcal{E}_x * f \sim f$, y $f * \mathcal{E}_y \sim f$, donde $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y : I \to X$ son los caminos constantes en x y y respectivamente.

Demostración. Mostraremos solamente el caso de $\mathcal{E}_x * f \sim f$, pues el otro es análogo. Primero observemos que

$$(\mathcal{E}_x * f)(t) = \begin{cases} \mathcal{E}_x(t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

De la misma manera que el lema anterior, definamos $F : I \times I \to X$ por

$$(\mathcal{E}_x * f)(t) = \begin{cases} \mathcal{E}_x(t) & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f(\frac{2t-1+s}{1+s}) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Así, por el Lema 1.1.2 tenemos que F es continua, y realizando los cálculos correspondientes obtenemos

$$F(t,0) = \begin{cases} \mathcal{E}_x(t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\mathcal{E}_x * f)(t),$$

$$F(t,1) = \begin{cases} \mathcal{E}_x(t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = f(t).$$

Además,

$$F(0,s) = f(0) = (\mathcal{E}_x * f)(0) \text{ y } F(1,s) = f(1) = (\mathcal{E}_x * f)(1).$$

Por lo que $F : \mathcal{E}_x * f \simeq f(\text{rel}\{0,1\})$. $\square$

Observemos que si f es un camino en X, entonces la función $f : I \to X$ dada por $\overline{f}(t) = f(1-t)$, tiene la misma trayectoria que f pero en sentido contrario. Veamos que dicho camino es compatible con $\sim$, es decir, $\overline{f} \sim \overline{g}$ si y sólo si $f \sim g$.
Para ello supongamos primero que $f \sim g$, lo cual implica que existe una homotopía $F : I \times I \to X$ tal que

$$\begin{array}{lcl} F(t,0) = f(t) & \text{y} & F(0,s) = f(0) = g(0) \\ F(t,1) = g(t) & & F(1,s) = f(1) = g(1) \end{array}.$$

Definimos entonces $G : I \times I \to X$ por $G(t,s) = F(1-t,s)$ y así, tenemos que G es continua y realizando los cálculos correspondientes obtenemos

$$\begin{array}{lcl} G(t,0) = \overline{f}(t) & \text{y} & G(0,s) = F(1,s) = f(1) = g(1) \\ G(t,1) = \overline{g}(t) & & G(1,s) = F(0,s) = f(0) = g(0) \end{array}.$$

Por lo que $G : \overline{f} \simeq \overline{g}(\text{rel}\{0,1\})$, lo que implica que $\overline{f} \sim \overline{g}$.
La otra implicación se muestra de manera análoga.

Lema 2.1.7. Si f es un camino en X con origen en x y final en y, entonces $f * \overline{f} \sim \mathcal{E}_x$ y $\overline{f} * f \sim \mathcal{E}_y$.

Demostración. Basta con mostrar que $f * \overline{f} \sim \mathcal{E}_x$ pues el otro caso se aborda de manera análoga. Observemos primeramente que

$$(f * \overline{f})(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(2t-2) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Es fácil notar que f y $\overline{f}$ están sobrepuestos ya que $\overline{f}$ recorre en sentido contrario a f, y la recta que une a los puntos $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0,1)$ y deforma a $f * \overline{f}$ en $\mathcal{E}_x$ tiene por ecuación a $s = 1 - 2t$.
Definimos entonces $F : I \times I \to X$ dada por

$$F(t,s) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le \frac{1-s}{2} \\ f(1-s) & \frac{1-s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2} \\ f(2-2t) & \frac{1+s}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Así, tenemos que F es continua y además

$$\begin{matrix} F(t,0) = (f * \overline{f})(t) \\ F(t,1) = \mathcal{E}_x(t) \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} F(0,s) = f(0) \\ F(1,s) = f(0) \end{matrix}$$

Por lo que $F : f * \overline{f} \simeq \mathcal{E}_x(\text{rel}\{0,1\})$, es decir $f * \overline{f} \sim \mathcal{E}_x$. □

A lo largo de esta sección hemos visto que el producto de caminos respeta todas las propiedades de una operación de grupo, es decir, el Lema 2.1.5 da la asociatividad, el Lema 2.1.6 la existencia de identidades, y el Lema 2.1.7 la existencia de caminos inversos.
El único detalle aquí es que si consideramos cualquier tipo de caminos entramos en problemas a la hora de ver si unos son compatibles con otros, así como con la existencia de tantas identidades como puntos iniciales o finales existan para los caminos, por lo que no nos es posible definir un grupo de esta manera.
Sin embargo, si en su lugar consideramos lazos basados en un punto específico, todos estos problemas desaparecen y podemos formar un grupo considerando las clases de equivalencia dadas por la relación de homotopía, como se enuncia a continuación.

Teorema 2.1.8. Sea X un espacio topológico y sea x_0 un punto de X. El conjunto de clases de equivalencia de lazos basados en x_0 con la operación de multiplicación de clases de equivalencia de caminos, es un grupo.
Este grupo es llamado el **grupo fundamental** de X con **punto base** x_0, y se denota por $\pi_1(X, x_0)$

2.2. Efectos de una aplicación continua sobre $\pi_1(X, x_0)$

Como hemos presentado al grupo fundamental como una herramienta para distinguir espacios topológicos entre sí, es de nuestro interés mostrar que efectivamente es un invariante topológico. Para ello veremos que a cada función continua entre espacios topológicos le corresponde un homomorfismo entre los grupos fundamentales de los espacios involucrados, y qué propiedades se desprenden de esto.

Lema 2.2.1. Sea $\varphi : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos, entonces se cumple lo siguiente

1. Si f es un camino en X, entonces $\varphi \circ f$ es un camino en Y.

2. Si $f \sim g$, entonces $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$.

3. Si f es un lazo en X con punto base x_0, entonces $\varphi \circ f$ es un lazo en Y con punto base $\varphi(x_0)$.

Demostración. 1. Si $f : I \to X$ es continua tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = y_0$, entonces $\varphi \circ f : I \to Y$ es una aplicación bien definida y continua, tal que $(\varphi \circ f)(0) = \varphi(x_0)$ y $(\varphi \circ f)(1) = \varphi(y_0)$. Por lo que $\varphi \circ f$ es un camino en Y.

2. Por hipótesis tenemos que existe $F : I \times I \to X$ continua tal que

$$\begin{matrix} F(t,0) = f(t) \\ F(t,1) = g(t) \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} F(0,s) = f(0) = g(0) \\ F(1,s) = f(1) = g(1) \end{matrix}.$$

Definamos $G : I \times I \to Y$ dada por $G(t,s) = (\varphi \circ F)(t,s)$. Claramente G es continua y notamos que

$$\begin{matrix} G(t,0) = (\varphi \circ F)(t,0) = (\varphi \circ f)(t) \\ G(t,1) = (\varphi \circ F)(t,1) = (\varphi \circ g)(t) \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} G(0,s) = (\varphi \circ F)(0,s) = (\varphi \circ f)(0) \\ G(1,s) = (\varphi \circ F)(1,s) = (\varphi \circ f)(1) \end{matrix}$$

Por lo que $G : \varphi \circ f \simeq \varphi \circ g(\mathrm{rel}\{0,1\})$, y por lo tanto $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$.

3. Tenemos que f es una función continua tal que $f(0) = f(1) = x_0$, así $\varphi \circ f$ es continua y además $(\varphi \circ f)(0) = (\varphi \circ f)(1) = \varphi(x_0)$. Por lo que $\varphi \circ f$ es un lazo en Y basado en $\varphi(x_0)$.

□

De lo anterior se sigue que si $[f]$ es elemento de $\pi_1(X, x_0)$, entonces $[\varphi \circ f]$ es un elemento de $\pi_1(Y, \varphi(x_0))$, el cual está bien definido.
Esto nos da paso a definir la siguiente función entre grupos fundamentales

$$\varphi_{\#} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

dada por $\varphi_{\#}[f] = [\varphi \circ f]$.

Lema 2.2.2. La aplicación $\varphi_{\#} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Sean $[f], [g]$ elementos de $\pi_1(X, x_0)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\#}([f] * [g]) &= \varphi_{\#}[f * g] \\
&= [\varphi(f * g)] \\
&= [\varphi(f) * \varphi(g)] \\
&= [\varphi(f)] * [\varphi(g)] \\
&= \varphi_{\#}[f] * \varphi_{\#}[g]
\end{aligned}
$$

□

Teorema 2.2.3. Sean X, Y, Z espacios topológicos, entonces

1. Si $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ son continuas, entonces $(\psi \circ \varphi)_{\#} = \psi_{\#} \circ \varphi\#$.
2. Si $\mathrm{Id}_X : X \to X$ es la identidad en X, entonces $(\mathrm{Id}_X)_{\#}$ es el homomorfismo identidad en $\pi_1(X, x_0)$.
3. Si $\varphi, \psi : X \to Y$ son tales que $\varphi \simeq \psi(\mathrm{rel}\{0, 1\})$, entonces $\varphi_{\#} = \psi_{\#}$.

Demostración. 1. Sea $[h] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces

$$
\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)_{\#}[h] &= [(\psi \circ \varphi)(h)] \\
&= [\psi(\varphi(h))] \\
&= \psi_{\#}[\varphi(h)] \\
&= (\psi_{\#} \circ \varphi_{\#})[h].
\end{aligned}
$$

2. Sea $[h] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces

$$(\mathrm{Id}_X)_{\#}[h] = [\mathrm{Id}_X(h)] = [h].$$

3. Si $F : \varphi \simeq \psi(\mathrm{rel}\{0, 1\})$ y $[h] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces la función $G : I \times I \to Y$ dada por $G(t, s) = F(h(t), s)$ realiza la equivalencia deseada, pues

$$
\begin{aligned}
G(t, 0) &= F(h(t), 0) = \varphi(h(t)) = (\varphi \circ h)(t), \\
G(t, 1) &= F(h(t), 1) = \psi(h(t)) = (\psi \circ h)(t), \\
G(0, s) &= G(1, s) = F(h(1), s) = x_0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $[\varphi \circ h] = [\psi \circ h]$, o lo que es lo mismo $\varphi_{\#}[h] = \psi_{\#}[h]$.

□

Ahora que hemos visto algunas propiedades que presentan los homomorfismos inducidos por funciones continuas, podemos proceder a ver que si dos espacios topológicos son homeomorfos, entonces sus grupos fundamentales resultan ser isomorfos.

Teorema 2.2.4. Sea $\varphi : X \to Y$ un homeomorfismo, entonces $\varphi_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ es un isomorfismo.

Demostración. Como φ es un homeomorfismo, existe $\varphi^{-1} : Y \to X$ tal que $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_Y$ y $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$. Aplicando 1 y 2 del teorema anterior, tenemos que $\varphi_\# \circ (\varphi^{-1})_\# = (\mathrm{Id}_Y)_\#$ y $(\varphi^{-1})_\# \circ \varphi_\# = (\mathrm{Id}_X)_\#$. Lo que nos dice que $\varphi_\#$ es una biyección entre ambos grupos fundamentales, y por tanto, es un isomorfismo. $\square$

Teorema 2.2.5. Sean x, y dos puntos de X. Si existe un camino en X de x a y, entonces los grupos fundamentales $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos.

Demostración. Sea f un camino en X de x a y. Si g es un lazo con punto base x, entonces $\overline{f} * g * f$ es un lazo con punto base y. Definimos por tanto

$$u_f : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$$

por $u_f[g] = [\overline{f} * g * f]$.
Veamos primero que u_f está bien definida. Para ello, supongamos que g y h son dos lazos basados en x tales que $g \sim h$, entonces

$$\begin{aligned}
[g] &= [h] \\
[g] * [f] &= [h] * [f] \\
[\overline{f}] * [g] * [f] &= [\overline{f}] * [h] * [f] \\
[\overline{f} * g * f] &= [\overline{f} * h * f] \\
u_f[g] &= u_f[h]
\end{aligned}$$

por lo que u_f está bien definida.
Ahora, u_f es homomorfismo de grupos, pues si $[g], [h] \in \pi_1(X, x)$, entonces

$$\begin{aligned}
u_f([g] * [h]) &= u_f[g * h] \\
&= [\overline{f} * g * h * f] \\
&= [\overline{f} * g * f * \overline{f} * h * f] \\
&= [\overline{f} * g * f] * [\overline{f} * h * f] \\
&= u_f[g] * u_f[h].
\end{aligned}$$

Análogamente utilizando el camino $\overline{f}$ de y a x, definimos

$$u_{\overline{f}} : \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)$$

por $u_{\overline{f}}[h] = [f * h * \overline{f}]$.
Sean $[g] \in \pi_1(X, x)$ y $[h] \in \pi_1(X, y)$. Observemos que

$$\begin{aligned}(u_{\overline{f}} \circ u_f)[g] &= u_{\overline{f}}[\overline{f} * g * f] \\ &= [f * \overline{f} * g * f * \overline{f}] \\ &= [g] \\ &= (\mathrm{Id}_X)_{\#}[g]\end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned}(u_f \circ u_{\overline{f}})[h] &= u_f[f * h * \overline{f}] \\ &= [\overline{f} * f * h * \overline{f} * f] \\ &= [h] \\ &= (\mathrm{Id}_Y)_{\#}[h]\end{aligned}$$

Lo cual implica que u_f es biyectiva.
Por lo que $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos. □

Corolario 2.2.6. Si X es un espacio topológico conexo por caminos, entonces para cualquier par de puntos x, y de X, tenemos que $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos.

Con esto hemos visto, en un espacio conexo por caminos los grupos fundamentales basados en cualesquiera par de puntos distintos son isomorfos, sin embargo, no existe un isomorfismo canónico entre $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$, es decir, diferentes caminos de x a y pueden inducir diferentes isomorfismos.
Por lo que es natural preguntarse cuándo dos caminos distintos inducen el mismo isomorfismo. Para ver ésto consideremos f y g dos caminos distintos en X de x a y, y un elemento $[h]$ de $\pi_1(X, x)$. Supongamos que ambos caminos inducen el mismo isomorfismo, entonces

$$\begin{aligned}u_f[h] &= u_g[h] \\ (u_{\overline{g}} \circ u_f)[h] &= [h] \\ u_{\overline{g}}[\overline{f} * h * f] &= [h] \\ [g * \overline{f} * h * f * \overline{g}] &= [h] \\ [g * \overline{f}] * [h] * [f * \overline{g}] &= [h] \\ [g * \overline{f}] * [h] &= [h] * [f * \overline{g}]^{-1} \\ [g * \overline{f}] * [h] &= [h] * [g * \overline{f}]\end{aligned}$$

En otras palabras, una condición necesaria es que $[g * \overline{f}]$ pertenezca al centro de $\pi_1(X, x)$, denotado por $Z(\pi_1(X, x))$. Además, esta condición también es suficiente, es decir, si f y g son caminos de x a y y $[g * \overline{f}] \in Z(\pi_1(X, x))$, entonces $u_f = u_g$.
Resulta ser entonces que $\pi_1(X, x)$ es abeliano si y sólo si el isomorfismo inducido no depende del camino que va de x a y.

Teorema 2.2.7. Sean $\varphi, \psi : X \to Y$ aplicaciones continuas entre espacios topológicos, x_0 un punto de X y sea $F : \varphi \simeq \psi$ una homotopía. Si $f : I \to Y$ es un camino de $\varphi(x_0)$ a $\psi(x_0)$ dado por $f(t) = F(x_0, t)$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[d, "u_f"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\varphi_\#"] \arrow[r, "\psi_\#"'] & \pi_1(Y, \psi(x_0)) \end{tikzcd}$$

Demostración. Nuestro objetivo es ver que si $[g]$ es un elemento de $\pi_1(X, x_0)$, entonces $\psi_\#[g] = (u_f \circ \varphi_\#)[g]$, es decir, $[\psi \circ g] = [\overline{f} * \varphi \circ g * f]$. Consideremos

$$((\overline{f} * \varphi \circ g) * f)(t) = \begin{cases} f(1-4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\varphi \circ g)(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Utilizando el hecho de que $f(t) = F(x_0, t)$, podemos escribir lo anterior de la siguiente manera

$$((\overline{f} * \varphi \circ g) * f)(t) = \begin{cases} F(x_0, 1-4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t-1), 0) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como $F : X \times I \to Y$ realiza la homotopía $\varphi \simeq \psi$, entonces $F(x, 0) = \varphi(x)$ y $F(x, 1) = \psi(x)$. Por lo que $(\psi \circ g)(t) = F(g(t), 1)$. Ahora, tomando en cuenta el hecho de que $\psi \circ g$ es equivalente a $(\mathcal{E}_x * \psi \circ g) * \mathcal{E}_x$ donde $x = \psi(x_0)$ tenemos que

$$((\mathcal{E}_x * \psi \circ g) * \mathcal{E}_x)(t) = \begin{cases} F(x_0, 1) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t-1), 1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Luego, definimos $H : I \times I \to Y$ por

$$H(t, s) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 4t(1-s)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t-1), s) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 1 + 2(t-1)(1-s)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Así, H es continua por el Lema 1.1.2 y además

$$\begin{array}{lcl} H(t,0) = ((\overline{f} * \varphi \circ g) * f)(t) & \text{y} & H(0,s) = F(x_0,1) = \psi(x_0) \\ H(t,1) = ((\mathcal{E}_x * \psi \circ g) * \mathcal{E}_x)(t) & & H(1,s) = F(x_0,1) = \psi(x_0) \end{array}.$$

Por lo que $H : \overline{f} * \varphi \circ g * f \simeq \mathcal{E}_x * \psi \circ g * \mathcal{E}_x(\text{rel}\{0,1\})$. Y por tanto $u_f \circ \varphi_\# = \psi_\#$. □

Teorema 2.2.8. Si $\varphi : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces $\varphi_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ es un isomorfismo.

Demostración. Como φ es una equivalencia homotópica, entonces existe $\psi : Y \to X$ continua tal que $\psi \circ \varphi \simeq \text{Id}_X$ y $\varphi \circ \psi \simeq \text{Id}_Y$. Usando el hecho de que $\psi \circ \varphi \simeq \text{Id}_X$ y aplicando el teorema anterior, tenemos que $u_f \circ (\psi \circ \varphi)_\# = (\text{Id}_X)_\#$. Dado que u_f y $(\text{Id}_X)_\#$ son isomorfismos, $(\psi \circ \varphi)_\# = \psi_\# \circ \varphi_\#$ también lo es.
En base a lo anterior afirmamos que:

1. $\varphi_\#$ es inyectiva,

2. $\psi_\#$ es sobreyetiva.

En efecto:

1. Dado que $\psi_\# \circ \varphi_\#$ es inyectiva tenemos que si $[g] \neq [h]$, entonces $(\psi_\# \circ \varphi_\#)[g] \neq (\psi_\# \circ \varphi_\#)[h]$.
   Supogamos que $\varphi_\#$ no es inyectiva, es decir, si $[g] \neq [h]$ entonces $\varphi_\#[g] = \varphi_\#[h]$, lo cual implica que $(\psi_\# \circ \varphi_\#)[g] = (\psi_\# \circ \varphi_\#)[h]$, lo que es una contradicción, y por tanto $\varphi_\#$ es inyectiva.

2. Dado que $\psi_\# \circ \varphi_\#$ es sobreyectiva, tenemos que para cada $[h] \in \pi_1(X, (\psi \circ \varphi)(x_0))$, existe $[g]$ en $\pi_1(X, x_0)$ tal que $(\psi_\# \circ \varphi_\#)[g] = [h]$.
   Supongamos pues que $\psi_\#$ no es sobreyectiva, entonces existe $\alpha \in \pi_1(X, (\psi \circ \varphi)(x_0))$ tal que para toda $\beta \in \pi_1(X, \varphi(x_0))$, tenemos que $\varphi_\#(\beta) \neq \alpha$, lo cual contradice que $\psi_\# \circ \varphi_\#$ sea sobreyectiva, y por lo tanto $\psi_\#$ es sobreyectiva.

Ahora bien, puesto que $\varphi \circ \psi \simeq \text{Id}_Y$, obtenemos de manera análoga que $\varphi_\#$ es sobreyectiva y $\psi_\#$ es inyectiva. Concluyendo así que $\varphi_\#$ es un isomorfismo. □

La siguiente definición es de gran utilidad, pues nos da una manera de identificar o referenciar a aquellos espacios cuyo grupo fundamental es trivial.

Definición 2.2.9. Decimos que un espacio topológico X es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x) = \{1\}$ para cualquier $x \in X$.

Teorema 2.2.10. Todo espacio contractible es simplemente conexo.

Demostración. Sea X un espacio contractible, entonces por definición existen aplicaciones continuas $\varphi : X \to \{x\}$ y $\psi : \{x\} \to X$ tales que $F : \varphi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_{\{x\}}$.
Por tanto, aplicando el teorema anterior a $\varphi : X \to \{x\}$ obtenemos que $\varphi_{\#} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(\{x\}, x)$ es un isomorfismo, esto es, $\pi_1(X, x) = \{1\}$. □

Teorema 2.2.11. Sea x_0 un punto de X y sea $\{U_j\}_{j\in J}$ una cubierta abierta para X que satisface las siguientes condiciones:

1. $x_0 \in U_j$ para todo j en J,
2. $U_j \cap U_k$ es conexo por caminos para cada $j \neq k$,
3. $\pi_1(U_j, x_0) = \{1\}$ para cada j en J.

Entonces X es simplemente conexo.

Demostración. Veamos que dado $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, se cumple que $f \sim \mathcal{E}_{x_0}$. Para esto aplicaremos el Lema 1.4.6 a la cubierta abierta de $[0, 1]$ dada por $\{f^{-1}(U_j) \mid j \in J\}$. Llamemos δ al número de Lebesgue de esta cubierta, y sea $n > 0$ un entero suficientemente grande tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Luego, para cada intervalo $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ con $0 \leq j \leq n-1$, existe un abierto U_{λ_j} tal que $f([\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]) \subseteq U_{\lambda_j}$. Sea $h_j : [0,1] \to [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ el homeomorfismo lineal creciente, y f_j' la restricción de f al intervalo $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$, entonces definimos el camino $f_j := f_j' \circ h_j$.
Por inducción podemos ver que $f \sim f_0 * f_1 * \cdots * f_{n-1}$. Ahora, como $U_j \cap U_k$ es conexo por caminos para cada $j \neq k$, podemos tomar un camino g_j con punto inicial x_0 y punto final $f(\frac{j+1}{n}) \in U_{\lambda_j} \cap U_{\lambda_{j-1}}$, y como U_{λ_j} es simplemente conexo, tenemos que $g_1 \sim f_0$ en U_{λ_0}.
Así,

$$f \sim f_0 * f_1 * \cdots * f_{n-1} \sim g_1 * f_1 * \cdots * f_{n-1},$$

pero dado que $g_1 * f_1$ y g_2 son caminos en U_{λ_1} cuyos puntos inicial y final coinciden, y como U_{λ_1} es simplemente conexo, tenemos que $g_1 * f_1 \sim g_2$, y así,

$$(g_1 * f_1) * f_2 * \cdots * f_{n-1} \sim g_2 * f_2 * \cdots * f_{n-1}.$$

Siguiendo este procedimiento obtenemos que

$$f \sim g_1 * f_1 * f_2 * \cdots * f_{n-1} \sim \cdots \sim g_{n-1} * f_{n-1} \sim \mathcal{E}_x,$$

donde la última equivalencia resulta de que $\pi_1(U_{\lambda_{n-1}}, x) = \{1\}$. Por lo tanto $\pi_1(X, x) = \{1\}$. □

La esfera $\mathbb{S}^n$ de dimensión mayor o igual a dos, resulta ser un espacio no contractible cuyo grupo fundamental es trivial como veremos a continuación.

Teorema 2.2.12. La esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa para $n \geq 2$.

Demostración. Sea $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$ y consideremos los subconjuntos abiertos:

$$U = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} > -\tfrac{1}{10}\} \quad \text{y} \quad V = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} < \tfrac{1}{10}\}.$$

Ambos son contractibles y por tanto, por el Teorema 2.2.10 son simplemente conexos, además, la intersección

$$U \cap V = \{x \in \mathbb{S}^n \mid -\tfrac{1}{10} < x_{n+1} < \tfrac{1}{10}\}$$

es una banda homeomorfa a $\mathbb{S}^{n-1} \times (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$, la cual es conexa por caminos para $n \geq 2$. Así, tomando el punto $x = (1, 0, 0, \ldots, 0) \in U \cap V$ tenemos que $\pi_1(U, x) = \{1\}$ y $\pi_1(V, x) = \{1\}$.
Entonces aplicando el Teorema 2.2.11 tenemos que $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa. □

Teorema 2.2.13. Si A es un retracto de X y $a \in A$, entonces $\pi_1(X, a)$ contiene un subgrupo isomorfo a $\pi_1(A, a)$ y además $\pi_1(A, a) \simeq \pi_1(X, a) / \ker\{r_\#\}$.

