UNIVERSIDAD DE SONORA

Diseño de Actividades Didácticas para la Enseñanza del Cálculo Diferencial en el Bachillerato Basado en el Enfoque por Competencias

TESIS

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

David Iván Arvizu Borchardt

Director de tesis:

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Hermosillo, Sonora,

México, enero, 2017

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON

"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Contenido

1. Introducción

En el presente documento se muestra el proceso a través del cual se desarrolló el proyecto cuyo propósito fundamental fue el diseño de una serie de secuencias didácticas susceptibles de ser utilizadas en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en el bachillerato.

En el primer apartado de este documento se habla de la problemática existente en la educación matemática en general y en particular en la relacionada con la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en el bachillerato, señalando algunos aspectos básicos de dicha problemática. En este mismo primer apartado se dan argumentos que en nuestra opinión, son razones que justifican nuestra decisión de elaborar y desarrollar el proyecto.

Para desarrollar este primer apartado, se procedió a la búsqueda de información relacionada con el problema de la educación matemática en general, con especial interés en la problemática de la educación matemática en el bachillerato y más específicamente se buscó información sobre la problemática de la enseñanza del Cálculo en ese nivel.

Entre los documentos revisados, que resultaron de gran utilidad para los propósitos del proyecto, están los relacionados con los resultados que nuestros estudiantes han obtenido en la evaluación internacional que hace cada tres años la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) por medio de un examen conocido con el nombre de *Examen PISA*, que muestran que México siempre ha quedado ubicado en un nivel muy por debajo de la media, ocupando siempre uno de los últimos lugares.

Otros documentos consultados de especial importancia en nuestro proyecto, son los relacionados con la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) ya que dicha reforma constituye una iniciativa institucional que pretende reorientar la educación media superior en general y específicamente la educación matemática de ese nivel escolar

Otra fuente de información consultada relacionada con la problemática, fueron algunos artículos que son reportes de proyectos de investigación realizados, que aparecen publicados especialmente en las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, así como algunos proyectos similares al que aquí se reporta y que se han realizado recientemente.

En un segundo apartado se habla de las consideraciones teóricas y metodológicas en que está basado el diseño y desarrollo del proyecto, especialmente las que subyacen en el diseño de las secuencias didácticas. Respecto a las consideraciones teóricas, una especialmente importante para el diseño, es que éste parte de la premisa de que la matemática se aprende a través de la resolución de problemas, lo cual nos llevó a revisar bibliografía relacionada con la historia del origen y desarrollo del Cálculo con la intención de tener elementos que nos permitan argumentar en favor de nuestra premisa teórica de que el Cálculo surgió y se desarrolló a partir de la necesidad de resolver cierto tipo de situaciones problémicas.

En relación con la metodología utilizada para el diseño y desarrollo del proyecto, primeramente, se estableció el objetivo general del mismo que resulta explícito en el título del proyecto: *Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza del Cálculo Diferencial en el bachillerato.* Declarado el propósito general del proyecto y revisada la bibliografía a la que se hace referencia en el apartado anterior, se hicieron las consideraciones teóricas y metodológicas para el diseño de las secuencias didácticas, consideraciones que aparecen en este segundo apartado del presente documento.

La metodología utilizada para el diseño de las secuencias consistió en el establecimiento de los objetivos, general y específicos, de las secuencias, así como los objetivos generales y específicos de las actividades, las competencias disciplinares y genéricas que se espera desarrollar en el estudiante y la forma en la que se organizan las actividades (Inicio, Desarrollo y Cierre), después se habla de una estrategia de enseñanza y el aprendizaje esperado y finalmente se procedió al diseño de las secuencias didácticas cuya presentación se hace en un tercer apartado de este documento.

Respecto al objetivo más general y ambicioso del proyecto de diseño de las secuencias didácticas es la pretensión de que el alumno, al realizar las actividades sugeridas en estas secuencias, comprenda la esencia de los elementos básicos del Cálculo y sus conceptos para que sea capaz de utilizarlos en las situaciones o problemas que se le presenten, logre percibir y valorar la importancia y trascendencia del Cálculo. Dichas acciones de participación en el proyecto constituyen la propuesta del trabajo terminal que presentaré para obtener el grado en la Licenciatura en Matemáticas.

Capítulo I

El Problema y la Justificación del Proyecto

Los resultados de las evaluaciones internacionales que hace la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), por medio del examen