Demostración. Como A es un retracto de X, entonces existe una función $r : X \to A$ continua tal que $r(a) = a$ para toda $a \in A$. Como r es continua, existe $r_\# : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ homomorfismo de grupos. Observemos que $\ker\{r_\#\} = \{[x] \in \pi_1(X, a) \mid r_\#[x] = \mathrm{Id}_A\}$.
Como r es retracción de X sobre A, tenemos que $r \circ i = \mathrm{Id}_A$, donde $i : A \to X$ es la inclusión, y pasando a los homomorfismos inducidos tenemos $r_\# \circ i_\# = (\mathrm{Id}_A)_\#$, de lo cual se desprende que $i_\#$ es un monomorfismo y $r_\#$ es un epimorfismo. Entonces aplicando el primer teorema de isomorfismos obtenemos $\pi_1(X, a) / \ker\{r_\#\} \simeq r_\#(\pi_1(X, a)) = \pi_1(A, a)$. □

2.3. Cálculo de grupos fundamentales

Calcular el grupo fundamental de un espacio topológico puede llegar a ser sumamente complicado, es por ello que se han desarrollado numerosas técnicas y herramientas que cumplen este fin. Es por eso que a continuación veremos algunos ejemplos que ilustrarán la complejidad que puede representar realizar dichos cálculos.

Ejemplo 2.1. Sea X un conjunto finito con la topología discreta, veamos que para cualquier punto x_0 de X el grupo fundamental de X basado en x_0 es trivial.
Notemos que la única función continua que podemos definir de $[0,1]$ en X es la función constante $\mathcal{E}_{x_0} : [0,1] \to X$, es decir, los únicos lazos que podemos definir en X son todos homotópicos a un punto.
En efecto, supongamos que existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que existen puntos $x_0, y_0 \in X$ con $x_0 \neq y_0$, de tal manera que $f(a) = x_0$ y $f(b) = y_0$ para algunos $a, b \in [0,1]$ con $a \neq b$.
Sin pérdida de generalidad, dado que X es finito, supongamos que $f([0,1]) = \{x_0, y_0\}$. Entonces como $\{x_0\}$ y $\{y_0\}$ son abiertos en X, los conjuntos $f^{-1}(\{x_0\})$ y $f^{-1}(\{y_0\})$ son abiertos y ajenos en $[0,1]$. Además, su unión es todo $[0,1]$, por lo que son una separación del mismo, pero esto contradice el hecho de que los intervalos son conexos, por lo que f no puede ser continua.
De esto concluimos que efectivamente, las únicas funciones continuas de $[0,1]$ en X son las funciones constantes, por lo que el grupo fundamental de X es trivial.

El grupo fundamental de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ es uno de los más importantes, y también es uno para el cual existen muchísimos métodos de cálculo. En esta ocasión, demostraremos que su grupo fundamental es isomorfo al grupo aditivo de los enteros viendo que es un grupo cíclico infinito generado por un solo elemento.

Teorema 2.3.1. El grupo fundamental de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ es isomorfo al grupo de los enteros $\mathbb{Z}$.

Demostración. Veremos primero que el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es un grupo cíclico y después que es un grupo infinito exhibiendo una aplicación sobreyectiva $\pi_1(\mathbb{S}^1, x) \to \mathbb{Z}$.
Para la primera parte consideraremos a la circunferencia $\mathbb{S}^1$ como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, es decir, $\mathbb{S}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Sea g un lazo en $\mathbb{S}^1$ basado en $(1,0)$, es decir, $g : I \to \mathbb{S}^1$ es tal que $g(0) = g(1) = (1,0)$. Vamos a probar que $g \simeq f^m(\text{rel}\{0,1\})$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, donde $f : I \to \mathbb{R}^2$ está dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$ y

$f^m = \underbrace{f * \cdots * f}_{m-veces}$.
Consideremos los subconjuntos

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y > -\tfrac{1}{10}\}$$
$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y < \tfrac{1}{10}\}.$$

Entonces U_1 y U_2 son abiertos en $\mathbb{S}^1$ y además $\mathbb{S}^1 = U_1 \cup U_2$. Es claro que tanto U_1 como U_2 son homeomorfos al intervalo abierto $(0, 1)$, por lo que son contractibles.
Supongamos primero un caso trivial. Si $g(I) \subset U_1$ o $g(I) \subset U_2$, entonces g es homotópico a un lazo constante en $\mathbb{S}^1$, y como éste es conexo por caminos tenemos que g es homotópico a $f^0 = \mathcal{E}_{(1,0)}$.
Supongamos ahora que no se cumple ninguna de las contenciones anteriores. Afirmamos que es posible dividir a I en subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ tales que

1. $g([t_i, t_{i+1}]) \subset U_1$ o $g([t_i, t_{i+1}]) \subset U_2$ para cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
2. $g([t_{i-1}, t_i])$ y $g([t_i, t_{i+1}])$ no están contenidos en el mismo U_j

Para probar esto, sabemos por el Lema 1.4.6 que existe un número de Lebesgue δ para la cubierta abierta de I, dada por $\{g^{-1}(U_1), g^{-1}(U_2)\}$. Entonces podemos dividir el intervalo I en una cantidad finita de subintervalos I_i de longitud menor que δ, de tal manera que se cumple $I_i \subset g^{-1}(U_1)$ o $I_i \subset g^{-1}(U_2)$ para cada $i = 1, \ldots, m$, por lo que $g(I_i) \subset U_1$ o $g(I_i) \subset U_2$, quedando así demostrada la primera afirmación. Luego, si dos subintervalos adyacentes son tales que la imagen de ambos está contenida en el mismo U_j, simplemente consideramos que son un solo subintervalo, es decir, tomamos su unión y definimos una nueva partición a partir de estas uniones. Haciendo ésto para cada par de subintervalos concluimos que se cumplen ambas afirmaciones.
Ahora, consideremos la trayectoria $g_i : I \to \mathbb{S}^1$ dada por $g_i(s) = g(s(t_{i+1} - t_i) + t_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Así, es claro que cada g_i es una trayectoria en U_1 o en U_2 y que $g = g_0 * g_1 * \cdots * g_{n-1}$, además se cumple que $g(t_i) \in U_1 \cap U_2$, pues si $g([t_{i-1}, t_i]) \subset U_1$, tenemos por la condición 2 que $g([t_i, t_{i+1}]) \subset U_2$. Geométricamente observamos que $U_1 \cap U_2$ tiene dos componentes conexas por caminos, la que contiene al punto $(1, 0)$ y la que contiene a $(-1, 0)$. Entonces en base a esto podemos tomar un camino $\gamma_i : I \to U_1 \cap U_2$ que empiece en $g(t_{i+1})$ y termine en $(1, 0)$ o $(-1, 0)$ para cada $i = 0, 1, \ldots, n-2$.
Definamos entonces

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= g_0 * \gamma_0 \\
\delta_i &= \overline{\gamma}_{i-1} * g_i * \gamma_i \\
\delta_{n-1} &= \overline{\gamma}_{n-2} * g_{n-1}.
\end{aligned}$$

Así, para cada $i = 1, \ldots, n-1$, δ_i es un camino en U_1 o U_2, y de esta manera

$$\begin{aligned}
[g] &= [g_0 * g_1 * \cdots * g_{n-1}] \\
&= [g_0 * (\gamma_0 * \overline{\gamma}_0) * \cdots * g_{n-2} * (\gamma_{n-2} * \overline{\gamma}_{n-2}) * g_{n-1}] \\
&= [(g_0 * \gamma_0) * (\overline{\gamma}_0 * g_1 * \gamma_1) * \cdots * (\overline{\gamma}_{n-3} * g_{n-2} * \gamma_{n-2}) * (\overline{\gamma}_{n-2} * g_{n-1})] \\
&= [\delta_0 * \delta_1 * \cdots * \delta_{n-1}].
\end{aligned}$$

Notemos que si δ_i es un lazo, entonces como U_1 y U_2 son contractibles, tenemos que δ_i es homotópico al lazo constante basado en $(1,0)$ ó $(-1,0)$ según corresponda, por lo que podemos ignorar estos casos y considerar que δ_i no es un lazo, sino simplemente un camino con punto inicial y final distintos. Ahora, sea η_1 un camino en U_1 de $(1,0)$ a $(-1,0)$. Este camino es único salvo homotopías, pues si η_1' fuera otro camino de $(1,0)$ a $(-1,0)$, entonces $\eta_1'\overline{\eta}_1$ sería un lazo basado en $(0,1)$, y como U_1 es simplemente conexo, tendríamos que $\eta_1'\overline{\eta}_1$ es homotópico al lazo constante basado en $(1,0)$ y entonces $\eta_1 \simeq \eta_1'(\mathrm{rel}\{0,1\})$. Análogamente, si η_2 es un camino en U_2 de $(-1,0)$ a $(1,0)$ tenemos, por las mismas razones, que es único salvo homotopías. Notemos que $f \simeq \eta_1 * \eta_2(\mathrm{rel}\{0,1\})$ y además tenemos que para cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$ uno de los siguiente casos

$$\begin{aligned}
\delta_i &= \eta_1 \\
\delta_i &= \overline{\eta}_1 \\
\delta_i &= \eta_2 \\
\delta_i &= \overline{\eta}_2.
\end{aligned}$$

Además, por nuestra afirmación 2, si $\delta_i = \eta_1^{\pm 1}$ entonces $\delta_{i+1} = \eta_2^{\pm 1}$, y si $\delta_i = \eta_2^{\pm 1}$ entonces $\delta_{i+1} = \eta_1^{\pm 1}$, donde $\eta_i^{-1} = \overline{\eta}_i$. Por lo que solamente tenemos uno de los siguientes casos para alguna $m > 0$

$$\begin{aligned}
g &\simeq (1,0) \simeq f^0(\mathrm{rel}\{0,1\}) \\
g &\simeq \eta_1 * \eta_2 * \cdots * \eta_1 * \eta_2 \simeq f^m(\mathrm{rel}\{0,1\}) \\
g &\simeq \overline{\eta}_2 * \overline{\eta}_1 * \cdots * \overline{\eta}_2 * \overline{\eta}_1 \simeq f^{-m}(\mathrm{rel}\{0,1\}).
\end{aligned}$$

Con esto hemos probado que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$ es un grupo cíclico.

Ahora veremos que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$ tiene que ser infinito, para lo cual consideraremos a $\mathbb{S}^1$ como subconjunto del plano complejo, es decir, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Y la manera en que lo haremos será definiendo una función sobreyectiva que se llamará Grado e irá del grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{Z}$.

Sea h un lazo en $\mathbb{S}^1$. Dado que h es continua en I, tenemos que es uniformemente continua, así que si tomamos $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que si $|s - t| < \delta$, entonces $|h(s) - h(t)| < 1$. Dividamos a I en subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$ tales que $t_{k+1} - t_k < \delta$, así, si $t, t' \in [t_k, t_{k+1}]$, se tiene que $|h(t) - h(t')| < 1$. Ahora, para cada $i = 1, \ldots, n$ sea $\theta_i = \operatorname{Arg}\left(\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})}\right)$, y entonces de la desigualdad $|h(t_i) - h(t_{i-1})| < 1$ se tiene que

$$-\tfrac{\pi}{2} < \theta_i < \tfrac{\pi}{2}.$$

Definamos el grado de h como $\text{Grado}(h) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\theta_i$. Este número es un entero puesto que $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ es una determinación del argumento del número complejo $\prod_{i=1}^{n}\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})} = \frac{h(t_n)}{h(t_0)} = 1$, por lo que $\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 2\pi k$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$.

Veamos primeramente que el grado de h es independiente de la elección de la partición que tomemos de I. Notemos que si tomamos dos particiones P_1 y P_2 del intervalo I, podemos encontrar otra partición P de I, tal que es un refinamiento de P_1 y de P_2, por lo que solamente es necesario mostrar que si tenemos una partición de I, entonces cualquier refinamiento de ésta genera el mismo valor para Grado(h), lo cual podemos hacer considerando el refinamiento donde únicamente se agregue un punto s que corte alguno de los subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, puesto que para los demás refinamientos es repetir el mismo proceso una cantidad finita de veces. Así, si $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ es una partición de I, consideramos el refinamiento $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_{i-1} < s < t_i < \cdots < t_n = 1$. Reemplacemos el valor de θ_i correspondiente al subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ por $\theta_i' + \theta_i''$, los correspondientes a los subintervalos $[t_{i-1}, s]$ y $[s, t_i]$ respectivamente, es decir

$$\theta_i' = \operatorname{Arg}\left(\frac{h(s)}{h(t_{i-1})}\right),$$
$$\theta_i'' = \operatorname{Arg}\left(\frac{h(t_i)}{h(s)}\right),$$

y de nuevo

$$-\tfrac{\pi}{2} < \theta_i' < \tfrac{\pi}{2},$$
$$-\tfrac{\pi}{2} < \theta_i'' < \tfrac{\pi}{2}.$$

Así que $\operatorname{Arg}\left(\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{h(t_i)}{h(s)}\right) + \operatorname{Arg}\left(\frac{h(s)}{h(t_{i-1})}\right) = \theta_i' + \theta_i''$ y además por las desigualdades anteriores tenemos que

$$-\pi < \theta_i' + \theta_i'' < \pi,$$

pero el hecho de que $\mathrm{Arg}\left(\frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})}\right) = \theta_i' + \theta_i''$ nos dice que éstos difieren en un múltiplo de 2π, por lo que tenemos que necesariamente se da la desigualdad

$$-\tfrac{\pi}{2} < \theta_i' + \theta_i'' < \tfrac{\pi}{2},$$

así que $\theta_i = \theta_i' + \theta_i''$.

Ahora mostraremos que el grado de un lazo es invariante bajo homotopías, así que supongamos que g, h son lazos en $\mathbb{S}^1$ basados en $1 \in \mathbb{C}$ tales que $h \simeq g$, y sea $F : I \times I \to \mathbb{S}^1$ la homotopía correspondiente tal que

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= h(s), \\ F(s, 1) &= g(s), \\ F(0, t) = F(1, t) &= 1. \end{aligned}$$

Dado que $I \times I$ es compacto, F es uniformemente continua en $I \times I$, por lo que podemos afirmar la existencia de subdivisiones de $I \times I$ en rectángulos de la forma $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ de tal manera que si $(s, t), (s', t') \in [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$, se tiene que $|F(s, t) - F(s', t')| < 1$. Ahora, sean

$$\begin{aligned} \theta_i' &= \mathrm{Arg}\left(\tfrac{F(s_i, t_{j-1})}{F(s_{i-1}, t_{j-1})}\right), \\ \theta_i'' &= \mathrm{Arg}\left(\tfrac{F(s_i, t_j)}{F(s_{i-1}, t_j)}\right), \end{aligned}$$

con $|\theta_i'| < \frac{\pi}{2}$ y $|\theta_i''| < \frac{\pi}{2}$. Si probamos que $\sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i' = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i''$, podríamos repetir el mismo argumento para cada $j = 1, 2, \ldots, m$ y tendríamos que $\mathrm{Grado}(h) = \mathrm{Grado}(g)$. Sea $\varphi_i = \mathrm{Arg}\left(\frac{F(s_i, t_j)}{F(s_i, t_{j-1})}\right)$ con $|\varphi_i| < \frac{\pi}{2}$. Ahora, $\theta_i'' - \theta_i'$ y $\varphi_i - \varphi_{i-1}$ son ambos determinaciones del argumento del mismo número complejo, así que estos difieren en un múltiplo de 2π y por las mismas razones anteriores, concluimos que $\theta_i'' - \theta_i' = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Luego, podemos sumar sobre las i para obtener

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i'' - \sum_{i=1}^{n} \theta_i' = \sum_{i=1}^{n} (\theta_i'' - \theta_i') = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \varphi_n - \varphi_0.$$

Ahora si calculamos φ_n y φ_0 obtenemos

$$\varphi_n = \operatorname{Arg}\left(\frac{F(s_n,t_j)}{F(s_n,t_{j-1})}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{F(1,t_j)}{F(1,t_{j-1})}\right) = \operatorname{Arg}\left(\tfrac{1}{1}\right) = 0,$$
$$\varphi_0 = \operatorname{Arg}\left(\frac{F(s_0,t_j)}{F(s_0,t_{j-1})}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{F(1,t_j)}{F(1,t_{j-1})}\right) = \operatorname{Arg}\left(\tfrac{1}{1}\right) = 0,$$

de lo cual se desprende que $\sum_{i=1}^{n} \theta_i'' = \sum_{i=1}^{n} \theta_i'$, que es lo que queríamos.
Por último, para ver que Grado : $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) \to \mathbb{Z}$ es sobreyectivo, definamos el lazo $h_m : I \to \mathbb{S}^1$ dado por $h_m = \cos(2m\pi t) + i\operatorname{sen}(2m\pi t)$. Se puede calcular que h_m tiene grado igual a m para algún $m \in \mathbb{Z}$, por lo que el orden del grupo fundamental del círculo es infinito.
Así pues, hemos demostrado que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$. □

El siguiente teorema nos muestra la relación que guardan los grupos fundamentales de dos espacios topológicos con el grupo fundamental del producto cartesiano de dichos espacios.

Teorema 2.3.2. Sean X, Y espacios topológicos conexos por caminos. El grupo fundamental del producto $X \times Y$ es isomorfo al producto de los grupos fundamentales de X y Y, es decir,

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Demostración. Sean $p : X \times Y \to X$ y $q : X \times Y \to Y$ las proyecciones canónicas sobre X y Y respectivamente. Como p y q son funciones continuas, inducen los homomorfismos $p_{\#} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0)$ y $q_{\#} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$.
Definamos

$$\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

dada por $\varphi[f] = (p_{\#}[f], q_{\#}[f]) = ([p \circ f], [q \circ f])$.
Veamos primeramente que φ está bien definida. Si $[f] = [g]$, entonces existe una homotopía $F : I \times I \to X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} F(t,0) &= f(t), \\ F(t,1) &= g(t), \\ F(0,s) &= F(1,s) = (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Así, componiendo cada proyección con la homotopía F, obtenemos que $p \circ F : I \times I \to X$ es continua y tal que

$$\begin{aligned} (p \circ F)(t,0) &= p(F(t,0)) = p(f(t)) = (p \circ f)(t), \\ (p \circ F)(t,1) &= p(F(t,1)) = p(g(t)) = (p \circ g)(t), \\ (p \circ F)(0,s) &= p(F(0,s)) = p(x_0, y_0) = x_0, \\ (p \circ F)(1,s) &= p(F(1,s)) = p(x_0, y_0) = x_0. \end{aligned}$$

Por lo que $p \circ f \sim p \circ g$.

De igual manera, $q \circ F : I \times I \to Y$ es continua y tal que

$$\begin{aligned}
(q \circ F)(t, 0) &= q(F(t, 0)) = q(f(t)) = (q \circ f)(t), \\
(q \circ F)(t, 1) &= q(F(t, 1)) = q(g(t)) = (q \circ g)(t), \\
(q \circ F)(0, s) &= q(F(0, s)) = q(x_0, y_0) = y_0, \\
(q \circ F)(1, s) &= q(F(1, s)) = q(x_0, y_0) = y_0.
\end{aligned}$$

Por lo que $q \circ f \sim q \circ g$.

De lo anterior tenemos que $\varphi[f] = ([p \circ f], [q \circ f]) = ([p \circ g], [q \circ g]) = \varphi[g]$, lo que implica que φ está bien definida.

Veamos ahora que φ es un isomorfismo.

1. φ es un homomofismo.

   Sean $f, g : I \to X \times Y$ caminos para los cuales está definido $f * g$, entonces

   $$\begin{aligned}
   \varphi([f] * [g]) = \varphi[f * g] &= (p_{\#}[f * g], q_{\#}[f * g]) \\
   &= ([p \circ (f * g)], [q \circ (f * g)]) \\
   &= ([(p \circ f) * (p \circ g)], [(q \circ f) * (q \circ g)]) \\
   &= ([p \circ f] * [p \circ g], [q \circ f] * [q \circ g]) \\
   &= ([p \circ f], [q \circ f]) * ([p \circ g], [q \circ g]) \\
   &= \varphi[f] * \varphi[g],
   \end{aligned}$$

   lo cual muestra que es un homomorfismo.

2. φ es sobreyectiva.

   Supongamos que $([f_1], [f_2]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, y consideremos la aplicación continua $f : I \to X \times Y$ dada por $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Entonces $\varphi[f] = ([p \circ f], [q \circ f]) = ([f_1], [f_2])$, de donde tenemos que φ es sobreyectiva.

3. φ es inyectiva.

   Sean $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$. Supongamos que $\varphi[f] = \varphi[g]$, es decir, $([p \circ f], [q \circ f]) = ([p \circ g], [q \circ g])$, de donde tenemos que $[p \circ f] = [p \circ g]$ y $[q \circ f] = [q \circ g]$. Sean $F_1 : I \times I \to X$ y $F_2 : I \times I \to Y$ las homotopías que realizan las equivalencias correspondientes, es decir

   $$\begin{aligned}
   F_1(t, 0) &= (p \circ f)(t) & & F_2(t, 0) = (q \circ f)(t) \\
   F_1(t, 1) &= (p \circ g)(t) & \text{y} \quad & F_2(t, 1) = (q \circ g)(t) \\
   F_1(1, s) &= F_1(0, s) = x_0 & & F_2(1, s) = F_2(0, s) = y_0.
   \end{aligned}$$

   Definamos $F : I \times I \to X \times Y$ por $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$, y así

$$F(t,0) = (F_1(t,0), F_2(t,0)) = ((p \circ f)(t), (q \circ f)(t)) = f(t),$$
$$F(t,1) = (F_1(t,1), F_2(t,1)) = ((p \circ g)(t), (q \circ g)(t)) = g(t),$$
$$F(0,s) = (F_1(0,s), F_2(0,s)) = (F_1(1,s), F_2(1,s)) = F(1,s) = (x_0, y_0).$$

Esto es, $F : f \simeq g(\text{rel}\{0,1\})$, o equivalentemente $[f] = [g]$, por lo que φ es inyectiva. Por lo tanto φ es un isomorfismo. □

Corolario 2.3.3. El grupo fundamental del toro es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Demostración. En esta situación basta simplemente considerar el toro como el espacio producto de la circunferencia consigo misma, es decir, $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Luego, del Teorema 2.3.1 sabemos que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, por lo que aplicando el Teorema 2.3.2 concluimos que $\pi_1(\mathbb{T}, (x_0, y_0)) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. □

Como bien acabamos de ver, el Teorema 2.3.2 nos proporciona una manera de calcular grupos fundamentales a partir de grupos fundamentales ya conocidos, lo cual resulta en un método muy efectivo si conocemos una gran variedad de grupos fundamentales de antemano.

Otro resultanto importante con el que podemos hacer algo similar, es el Teorema de Seifert-van Kampen. Este teorema nos permite calcular el grupo fundamental de espacios topológicos que pueden escribirse como la unión de dos abiertos cuya intersección es conexa por caminos.
Antes de enunciar el teorema recordemos qué es un grupo libre.

Consideremos un alfabeto consistente de n letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Consideremos los símbolos $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$ y e.
Sea S el conjunto de todas las palabras obtenidas al colocar estos símbolo en cualquier orden en una sucesión de longitud finita, donde las repeticiones están permitidas. El producto $\alpha\beta$ de dos palabras α y β está definido por yuxtaposición, es decir, β es agregado al final de α. La inversa de una palabra es obtenida al invertir el orden de la disposición de las letras y al mismo tiempo reemplazando cada a_j por a_j^{-1}, a_j^{-1} por a_j y e por e.
Una relación de equivalencia $\simeq$ está definida en S de la siguente manera. Definimos las equivalencias $ee \simeq e$, y luego para cada j,

$$\begin{aligned} a_j a_j^{-1} &\simeq e, & a_j^{-1} a_j &\simeq e, \\ a_j e &\simeq a_j, & a_j^{-1} e &\simeq a_j^{-1}, \\ e a_j &\simeq a_j, & e a_j^{-1} &\simeq a_j^{-1}. \end{aligned}$$

Además, cualquier par de palabras son equivalentes si una de ellas se puede obtener de la otra mediante una sucesión de dichas equivalencias elementales. El conjunto de clases de equivalencia forma un grupo con la multiplicación e inversa definidas previamente, y con identidad la clase de equivalencia de e. Este grupo es el **grupo libre en n generadores** y es denotado por $\mathbb{F}_n$.

Ahora, sean G y H dos grupos. Una palabra en G y H es una expresión de la forma $s_1 s_2 \dots s_k$ donde $k \geq 1$, $s_i \in G$ o $s_i \in H$ para cada $i = 1, \dots, k$. Una palabra puede reducirse mediante

1. Si algún s_i es el neutro de G o de H, lo borramos.
2. Si s_i, s_{i+1} pertenecen al mismo grupo, reemplazamos $s_i s_{i+1}$ por su producto en el respectivo grupo.

En particular, una palabra en G y H después de reducirse es de la forma $g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_r h_r$ donde cada $g_i \in G$ y cada $h_i \in H$.
Definimos el **producto libre de G y H**, denotado por $G * H$, como el conjunto de todas las palabras reducidas en G y H con la operación de yuxtaposición.

Con esto ya podemos enunciar una de las versiones más sencillas del Teorema de Seifert-van Kampen.

Teorema 2.3.4. (**Seifert – van Kampen**). Sea X un espacio topológico conexo por caminos. Sean U, V subconjuntos abiertos y conexos por caminos de X tales que

1. $X = U \cup V$,
2. $U \cap V \neq \emptyset$ es simplemente conexo,

y sea $x_0 \in U \cap V$. Entonces el grupo fundamental de X es isomorfo al producto libre de los grupos fundamentales de U y V, es decir,

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0).$$

Veamos como aplicar este teorema con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. El grupo fundamental del plano con k agujeros es el producto libre de $\mathbb{Z}$ consigo mismo k veces, es decir, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_k\}, x_0) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{k-veces}$.
En efecto, sean $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^2$ tales que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, y consideremos $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$. Procederemos por el método de inducción sobre k.
Para $k = 1$ tenemos $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1\}$.
Supongamos que $x_1 = (0, 0)$, $x_0 \neq x_1$, y definamos $F : X \times I \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$F(x,t) = \left((1-t) + \tfrac{t}{||x||}\right)x.$$

Así, F es continua y es además un retracto de deformación pues $F(x,0) = x$ y $F(x,1) = \frac{x}{||x||} \in \mathbb{S}^1$. Por lo que $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, \frac{x_0}{||x_0||}) \cong \mathbb{Z}$.
Para $k = 2$ tenemos $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2\}$.
Sin pérdida de generalidad supongamos que x_1 y x_2 se encuentran sobre el eje de las abscisas, es decir, $x_1 = (x_1^1, 0)$ y $x_2 = (x_2^1, 0)$, y supongamos que $x_1^1 < x_2^1$. Ahora, la idea es seleccionar dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$ de tal manera que cada uno de ellos contenga solamente a uno de los puntos x_1 o x_2, su unión sea $\mathbb{R}^2$ y tengan intersección no vacía para poder aplicar el Teorema 2.3.4.
Consideremos entonces los siguientes subconjuntos de X:

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2\} \mid x < x_1^1 + \tfrac{2}{3}|x_1^1 - x_2^1|\}\ ,$$
$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2\} \mid x > x_1^1 + \tfrac{1}{3}|x_1^1 - x_2^1|\}\ .$$

Claramente $U \cup V = X$, y $U \cap V \neq \emptyset$ es simplemente conexa pues es una banda abierta homeomorfa a todo $\mathbb{R}^2$. Supongamos $x_0 \in U \cap V$. Luego, por el caso $k = 1$ sabemos que $\pi_1(U, x_0) \cong \mathbb{Z}$ y $\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Así, utilizando el Teorema 2.3.4 obtenemos que

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Supongamos ahora que para $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^2$ tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, se cumple

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}, x_0) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{k-veces},$$

y veamos que para $k+1$ se cumple que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}, x_0) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}}_{k+1-veces}$.
Sin pérdida de generalidad supongamos nuevamente que todos los puntos se encuentran sobre el eje de las abscisas. Entonces existen $x_n, x_m \in \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ tales que $x_i^1 < x_n^1 < x_m^1$ para toda $i \in \{1, \ldots k, k+1\} \setminus \{m, n\}$. Así pues, consideremos los siguientes subconjuntos:

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \mid x < x_n^1 + \tfrac{2}{3}|x_n^1 - x_m^1|\}\ ,$$
$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \mid x > x_n^1 + \tfrac{1}{3}|x_n^1 - x_m^1|\}\ .$$

Utilizando estos dos subconjuntos y aplicando el Teorema 2.3.4 obtenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_{k+1}\}, x_0) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{k+1-veces}.$$

Capítulo 3

Homotopía en complejos simpliciales

La meta de este capítulo es desarrollar algunas herramientas combinatorias que nos permitirán calcular el grupo fundamental de una gran cantidad de espacios topológicos. Estos espacios topológicos son aquellos obtenidos al poner juntos de una buena manera estructuras topológicas básicas llamadas simplejos.
Dada una triangulación de dos espacios en simplejos suficientemente pequeños, mostraremos que cualquier función continua de un espacio al otro puede ser aproximada por un mapeo que es lineal en cada simplejo. Más aún, la aproximación se va a encontrar en la misma clase de homotopía que la función original, con lo que habremos reducido problemas topológicos de mapeos difíciles, a problemas algebráicos más accesibles de mapeos y espacios lineales por pedazos.

3.1. Geometría de complejos simpliciales

Comenzaremos por construir nuestras estructuras topológicas llamadas simplejos, así como ver algunas de sus propiedades y la manera en que podemos unirlos para crear nuevas estructuras topológicas.

Definición 3.1.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea C un subconjunto de V. Diremos que C es **convexo** si para cualquier par de puntos c_1, c_2 de C, el punto $tc_1 + (1-t)c_2$ también se encuentra en C para toda t en I.

Definición 3.1.2. Un conjunto $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ de vectores en un espacio vectorial V es **convexo independiente**, o **c-independiente**, si el conjunto de vectores $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0\}$ es linealmente independiente.

Teorema 3.1.3. Supongamos que el conjunto $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ es convexo independiente. Sea C el conjunto convexo generado por $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$. Entonces C consiste de todos los vectores de la forma $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$, donde $a_i \geq 0$ para toda $i = 0, \ldots, k$ y $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$. Más aún, cada elemento v de C se expresa de manera única de esta forma.

Demostración. Primero notemos que, dado que la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo, C existe, pues es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a los vectores $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$.
En base a esto, definimos

$$C_1 = \left\{ v \in V \mid v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i,\ a_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Veamos que C_1 coincide con el conjunto generado C.
C_1 es un conjunto convexo, ya que si $v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ y $w = \sum_{i=0}^{k} b_i v_i$ son dos elementos de C_1, entonces

$$tv + (1-t)w = \sum_{i=0}^{k} (ta_i + (1-t)b_i)v_i,$$

y como ambos elementos están en C_1,

$$\sum_{i=0}^{k} (ta_i + (1-t)b_i) = t\sum_{i=0}^{k} a_i + (1-t)\sum_{i=0}^{k} b_i = t + (1-t) = 1.$$

Así, C_1 es un conjunto convexo que contiene a $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, por lo que $C \subset C_1$.

Veamos ahora que C_1 está contenido en C.
Sabemos que el elemento $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ se encuentra en C cuando todos menos un a_i son cero. Procedemos entonces por inducción sobre los valores de a_i que son distintos de cero. Suponemos que $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ es un elemento de C cuando a lo más n de los a_i son distintos de cero, donde $n < k + 1$.
Sea $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ un elemento en el cual $n+1$ de los a_i son distintos de cero, los cuales podemos suponer son $a_0, a_1, \ldots, a_n \neq 1$, y en otro caso $a_i = 0$. Así,

$$\sum_{i=0}^{k} a_i v_i = (1 - a_n) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1 - a_n} v_i + a_n v_n.$$

Y dado que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} = \frac{1}{1-a_n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{1}{1-a_n}(1-a_n) = 1,$$

el elemento $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n}$ está en C por hipótesis de inducción. Por lo tanto

$$t\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} v_i + (1-t)v_n \in C$$

para $t \in I$ porque C es convexo. Tomando $t = 1 - a_n$, se sigue que $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ es un elemento de C, esto es, C está contenido en C_1, y por lo tanto $C_1 = C$.

Prosigamos a mostrar la unicidad de la representación de los elementos de C.

Supongamos que $v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i = \sum_{i=0}^{k} b_i v_i$, donde $\sum_{i=0}^{k} a_i = \sum_{i=0}^{k} b_i = 1$, es un elemento de C. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{k}(a_i - b_i)v_i \\ &= \sum_{i=0}^{k}(a_i - b_i)v_i - \left(\sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} b_i\right) v_o \\ &= \sum_{i=0}^{k}(a_i - b_i)(v_i - v_0). \end{aligned}$$

Como $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente, $a_i - b_i = 0$ para toda $i > 0$. Entonces $a_0 = b_0$ igualmente. □

Definición 3.1.4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un conjunto convexo generado por vectores c-independientes $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ es llamado ***k*-simplejo** (cerrado) y se denota por $[v_0, v_1, \ldots, v_k]$, donde k es la dimensión del simplejo. Si $v \in [v_0, v_1, \ldots, v_k]$, entonces los coeficientes a_i, con $a_i \geq 0$ y $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$ tales que $v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$, son llamados **coordenadas baricéntricas de v**.

El hecho de pedir que el conjunto generador sea convexo independiente nos garantiza que en el espacio $\mathbb{R}^n$, conjuntos con más de $n+1$ vectores no pueden generar simplejos. De la misma manera evita que tres puntos en $\mathbb{R}^2$ sean colineales, cuatro puntos en $\mathbb{R}^3$ sean coplanares, etc.

Definición 3.1.5. Sea $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto c-independiente. El conjunto

$$\{v \in [v_0, v_1, \ldots, v_k] \mid a_i(v) > 0,\ i = 0, 1, \ldots, k\}$$

es llamado **simplejo abierto** y se denota por $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. Denotaremos también al simplejo abierto como (s), y al correspondiente simplejo cerrado $[s]$.
Sea $[s] = [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ un simplejo cerrado. Los **vértices** de $[s]$ son los puntos $v_0, v_1, \ldots, v_k$. Las **caras cerradas** de $[s]$ son los simplejos cerrados $[v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_h}]$ donde $\{j_0, j_1, \ldots, j_h\}$ es un subconjunto no vacío de $\{0, 1, \ldots, k\}$. Las **caras abiertas** de un simplejo $[s]$ son los simplejos abiertos $(v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_h})$.

Algunas observaciones respecto a lo anterior son:

1. Un vértice es una cara cerrada de dimensión cero. También es una cara abierta.
2. Un simplejo abierto (s) es un conjunto abierto en el simplejo cerrado $[s]$, y su cerradura es $[s]$.
3. El simplejo cerrado $[s]$ es la unión de sus caras abiertas.
4. Caras abiertas distintas de un mismo simplejo son ajenas entre sí.
5. El simplejo abierto (s) es el interior del simplejo cerrado $[s]$.

Si consideramos solamente las caras de dimensión menor que la dimension del simplejo, podemos utilizar éstas mismas para "pegar" nuestros simplejos de una manera que nos permite crear estructuras más sofisticadas llamadas complejos simpliciales. Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 3.1.6. Un **complejo simplicial** K, es un conjunto finito de simplejos abiertos en algún $\mathbb{R}^n$ tales que

1. si $(s) \in K$, entonces todas las caras abiertas de $[s]$ están en K,
2. si $(s_1), (s_2) \in K$ y $(s_1) \cap (s_2) \neq \emptyset$, entonces $(s_1) = (s_2)$.

La dimensión de K es el máximo de las dimensiones de los simplejos de K.

Si K es un complejo simplicial, denotamos por $[K]$ a la unión de puntos de los simplejos abiertos de K. Entonces $[K]$ es compacto y $[K] = \bigcup_{(s)\in K} (s) = \bigcup_{(s)\in K} [s]$.
Si $[s]$ es un simplejo cerrado, la colección de sus caras abiertas es un complejo simplicial que denotamos por s.

Ejemplo 3.1. Los siguientes (Figura 3.1) son ejemplos de complejos simpliciales.

FIGURA 3.1

Los siguientes (Figura 3.2) no son complejos simpliciales.

FIGURA 3.2

Sin embargo, añadiendo simplejos podemos convertir a los conjuntos de la Figura 3.2 en complejos simpliciales como se muestra en la Figura 3.3.

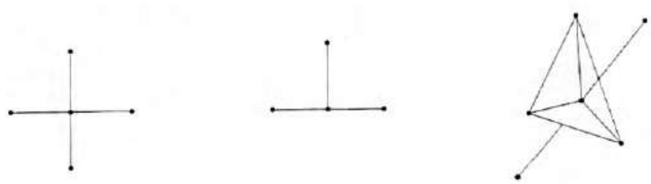

FIGURA 3.3

Con esto nos damos cuenta que los complejos simpliciales son más que simples conjuntos de puntos. Son conjuntos con una estructura adicional, por lo que es posible tener varios complejos simpliciales completamente distintos con el mismo conjunto de puntos.

Definición 3.1.7. Un **subcomplejo** de un complejo simplicial K es un complejo simplicial L tal que $(s) \in L$ implica $(s) \in K$.

Para cada $(s) \in K$, el complejo simplicial s es un subcomplejo de K.

Definición 3.1.8. Sea K un complejo simplicial y sea r un entero menor o igual a la dimensión de K. El $\boldsymbol{r}$**-esqueleto** K^r de K es la colección

$$K^r = \{(s) \in K \mid \dim s \leq r\}.$$

3.2. Subdivisiones baricéntricas

El concepto de subdivisión es tan natural como parece, consta en realizar una división de un complejo simplicial en un mayor número de simplejos, cambiando así su estructura simplicial, pero manteniendo exactamente el mismo conjunto de puntos.
En ésta sección veremos que podemos tomar subdivisiones tan finas como queramos de cualquier complejo simplicial.

Definición 3.2.1. Sea v un punto de $\mathbb{R}^n$ y sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. El par (v, A) se encuentra en **posición general** si $v \notin A$ y, para cada $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$, se cumple $[v, a_1] \cap [v, a_2] = \{v\}$.

Intuitivamente, decir que un punto v se encuentra en posición general respecto a algún conjunto A, es decir que cualquier rayo que inicie en v, va a intersectar solamente a un punto de A. De esto se deduce fácilmente que v no puede estar en posición general con A, si A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.2.2. Sea (v, A) en posición general. El **cono** con vértice v y base A, denotado por $v * A$, es el conjunto

$$v * A = \bigcup_{a \in A} [v, a].$$

Teorema 3.2.3. Sea $[s] = [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ un k-simplejo y sea $v \in (s)$. Entonces $(v, [s^{k-1}])$ se encuentra en posición general y $v * [s^{k-1}] = [s]$.

Demostración. Sean a_1, a_2 elementos de $[s^{k-1}]$. Supongamos que existe $w \in [v, a_1] \cap [v, a_2]$ tal que $w \neq v$.
Consideremos las expresiones para a_1, a_2 y v en términos de coordenadas baricéntricas en $[s]$:

$$a_1 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{1i} v_i, \quad a_2 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{2i} v_i, \quad v = \sum_{i=0}^{k} \beta_i v_i.$$

Como $a_1, a_2 \notin (s)$, existen $i_1, i_2 \leq k$ tales que $\alpha_{1i_1} = 0$ y $\alpha_{2i_2} = 0$. Por otro lado, $v \in (s)$, implica que las coordenadas β_i son distintas de cero para toda $i = 0, \ldots, k$. Luego, dado que $w \in [v, a_1]$, tenemos que $w = t_1 v + (1 - t_1) a_1$ para algún $t_1 \in I$, por lo que $w = \sum_{i=0}^{k} (t_1 \beta_i + (1 - t_1) \alpha_{1i}) v_i$. De manera similar, dado que $w \in [v, a_2]$, tenemos que $w = \sum_{i=0}^{k} (t_2 \beta_i + (1 - t_2) \alpha_{2i}) v_i$ para algún $t_2 \in I$.
Pero por unicidad de coordenadas baricéntricas,

$$t_1\beta_i + (1-t_1)\alpha_{1i} = t_2\beta_i + (1-t_2)\alpha_{2i}.$$

Por lo que

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{\beta_i}((1-t_2)\alpha_{2i} - (1-t_1)\alpha_{1i}).$$

Tomando $i = i_1$ obtenemos

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{\beta_{i_1}}(1-t_2)\alpha_{2i_1} \geq 0.$$

Tomando $i = i_2$ obtenemos

$$t_1 - t_2 = -\frac{1}{\beta_{i_2}}(1-t_1)\alpha_{1i_2} \leq 0.$$

Por lo tanto $t_1 - t_2 = 0$, es decir, $t_1 = t_2$ y

$$(1-t_1)\alpha_{1i} = (1-t_1)\alpha_{2i}$$

para toda $i = 0, \ldots, k$. Ahora, $t \neq 1$ pues $w \neq v$, lo cual implica que $\alpha_{1i} = \alpha_{2i}$ para toda $i = 0, \ldots, k$, por lo que $a_1 = a_2$. Con esto hemos visto que $(v, [s^{k-1}])$ está en posición general.

Veamos ahora que $v * [s^{k-1}] = [s]$.
Claramente $v * [s^{k-1}] \subset [s]$ pues $[s]$ es convexo. Luego, si $w \in [s^{k-1}]$, entonces $w \in v * [s^{k-1}]$. Supongamos $w \in (s)$ tal que $w \neq v$, y supongamos que las representaciones en coordenadas baricéntricas son las siguientes

$$w = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i, \qquad v = \sum_{i=0}^{k} \beta_i v_i,$$

donde $\alpha_i, \beta_i > 0$ para toda $i = 0, \ldots, k$. Como

$$\sum_{i=0}^{k}(\alpha_i - \beta_i) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1 - 1 = 0,$$

y dado que $\alpha_i - \beta_i \neq 0$ para algún i, tenemos que $\alpha_j - \beta_j < 0$ para alguna $j \in \{0, \ldots, k\}$. Definamos la función $f_j(t) = \beta_j + t(\alpha_j - \beta_j)$; en la cual $f_j(1) > 0$ y $f_j(t) < 0$ para t suficientemente grande, por lo que existe $t_j \in \mathbb{R}$, $t_j > 1$ tal que $\beta_j + t_j(\alpha_j - \beta_j) = 0$. Elijamos i_0 de entre los números j tal que $t_{i_0} \leq t_j$ para todas las j.

Entonces $\beta_{i_0} + t_{i_0}(\alpha_{i_0} - \beta_{i_0}) = 0$, y $\beta_i + t_{i_0}(\alpha_i - \beta_i) \geq 0$ para toda $i = 1, \ldots, k$.
Por lo que $v + t_{i_0}(w - v) = x \in [s^{k-1}]$. Además,

$$w = \tfrac{1}{t_{i_0}}x + \tfrac{t_{i_0}-1}{t_{i_0}} = t^1 x + (1 - t^1)v,$$

donde $t^1 = \frac{1}{t_{i_0}} < 1$. Por lo tanto $w \in v * [s^{k-1}]$. □

De manera más general, podemos decir que si v es un punto en el interior de algún simplejo s, entonces $(v, [s^m])$ está en posición general para cualquier $m \leq k$ donde k es la dimensión de s.

Definición 3.2.4. Sea K un complejo simplicial. Una **subdivisión** de K es un complejo simplicial K' tal que

1. $[K'] = [K]$,
2. si $s \in K'$, entonces (s) está contenido en algún simplejo abierto de K.

Ejemplo 3.2. Cada uno de los complejos en la segunda columna de la Figura 3.4, es una subdivisión del correspondiente complejo en la primera columna.

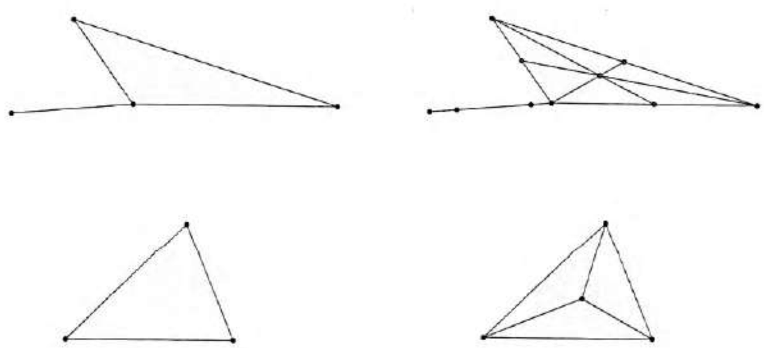

FIGURA 3.4

Teorema 3.2.5. Sea s un k-simplejo, v un elemento de (s) y sea K' una subdivisión de s^{k-1}. Entonces $(v, [K'])$ está en posición general. Además, $v * [K']$ es el conjunto de puntos de un complejo $\widetilde{K}$ definido por

$$\widetilde{K} = K' \cup \Big(\bigcup_{s' \in K'} (s', v) \Big) \cup (v).$$

Donde $(s') = (v_0, v_1, \ldots, v_r) \in K'$ y $(s', v) = (v_0, v_1, \ldots, v_r, v)$. Mas aún, el complejo $\widetilde{K}$ es una subdivisión de s.

Demostración. Por el Teorema 3.2.3, $(v, [s^{k-1}])$ está en posición general y $v * [s^{k-1}] = [v]$. Y dado que K' es una subdivisión de s, tenemos que $(v, [K'])$ está en posición general y $v * [K'] = [s]$. Debemos probar entonces que $\widetilde{K}$ es un complejo simplicial.
Primero que nada notemos que $\widetilde{K}$ es un conjunto de simplejos abiertos, más aún, cada simplejo distinto de (v) de $\widetilde{K}$ o bien se encuentra en $\widetilde{K'}$, o es de la forma (s', v).
Si está en K', todas sus caras abiertas están en K', y por lo tanto, en $\widetilde{K}$.
Si es de la forma (s', v), entonces sus caras abiertas son (v), s' y $[(s'_1, v) \mid s'_1$ es cara abierta de $s']$.
Así, en cada caso, todas las caras abiertas se encuentran en $\widetilde{K}$, con lo que la primera condición para ser complejo simplicial se satisface. Para verificar la segunda condición debemos ver que dos simplejos abiertos distintos tienen intersección vacía.
Como K' es un complejo simplicial, esto se satisface para cualquier par de simplejos en K'. Mas aún, si $s' \in K'$, entonces $(s') \cap (s'_1, v) = \emptyset$ para todo $s'_1 \in K'$, pues $(s'_1, v) \subset (s)$. Claramente (v) no intersecta a ningún otro simplejo de $\widetilde{K}$.
Ahora, supongamos que s'_1 y s'_2 son simplejos de K' tales que $(s'_1, v) \cap (s'_2, v) \neq \emptyset$. Digamos que $w \in (s'_1, v) \cap (s'_2, v)$ es tal que $w \neq v$, ya que estos son simplejos abiertos. Luego, existe un único $x \in [s^{k-1}]$ tal que $w \in [v, x]$, y dado que $[s'_1, v] = v * [s'_1]$, se sigue que $x \in (s'_1)$. Análogamente, $x \in (s'_2)$, por lo que $(s'_1) \cap (s'_2) \neq \emptyset$. Por lo tanto $s'_1 = s'_2$ pues K' es un complejo simplicial, y $(s'_1, v) = (s'_2, v)$. Por lo que $\widetilde{K}$ es un complejo simplicial.

El conjunto de puntos de $\widetilde{K}$ es

$$[\widetilde{K}] = \bigcup_{\widetilde{s} \in \widetilde{K}} [\widetilde{s}] = \bigcup_{s' \in K'} v * [s'] = v * [K'] = [s].$$

Como cada simplejo abierto de $\widetilde{K}$ está contenido en un simplejo abierto de s, $\widetilde{K}$ es una subdivisión de s. □

Ahora bien, a pesar de que la definición no nos impide tomar subdivisiones tan finas como queramos, nos interesa por cuestiones prácticas tener cierto control a la hora de realizar dichas subdivisiones. Por ello, aprovecharemos que podemos representar de manera única cada elemento de un simplejo en coordenadas baricéntricas de la siguiente manera.

Definición 3.2.6. Sea s un k-simplejo. El **baricéntro** de s, denotado por $b(s)$, es el punto de (s) con coordenadas baricéntricas $(\frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1})$. Esto es, si $(s) = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$, entonces

$$b(s) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v_i.$$

Definición 3.2.7. Sea K un complejo simplicial. Un orden parcial en K está dado por: $s_1 \leq s_2$ si y sólo si s_1 es una cara de s_2.

Teorema 3.2.8. Sea K un complejo simplicial y definamos el conjunto

$$K^{(1)} = \{(b(s_0), b(s_1), \ldots, b(s_k)) \mid s_0 < s_1 < \ldots < s_k;\ s_0, s_1, \ldots, s_k \in K\}.$$

Entonces $K^{(1)}$ es una subdivisión de K. Mas aún, para cada sucesión $s_0, \ldots, s_r \in K$ tal que $s_0 < s_1 < \ldots < s_r$, se cumple $(b(s_0), b(s_1), \ldots, b(s_r)) \subset (s_r)$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre la dimensión de K.
Para $\dim K = 0$ es claro que $K^{(1)} = K$, por lo que no hay nada que probar. Supongamos entonces que el teorema se cumple para todos los complejos simpliciales de dimensión menor o igual que $n-1$.
Sea K un complejo simplicial tal que $\dim K = n$. Entonces el $(n-1)$-esqueleto K^{n-1} es un complejo simplicial de dimensión menor o igual a $n-1$, con lo que el teorema se cumple para K^{n-1}.
En particular, si $s_0, s_1, \ldots, s_r \in K$, son tales que $s_0 < s_1 < \ldots < s_r$ y $\dim s_r \leq n-1$, entonces $\{b(s_0), b(s_1), \ldots, b(s_r)\}$ es un conjunto convexo independiente y genera un simplejo abierto $(b(s_0), \ldots, b(s_r))$ en $(K^{n-1})^{(1)}$. Además, $(b(s_0), b(s_1), \ldots, b(s_r)) \subset (s_r)$.
Ahora supongamos que $s_0, s_1, \ldots, s_r \in K$ son tales que $s_0 < s_< \ldots < s_r$, y $\dim s_r = n$. Como $s_{r-1} < s_r$, la dimensión de s_{r-1} es menor o igual que $n-1$, con lo que $(b(s_0), b(s_1), \ldots, b(s_{r-1}))$ es un simplejo contenido en (s_{r-1}), el cual es una cara de s_r. Dado que $b(s_r) \in (s_r)$, el Teorema 3.2.3 nos dice que $(b(s_r), (b(s_0), \ldots, b(s_{r-1})))$ está en posición general. Así, $(b(s_0), \ldots, b(s_r))$ es un simplejo abierto y es el interior del simplejo cerrado

$$[b(s_0), \ldots, b(s_r)] = b(s_r) * [b(s_0), \ldots, b(s_{r-1})] \subset [s_r].$$

Por lo que $(b(s_0), \ldots, b(s_r)) \subset (s_r)$.
Hasta este punto solamente sabemos que $K^{(1)}$ es una colección de simplejos abiertos. Veamos que es un complejo simplicial. La primera condición se satisface pues cualquier cara de $(b(s_0), \ldots, b(s_r))$ es de la forma $(b(s_{j_0}), b(s_{j_1}), \ldots, b(s_{j_h}))$, por lo que pertenece a $K^{(1)}$.
Para la segunda condición, supongamos $s_0, \ldots, s_r, \overline{s}_0, \ldots, \overline{s}_q \in K^{(1)}$, tales que $s_0 < \ldots < s_r$, $\overline{s}_0 < \ldots < \overline{s}_q$, y

$$(b(s_0), \ldots, b(s_r)) \cap (b(\overline{s}_0), \ldots, b(\overline{s}_q)) \neq \emptyset.$$

Sea w un elemento que se encuentre en esta intersección, entonces $w \in (s_r) \cap (\overline{s}_q)$, y dado que K es un complejo simplicial, se cumple $s_r = \overline{s}_q$ y $b(s_r) = b(\overline{s}_q)$. Mas aún,

$$(b(s_0), \ldots, b(s_{r-1})) \subset (s_{-1}) \text{ y } (b(\overline{s}_0), \ldots, b(\overline{s}_{q-1})) \subset (\overline{s}_{q-1}),$$

donde (s_{r-1}) y $(\overline{s}_{q-1})$ son caras de (s_r), con lo que $(b(s_0), \ldots, b(s_{r-1}))$ y $(b(\overline{s}_0), \ldots, b(\overline{s}_{q-1}))$ pertenecen a $s_r^{(1)}$. Como

$$\begin{aligned} w &\in (b(s_0), \ldots, b(s_{r-1}), b(s_r)) \cap (b(\overline{s}_0), \ldots, b(\overline{s}_{q-1}), b(s_r)) \\ &\subset b(s_r) * (b(s_0), \ldots, b(s_{r-1})) \cap b(s_r) * (b(\overline{s}_0), \ldots, b(\overline{s}_{q-1})), \end{aligned}$$

concluimos por el Teorema 3.2.5 y la hipótesis de inducción que

$$(b(s_0), \ldots, b(s_{r-1})) = (b(\overline{s}_0), \ldots, b(\overline{s}_{q-1})).$$

Con esto hemos demostrado que $K^{(1)}$ es un complejo simplicial, por lo que solamente falta ver que $[K^{(1)}] = [K]$. Claramente $[K^{(1)}] \subset [K]$. Además, utilizando la hipótesis de inducción podemos ver que $[K^{(1)}] \supset [(K^{n-1})^{(1)}] = [K^{n-1}]$, con lo cual debemos mostrar que

$$[K^{(1)}] \supset [K] - [K^{n-1}].$$

Supongamos que w es un elemento de $[K] - [K^{n-1}]$, entonces w debe estar en algún simplejo abierto (s) de dimensión n. Por lo que

$$w \in (s) \subset [s] = b(s) * [s^{n-1}].$$

Ahora, $[s^{n-1}] \subset [K^{n-1}] = [(K^{n-1})^{(1)}]$, con lo cual $w \in b(s) * (s_1)$ para algún $(s_1) = (b(s_0), \ldots, b(s_k)) \in (K^{n-1})^{(1)}$.
Si $w = b(s)$, entonces w es un vértice en $K^{(1)}$. Si $w \neq b(s)$, entonces $w \in (b(s_0), \ldots, b(s_k), b(s)) \subset [K^{(1)}]$. Por lo tanto $[K^{(1)}] = [K]$. □

A $K^{(1)}$ le llamamos **primera subdivisión baricéntrica de K**. Y dado que $K^{(1)}$ es a su vez un complejo simplicial, podemos iterar para conseguir la **n-ésima subdivisión baricéntrica** $K^{(n)} = \underbrace{(\ldots((K^{(1)})^{(1)})\ldots)^{(1)}}_{n-veces}$.

Definición 3.2.9. Sea K un complejo simplicial en $\mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{R}^n$ está provisto con la métrica euclideana $d_{\mathbb{R}^n}$. El **mesh** de K es el máximo de los diámetros de los simplejos de K, es decir,

$$\text{mesh } K = \max_{s \in K} \text{diam}[s].$$

Lema 3.2.10. Si s es un simplejo en $\mathbb{R}^n$, entonces $\text{diam}[s] = d_{\mathbb{R}^n}(v_1, v_2)$ para algún par v_1, v_2 de vértices de s.

Demostración. Sea s un simplejo y sean $v_1, v_2 \in [s]$ tales que $\text{diam}[s] = d_{\mathbb{R}^n}(v_1, v_2)$. Supongamos que v_2 no es un vértice de s, entonces v_2 está en algún simplejo abierto de dimensión mayor o igual a 1. En particular, existen $w_1, w_2 \in [s]$, donde $w_1 \neq w_2$ y son tales que $v_2 = tw_1 + (1-t)w_2$ para algún $t \in (0,1)$. Pero la función convexa f definida por

$$f(t) = d_{\mathbb{R}^n}(v_1, tw_1 + (1-t)w_2),$$

no tiene máximo en $(0,1)$, contradiciendo la maximalidad de $d_{\mathbb{R}^n}$ en (v_1, v_2). $\square$

Es decir, mientras más fina sea la subdivisión, más pequeño va a ser el mesh del complejo.

Teorema 3.2.11. Sea K un complejo simplicial de dimensión m. Entonces mesh $K^{(1)} \leq \dfrac{m}{m+1}$mesh K. En particular, $\lim_{n \to \infty} \text{mesh } K^{(n)} = 0$.

Demostración. Por el Lema 3.2.10, existe un simplejo $(b(s_0), \ldots, b(s_r))$ en $K^{(1)}$ tal que mesh $K^{(1)} = d(b(s_k), b(s_h))$ con $s_k < s_h$. Renombrando los vértices si es necesario, sean $s_k = (v_0, \ldots, v_p)$ y $s_h = (v_0, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_h)$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{mesh } K^{(1)} &= ||b(s_k) - b(s_h)|| \\
&= \left|\left| \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v_i - \frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^{q} v_j \right|\right| \\
&= \frac{1}{q+1} \left|\left| \frac{q+1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v_i - \sum_{j=0}^{q} v_j \right|\right| \\
&= \frac{1}{q+1} \left|\left| \sum_{j=0}^{q} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v_i - v_j \right) \right|\right| \\
&= \frac{1}{p+1} \frac{1}{q+1} \left|\left| \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=0}^{p} (v_i - v_j) \right|\right| \\
&\leq \frac{1}{p+1} \frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=0}^{p} ||v_i - v_j||.
\end{aligned}$$

Pero $||v_i - v_j|| \leq \text{diam}[s_h] \leq \text{mesh } K$. Más aún, cuando $i = j$, el (i, j)-ésimo término en la suma es cero, y dado que hay $p+1$ de estos términos, el número de sumandos distintos de cero es

$$(p+1)(q+1) - (p+1) = (p+1)q.$$

Como cada término de la suma es menor que mesh K, y como q es menor o igual a m,

$$\text{mesh } K^{(1)} \leq \frac{q}{q+1}\text{mesh } K \leq \frac{m}{m+1}\text{mesh } K.$$

□

3.3. Teorema de aproximación simplicial

Definición 3.3.1. Sean K y L complejos simpliciales. Un mapeo $\varphi : [K] \to [L]$ es un **mapeo simplicial** si,

1. para cada vértice v de K, $\varphi(v)$ es un vértice de L,
2. para cada simplejo $(v_0, \ldots, v_k)$ de K, todos los vértices $\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_k)$ caen en solamente algún simplejo cerrado de L,
3. para cada $(s) = (v_0, \ldots, v_k) \in K$ y $p = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in (s)$, la imagen bajo φ de p está dada por
$$\varphi(p) = \sum_{i=0}^{k} a_i \varphi(v_i).$$

Observemos que la condición 1 nos dice que φ debe mapear el 0-esqueleto de K en el 0-esqueleto de L. La condición 2 dice que para cada simplejo $(v_0, \ldots, v_k) \in K$, los puntos $\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_k)$ son los vétices de un simplejo en L. Y la condición 3 nos asegura que el mapeo φ es lineal en cada simplejo, por lo que también es continuo en cada simplejo. Además, es sencillo comprobar que $\varphi : [K] \to [L]$ es un mapeo continuo utilizando el Lema del Pegado.
Dado que un mapeo simplicial depende no solamente de los conjuntos $[K]$ y $[L]$, sino que también depende de la estructura simplicial de K y L, lo denotaremos por $\varphi : K \to L$.

Definición 3.3.2. Sea K un complejo simplicial y sea v un vértice de K. La **estrella de v** es el conjunto

$$\mathrm{St}(v) = \bigcup_{\substack{v\in[s]\\(s)\in K}} (s).$$

Teorema 3.3.3. Sea K un complejo simplicial. Para cada vértice v de K, la estrella $\mathrm{St}(v)$ es un conjunto abierto en $[K]$ que contiene a v, y v es el único vértice en $\mathrm{St}(v)$. Además, la colección $\{\mathrm{St}(v)\}_{v\in K^0}$ es una cubierta abierta de $[K]$.

Demostración. Veamos que $\mathrm{St}(v)^c = \bigcup_{v\notin[s]} (s)$ es cerrado. Dado que v no se encuentra en ninguna cara de s, tenemos que si $(s) \subseteq \mathrm{St}(v)^c$, entonces $[s] \subseteq \mathrm{St}(v)^c$. Y como $[s]$ es compacto, $[s]$ es cerrado. Por lo que $\mathrm{St}(v)^c = \bigcup_{(s)\subset \mathrm{St}(v)^c} [s]$ es cerrado.
Luego, v es el único vértice en $\mathrm{St}(v)$ ya que el único simplejo abierto que lo contiene es él mismo.
Finalmente, $\bigcup_{v\in K^0} \mathrm{St}(v) = [K]$ porque si p es un elemento de $[K]$, entonces $p \in (s)$ para algún simplejo (s) de K, por lo que $p \in \mathrm{St}(v)$ para cualquier vértice v de (s). □

Esto quiere decir que las estrellas del complejo K proporcionan una cubierta abierta para el mismo de manera natural. Además, mientras más pequeño sea el mesh de K, más pequeñas serán las estrellas, por lo que podemos aprovechar este hecho para decir cuando un mapeo es suficientemente parecido a otro de la siguiente manera.

Definición 3.3.4. Sean K y L complejos simpliciales y sea $f : [K] \to [L]$ una función continua. Un mapeo simplicial $\varphi : K \to L$ es una **aproximación simplicial a f** si $f(\mathrm{St}(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$ para cada vértice v de K.

En los próximos resultados veremos que esta manera de aproximar funciones tiene sentido.

Teorema 3.3.5. Sea $\varphi : K \to L$ es una aproximación simplicial a la función continua $f : [K] \to [L]$. Entonces para cualquier punto p de $[K]$, las imágenes $f(p)$ y $\varphi(p)$ se encuentran en un mismo simplejo cerrado de L.

Demostración. Sea $p \in [K]$. Entonces $p \in (s)$ para algún simplejo $(s) = (v_0, \ldots, v_r)$ de K y

$$f(p) \in f((s)) \subset f(\mathrm{St}(v_j)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v_j))$$

para toda $j = 0, \ldots, r$. Ahora, $f(p)$ cae en algún simplejo (t) de L, por lo que $(t) \cap \mathrm{St}(\varphi(v_j)) \neq \emptyset$ para toda $j = 0, \ldots, r$. Pero como L es un complejo simplicial y $\mathrm{St}(\varphi(v_j))$ es una unión de simplejos abiertos, $(t) \subset \mathrm{St}(\varphi(v_j))$ para toda $j = 0, \ldots, r$; esto es, $\varphi(v_j)$ es un vértice de (t) para toda $j = 0, \ldots, r$. De esta manera, suponiendo que $p = \sum_{j=0}^{r} a_j v_j$ es la representación en coordenadas baricéntricas de p en s, tenemos que

$$\varphi(p) = \sum_{j=o}^{r} a_j \varphi(v_j) \in [t],$$

con lo cual tanto $f(p)$ como $\varphi(p)$ se encuentran en t. □

Corolario 3.3.6. Sea $\varphi : K \to L$ una aproximación simplicial a una función continua $f : [K] \to [L]$. Entonces

$$\rho(f, \varphi) \leq \text{mesh } L,$$

donde $\rho(f, \varphi) = \sup_{p \in [K]} d(f(p), \varphi(p))$.

Lema 3.3.7. Sea $f : K \to L$ un mapeo simplicial y sea $\varphi : K \to L$ una aproximación simplicial a f. Entonces $\varphi = f$.

Demostración. Para cada vértice v de K,

$$f(v) \in f(\mathrm{St}(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v)).$$

Pero como f es un mapeo simplicial, $f(v)$ es un vértice de L, y por el Teorema 3.3.3, tenemos que $f(v) = \varphi(v)$. Así, como f y φ coinciden en los vértices, concluimos que $\varphi = f$, pues ambos son mapeos simpliciales. □

Teorema 3.3.8. Sea $\varphi : K \to L$ una aproximación simplicial a la función continua $f : [K] \to [L]$. Sea K_1 un subcomplejo de K, y supongamos que la restricción de f a $[K_1]$ es un mapeo simplicial. Entonces existe una homotopía entre f y φ relativa a $[K_1]$.

Demostración. Definamos la función $F : [K] \times I \to [L]$ dada por

$$F(p, t) = t\varphi(p) + (1 - t)f(p).$$

Por lo visto en el Teorema 3.3.5, sabemos que $f(p)$ y $\varphi(p)$ caen en un mismo simplejo de L, el cual al ser convexo, contiene a toda la línea que los une, por lo que F está bien definida. Claramente F es continua y, $F(p, 0) = f(p)$ y $F(p, 1) = \varphi(p)$ para toda $p \in [K]$. Por lo tanto, F es una homotopía entre f y φ.
Luego, como $\varphi|_{[K_1]}$ es una aproximación simplicial a $f|_{[K_1]}$, debido a que $f(\mathrm{St}_{K_1}(v)) \subset f(\mathrm{St}_K(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$ para cada $v \in (K_1)^0$, el Lema 3.3.7 nos dice que $\varphi = f$ en $[K_1]$. Concluyendo así que F es una homotopía entre f y φ relativa a $[K_1]$. □

Como acabamos de ver, de cumplirse la propiedad que implica ser aproximación simplicial, obtenemos un mapeo simplicial que se encuentra en la misma clase de homotopía que la función original.

Ahora sólo necesitamos corroborar que siempre existen aproximaciones simpliciales a cualquier función continua, y para ello, dado que un mapeo simplicial queda completamente determinado por como actúa sobre sus vértices, veamos cuándo podemos extender un mapeo de vértices a una aproximación simplicial.

Teorema 3.3.9. Sea $f : [K] \to [L]$ una función continua y sea $\varphi : K^0 \to L^0$ un mapeo de vértices. Entonces φ se puede extender a una aproximación simplicial a f si y sólo sí $f(\mathrm{St}(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$ para todo $v \in K^0$.

Demostración. Solamente necesitamos verificar que φ puede extenderse a una aproximación simplicial a f. Para esto, hay que ver que si $(s) = (v_0, \ldots, v_r)$ es un simplejo de K, entonces los puntos $\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_r)$ son vértices de un simplejo de L.
Sabemos que

$$f((s)) \subset f(\mathrm{St}(v_j)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v_j))$$

para toda $j = 0, \ldots, r$, por lo que $\bigcap_{j=0}^{r} \mathrm{St}(\varphi(v_j)) \neq \emptyset$. Esto implica que existe un simplejo abierto (t) de L tal que $(t) \subset \mathrm{St}(\varphi(v_j))$ para toda $j = 0, \ldots, r$. Por lo tanto $\varphi(v_j)$ debe ser un vértice de (t) para toda $j = 0, \ldots, r$. □

Para concluir ésta sección mostraremos a continuación el teorema de aproximación simplicial. Además, presentaremos un corolario en el cual aseguramos que la distancia entre la aproximación simplicial y la función continua puede ser tan pequeña como queramos.

Teorema 3.3.10. Sea $f : [K] \to [L]$ una función continua. Sea $\{K_n\}$ una sucesión de subdivisiones de K tales que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{mesh}\, K_n = 0$. Entonces, para n suficientemente grande, existe un mapeo simplicial $\varphi : K_n \to L$ tal que φ es una aproximación simplicial a f.

Demostración. Sabemos por el Teorema 3.3.3, que la colección $\{\mathrm{St}(w)\}_{w\in L^0}$ es una cubierta abierta de $[L]$. Además, como f es una función continua, la colección $\{f^{-1}(\mathrm{St}(w))\}_{w\in L^0}$ es una cubierta abierta de $[K]$. Asi, como $[K]$ es un espacio métrico compacto, tenemos que por el Lema 1.4.6, existe $\delta > 0$ tal que cualquier bola de radio δ está contenida en algún elemento de esta cubierta.
Elegimos n suficientemente grande tal que mesh $K_n < \frac{\delta}{2}$. Entonces diam$[s] < \frac{\delta}{2}$ para cada simplejo s de K_n, con lo cual para cada vértice $v \in K_n$, se cumple que $\mathrm{St}(v) \subset B_\delta(v)$. Pero $B_\delta(v) \subset f^{-1}(\mathrm{St}(w))$ para algún $w \in L^0$, por lo que para cada $v \in (K_n)^0$, definamos φ de tal manera que $\varphi(v)$ sea dicho vértice $w \in L^0$.
Entonces $\varphi : (K_n)^0 \to L^0$ tiene la propiedad de que $\mathrm{St}(v) \subset f^{-1}(\mathrm{St}(\varphi(v)))$, es decir,

$$f(\mathrm{St}(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$$

para cada $v \in (K_n)^0$. Así, por el Teorema 3.3.9, φ puede extenderse a una aproximación simplicial a f. □

Corolario 3.3.11. Sean K y L complejos simpliciales, y sea $f : [K] \to [L]$ una función continua. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$, existen subdivisiones K_n de K y L_m de L, y una aproximación simplicial $\varphi : K_n \to L_m$ a f tal que $\rho(f, \varphi) < \epsilon$.

Demostración. Por el Teorema 3.2.11, existen subdivisiones con mesh arbitrariamente pequeño.
Dado $\epsilon > 0$, sea L_m una subdivisión de L tal que mesh $L_m < \epsilon$. Entonces f es una función continua de $[K]$ en $[L_m]$. Por el Teorema 3.3.10, existe una subdivisión K_n de K y una aproximación simplicial $\varphi : K_n \to L_m$ a f. Y por el Corolario 3.3.6 tenemos que

$$\rho(f, \varphi) \leq \text{mesh } L_m < \epsilon.$$

□

3.4. Grupo fundamental de un complejo simplicial

Tomando en cuenta que las aproximaciones simpliciales se encuentran en la misma clase de homotopía que la función a la que aproximan seremos capaces de construir, dado un complejo simplicial, un grupo isomorfo al grupo fundamental de dicho complejo simplicial.

Comencemos por dar una relación entre mapeos simpliciales que será de gran utilidad de aquí en adelante.

Definición 3.4.1. Sean K y L complejos simpliciales. Sean $\varphi_1, \varphi_2 : K \to L$ mapeos simpliciales. Decimos que φ_1 y φ_2 son **contiguos** si para cada simplejo $(v_0, \ldots, v_k)$ de K, existe un simplejo t en L tal que

$$\varphi_1(v_0), \ldots, \varphi_1(v_k) \text{ y } \varphi_2(v_0), \ldots, \varphi_2(v_k)$$

son vértices de t.

Ejemplo 3.3. Sean K un 3-simplejo con vértices v_0, v_1, v_2, v_3 y L un complejo simplicial de dimensión uno con tres vértices w_0, w_1, w_2 como se muestra en la Figura 3.5.

FIGURA 3.5

Definimos mapeos simpliciales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : K \to L$ de la siguiente manera:

$$\varphi_1(v_0) = \varphi_1(v_1) = w_0, \quad \varphi_1(v_2) = \varphi_1(v_3) = w_1;$$
$$\varphi_2(v_0) = \varphi_2(v_1) = \varphi_2(v_2) = \varphi_2(v_3) = w_1;$$
$$\varphi_3(v_0) = w_2, \quad \varphi_3(v_1) = \varphi_3(v_2) = \varphi_3(v_3) = w_1.$$

Podemos verificar fácilmente que φ_1 y φ_2 son contiguos, y que φ_2 y φ_3 son contiguos. Notamos, sin embargo, que φ_1 y φ_3 no son contiguos ya que $\varphi_1(v_0)$ se encuentra en el simplejo $[w_0, w_1]$, mientras que $\varphi_3(v_0)$ cae en $[w_1, w_2]$. Razón por la cual la propiedad de ser contiguos no es una relación de equivalencia.
A pesar de esto, podemos aprovechar esta propiedad para definir la siguiente relación de equivalencia.

Definición 3.4.2. Dos mapeos simpliciales $\varphi, \psi : K \to L$ son **contiguamente equivalentes**, denotado por $\overset{C}{\simeq}$, si existe una sucesión finita $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ de mapeos simpliciales de K en L tales que $\varphi_0 = \varphi, \varphi_k = \psi$, y φ_i es contigua con φ_{i-1} para cada $i = 1, 2, \dots, k$.

Ahora bien, la propiedad de ser contiguos es más natural de lo que podría parecer a primera vista, y sin embargo, es suficientemente útil como para asegurar los siguientes resultados.

Teorema 3.4.3. Sean K y L complejos simpliciales y sea $f : [K] \to [L]$ una función continua. Supongamos que $\varphi_1, \varphi_2 : K \to L$ son aproximaciones simpliciales a f. Entonces φ_1 y φ_2 son contiguos.

Demostración. Sea $(s) = (v_0, \dots v_k)$ un simplejo de K. Entonces

$$f((s)) \subset f(\mathrm{St}(v_j)) \subset \mathrm{St}(\varphi_i(v_j))$$

para toda $j = 0, \ldots, k$ y cada $i = 1, 2$. Por lo que

$$f((s)) \subset \bigcap_{j=0}^{k} \mathrm{St}(\varphi_1(v_j)) \cap \bigcap_{j=0}^{k} \mathrm{St}(\varphi_2(v_j)).$$

Sea (t) un simplejo abierto de L tal que $f((s)) \cap (t) \neq \emptyset$. Entonces

$$(t) \subset \bigcap_{j=0}^{k} \mathrm{St}(\varphi_1(v_j)) \cap \bigcap_{j=0}^{k} \mathrm{St}(\varphi_2(v_j)).$$

Por lo tanto $\varphi_1(v_0), \ldots, \varphi_1(v_k)$ y $\varphi_2(v_0), \ldots, \varphi_2(v_k)$ son vértices de (t). □

Teorema 3.4.4. Supongamos que $\varphi_1, \varphi_2 : K \to L$ son mapeos simpliciales contiguos. Entonces φ_1 y φ_2 son homotópicos.

Demostración. Definamos la función $F : [K] \times I \to [L]$ dada por

$$F(p, t) = (1 - t)\varphi_1(p) + t\varphi_2(p)$$

para $p \in [K]$ y $t \in I$.
F está bien definida, ya que si $(s) = (v_0, \ldots, v_k)$ es un simplejo de K y p un punto de (s), podemos expresar a p en coordenadas baricéntricas como $p = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$, y dado que φ_1 y φ_2 son contiguos, $\varphi_1(v_0), \ldots, \varphi_1(v_k)$ y $\varphi_2(v_0), \ldots, \varphi_2(v_k)$ son vértices de un mismo simplejo (t) de L. Por lo que $\varphi_j(p) = \sum_{i=0}^{k} a_i \varphi_j(v_i) \in (t)$ para $j = 1, 2$.
Por lo demás, es claro que F es una homotopía entre φ_1 y φ_2. □

Corolario 3.4.5. Mapeos simpliciales contiguamente equivalentes son homotópicos.

Teorema 3.4.6. Sea K un complejo simplicial y sean $\alpha_0, \alpha_1 : I \to [K]$ caminos en $[K]$. Supongamos que $\alpha_0 \simeq \alpha_1$. Entonces existe una subdivisión I' de I y mapeos simpliciales $\varphi_0, \varphi_1 : I' \to K$ tales que

1. φ_j es una aproximación simplicial a α_j para $j = 0, 1$,
2. $\varphi_0 \overset{C}{\simeq} \varphi_1$.

Demostración. Sea $F : I \times I \to [K]$ una homotopía entre α_0 y α_1. Así, como $\{\mathrm{St}(w)\}_{w \in K^0}$ es una cubierta abierta de $[K]$, la colección $\{F^{-1}(\mathrm{St}(w))\}_{w \in K^0}$ es una cubierta abierta de $I \times I$, y dado que $I \times I$ es un espacio métrico compacto, existe por Lema 1.4.6, un $\delta > 0$ tal que cada bola de radio δ está contenida en $F^{-1}(\mathrm{St}(w))$ para algún $w \in K^0$.

Elijamos una subdivisión I' de I con vértices $0 = v_0, v_1, \ldots, v_s = 1$, y otra subdivisión I'' de I con vértices $\frac{l}{2^k}$, con $l = 0, \ldots, 2^k$. Entonces $I' \times I''$ puede verse como un complejo simplicial M con vértices $v_r^l = (v_r, \frac{l}{2^k})$ y 2-simplejos de la forma $(v_r^l, v_{r+1}^l, v_{r+1}^{l+1})$ ó $(v_r^l, v_r^{l+1}, v_{r+1}^{l+1})$.

Las subdivisiones pueden elegirse suficientemente finas para que el conjunto $\mathrm{St}(v_r) \times \left[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$ esté contenido en la bola $B_\delta(v_r)$, y por tanto estar contenido en $F^{-1}(\mathrm{St}(w))$ para algún $w \in K^0$. Así, como

$$\mathrm{St}(v_r^l) \subset \mathrm{St}(v_r) \times \left[\tfrac{l-1}{2^k}, \tfrac{l+1}{2^k}\right] \subset F^{-1}(\mathrm{St}(w)),$$

existe, por Teorema 3.3.9, un mapeo simplicial $\Phi : M \to K$, el cual es una aproximación simplicial a F y para el cual se cumple

$$\mathrm{St}(v_r) \times \left[\tfrac{l-1}{2^k}, \tfrac{l+1}{2^k}\right] \subset F^{-1}(\mathrm{St}(\Phi(v_r^l))).$$

Sean $\varphi_i = \Phi|_{I\times\{i\}}$ para $i = 1, 2$. Entonces φ_i es una aproximación simplicial a $F|_{I\times\{i\}} = \alpha_i$ para cada $i = 1, 2$.

Veamos ahora que $\varphi_0 \overset{C}{\simeq} \varphi_1$.
Sea $\Psi_l = \Phi|_{I\times\frac{l}{k^2}}$ tal que $\Psi_0 = \varphi_0$ y $\Psi_{2^k} = \varphi_1$. Es suficiente ver que Ψ_l y Ψ_{l+1} son contiguos para $l = 0, \ldots, 2^k - 1$, esto es, para cada simplejo (v_r, v_{r+1}) de I', los vértices

$$\Psi_l(v_r) = \Phi(v_r^l),\ \ \Psi_l(v_{r+1}) = \Phi(v_{r+1}^l),\ \ \Psi_{l+1}(v_r) = \Phi(v_r^{l+1}),\ \text{y}\ \ \Psi_{l+1}(v_{r+1}) = \Phi(v_{r+1}^{l+1}),$$

se encuentran en un mismo simplejo de K. Pero

$$\begin{aligned}\bigcap_{i,j=0}^{1} \mathrm{St}(\Phi(v_{r+i}^{l+j})) &\supset F\left(\mathrm{St}(v_r) \times \left[\tfrac{l}{2^k}, \tfrac{l+1}{2^k}\right]\right) \cap F\left(\mathrm{St}(v_{r+1}) \times \left[\tfrac{l}{2^k}, \tfrac{l+1}{2^k}\right]\right)\\ &\supset F\left((v_r, v_{r+1}) \times \left[\tfrac{l}{2^k}, \tfrac{l+1}{2^k}\right]\right),\end{aligned}$$

el cual es no vacío y por lo cual contiene algún simplejo (t) de K. Por lo tanto los cuatro vértices en cuestión, son vértices de (t). $\square$

Como bien sabemos, el grupo fundamental consta de clases de equivalencia de lazos, razón por la cuál intentaremos imitar ese concepto de lazo en complejos simpliciales para construir un grupo que sea isomorfo al grupo fundamental.

Veamos entonces como construir, representar y relacionar un tipo particular de caminos en complejos simpliciales, de tal manera que podamos construir un grupo con ellos.

Definición 3.4.7. Sea K un complejo simplicial.

1. Una **arista** en K es un par ordenado $e = |v_1 v_2|$ de vértices en K, tales que v_1 y v_2 se encuentran en un mismo simplejo de K. v_1 es el origen de e y v_2 es el final de e.

2. Si $e = |v_1 v_2|$, entonces la arista $|v_2 v_1|$ se denota por e^{-1}.

3. Una **ruta** en K es una sucesión finita $\omega = e_1 e_2 \dots e_k$ de aristas en K tales que para cada $i = 1, \dots k-1$, el final de e_i coincide con el origen de e_{i+1}. El origen de ω es el origen de e_1 y el final de ω es el final de e_k.

4. Dadas dos rutas $\omega = e_1 \dots e_k$ y $\tau = e'_1 \dots e'_m$, tales que el final de ω coincide con el origen de τ, definimos su producto como

$$\omega\tau = e_1 \dots e_k e'_1 \dots e'_m.$$

5. El inverso de una ruta $\omega = e_1 \dots e_k$ es la ruta $\omega^{-1} = e_k^{-1} \dots e_1^{-1}$.

Una relación de equivalencia en el conjunto de todas las rutas en K se puede definir de la siguiente manera:
Si $e = |v_1 v_2|$ y $f = |v_2 v_3|$ son tales que v_1, v_2, v_3 son vértices de un mismo simplejo, entonces el producto ef es **equivalente por aristas** a la arista $|v_1 v_3|$. Dos rutas ω y τ son equivalentes por aristas, denotado $\omega \overset{E}{\simeq} \tau$, si τ puede obtenerse de ω mediante una sucesión finita de dichas equivalencias por aristas.

Ejemplo 3.4. Supongamos que K es el complejo simplicial de la Figura 3.6

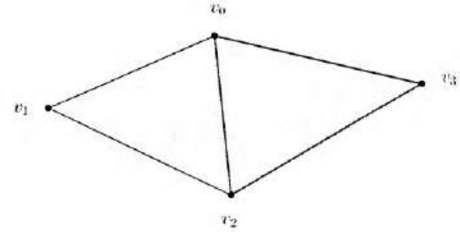

FIGURA 3.6

Entonces $|v_0 v_1||v_1 v_2| \overset{E}{\simeq} |v_0 v_3||v_3 v_2|$ porque

$$|v_0v_1||v_1v_2| \overset{E}{\simeq} |v_0v_2| \overset{E}{\simeq} |v_0v_3||v_3v_2|.$$

Teorema 3.4.8. Sea K un complejo simplicial y sea v_0 un vértice de K. Denotemos por $E(K, v_0)$ al conjunto de clases de equivalencia por aristas de rutas en K con origen v_0 y final v_0. Entonces $E(K, v_0)$ es un grupo con la operación de multiplicación para rutas e inversa definidas previamente. El grupo $E(K, v_0)$ es llamado el **grupo de caminos por aristas de K** con punto base v_0.

Notemos que el grupo de caminos por aristas de un complejo K es algo puramente combinatorio, es decir, depende solamente de los vértices de K y aquellos subconjuntos que son vértices de algún simplejo. Su definición no utiliza las propiedades topológicas del espacio $[K]$.

Sea V un conjunto finito, y llamemos a sus elementos vértices. Sea A una colección de subconjuntos de V, llamados simplejos abstractos, tales que

1. Si $v \in V$, entonces $\{v\} \in A$.
2. Si $S \in A$, entonces cada subconjunto no vacío de S también está en A.

A está colección A se le llama **complejo simplicial abstracto**.
Notemos que cada complejo simplicial determina un complejo simplicial abstracto. Y de igual manera, puede probarse que cada complejo simplicial abstracto A tiene una "realización" como complejo simplicial, esto es, existe un complejo simplicial cuyo complejo abstracto es A. Sin embargo, cada complejo simplicial abstracto corresponde a varios complejos simpliciales.
El grupo de caminos por aristas puede definirse para el complejo simplicial asbstracto A. Es exactamente el mismo que el grupo de caminos por aristas de cualquier realización de A. Es en éste sentido que $E(K, v_0)$ es un objeto puramente combinatorio.

Teorema 3.4.9. Sea K un complejo simplicial y sea v_0 un vértice de K. Entonces $E(K, v_0)$ es isomorfo a $\pi_1([K], v_0)$.

Demostración. Definiremos una aplicación $h : E(K, v_0) \to \pi_1([K], v_0)$ y probaremos que es un isomorfismo.
Sea ω una ruta en K con origen y final v_0, entonces $\omega = |v_0v_1| \dots |v_{k-1}v_k|$ para algún conjunto $\{v_0, \dots, v_k\}$ de vértices de K, con $v_k = v_0$. Veamos al intervalo I como un complejo simplicial con vértices $\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\}$, y consideremos el mapeo de vértices $(\varphi_\omega)^0 : I^0 \to K^0$ dado por $(\varphi_\omega)^0(\frac{j}{k}) = v_j$ para $j = 0, 1, \dots, k$. Dado que ω es una ruta, podemos extender $(\varphi_\omega)^0$ a un mapeo simplicial $\varphi_\omega : I \to K$, que a su vez corresponde a

una aplicación continua $\varphi_\omega : [I] \to [K]$.

Definamos entonces la función $h : E(K, v_0) \to \pi_1([K], v_0)$, dado por $h(\omega) = [\varphi_\omega]$.

Notemos que si ω y τ son dos rutas en K tales que son equivalentes por aristas, entonces son homotópicas, por lo que $h(\omega) = h(\tau)$. Por lo que h está bien definida.
Veamos que h es un isomorfismo.

h es un homomorfismo. Si $\omega = e_1 \dots e_k$ y $\tau = e'_1 \dots e'_m$ son rutas en K con origen y final v_0, entonces la función $F : I \times I \to K$ dada por

$$F(t,s) = \begin{cases} \varphi_\omega\left(\frac{2(k+m)t}{(m-k)s+2k}\right) & 0 \leq t \leq \frac{(m-k)s+2k}{2(k+m)} \\ \varphi_\tau\left(\frac{2(m+k)t-(m-k)s-2k}{2m-(m-k)s}\right) & \frac{(m-k)s+2k}{2(k+m)} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía entre $\varphi_{\omega\tau}$ y $\varphi_\omega * \varphi_\tau$. Es decir, $h(\omega\tau) = h(\omega) * h(\tau)$.

h es sobreyectivo. Sea $[\alpha] \in \pi_1([K], v_0)$. Por el Teorema 3.3.10, existe una subdivisión I' de I y una aproximación simplicial $\varphi : I' \to K$ a α. Mas aún, por el Teorema 3.3.8 sabemos que $\varphi \simeq \alpha$, por lo que $[\varphi] = [\alpha]$. Sean $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ los vértices de I' y sea $\omega = |\varphi(t_0)\varphi(t_1)| \dots |\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)|$ la ruta dada por los vértices de I' en K. Entonces $h(\omega) = [\varphi] = [\alpha]$.
Por lo que h es sobreyectivo.

h es inyectivo. Veamos que h tiene kernel trivial. Para esto debemos mostrar que si ω es una ruta en K tal que $\varphi_\omega \simeq \mathcal{E}_{v_0}$, entonces $\omega \overset{E}{\simeq} |v_0v_0|$. Pero, por el Teorema 3.4.6, sabemos que existe una subdivisión I' de I y mapeos simpliciales $\varphi_0, \varphi_1 : I' \to K$ tales que, φ_0 y φ_1 son aproximaciones simpliciales a φ_ω y $\mathcal{E}_{v_0}$ respectivamentes, y tales que $\varphi_0 \overset{C}{\simeq} \varphi_1$. Mas aún, dado que $\mathcal{E}_{v_0}$ es un mapeo simplicial, tenemos por el Lema 3.3.7 que $\varphi_1 = \mathcal{E}_{v_0}$. Entonces, para ver que $\omega \overset{E}{\simeq} |v_0v_0|$, basta probar las siguientes afirmaciones:

(1) Si $\varphi, \psi : I' \to K$ son mapeos simpliciales contiguamente equivalentes, entonces $\omega_\varphi \overset{E}{\simeq} \omega_\psi$, donde ω_φ y ω_ψ son las rutas asociadas a φ y ψ.

(1) Si $\psi : I \to K$ es un mapeo simplicial y $\varphi : I' \to K$ es una aproximación simplicial a ψ en una subdivisión más fina de I, entonces $\omega_\psi \overset{E}{\simeq} \omega_\varphi$.

Probar (1) y (2) es suficiente, pues tendríamos que se cumple lo siguiente

$$\omega = \omega_{\varphi_\omega} \overset{E}{\simeq} \omega_{\varphi_0} \overset{E}{\simeq} \omega_{\varphi_1} = \omega_{\mathcal{E}_{v_0}} = |v_0v_0|.$$

Demostración de (1). Como $\overset{E}{\simeq}$ es una relación de equivalencia, es suficiente ver que mapeos simpliciales contiguos tienen esta propiedad. Supongamos que $\varphi, \psi : I' \to K$ son contiguos. Las rutas asociadas a φ y ψ son

$$\begin{aligned}\omega_\varphi &= |\varphi(t_0)\varphi(t_1)||\varphi(t_1)\varphi(t_2)|\dots|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)|,\\ \omega_\psi &= |\psi(t_0)\psi(t_1)||\psi(t_1)\psi(t_2)|\dots|\psi(t_{k-1})\psi(t_k)|.\end{aligned}$$

Entonces

$$\omega_\varphi\omega_\psi^{-1} = |\varphi(t_0)\varphi(t_1)|\dots|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)||\psi(t_k)\psi(t_{k-1})|\dots|\psi(t_1)\psi(t_0)|.$$

Pero como φ y ψ son contiguos, los vértices $\varphi(t_{k-1}), \varphi(t_k), \psi(t_k)$ y $\psi(t_{k-1})$ se encuentran en un mismo simplejo de K. Mas aún, $\varphi(t_k) = \psi(t_k) = v_0$, por lo que

$$|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)||\psi(t_k)\psi(t_{k-1})| \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})|$$

y de esta manera

$$\omega_\varphi\omega_\psi^{-1} \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_0)\varphi(t_1)|\dots|\varphi(t_{k-2})\varphi(t_{k-1})||\varphi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})||\psi(t_{k-1})\psi(t_{k-2})|\dots|\psi(t_1)\psi(t_0)|.$$

Similarmente, dado que φ y ψ son contiguos,

$$|\varphi(t_{k-2})\varphi(t_{k-1})||\varphi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})| \overset{E}{\simeq} |\varphi(_{k-2})\psi(t_{k-1})|$$

y

$$|\varphi(t_{k-2})\psi(t_{k-1})||\psi(t_{k-1})\psi(t_{k-2})| \overset{E}{\simeq} |\varphi(_{k-2})\psi(t_{k-2})|,$$

con lo que

$$\omega_\varphi\omega_\psi^{-1} \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_0)\varphi(t_1)|\dots|\varphi(t_{k-3})\varphi(t_{k-2})||\varphi(t_{k-2})\psi(t_{k-2})||\psi(t_{k-2})\psi(t_{k-3})|\dots|\psi(t_1)\psi(t_0)|.$$

Continuando de este modo concluimos, por inducción, que

$$\omega_\varphi\omega_\psi^{-1} \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_0)\psi(t_0)| = |v_0v_0|.$$

Demostración de (2). Dado que la restricción de ψ al subcomplejo I', cuyos vértices son $\{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$, es un mapeo simplicial, tenemos que $\varphi(t_i) = \psi(t_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, k$. Más aún, dado que $\psi : I \to K$ es un mapeo simplicial, $(\psi(t_i, t_{i+1}))$ es un simplejo (s) en K de dimensión a lo más 1. Afirmamos que para cada vértice u de I' tal que $t_i < u < t_{i+1}$, la imagen $\varphi(u)$ es un vértice de (s). En efecto, como φ es una aproximación simplicial a ψ, tenemos

$$\psi(u) \in \psi(\mathrm{St}_{I'}(u)) \subset \mathrm{St}_K(\varphi(u)).$$

Además, $(s) \cap \mathrm{St}(\varphi(u))$ es no vacío ya que $\psi(u) \in (s)$, de lo cual obtenemos que $(s) \subset \mathrm{St}(\varphi(u))$ y que $\varphi(u)$ debe ser un vértice de (s).

Luego, si $u_0 = t_i < u_1 < \cdots < u_r = t_{i+1}$ son vérties de I' entre t_i y t_{i+1}, entonces $\varphi(u_0), \ldots, \varphi(u_r)$ son vértices de un mismo simplejo de K. Notemos que $\varphi(u_0)$ es un vértice de (s) porque $\varphi(u_0) = \varphi(t_i) = \psi(t_i)$. Análogamente $\varphi(u_r)$ es un vértice de (s). Consideremos las partes de ω_φ y ω_ψ obtenidas al restringir ψ y φ al intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Para ω_ψ es solamente la arista $|\psi(t_i)\psi(t_{i+1})|$, y la correspondiente de ω_φ es

$$|\varphi(u_0)\varphi(u_1)||\varphi(u_1)\varphi(u_2)| \ldots |\varphi(u_{r-1})\varphi(u_r)|.$$

Dado que $\varphi(u_0), \ldots, \varphi(u_r)$ son vértices de un mismo simplejo de K, lo anterior es equivalente por aristas a $|\varphi(u_0)\varphi(u_r)| = |\varphi(t_i)\varphi(t_{i+1})| = |\psi(t_i)\psi(t_{i+1})|$. Por lo que estas partes ω_φ y ω_ψ son equivalentes por aristas. Y dado que esto se cumple para cualquier $i = 0, \ldots, k$, concluimos que $\omega_\varphi \overset{E}{\simeq} \omega_\psi$.
Por lo tanto h es inyectivo.

De esta manera, hemos visto que h es un isomorfismo entre $E(K, v_0)$ y $\pi_1([K], v_0)$. □

Corolario 3.4.10. Sea K un complejo simplicial, sea v_0 un vértice de K y sea $i : K^2 \to K$ la inclusión del 2-esqueleto de K en K. Entonces i induce un isomorfismo

$$i_\# : E(K^2, v_0) \to E(K, v_0).$$

Consecuentemente, el mapeo inducido

$$i_\# : \pi_1([K^2], v_0) \to \pi_1([K], v_0)$$

es un isomorfismo.

Ahora, veremos algunos resultados interesantes que contribuyen a complementar y aplicar la teoría vista hasta este punto.
Comenzaremos por un teorema que ya habíamos visto en el Capítulo 2, pero lo abordaremos desde un enfoque distinto.

Teorema 3.4.11. La esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa para $n \geq 2$.

Demostración. Notemos primeramente que la esfera $\mathbb{S}^n$ es homeomorfa al n-esqueleto de un $(n+1)$-simplejo. En efecto, si s es un $(n+1)$-simplejo en $\mathbb{R}^{n+1}$, el mapeo $\varphi : [s^n] \to \mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$\varphi(x) = \frac{x - b}{\left[\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ es un punto de $[s^n]$ y $b = (b_1, \ldots, b_{n+1})$ es el baricéntro de s, es un homeomorfismo entre $[s^n]$ y $\mathbb{S}^n$.

Entonces basta con ver que el grupo fundamental de $[s^n]$ es trivial.

De acuerdo al Teorema 3.4.9, cada elemento de $\pi_1([s^n], v_0)$ tiene un representante de clase α que es una ruta, y en particular, al ser una ruta, su imagen se encuentra completamente contenida en $[s^1]$. Entonces si $n \geq 2$, existe un punto p en $[s^n]$ tal que p no está en $[s^1]$. Pero $[s^n] - \{p\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, el cual es contractible. Por lo que $\alpha \simeq \mathcal{E}_{v_0}$, es decir, cualquier elemento de $\pi_1([s^n], v_0)$ es homotópico al lazo constante en v_0. □

Como acabamos de ver, en ocasiones la información que brinda el 1-esqueleto puede ser de gran utilidad para calcular el tipo de homotopía de algunos complejos simpliciales. Es por ello, que ahora dirigiremos nuestra atención hacia los complejos simpliciales de dimensión 1 ó menor.

Definición 3.4.12. Una **gráfica** es un complejo simplicial de dimensión menor que 2. Un **árbol** T es una gráfica conexa por caminos tal que, para cada 1-simplejo s de T, el conjunto $[T] - (s)$ es no conexo. (Ver Figura 3.7)

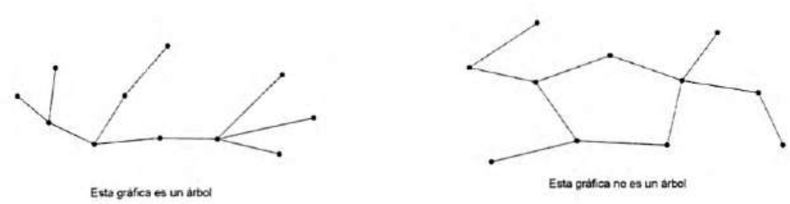

FIGURA 3.7

Un final de una gráfica es un vértice que es vértice de a lo más un 1-simplejo.

Teorema 3.4.13. Todo árbol es contractible.

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de vértices del árbol T. Si T tiene un vértice, el teorema es trivial. Supongamos pues que el teorema se cumple para n vértices. Ahora, sea T un árbol con $n+1$ vértices. Sea v_0 un final de T, entonces existe un único 1-simplejo s de T tal que $v_0 \in s$.
Sea $L = T - \{(s), v_0\}$, entonces L es un complejo simplicial y $[L] = [T] - (s) \cup \{v_0\}$. Luego, L es un árbol porque si t es un 1-simplejo de L tal que $[L] - (t)$ es conexo, entonces $[T] - (s)$ también sería conexo, lo cual no puede ocurrir ya que T es un árbol. Como L tiene n vértices, es contractible por hipótesis de inducción.
Más aún, afirmamos que $[L]$ y $[T]$ son homotópicamente equivalentes. En efecto, sea $g : [L] \to [T]$ la inclusión de $[L]$ en $[T]$, y sea $f : [T] \to [L]$ una función que aplica el conjunto $(s) \cup \{v_0\}$ al otro vértice de s, y a L sobre sí mismo. Entonces $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{[L]}$ y $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_{[T]}$, por lo que $[T]$ es contractible. □

Definición 3.4.14. Sea K una gráfica. Sea α_0 el número de vértices de K y sea α_1 el número de 1-simplejos de K. Definamos $\chi(K) = \alpha_0 - \alpha_1$. El entero $\chi(K)$ es llamado **característica de Euler de K.**

Veamos que relación guarda la característica de Euler con los árboles.

Teorema 3.4.15. Sea T un árbol. Entonces $\chi(T) = 1$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de vértices de T. Para un vértice el teorema es claro. Supongamos pues que el teorema se cumple para n vértices y sea T un árbol con $n+1$ vértices. Sea L el mismo árbol obtenido en la demostración del Teorema 3.4.13, entonces L tiene n vértices, por lo que $\chi(L) = 1$. Pero $\alpha_0(T) = \alpha_0(L) + 1$, y $\alpha_1(T) = \alpha_1(L) + 1$, y por hipótesis de inducción $\chi(T) = \chi(L) = 1$. □

En el teorema anterior hemos visto que la característica de Euler se mantiene invariante para todos los árboles. Veamos ahora que ocurre con las gráficas conexas por caminos que no son árboles.

Teorema 3.4.16. Sea K una gráfica conexa por caminos. Sea n el número máximo de 1-simplejos que se pueden remover de K de tal manera que K siga siendo conexo. Entonces $n = 1 - \chi(K)$.

Demostración. Si K es un árbol, entonces $n = 0$. Si K no es un árbol, entonces existe un 1-simplejo abierto (s_1) de K tal que $[K] - (s_1)$ es conexo. Si $K - (s_1)$ es un árbol, terminamos. Si no lo es, entonces existe otro simplejo abierto (s_2) de K tal que $[K] - (s_1) \cup (s_2)$ es conexo. Dado que solamente hay una cantidad finita de 1-simplejos en K, este proceso debe terminar en algún momento, es decir, existe n tal que $T = K - \bigcup_{i=1}^{n} (s_i)$ es un árbol, y entonces

$$\chi(K) = \chi(T) - n = 1 - n,$$

es decir, $n = 1 - \chi(K)$. $\square$

El siguiente teorema nos dice como se relaciona la característica de Euler de una gráfica conexa por caminos con su grupo fundamental.

Teorema 3.4.17. Sea K una gráfica conexa por caminos y sea v_0 un vértice de K. Entonces $\pi_1([K], v_0)$ es isomorfo al grupo libre en $n = 1 - \chi(K)$ generadores.

Demostración. Si construimos homomorfismos

$$h : E(K, v_0) \to \mathbb{F}_n, \quad h_1 : \mathbb{F}_n \to E(K, v_0)$$

tales que $h_1 \circ h$ y $h \circ h_1$ son mapeos identidades, tendremos que $E(K, v_0)$ es isomorfo a $\mathbb{F}_n$, y por lo tanto el resultado será una consecuencia del Teorema 3.4.9.

Comencemos por construir h.
Sean $(s_1), \ldots, (s_n)$ 1-simplejos abiertos de K tales que $T = K - \bigcup_{i=1}^{n} (s_i)$ es un árbol, y donde $n = 1 - \chi(K)$ de acuerdo al Teorema 3.4.16. Sea $\mathbb{F}_n$ el grupo libre con generadores $(s_1), \ldots, (s_n)$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, sea s_j^+ la arista $|v_j v_j'|$ en K donde v_j y v_j' son los vértices de s_j, y sea s_j^- la arista $|v_j' v_j|$. Entonces cada ruta ω en K es de la forma

$$\omega = \rho_1 s_{j_1}^{\pm} \rho_2 s_{j_2}^{\pm} \ldots \rho_k s_{j_k}^{\pm} \rho_{k+1},$$

donde cada ρ_i es una ruta en el árbol T. Definamos a h por

$$h(\omega) = (s_{j_1})^{\pm} (s_{j_2})^{\pm} \ldots (s_{j_k})^{\pm}.$$

Es claro que h es un homomorfismo, por lo que solamente hace falta ver que h está bien definido, esto es, $h(\omega)$ depende solamente de la clase de equivalencia por aristas de ω. Para ver esto, es suficiente mostrar que si ω_1 y ω_2 son rutas en K que difieren tan sólo en una equivalencia por aristas elemental, entonces $h(\omega_1)h(\omega_2)$.
Sean $\omega_1 = \sigma |v_1 v_2||v_2 v_3| \tau$, $\omega_2 = \sigma |v_1 v_3| \tau$, donde σ y τ son rutas en K, y v_1, v_2, v_3 son vértices de un mismo simplejo de K. Dado que K es una gráfica y no tiene 2-simplejos, ocurre que $v_1 = v_2 = v_3$, $v_1 = v_2$, $v_2 = v_3$ ó $v_1 = v_3$. En cada uno de los primeros tres casos, al menos uno de los simplejos (v_1, v_2) y (v_2, v_3) es un 0-simplejo, y por lo tanto no es uno de los generadores (s_j), y el otro es (v_1, v_3). Así, en los primeros tres casos $h(\omega_1) = h(\omega_2)$.

Para el cuarto caso las rutas son $\omega_1 = \sigma|v_1v_2||v_2v_1|\tau$ y $\omega_2 = \sigma|v_1v_3|\tau$.
Si (v_1, v_2) no es un generador, entonces claramente $h(\omega_1) = h(\omega_2)$. Si $(v_1, v_2) = (s_j)$ para algún j, entonces $\omega_1 = \sigma s_j^{\pm} s_j^{\mp}\tau$, y por lo tanto

$$h(\omega_1) = h(\sigma)(s_j)^{\pm}(s_j)^{\mp}h(\tau) = h(\sigma)eh(\tau) = h(\sigma)h(\tau) = h(\omega_2).$$

Con lo cual en todos los casos obtenemos que $h(\omega_1) = h(\omega_2)$, por lo que h está bien definido.

Veamos ahora como construir h_1.
Dado que $\mathbb{F}_n$ es un grupo libre, es suficiente definir una función h_1' de los generadores $(s_j) = (v_j, v_j')$ en $E(K, v_0)$. Para esto, sea σ_j una ruta en T con origen v_0 y final v_j, y sea τ_j una ruta en T con origen v_0 y final v_j'. Definimos $h_1'((s_j))$ para que sea la clase de equivalencia por aristas de la ruta $\sigma_j s_j^+ \tau_j^{-1}$. El Teorema 3.4.13 nos asegura que esta definición es independiente de σ_j, pues cualquier otra ruta en T con origen v_0 y final v_j es equivalente por aristas a σ_j. Lo mismo ocurre con τ_j. Entonces, por la propiedad universal de grupos libres, podemos extender de manera única h_1' a un homomorfismo $h_1 : \mathbb{F}_n \to E(K, v_0)$.

Ahora, $h \circ h_1$ es identidad en $\mathbb{F}_n$ porque para cada generador (s_j) de $\mathbb{F}_n$ tenemos

$$(h \circ h_1)((s_j)) = h(\sigma_j s_j^+ \tau_j^{-1}) = (s_j).$$

Luego, $h_1 \circ h$ es identidad en $E(K, v_0)$ porque si $\omega = \rho_1 s_{j_1}^{\pm} \dots \rho_k s_{j_k}^{\pm} \rho_{k+1}$ es una ruta en K, entonces

$$\begin{aligned}
(h_1 \circ h)(\omega) &= h_1((s_{j_1})^{\pm}(s_{j_2})^{\pm} \dots (s_{j_k})^{\pm}) \\
&= (\sigma_{j_1} s_{j_1}^+ \tau_{j_1}^{-1})^{\pm}(\sigma_{j_2} s_{j_2}^+ \tau_{j_2}^{-1})^{\pm} \dots (\sigma_{j_k} s_{j_k}^+ \tau_{j_k}^{-1})^{\pm} \\
&= \eta_{j_1} s_{j_1}^{\pm} \eta_{j_1}' \eta_{j_2} s_{j_2}^{\pm} \eta_{j_2}' \dots \eta_{j_k} s_{j_k}^{\pm} \eta_{j_k}',
\end{aligned}$$

donde

$$\eta_{j_i} = \begin{cases} \sigma_{j_i} & \text{si } s_{j_i} \text{ aparece como } s_{j_i}^+ \\ \tau_{j_i} & \text{si } s_{j_i} \text{ aparece como } s_{j_i}^- \end{cases}$$

y

$$\eta_{j_i}' = \begin{cases} \tau_{j_i}^{-1} & \text{si } s_{j_i} \text{ aparece como } s_{j_i}^+ \\ \sigma_{j_i}^{-1} & \text{si } s_{j_i} \text{ aparece como } s_{j_i}^-. \end{cases}$$

Pero ρ_1 y η_{j_1} son ambos rutas en T de v_0 al origen de $s_{j_1}^{\pm}$, por lo que son equivalentes por aristas. De manera similar, ρ_2 y $\eta'_{j_1}\eta_{j_2}$ son ambos rutas del final de $s_{j_1}^{\pm}$ al origen de $s_{j_2}^{\pm}$, por lo que son equivalentes por aristas. continuando por inducción concluimos que $(h_1 \circ h)(\omega) \overset{E}{\simeq} \omega$, por lo que $h_1 \circ h$ es identidad en $E(K, v_0)$. $\square$

Ejemplo 3.5. Sean x_1 y x_2 puntos distintos de $\mathbb{R}^2$. Si $p \in \mathbb{R}^2 - \{x_1, x_2\}$, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{x_1, x_2\}, p)$ es isomorfo al grupo libre en dos generadores.
Consideremos la gráfica K de la Figura 3.8.

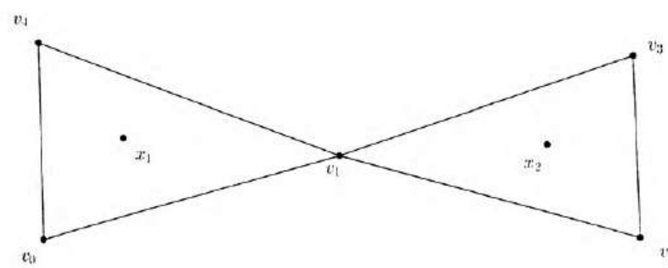

FIGURA 3.8

Entonces $\mathbb{R}^2 - \{x_1, x_2\}$ y $[K]$ son claramente del mismo tipo de homotopía. Por lo que $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{x_1, x_2\}, p) = \pi_1([K], v_0)$. Pero $\chi(K) = 5 - 6 = -1$, con lo cual $n = 1(-1) = 2$ y, por el Teorema 3.4.17, concluimos que $\pi_1([K], v_0) \cong \mathbb{F}_2$.

3.5. Implementación computacional

Una de las grandes ventajas que conlleva la teoría desarrollada a lo largo de este capítulo, es que podemos calcular fácilmente el grupo fundamental de complejos simpliciales utilizando diversos softwares matemáticos como por ejemplo SAGE, GAP, MATLAB, entre muchos otros.
Esto resulta ser muy importante debido al hecho de que todas las superficies compactas admiten triangulaciones, y que a estas triangulaciones podemos dotarlas de una estructura simplicial.

A continuación veremos un par de ejemplos que ilustran como utilizar el software SAGE para calcular el grupo fundamental de superficies conocidas.

Consideremos la siguiente triangulación del toro $\mathbb{T}$.

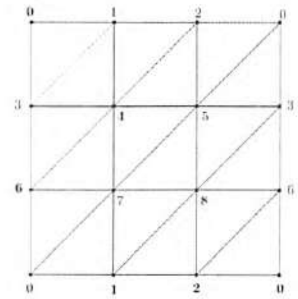

FIGURA 3.9

Como bien podemos apreciar, esta triangulación es un complejo simplicial que consta de 9 vértices, 27 1-simplejos y 18 2-simplejos.
Sin embargo, la manera de implementarlo computacionalmente se basa solamente en considerar las estructuras simpliciales maximales que lo componen. Por ello, en este caso lo único que necesitamos tomar en cuenta son los siguientes 18 2-simplejos: [0,1,3], [1,3,4], [1,2,4], [2,4,5], [2,0,5], [0,5,3], [3,4,6], [4,6,7], [4,5,7], [5,7,8], [5,3,8], [3,8,6], [6,7,0], [7,0,1], [7,8,1], [8,1,2], [8,6,2], [6,2,0].

Así, una vez identificados, no hace falta hacer nada más que introducir los datos al software, y pedirle que calcule el grupo fundamental con el comando fundamental_group() tal y como se ilustra en la Figura 3.10.

```
In [1]: Toro = SimplicialComplex([[0,1,3],[1,3,4],[1,2,4],[2,4,5],[2,0,5],[0,5,3],[3,4,6],[4,6,7],[4,5,7],[5,7,8],[5,3,8],[3,8,6],
        [6,7,0],[7,0,1],[7,8,1],[8,1,2],[8,6,2],[6,2,0]])

In [2]: Toro

Out[2]: Simplicial complex with vertex set (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) and 18 facets

In [3]: Toro.fundamental_group()

Out[3]: Finitely presented group < e0, e9 | e9*e0^-1*e9^-1*e0 >
```

FIGURA 3.10

En este caso SAGE nos dice que el grupo fundamental del toro es el grupo finitamente presentado con 2 generadores e_0, e_9, bajo la relación $e_9 e_0^{-1} e_9^{-1} e_0 = 1$, que es equivalente a la relación de conmutatividad de los generadores $e_9 e_0^{-1} = e_0^{-1} e_9$.

Lo cual quiere decir que el grupo fundamental del toro es $\pi_1(\mathbb{T}, x) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Consideremos ahora la siguiente triangulación de la casa de Bing.

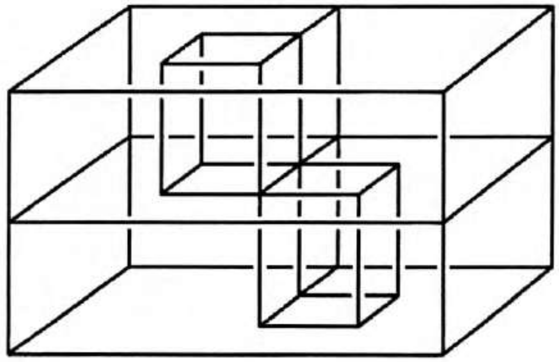

FIGURA 3.11

Introduciendo los datos necesarios obtenemos lo siguiente:

```
In [1]: Bing = SimplicialComplex([[0,1,5],[1,5,6],[1,2,6],[2,6,7],[2,3,7],[3,7,8],[3,4,8],[4,8,9],[5,6,10],[6,10,11],[7,8,12],
        [8,12,13],[8,9,13],[9,13,14],[10,11,15],[11,15,16],[11,12,16],[12,16,17],[12,13,17],[13,17,18],[13,14,18],[14,18,19],
        [20,21,25],[21,25,26],[21,22,26],[22,26,27],[22,23,27],[23,27,28],[23,24,28],[24,28,29],[25,26,30],[26,30,31],[28,29,33],
        [29,33,34],[30,31,35],[31,35,36],[31,32,36],[32,36,37],[32,33,37],[33,37,38],[33,34,38],[34,38,39],[40,41,45],[41,45,46],
        [41,42,46],[42,46,47],[42,43,47],[43,47,48],[43,44,48],[44,48,49],[45,46,50],[46,50,51],[46,47,51],[47,51,52],[48,49,53],
        [49,53,54],[50,51,55],[51,55,56],[51,52,56],[52,56,57],[52,53,57],[53,57,58],[53,54,58],[54,58,59],[20,21,0],[21,0,1],
        [21,22,1],[22,1,2],[22,23,2],[23,2,3],[23,24,3],[24,3,4],[15,16,35],[16,35,36],[16,17,36],[17,36,37],[17,18,37],
        [18,37,38],[18,19,38],[19,38,39],[20,0,25],[0,25,5],[25,5,30],[5,30,10],[30,10,35],[10,35,15],[4,24,9],[24,9,29],
        [9,29,14],[29,14,34],[14,34,19],[34,19,39],[40,41,20],[41,20,21],[41,42,21],[42,21,22],[42,43,22],[43,22,23],[43,44,23],
        [44,23,24],[35,36,55],[36,55,56],[36,37,56],[37,56,57],[37,38,57],[38,57,58],[38,39,58],[39,58,59],[40,20,45],[20,45,25],
        [45,25,50],[25,50,30],[50,30,55],[30,55,35],[24,44,29],[44,29,49],[29,49,34],[49,34,54],[34,54,39],[54,39,59],[26,27,6],
        [27,6,7],[7,27,12],[27,12,32],[11,12,31],[12,31,32],[26,6,31],[6,31,11],[47,48,27],[48,27,28],[28,48,33],[48,33,53],
        [32,33,52],[33,52,53],[47,27,52],[27,52,32],[10,11,30],[11,30,31],[28,29,48],[29,48,49]])

In [2]: Bing

Out[2]: Simplicial complex with 60 vertices and 140 facets

In [3]: Bing.fundamental_group()

Out[3]: Finitely presented group <  |  >
```

FIGURA 3.12

Lo cual quiere decir que su grupo fundamental es trivial, lo cual es correcto, pues la casa de Bing es un espacio contractible.

Capítulo 4

Espacios cubrientes

Hasta el momento hemos calculado grupos fundamentales de espacios topológicos relativamente sencillos. Ya sea de manera directa realizando todos los cálculos necesarios, como utilizando una diversidad de resultados que vinculan los grupos fundamentales de unos grupos con otros ya conocidos. Incluso hemos visto que si el espacio topológico en cuestión admite una triangulación, podemos realizar el cálculo de su grupo fundamental de manera computacional.

Pues bien, en los dos capítulos restantes daremos una pequeña introducción a la teoría de espacios cubrientes, los cuales son una herramienta más que resulta ser muy útil a la hora de calcular grupos fundamentales de espacios topológicos no triviales.

4.1. Definiciones y ejemplos

Comenzaremos por definir qué es un espacio cubriente y presentaremos una lista de ejemplos para ilustrar la gran variedad de espacios cubrientes que se pueden desprender de los espacios base.

Definición 4.1.1. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación continua y sobreyectiva entre espacios topológicos. Diremos que p es una **aplicación cubriente** si para cada punto $x \in X$, existe una vecindad abierta U de x tal que su imagen inversa se puede escribir como una unión ajena de abiertos en $\widetilde{X}$ tales que cada uno de ellos se proyecta mediante p de manera homeomorfa sobre U. Llamaremos **vecindad elemental** de x a dicho U.

Definición 4.1.2. Sea X un espacio topológico. Un **espacio cubriente** de X es un par $(\widetilde{X}, p)$ donde $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación cubriente.

Ejemplo 4.1. Sea X un espacio topológico y sea $\mathrm{Id} : X \to X$ la aplicación identidad. En este caso Id es claramente una aplicación cubriente.
En general, sea $\widetilde{X} = X \times \{1, 2, \ldots, n\}$ el espacio consistente de n copias ajenas de X. Entonces la aplicación $p : \widetilde{X} \to X$ dada por $p(x, i) = x$ para $i = 1, \ldots, n$ es una aplicación cubriente. (Ver Figura 4.1)

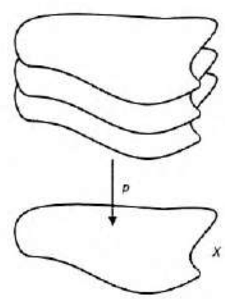

FIGURA 4.1

Espacios cubrientes como estos son considerados del tipo más trivial y proveen poca o nada de información, por lo que generalmente nos centramos más en espacios cubrientes conexos por caminos y distintos al espacio base, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$p(t) = (\mathrm{sen}(2\pi t), \cos(2\pi t))$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.
Intuitivamente vemos que p aplica cada intervalo $[n, n+1]$ sobre $\mathbb{S}^1$, es decir, p envuelve la recta real sobre la circunferencia $\mathbb{S}^1$ infinitas veces. Afirmamos entonces que $(\mathbb{R}, p)$ es un espacio cubriente de $\mathbb{S}^1$.
En efecto, consideremos $U = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y > 0\}$. Entonces el conjunto $p^{-1}(U)$ consiste en aquellos puntos $t \in \mathbb{R}$ tales que $\cos(2\pi t)$ es positivo, es decir, $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n$, donde $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$, como se muestra en la Figura 4.2. Ahora bien, la aplicación p restringida a cualquier intervalo cerrado $\overline{V_n}$, es inyectiva porque $\mathrm{sen}(2\pi t)$ es estrictamente monótona en tales intervalos. Además, $p|_{\overline{V_n}}$ es claramente sobreyectiva para cada $n \in \mathbb{Z}$. Así, dado que $\overline{V_n}$ es compacto, $p|_{\overline{V_n}}$ es un homeomorfismo entre $\overline{V_n}$ y $\overline{U}$, en particular,

$p|_{V_n}$ es un homeomorfismo entre V_n y U.

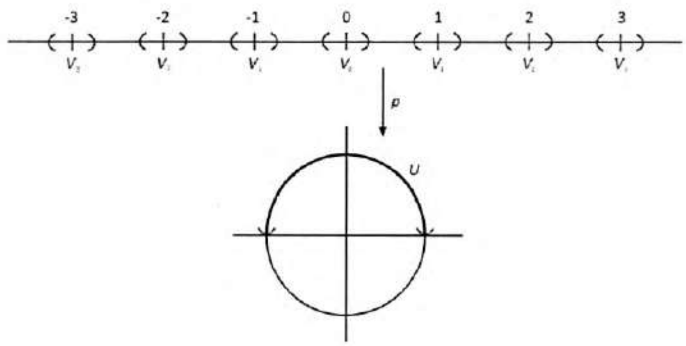

FIGURA 4.2

Aplicando un razonamiento similar a las intersecciones de $\mathbb{S}^1$ con los semiplanos abiertos inferior, izquierdo y derecho respecto al origen, obtenemos que cualquier punto de $\mathbb{S}^1$ cae en por lo menos uno de los casos y por tanto tiene una vecindad elemental, por lo que concluimos que p es una aplicación cubriente. Y por tanto $(\mathbb{R}, p)$ es un espacio cubriente de $\mathbb{S}^1$.

Ejemplo 4.3. Utilizando coordenadas polares (r, θ) en el plano cartesiano, sabemos que si fijamos $r = 1$ obtenemos la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$. Así pues, para cualquier $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ definimos la aplicación $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$p_n(1, \theta) = (1, n\theta).$$

La aplicación p_n envuelve el círculo sobre sí mismo n veces.
En efecto, dado $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ si dividimos el intervalo $[0, 2\pi]$ en $|n|$ partes iguales, obtenemos que cada subintervalo de la forma $\left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n}\right)$ con $k = 0, \ldots, n-1$ es aplicado mediante p_n sobre $\mathbb{S}^1$ de manera biyectiva. Con esto en mente, si probamos que existe una vecindad elemental U de $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$ inducida por p_n, tendremos que $(\mathbb{S}^1, p_n)$ es un espacio cubriente de $\mathbb{S}^1$. Consideremos entonces el conjunto $U = \{(1, \theta) \in \mathbb{S}^1 \mid |\theta| < \pi\}$, el cual es claramente una vecindad abierta de $(1, 0)$. (Ver Figura 4.3)
Ahora, si $n > 0$ tenemos que la imagen inversa de U es

$$p_n^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^{n} V_i$$

donde $V_i = \{(1, \theta) \in \mathbb{S}^1 \mid \left|\theta - \frac{2\pi i}{n}\right| < \frac{\pi}{n}\}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces es claro que U es una vecindad elemental de $(1, 0)$ inducida por p_n y que podemos utilizar la misma vecindad incluso si $n < 0$.

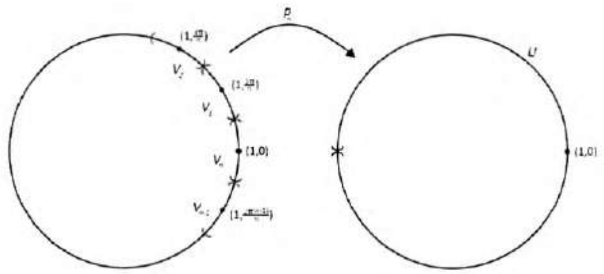

FIGURA 4.3

De la misma manera en que la conexidad, compacidad, e incluso los grupos fundamentales de espacios topológicos se preservan en espacios producto, el ser espacio cubriente no es la excepción.

Teorema 4.1.3. Si $(\widetilde{X}, p), (\widetilde{Y}, q)$ son espacios cubrientes de X y Y respectivamente, entonces $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, p \times q)$ es un espacio cubriente para $X \times Y$, donde $p \times q : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ está dada por $(p \times q)(x, y) = (p(x), q(y))$.

Demostración. Sean $x \in X$ y $y \in Y$. Sean A y B vecindades elementales de x y y respectivamente, es decir,

$$p^{-1}(A) = \bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \quad \text{y} \quad q^{-1}(B) = \bigsqcup_{\beta \in J} V_\beta,$$

donde cada U_α es abierto en $\widetilde{X}$, cada V_β es abierto en $\widetilde{Y}$ y se proyectan de manera homeomorfa sobre A o B según corresponda. De esta manera, si (x, y) es un punto de $X \times Y$, entonces $A \times B$ es una vecindad de (x, y) tal que

$$(p \times q)^{-1}(x, y)(A \times B) = \bigsqcup_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (U_\alpha \times V_\beta)$$

donde cada $U_\alpha \times V_\beta$ se aplica de manera homeomorfa sobre $A \times B$. Por lo que $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, p \times q)$ es un espacio cubriente de $X \times Y$. $\square$

Ejemplo 4.4. Consideremos el toro como el espacio producto de la circunferencia unitaria consigo misma, es decir, $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Ya vimos en el Ejemplo 4.2 que un espacio cubriente para $\mathbb{S}^1$ es $(\mathbb{R}, p)$, donde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ está dada por $p(t) = (\operatorname{sen}(2\pi t), \cos(2\pi t))$.
Entonces por el Teorema 4.1.3, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, p \times p)$ es un espacio cubriente para $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejemplo 4.5. Sea $\mathbb{RP}^2$ el plano proyectivo y sea $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ la proyección canónica dada por $p(x) = [x]$. Entonces $(\mathbb{S}^2, p)$ es un espacio cubriente de $\mathbb{RP}^2$.
Efectivamente, veamos primero que p es una función abierta, para ello tomemos un abierto cualquiera U de $\mathbb{S}^2$. La aplicación antípoda $a : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ dada por $a(x) = -x$ es claramente un homeomorfismo, por lo que $a(U)$ es abierto en $\mathbb{S}^2$.
Dado que $p^{-1}(p(U)) = U \cup a(U)$ y este conjunto también es abierto en $\mathbb{S}^2$, tenemos que $p(U)$ es, por definición, abierto en $\mathbb{RP}^2$.
Probemos ahora que p es una aplicación cubriente.
Sea $[y] \in \mathbb{RP}^2$ y tomemos algún $x \in p^{-1}[y]$. Sea B la bola de radio 1 en $\mathbb{S}^2$ centrada en x con la métrica usual de $\mathbb{R}^3$. Notemos que si z es cualquier punto en B, entonces su antípoda $-z$ no puede estar en B, ya que la distancia de cualquier punto a su antípoda es igual a 2.
Así pues, la restricción

$$p\big|_B : B \to p(B)$$

es una biyección, y como además p es una función abierta, tenemos que $p\big|_B$ es un homeomorfismo.
Análogamente, si ahora consideramos la antípoda $-x \in p^{-1}[y]$, obtenemos que la restricción

$$p\big|_{a(B)} : a(B) \to p(B)$$

es un homeomorfismo. De esta manera, $p(B)$ es un abierto en $\mathbb{RP}^2$ que contiene a $[y]$ y es tal que

$$p^{-1}(p(B)) = B \cup a(B).$$

De esto sabemos que $p(B)$ es una vecindad elemental de $[y]$, puesto que B y $a(B)$ son subconjuntos abiertos y ajenos de $\mathbb{S}^2$ tales que cada uno de se proyecta, mediante p, de manera homeomorfa sobre $p(B)$.
Y como esto es válido para cualquier $[y] \in \mathbb{RP}^2$, concluimos que $(\mathbb{S}^2, p)$ es un espacio cubriente de $\mathbb{RP}^2$.

Ejemplo 4.6. Sea S una superficie de género 2, compacta y orientable. Veamos a grandes rasgos como construir una gran variedad de espacios cubrientes para S.
Notemos que podemos ver a S como el espacio cociente de una superficie M, donde M es compacta, orientable, de género 0 y su frontera consta de 4 circunferencias C_1', C_1'', C_2' y C_2''. El mapeo natural de M en S identifica las circunferencias frontera en pares: C_i' y C_i'' se identifican en una sola circunferencia C_i mediante un homeomorfismo h_i de C_i' en C_i'' para $i = 1, 2$. También podemos pensar a M como el resultado de cortar S a través de las circunferencias C_1 y C_2, como se muestra en la Figura 4.4.

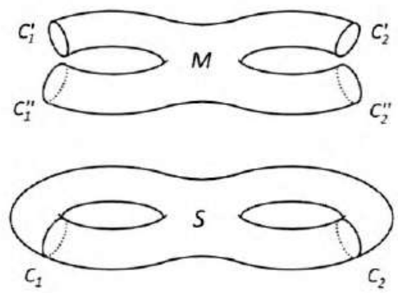

FIGURA 4.4

Sea D el conjunto finito $\{1, 2, \ldots, n\}$ con la topología discreta y sea $q : M \times D \to M$ la proyección del espacio producto sobre el primer factor. Podemos ver a $M \times D$ como el espacio consistente de n copias ajenas de M, cada una de las cuales se proyecta mediante q de manera homeomorfa sobre M.
Ahora describiremos como formar un espacio cociente a partir de $M \times D$, que será una 2-variedad conexa $\widetilde{S}$ y tal que q va a inducir un mapeo $p : \widetilde{S} \to S$ de espacios cocientes, es decir, tendremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \times D \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & \widetilde{S} \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Resultará entonces que $(\widetilde{S}, p)$ es un espacio cubriente de S. La identificación con la que conseguiremos $\widetilde{S}$ a partir de $M \times D$, es de la siguiente manera: La circunferencia $C_i' \times \{j\}$

se identifica con la circunferencia $C_i'' \times \{k\}$ mediante un homeomorfismo que manda el punto (x, j) al punto $(h_i(x), k)$ donde i es 1 ó 2, y j, k son enteros positivos menores que n. Podemos realizar esta identificación de circunferencias en pares de varias maneras distintas, siempre y cuando obtengamos un espacio $\widetilde{S}$ que sea conexo.

Por ejemplo, para $n = 3$, podríamos obtener una superficie $\widetilde{S}$ como se muestra en la Figura 4.5 al realizar las identificaciones de la siguiente manera:

1.- $C_1' \times \{1\}$ con $C_1'' \times \{2\}$,
2.- $C_1' \times \{2\}$ con $C_1'' \times \{3\}$,
3.- $C_1' \times \{3\}$ con $C_1'' \times \{1\}$,
4.- $C_2' \times \{1\}$ con $C_2'' \times \{2\}$,
5.- $C_2' \times \{2\}$ con $C_2'' \times \{1\}$,
6.- $C_2' \times \{3\}$ con $C_2'' \times \{3\}$.

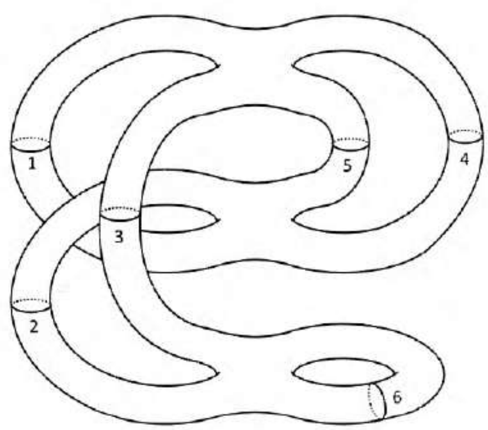

FIGURA 4.5

Ejemplo 4.7. Sea X el subconjunto del plano que consiste de 2 circunferencias tangentes en un punto, es decir, $X = C_1 \cup C_2$ donde

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\},$$
$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Esta vez daremos dos ejemplos diferentes de espacios cubrientes de X.

Para el primer ejemplo consideremos $\widetilde{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$. Gráficamente $\widetilde{X}$ es la unión de rectas verticales y horizontales. Definamos en este caso $p : \widetilde{X} \to X$ por

$$p(x,y) = \begin{cases} (1+\cos(\pi - 2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) & si\ y \in \mathbb{Z}\ , \\ (-1+\cos(2\pi y), \operatorname{sen}(2\pi y)) & si\ x \in \mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

La aplicación p envuelve cada recta horizontal alrededor de la circunferencia C_1, y cada recta vertical alrededor de la circunferencia C_2, por lo que $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X. (Ver Figura 4.6)

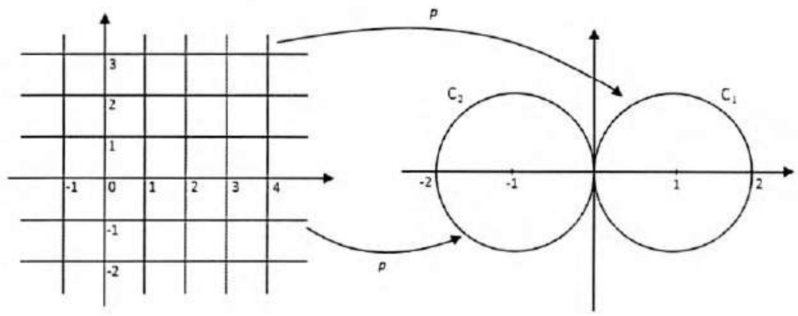

FIGURA 4.6

Para el segundo ejemplo consideremos los círculos $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y-3n)^2 = 1\}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, y sea $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. Todas las circunferencias D_n son ajenas entre sí, y cada una de ellas es tangente a L. Consideramos entonces $\widetilde{X}' = L \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D_n)$, y a $p' : \widetilde{X}' \to X$ de tal manera que p' aplica cada circunferencia D_n sobre C_1 mediante una traslación vertical apropiada, y aplica a la recta L alrededor de C_2 mediante $p'(0,y) = \left(-1+\cos(\frac{2\pi y}{3}), \sin(\frac{2\pi y}{3})\right)$. (Ver Figura 4.7)
De esta manera $(\widetilde{X}', p')$ es un espacio cubriente de X.

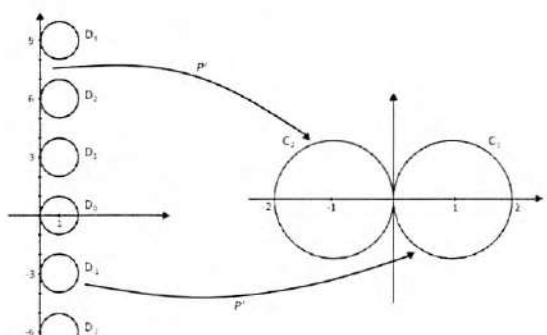

FIGURA 4.7

Definición 4.1.4. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Diremos que f es un homeomorfismo local si cada punto x de X tiene una vecindad abierta V tal que $f(V)$ es abierto, y la restricción $f\big|_V : V \to f(V)$ es un homeomorfismo.

Ejemplo 4.8. La aplicación $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$p(t) = (\operatorname{sen}(2\pi t), \cos(2\pi t))$$

es un homeomorfismo local, pero no es una aplicación cubriente.

El punto $x_0 = (1, 0)$ no tiene ninguna vecindad elemental U. Esto se debe a que como vimos en el Ejemplo 4.2, las vecindades de x_0 tienen una imagen inversa que consiste de vecindades V_n para cada $n \in \mathbb{Z}$, y en este caso, la vecindad correspondiente a V_0 es de la forma $(0, \delta)$, como se muestra en la Figura 4.8. De esta manera, cada V_n para $n > 0$, $p|_{V_n}$ es un homeomorfismo, pero en el caso $n = 0$ tenemos solamente que $p(V_0) \subset U$.

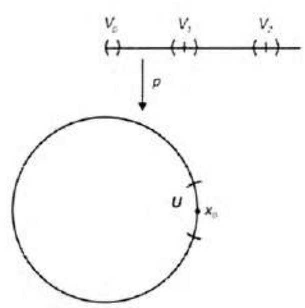

FIGURA 4.8

Teorema 4.1.5. Sea $(\widetilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, sea A un subconjunto de X conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Si $\widetilde{A}$ es una componente conexa por caminos de $p^{-1}(A)$, entonces $(\widetilde{A}, p\big|_{\widetilde{A}})$ es un espacio cubriente de A.

Demostración. Como p es una aplicación cubriente, dado $a_0 \in A$, existe una vecindad abierta $U \subset X$ de a_0 tal que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha$, donde cada V_α es un abierto en $\widetilde{X}$ y la restricción $p|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo.
Entonces $U \cap A$ es un abierto en A que contiene a a_0 y es tal que $p^{-1}(U \cap A) = \bigsqcup_{\alpha \in I} (V_\alpha \cap \widetilde{A})$, donde cada $V_\alpha \cap \widetilde{A}$ es abierto en $\widetilde{A}$ y se aplica de manera homeomorfa sobre $U \cap A$.

□

4.2. Levantamiento de caminos hacia un espacio cubriente

Si bien queremos ver como se relacionan los grupos fundamentales de un espacio topológico X con sus diversos espacios cubrientes, necesitamos una manera de poder llevar información del espacio base X a los cubrientes, o bien, de los cubrientes al espacio base. Para conseguir esto, comenzaremos por ver como "levantar" caminos del espacio base a los espacios cubrientes. Esto nos abrirá camino para ver qué ocurre con homotopías y posteriormente cualquier función continua.

Definición 4.2.1. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una función continua. Si $f : Z \to X$ es una función continua, un **levantamiento** de f es una función continua $\widetilde{f} : Z \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$

En particular, si $Z = [0,1]$ y $\gamma : [0,1] \to X$ es un camino, entonces $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \widetilde{X}$ es un **levantamiento de caminos**.

Lema 4.2.2. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación cubriente, Z un espacio conexo y $f : Z \to X$ una función continua. Dados $z_0 \in Z, x_0 \in X, \widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ tales que $f(z_0) = p(\widetilde{x}_0) = x_0$, si f tiene un levantamiento $\widetilde{f}$ tal que $\widetilde{f}(z_0) = \widetilde{x}_0$, entonces $\widetilde{f}$ es único.

Demostración. Supongamos que $\widetilde{f}' : Z \to \widetilde{X}$ es otro levantamiento de f tal que $\widetilde{f}'(z_0) = \widetilde{x}_0$. Consideremos el conjunto $Z' = \{z \in Z \mid \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}'(z)\}$. Este conjunto es no vacío pues el punto z_0 pertenece a Z'.
Demostraremos que Z' es un subconjunto abierto y cerrado de Z, con lo cual dado que Z es conexo y Z' es no vacío, tendremos que $Z' = Z$. Veamos primero que Z' es abierto. Sea $z_1 \in Z$ tal que $\widetilde{f}(z_1) = \widetilde{f}'(z_1) = \widetilde{x}_1$. Sea U una vecindad abierta de $\widetilde{x}_1$ en $\widetilde{X}$ tal que $p|_U : U \to V$ es un homeomorfismo, donde $V \subset X$.
Entonces el conjunto $W = \widetilde{f}^{-1}(U) \cap \widetilde{f}'^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ está contenido en Z' y contiene al punto z_1. Luego, como W es abierto y z_1 abitrario, Z' es abierto.
Veamos ahora que Z' es cerrado, y para ello consideremos $Z - Z' = \{z \in Z \mid \widetilde{f}(z) \neq \widetilde{f}'(z)\}$. Sean $z_1 \in Z - Z'$ y $x_1 = f(z_1)$.
Como p es una aplicación cubriente, x_1 tiene una vecindad abierta U tal que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ donde cada V_α es un abierto en $\widetilde{X}$. Luego, como $z_1 \in Z - Z'$, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, con $\alpha_1 \neq \alpha_2$ tales que $\widetilde{f}(z_1) \in V_{\alpha_1}$ y $\widetilde{f}'(z_1) \in V_{\alpha_2}$, es decir, $z_1 \in \widetilde{f}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \widetilde{f}'^{-1}(V_{\alpha_2})$. De esta manera, $Z - Z'$ es abierto, por lo que Z' es cerrado.
Así, como Z' es abierto y cerrado en Z, concluimos por conexidad de Z que $Z' = Z$, lo que implica que $\widetilde{f} = \widetilde{f}'$. $\square$

Teorema 4.2.3. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación cubriente y sea $\gamma : [0,1] \to X$ un camino de x_0 a x_1. Dado un punto $\widetilde{x}_0$ de $\widetilde{X}$ tal que $p(\widetilde{x}_0) = x_0$, existe un único camino $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \widetilde{X}$ con punto inicial $\widetilde{x}_0$ tal que es un levantamiento de γ, es decir, $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}$.

Demostración. La unicidad la hemos probado en el lema anterior. Veamos entonces que el levantamiento existe, y para ello lo definiremos por partes.
Primeramente notemos que, como $[0,1]$ es compacto y γ es un camino, entonces $\gamma([0,1])$ es compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\gamma([0,1])$ dada por vecindades elementales inducidas por p. Entonces existe una subcolección $\{U_1, \dots, U_n\}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\gamma([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, por lo que el conjunto $\{\gamma^{-1}(U_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ es una cubierta abierta para $[0,1]$.
Por el Lema 1.4.6 existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ del intervalo $[0,1]$ de tal manera que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.
Definimos entonces $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \widetilde{X}$ de la siguiente manera:
Sea $S_1 : U_1 \to \widetilde{X}$ tal que $S(x_0) = \widetilde{x}_0$ y $p \circ S_1 = \mathrm{Id}_{U_1}$, dada por

$$\widetilde{\gamma}\mid_{[t_0, t_1]}(t) = S_1(\gamma(t)),$$

Luego, sea $S_2 : U_2 \to \widetilde{X}$ tal que $S_2(\gamma(t_1)) = S_1(\gamma(t_1))$ y $p \circ S_2 = \mathrm{Id}_{U_2}$, dada por

$$\widetilde{\gamma}\mid_{[t_1, t_2]}(t) = S_2(\gamma(t)).$$

Procediendo inductivamente construimos el resto de $\widetilde{\gamma}$:
Para cada $i = 1, \dots, n$ definimos $S_i : U_i \to \widetilde{X}$ tal que $S_i(\gamma(t_{i-1})) = S_{i-1}(\gamma(t_{i-1}))$ y $p \circ S_i = \mathrm{Id}_{U_i}$, dada por

$$\widetilde{\gamma}\mid_{[t_{i-1}, t_i]}(t) = S_i(\gamma(t)).$$

De esta manera, por el Lema 1.1.2 tenemos que $\widetilde{\gamma}$ es un camino en $\widetilde{X}$ que comienza en $\widetilde{x}_0$ y es tal que $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}$. □

De la misma manera que definimos un levantamiento de caminos, proseguimos a definir un levantamiento de homotopías.

Definición 4.2.4. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una función continua y $h : Z \times I \to X$ una homotopía. Sea $f : Z \to X$ una función continua tal que $f(z) = h(z, 0)$ para toda $z \in Z$. Diremos que p tiene la **propiedad de levantamiento de homotopías con unicidad** si existe una única homotopía $\widetilde{h} : Z \times I \to \widetilde{X}$ tal que $h = p \circ \widetilde{h}$ y $\widetilde{h}(z, 0) = \widetilde{f}(z)$ para toda $z \in Z$, donde $\widetilde{f}$ es levantamiendo de f.

Teorema 4.2.5. Si $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación cubriente, entonces tiene la propiedad de levantamiento de homotopías con unicidad.

Demostración. Sea $h : Z \times I \to X$ una homotopía, sea $f : Z \to X$ tal que $f(z) = h(z, 0)$ para toda $z \in Z$ y $\widetilde{f} : Z \to \widetilde{X}$ levantamiento de f.
Para cada $z_0 \in Z$ la función $\gamma_{z_0} : I \to X$ dada por $\gamma_{z_0}(t) = h(z_0, t)$ para cada $t \in I$ es un camino en X. Así, por la propiedad de levantamiento de caminos, existe un único camino $\widetilde{\gamma}_{z_0} : I \to \widetilde{X}$ tal que $p(\widetilde{\gamma}_{z_0}(t)) = \gamma(t)$, y $\widetilde{\gamma}_{z_0}(0) = \widetilde{f}(z_0)$.
Definimos entonces $\widetilde{h} : Z \times \widetilde{X}$ dada por $\widetilde{h}(z,t) = \widetilde{\gamma}_z(t)$ para toda $z \in Z$ y todo $t \in I$.
Veamos que $\widetilde{h}$ es continua, para lo cual, dado $(z_0, t) \in Z \times I$ es suficiente encontrar una vecindad abierta U de (z_0, t) tal que $\widetilde{h}\big|_U$ es continua.
Sea (z_0, t) un punto cualquiera de $Z \times I$. Como p es un homeomorfismo local, existe una vecindad abierta V_t de $\widetilde{h}(z_0, t)$ tal que la restricción $p\big|_{V_t} : V_t \to p(V_t)$ es un homeomorfismo. Entonces $W = h^{-1}(p(V_t))$ es un abierto en $Z \times I$ que contiene a (z_0, t), y además es tal que

$$\widetilde{h}\big|_W = \left(p\big|_{V_t}\right)^{-1} \circ h\big|_W,$$

y dado que h y $p\big|_{V_t}$ son continuas, $\widetilde{h}\big|_W$ también lo es. Y como esto lo podemos asegurar para cualquier (z_0, t), concluimos que $\widetilde{h}$ es continua. □

Los levantamientos los hemos definido en base a que, si x_0 es el punto donde inicia un camino en el espacio X, entonces para cada punto $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, existe un único levantamiento que inicia en $\widetilde{x}$.
Viéndolo así, una pregunta natural es que si α y β son dos caminos distintos que comienzan en x_0 y terminan en algún punto x_1, entonces, ¿los levantamientos correspondientes $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ con punto inicial $\widetilde{x}_0$, terminan también sobre un mismo punto $\widetilde{x}_1$?.
El siguiente lema nos ayudará a responder esta inquietud.

Lema 4.2.6. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un aplicación cubriente y sean $\alpha, \beta : I \to X$ caminos de x_0 a x_1 tales que $[\alpha] = [\beta]$. Dado $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, sean $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : I \to \widetilde{X}$ los únicos levantamientos de α y β respectivamente, tales que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0) = \widetilde{x}_0$. Entonces los puntos finales de ambos levantamientos coinciden, es decir, $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$.

Demostración. Sea $h : I \times I \to X$ una homotopía tal que

$$\begin{matrix} h(s,0) = \alpha(s) \\ h(s,1) = \beta(s) \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} h(0,t) = x_0 \\ h(1,t) = x_1 \end{matrix}$$

Por la propiedad de levantamiento de homotopía, existe una única homotopía $\widetilde{h} : I \times I \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{h} = h$ y $\widetilde{h}(0,t) = \widetilde{\alpha}(t)$.
Como $\widetilde{h}$ es una homotopía, la función $\widetilde{h}(1,-) : I \to p^{-1}(x_1)$ es continua. Más aún, como $p^{-1}(x_1)$ es un conjunto discreto, tenemos que $\widetilde{h}(1,-)$ es una función constante y sabemos que $\widetilde{h}(1,0) = \widetilde{\alpha}(1)$ y $\widetilde{h}(1,1) = \widetilde{\beta}(1)$. Por lo tanto $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$. □

El lema anterior, al ser muy importante, es comúnmente conocido como **lema de monodromía**.

Lema 4.2.7. Si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X, entonces el conjunto $p^{-1}(x)$ tiene la misma cardinalidad para cualquier $x \in X$.

Demostración. Sean x_0 y x_1 dos puntos cualesquiera de X, y sea $F : I \to X$ un camino de x_0 a x_1. Utilizando este camino podemos definir una aplicación $p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$ de la siguiente manera: dado cualquier punto $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, existe un único levantamiento $\widetilde{f}$ de f con punto inicial $\widetilde{x}_0$, llamemos $\widetilde{x}_1$ al punto final de $\widetilde{f}$, entonces $\widetilde{x}_0 \to \widetilde{x}_1$ es el mapeo deseado.
Utilizando el camino inverso $\overline{f}(t) = f(1-t)$, podemos definir de manera análoga un mapeo $p^{-1}(x_1) \to p^{-1}(x_0)$.
Es claro que estos mapeos son inversos entre sí, es decir, son biyectivos.

□

Capítulo 5

Propiedades de espacios cubrientes

Teorema 5.0.1. Si $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación cubriente, $x_0 \in X$ y $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, entonces el homomorfismo inducido $p_\# : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo.

Demostración. Probaremos que $p_\#$ tiene kernel trivial. Sea $\widetilde{\gamma} : I \to \widetilde{X}$ un lazo basado en $\widetilde{x}_0$ tal que $p_\#[\widetilde{\gamma}] = [\mathcal{E}_{x_0}]$, esto es, $[p \circ \widetilde{\gamma}] = [\mathcal{E}_{x_0}]$.
Sea $h : I \times I \to X$ una homotopía entre $p \circ \widetilde{\gamma}$ y $\mathcal{E}_{x_0}$ relativa a $\{0, 1\}$.
Entonces dado que p es cubriente, por la propiedad de levantamiento de homotopía, existe una única homotopía $\widetilde{h} : I \times I \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{h} = h$ y $\widetilde{h}(0, 0) = \widetilde{x}_0$.
Así, por el Lema 4.2.6 tenemos que $[\widetilde{\gamma}] = [\mathcal{E}_{\widetilde{x}_0}]$. $\square$

Este teorema nos lleva directamente a la siguiente pregunta: supongamos que $\widetilde{x}_0$ y $\widetilde{x}_1$ son puntos de $\widetilde{X}$ tales que $p(\widetilde{x}_0) = p(\widetilde{x}_1) = x_0$. ¿Qué relación guardan las imágenes de los siguientes homomorfismos inducidos por p?

$$p_\# : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0),$$
$$p_\# : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) \to \pi_1(X, x_0).$$

La respuesta es simple, al elegir una clase $[\gamma]$ de caminos de $\widetilde{x}_0$ a $\widetilde{x}_1$ en $\widetilde{X}$, obtenemos un isomorfismo $u : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ dado por $u[\alpha] = [\overline{\gamma} * \alpha * \gamma]$, con el cual tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \arrow[r, "p_\#"] \arrow[d, "u"] & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "v"] \\
\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) \arrow[r, "p_\#"] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}
$$

Aquí, $v[\beta] = [\overline{(p_\#[\gamma])} * \beta * (p_\#[\gamma])]$. Pero $p_\#[\gamma]$ es un lazo en X, y por lo tanto un elemento de $\pi_1(X, x_0)$. Por lo que podemos ver que las imágenes de $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ y $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ bajo $p_\#$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$.

Después, surge la siguiente pregunta, ¿podemos obtener cada subgrupo en la clase de conjugación del subgrupo $p_\#(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ como la imagen $p_\#(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1))$, para algún punto $\widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$? La respuesta es sí. Para ver esto, notemos que cualquier subgrupo en esta clase de conjugación es de la forma $[\overline{\alpha}] * [p_\#(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))] * [\alpha]$ para algún elemento $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Elegimos un representante $f : I \to X$ de la clase $[\alpha]$. Por el Teorema 4.2.3 existe un único levantamiento $g : I \to \widetilde{X}$ de f que comienza en $\widetilde{x}_0$. Sea $\widetilde{x}_1$ el punto final de g. Entonces

$$p_\#(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)) = [\overline{\alpha}] * [p_\#(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))] * [\alpha].$$

Podemos resumir lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 5.0.2. Sea $(\widetilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X y sea $x_0 \in X$. Entonces los subgrupos $p_\#(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$, para $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, son exactamente una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$.

Ya vimos en el Capítulo 4 algo acerca del levantamiento de caminos en X hacia un espacio cubriente $\widetilde{X}$. Ahora veremos el problema análogo para funciones de cualquier espacio Z en X. Por cuestiones de comodidad y claridad, utilizaremos la siguiente notación: si X y Z son espacios topológicos, $x \in X$ y $z \in Z$, entonces la notación $f : (X, x) \to (Z, z)$ quiere decir que f es una función continua de X en Z tal que $f(x) = z$. Con esto en mente podemos plantear nuestra principal pregunta de la siguiente manera.
Sea $(\widetilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$, $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$, $z_0 \in Z$ y $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ una función continua. ¿Bajo qué condiciones existe una función $\widetilde{f} : (Z, z_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Z, z_0) \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

es conmutativo?

Es sencillo encontrar una condición necesaria para la existencia de dicho levantamiento $\widetilde{f}$ si tomamos en consideración los grupos fundamentales de los espacios involucrados. Si suponemos que $\widetilde{f}$ existe, entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo de grupos y homomorfismos

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \arrow[d, "p_\#"] \\ \pi_1(Z, z_0) \arrow[ur, "\widetilde{f}_\#"] \arrow[r, "f_\#"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

Como por el Teorema 5.0.1 $p_\#$ es un monomorfismo, la existencia de un homomorfismo $\widetilde{f}_\# : \pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ que haga el diagrama conmutativo, es exactamente equivalente a la condición de que la imagen de $f_\#$ esté contenida en la imagen de $p_\#$.
Esta es la condición que estabamos buscando, y lo sorprendente es que es una condición necesaria y suficiente como veremos a continuación.

Teorema 5.0.3. Sean $X, \widetilde{X}$ y Z espacios topológicos con Z localmente conexo por caminos. Sean $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ una aplicación cubriente y $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ una función continua.
Entonces f admite un único levantamiento $\widetilde{f} : (Z, z_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ si, y sólo si $f_\#(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_\#(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.

Demostración. Supongamos primero que f admite un único levantamiento $\widetilde{f}$.
Como $\widetilde{f}$ es un levantamiento, se cumple que $p \circ \widetilde{f} = f$, y pasando a los homomorfismos inducidos obtenemos

$$f_\#(\pi_1(Z, z_0)) = (p \circ \widetilde{f})_\#(\pi_1(Z, z_0)) = p_\#(\widetilde{f}_\#(\pi_1(Z, z_0))).$$

Además es claro que $\widetilde{f}_{\#}(\pi_1(Z, z_0)) \subset \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, por lo que aplicando el homomorfismo $p_{\#}$ obtenemos $p_{\#}(\widetilde{f}_{\#}(\pi_1(Z, z_0))) \subset p_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, x_0))$, o lo que es lo mismo

$$f_{\#}(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)).$$

Recíprocamente, supongamos ahora que $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ es una función continua tal que $f_{\#}(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ y veamos como construir el levantamiento $\widetilde{f}$ de f.
Dado que Z es conexo por caminos, para cada $z \in Z$ podemos encontrar un camino $g_z : I \to Z$ que comience en z_0 y termine en z. Luego, como f es una función continua, $f \circ g_z$ es un camino en X de x_0 a $f(z)$, por lo que existe un único levantamiento $\widetilde{f \circ g_z} : I \to \widetilde{X}$ de $f \circ g_z$ tal que $p \circ (\widetilde{f \circ g_z}) = f \circ g_z$ y $(\widetilde{f \circ g_z})(0) = \widetilde{x}_0$.
Definamos entonces la función $\widetilde{f} : Z \to \widetilde{X}$ dada por $\widetilde{f}(z) = (\widetilde{f \circ g_z})(1)$ para cada $z \in Z$.
Dicho de otra manera, a cada $z \in Z$ le asociamos el punto final del levantamiento $\widetilde{f \circ g_z}$.
Veamos que $\widetilde{f}$ está bien definida, es decir, que $\widetilde{f}(z)$ no depende de la elección del camino g_z. Para ello consideremos que $h_z : I \to Z$ es otro camino de z_0 a z, tal que las clases de equivalencia $[g_z]$ y $[h_z]$ son distintas. Notemos que dado que h_z y g_z comparten puntos inicial y final, el camino $g_z * \overline{h}_z$ es un lazo en Z basado en z_0, por lo que la clase de equivalencia $[g_z * \overline{h}_z]$ es un elemento de $\pi_1(Z, z_0)$; y por hipótesis $f_{\#}[g_z * \overline{h}_z] \in p_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$, o lo que es lo mismo, $[f \circ g_z] * [f \circ \overline{h}_z] \in p_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.
El levantamiento del lazo $(f \circ g_z) * (f \circ \overline{h}_z)$ es un lazo en $\widetilde{X}$ basado en $\widetilde{x}_0$, lo que nos dice que los levantamientos $\widetilde{f \circ g_z}$ y $\widetilde{f \circ h_z}$ que comienzan en $\widetilde{x}_0$ tienen el mismo punto final, concluyendo así que $\widetilde{f}$ está bien definida.
Ahora veamos que $\widetilde{f}$ es continua.
Sea $z \in Z$ y sea U una vecindad abierta de $\widetilde{f}(z)$. Elijamos una vecindad elemental U' de $p(\widetilde{f}(z)) = f(z)$ tal que $U' \subset p(U)$. Llamemos V a la componente de $p^{-1}(U')$ que contiene a $\widetilde{f}(z)$ y tomemos una vecindad elemental U'' de $f(z)$ tal que $U'' \subset p(U \cap V)$. Denotemos por B a la componente de $p^{-1}(U'')$ que está contenida en $U \cap V$. Como f es continua y Z es localmente conexo por caminos, podemos elegir una vecindad W conexa por caminos de z tal que $f(W) \subset U''$.
Sea w un punto cualquiera de W, $\gamma : I \to W$ un camino que comience en z y termine en w, y sea $h : I \to Z$ un camino que comience en z_0 y termine en z.
Puesto que $p \circ (\widetilde{f \circ \gamma}) = f \circ \gamma$ y $f \circ \gamma$ es un camino en B, notamos que el levantamiento de $f \circ \gamma$ debe coincidir con $\left((p|_B)^{-1} \circ f\right) \circ \gamma$.
Luego, por la unicidad de levantamiento de caminos, el punto final del levantamiento de $f \circ (h * \gamma)$ debe coincidir con $(p|_B)^{-1}(f(w))$, es decir, tenemos que

$$\widetilde{f}(w) = (\widetilde{f \circ (h * \gamma)})(1) = (p|_B)^{-1}(f(w)) = \left((p|_B)^{-1} \circ f\right)(w).$$

Y dado que esto es válido para cualquier $w \in W$, siempre se cumple que

$$\widetilde{f}|_W = (p|_B)^{-1} \circ f|_W.$$

Así, $\widetilde{f}|_W$ es continua, pues f es continua y $p|_B$ es un homeomorfismo.
Mas aún, como este razonamiento es válido para cualquier $z \in Z$ y W depende de z, concluimos que $\widetilde{f}$ es continua. $\square$

Este teorema es una bella ilustración de la estrategia general utilizada en topología algebraica: un problema puramente topológico, como lo es en este caso la existencia de una función continua satisfaciendo ciertas condiciones, es reducido a un problema puramente algebraico.

Para concluir, veremos a continuación algunas definiciones y resultados sobre espacios cubrientes que son de gran utilidad para conseguir más información sobre los distintos espacios cubrientes de un espacio topológico X.

Definición 5.0.4. Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ espacios cubrientes de X. Un **homomorfismo de espacios cubrientes** es una aplicación continua $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

De esta definición se desprende inmediatamente que si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio cubriente para X, entonces el mapeo identidad $\mathrm{Id}_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ es un homomorfismo de espacios cubrientes.

Definición 5.0.5. Un homomorfismo φ de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$ es llamado **isomorfismo de espacios cubrientes** si existe un homomorfismo ϕ de $(\widetilde{X}_2, p_2)$ en $(\widetilde{X}_1, p_1)$ tal que las composiciones $\phi \circ \varphi$ y $\varphi \circ \phi$ son las identidades en sus respectivos espacios. Diremos que dos espacios cubrientes son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos. Llamaremos **automorfismo de espacios cubrientes** a un isomorfismo de un espacio cubriente sobre sí mismo.

Notemos que un homomorfismo de espacios cubrientes es un isomorfismo si y sólo si es un homeomorfismo.
El conjunto de todos los automorfismos de un espacio cubriente $(\widetilde{X}, p)$ es claramente un grupo con la operación de composición de funciones. Denotamos a este grupo por $A(\widetilde{X}, p)$.

El siguiente lema es un caso especial del Lema 4.2.2.

Lema 5.0.6. Sean φ_0 y φ_1 homomorfismos de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$. Si existe algún punto $x \in \widetilde{X}_1$ tal que $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$, entonces $\varphi_0 = \varphi_1$.

En particular, si $\varphi_0 = \varphi$ es un automorfismo y $\varphi_1 = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}}$ es la identidad en $\widetilde{X}$, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.0.7. El grupo $A(\widetilde{X}, p)$ opera sin puntos fijos en el espacio $\widetilde{X}$, es decir, si $\varphi \in A(\widetilde{X}, p)$ y φ no es el homomorfismo identidad, entonces φ no tiene puntos fijos.

El siguiente lema es un caso especial del Teorema 5.0.3.

Lema 5.0.8. Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ espacios cubrientes de X, y sean $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$, $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$, puntos tales que $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$. Entonces existe un homomorfismo φ de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$ tal que $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ si y sólo si

$$p_{1\#}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) \subset p_{2\#}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)).$$

El próximo corolario es una consecuencia directa del Lema 5.0.8, la definición de isomorfismo, y el Corolario 5.0.7.

Corolario 5.0.9. Bajo las hipótesis del Lema 5.0.8, existe un isomorfimo φ de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$ tal que $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ si y sólo si

$$p_{1\#}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = p_{2\#}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)).$$

Corolario 5.0.10. Sea $(\widetilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X y $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$, donde $x_0 \in X$. Entonces existe un automorfismo $\varphi \in A(\widetilde{X}, p)$ tal que $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ si y sólo si

$$p_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)) \subset p_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_2)).$$

El siguiente teorema muestra que las clases de conjugación de subgrupos mencionadas en el Teorema 5.0.2 determinan completamente un espacio cubriente hasta isomorfismos.

Teorema 5.0.11. Dos espacios cubrientes $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ de X son isomorfos si y sólo si para cualquier par de puntos $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ y $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$ tales que $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2) = x_0$, los subgrupos $p_{1\#}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1))$ y $p_{2\#}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$ pertenecen a la misma clase de conjugación en $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Este resultado se sigue directamente del Corolario 5.0.9 y el Teorema 5.0.2. □

Lema 5.0.12. Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ espacios cubrientes de X, y sea φ un homomorfismo del primer espacio cubriente en el segundo. Entonces $(\widetilde{X}_1, \varphi)$ es un espacio cubriente de $\widetilde{X}_2$.

Demostración. Veamos que φ es sobreyectiva.
Sea y un punto de $\widetilde{X}_2$. Tomemos $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ arbitrario, y sean $\widetilde{x}_2 = \varphi(\widetilde{x}_1)$, $x_0 = p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$. Elijamos un camino f en $\widetilde{X}_2$ que comience en $\widetilde{x}_2$ y termine en y. Entonces $g = p_2 \circ f$ es un camino en X que comienza en $p_2(\widetilde{x}_2) = x_0$ y termina en $p_2(y)$. Como p_1 es cubriente, existe un único camino h en $\widetilde{X}_1$ con punto inicial $\widetilde{x}_1$ tal que $p_1 \circ h = g$; llamemos x al punto final de h. Dado que $\varphi \circ h$ y f tienen el mismo punto inicial y $p_2(\varphi \circ h) = g = p_2 \circ f$, concluimos por la unicidad del levantamiento que $\varphi \circ h = f$. Es decir, $\varphi(x) = y$, por lo que φ es sobreyectiva.
Veamos ahora que φ es cubriente.
Primero que nada, notemos que para cualquier punto x de X existe una vecindad localmente conexa por caminos U que sirve como vecindad elemental para ambos espacios cubrientes. Podemos obtener dicha vecindad simplemente considerando vecindades elementales U_1 y U_2 de x para $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ respectivamente, y entonces elegimos U de tal manera que sea conexo por caminos, contenga a x y $U \subset U_1 \cap U_2$.
Así, sea $z \in \widetilde{X}_2$ y sea U una vecindad localmente conexa por caminos de $x = p_2(z)$ tal que es elemental para los dos espacios cubrientes, y llamemos W a la componente de $p_2^{-1}(U)$ que contiene a z. Entonces W es una vecindad elemental para z, y por lo tanto φ es cubriente. □

Sea $(\widetilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X tal que $\widetilde{X}$ es simplemente conexo. Si $(\widetilde{X}', p')$ es cualquier otro espacio cubriente de X, entonces por el Lema 5.0.8, existe un homomorfismo φ de $(\widetilde{X}, p)$ en $(\widetilde{X}', p')$, y por el Lema 5.0.12, $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de $\widetilde{X}'$. Es decir, $\widetilde{X}$ puede ser un espacio cubriente para cualquier otro espacio cubriente de X. Por esta razón, un espacio cubriente simplemente conexo es llamado **espacio cubriente universal**. Más aún, el Teorema 5.0.11 nos asegura que cualquier par de espacios cubrientes universales de X son isomorfos.

Apéndice A

Teorema de Tychonoff

El teorema de Tychonoff establece que el producto de espacios compactos, es compacto en la topología producto. Es un teorema fundamental en topología y en matemáticas en general, por lo que presentaremos aquí las principales ideas para su demostración.

La demostración del teorema de Tychonoff se basa principalmente en el siguiente teorema.

Teorema A.1. Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si cada colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos cerrados en X que tiene la propiedad de la intersección finita cumple que $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset$.

Demostración. Ver [1], páginas 169-170. $\square$

Lo primero que haremos será analizar un poco como funciona este resultado en espacios producto, para lo cual consideremos el producto de dos espacios compactos $X_1 \times X_2$, y supongamos que $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos cerrados de $X_1 \times X_2$ que tiene la propiedad de intersección finita.
Ahora, considerando la proyección $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ dada por $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$, es claro que la colección $\{\overline{\pi_1(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$ de subconjuntos de X_1 tiene la propiedad de intersección finita y por ello, como X_1 es compacto, se cumple además que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{\pi_1(A)} \neq \emptyset$. De manera análoga obtenemos que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{\pi_2(A)} \neq \emptyset$, donde π_2 es la proyección sobre X_2.

Entonces, si elegimos dos puntos $x_1 \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{\pi_1(A)}$ y $x_2 \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{\pi_2(A)}$, lo que esperaríamos que ocurriera es que el producto de ambos puntos se encuentre en la intersección de todos los subconjuntos A, es decir, $(x_1, x_2) \in \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A$. Desafortunadamente esto no siempre ocurre como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo A.2. Sean $X_1 = X_2 = [0,1]$ y sea $\mathcal{A}$ la colección de todas las regiones elípticas cerradas contenidas en $[0,1] \times [0,1]$ cuyos focos son los puntos $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $q = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$. Notemos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita pues $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} \overline{\pi_1(A)} = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ y $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} \overline{\pi_2(A)} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.
Además, es claro que puntos como $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ o $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ pertenecen a $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A$, por lo que $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$.
En cambio si elegimos $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$ se cumple que $x_1 \in \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} \overline{\pi_1(A)}$ y $x_2 \in \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} \overline{\pi_2(A)}$, sin embargo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A$.

Como podemos apreciar en casos como este, obtenemos una amplia libertad para elegir los puntos x_1 y x_2, lo cual nos permite realizar elecciones inadecuadas.

Una manera para solucionar este problema, es simplemente extender la colección $\mathcal{A}$ manteniendo la propiedad de intersección finita de tal manera que nos obligue a realizar una elección adecuada. Por ejemplo, extendamos la colección $\mathcal{A}$ del ejemplo anterior a la colección $\mathcal{D}$ que consiste de todas las regiones elípticas cerradas contenidas en $[0,1] \times [0,1]$ de tal manera que uno de sus focos es p y el otro se encuentra sobre el segmento $\overline{pq}$. Esta nueva colección conserva la propiedad de intersección finita y notamos que

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_1(D)} = \{\tfrac{1}{3}\} \text{ y } \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_2(D)} = \{\tfrac{1}{3}\},$$

por lo que la única elección que podemos realizar es la de $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = \frac{1}{3}$. Lo cual en esta situación es correcto, puesto que $\bigcap\limits_{D \in \mathcal{D}} D = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.

En vista de lo anterior, si planeamos elegir alguna extensión de la colección inicial, lo más indicado es escoger la colección más grande posible que conserve la propiedad de intersección finita.
Para ello utilzaremos el lema de Zorn, el cual enunciaremos a continuación y cuya demostración omitiremos para fines prácticos.

Lema A.3. **(Lema de Zorn)**. Sea A un conjunto parcialmente ordenado en el cual cada cadena tiene una cota superior, entonces A tiene un elemento maximal.

Con el lema de Zorn como nuestra herramienta, podemos dar paso a mostrar dos resultados que utilizaremos en la demostración del Teorema de Tychonoff.

Lema A.4. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X que tiene la propiedad de intersección finita. Entonces existe una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ tiene la propiedad de intersección finita y si $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ conservando dicha propiedad, implica que $\mathcal{D} = \mathcal{E}$.

Demostración. El conjunto al cual le aplicaremos le lema de Zorn no es un subconjunto de X ni una colección de subconjuntos de X, es más bien un conjunto cuyos elementos son colecciones de subconjuntos de X. Así que llamaremos superconjuto de X a un conjunto cuyos elementos son colecciones de subconjuntos de X. Denotaremos por $\mathbb{A}$ al superconjunto de X que consiste de las colecciones $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tales que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de intersección finita. Utilizaremos la inclusion ($\subset$) como nuestra relación de orden parcial en $\mathbb{A}$ y probaremos que $\mathbb{A}$ tiene un elemento maximal $\mathcal{D}$.

Sea $\mathbb{B}$ una cadena en $\mathbb{A}$ y sea $\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} \mathcal{B}$. Es claro que $\mathcal{C}$ es una cota superior para $\mathbb{B}$ pues $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ para cada $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$. Veamos entonces que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita. Sean $C_1, \ldots, C_n$ elementos de $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es la unión de elementos de $\mathbb{B}$, para cada $1 \leq i \leq n$ existe $\mathcal{B}_i \in \mathbb{B}$ tal que $C_i \in \mathcal{B}_i$. El superconjunto $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n\}$ está contenido en $\mathbb{B}$ por lo que es totalmente ordenado con la relación de inclusión. Además como es un conjunto finito, existe $1 \leq k \leq n$ tal que $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_k$ para toda $i = 1, \ldots, n$, por lo que cada C_i es un elemento de $\mathcal{B}_k$.

Entonces dado que $\mathcal{B}_k$ tiene la propiedad de intersección finita, se sigue que $\bigcap_{i=1} C_i \neq \emptyset$, por lo que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita. Así, como $\mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathbb{B}$, por lema de Zorn se concluye que $\mathbb{A}$ tiene un elemento maximal $\mathcal{D}$ respecto a la propiedad de intersección finita. □

Lema A.5. Sean X un conjunto y $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X que es maximal respecto a la propiedad de intersección finita. Entonces

1. Cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$ es un elemento de $\mathcal{D}$.

2. Si A es un subconjunto de X que intersecta a cada elemento de $\mathcal{D}$, entonces A es un elemento de $\mathcal{D}$.

Demostración. 1. Sean $D_1, \ldots, D_m$ elementos de $\mathcal{D}$ y sea $B = \bigcap_{i=1}^{m} D_i$. Consideremos la colección $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{B\}$ y veamos que $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de intersección finita.

Sean $E_1, \ldots, E_n$ elementos de $\mathcal{E}$.

Si $E_k \neq B$ para toda $k = 1, \ldots, n$, entonces $E_k \in \mathcal{D}$ para toda k, por lo que $\bigcap_{k=1}^{n} E_k \neq \emptyset$.

Si $E_j = B$ para alguna $1 \leq j \leq n$, entonces $E_j = \bigcap_{i=1}^{m} D_i$ por lo que

$$\bigcap_{k=1}^{n} E_k = \Big(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} E_k\Big) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} D_i\right) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de intersección finita.

2. Consideremos ahora $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{A\}$ y sean $E_1, \ldots, E_n$ elementos de $\mathcal{E}$.

   Si $E_k \neq A$ para toda $k = 1, \ldots, n$, entonces $E_k \in \mathcal{D}$ para toda k, por lo que $\bigcap_{k=1}^{n} E_k \neq \emptyset$.

   Si $E_j = A$ para alguna $1 \leq j \leq n$, entonces por $i)$ se tiene que $E = \bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} E_k \in \mathcal{D}$.

   Luego como A intersecta a cada elemento de $\mathcal{D}$, tenemos que

$$\bigcap_{k=1}^{n} E_k = \left(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} E_k\right) \cap A \neq \emptyset.$$

   Por lo tanto $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de intersección finita, y dado que $\mathcal{D}$ es maximal, concluimos que A es un elemento de $\mathcal{D}$ ya que $\mathcal{E} = \mathcal{D}$.

$\square$

Ya estamos preparados para enunciar y demostrar el Teorema de Tychonoff.

Teorema A.6. (**Teorema de Tychonoff**). El producto arbitrario de espacios topológicos compactos, es compacto respecto a la topología producto.

Demostración. Sea $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, donde X_α es un espacio topológico compacto para cada $\alpha \in J$ y sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X con la propiedad de intersección finita. Nuestro objetivo es probar que $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$.

En virtud del Lema A.4, podemos elegir una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es maximal respecto a la propiedad de intersección finita. Así pues, bastará ver solamente que $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} D \neq \emptyset$.

Sea $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la proyección usual para cada $\alpha \in J$ y sea $\mathcal{D}_\alpha = \{\pi_\alpha(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$. Notemos que $\mathcal{D}_\alpha$ es una colección de subconjuntos de X_α con la propiedad de intersección finita.

Como X_α es compacto para cada $\alpha \in J$, por el Teorema A.1 podemos elegir elementos $x_\alpha \in X_\alpha$ tales que $x_\alpha \in \bigcap\limits_{d\in\mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}$ para cada $\alpha \in J$. En base a esto, definamos al elemento $x = (x_\alpha)_{\alpha\in J}$ y veamos que $x \in \overline{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$.

Sea U_α un conjunto abierto en X_α tal que $x_\alpha \in U_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ y sea D un elemento cualquiera de $\mathcal{D}$. Como $x_\alpha \in \overline{\pi_\alpha(D)}$, tenemos que $U_\alpha \cap \pi_\alpha(D) \neq \emptyset$, por lo que existe $y_\alpha \in X_\alpha$ tal que $y_\alpha \in U_\alpha \cap \pi_\alpha(D)$. Mas aún, existe $y \in X$ tal que $\pi_\alpha(y) = y_\alpha$ y además $y \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap D$, lo cual implica que $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ intersecta a cada elemento de $\mathcal{D}$.

Entonces por 2 del Lema A.5, sabemos que $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{D}$.

Luego, como cada básico de la topología producto en X que contiene al punto x es una intersección finita de sub básicos de la forma $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, concluimos por 1 del Lema A.5, que cualquier básico que contiene a x es también un elemento de $\mathcal{D}$. Así, por la propiedad de intersección finita de $\mathcal{D}$, tenemos que cualquier elemento de $\mathcal{D}$ intersecta a cada básico que contiene a x, por lo que $x \in \overline{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$, implicando de esta manera que $\bigcap\limits_{D\in\mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset$.

Finalmente, dado que $\mathcal{D}$, es maximal respecto a la propiedad de intersección finita, concluimos por el Teorema A.1 que X es compacto.

$\square$

Bibliografía

[1] James R. Munkres. *Topología.* Segunda edición. Pearson Educación, S.A., Madrid, 2002.

[2] William S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction.* Springer, 1991.

[3] Czes Kosniowski. *Topología Algebraica.* Editorial Reverté, S.A., 1986.

[4] Marvin J. Greenberg, John R. Harper. *Algebraic Topology: A First Course.* The Benjammin/Cummings Publishing Company, Inc., 1981.

[5] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[6] I. M. Singer, John A. Thorpe. *Lecture notes on elementary topology and geometry.* Scott, Foresman and Company, 1967.

[7] George F. Simmons. *Introduction to topology and modern analysis.* Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., 1963.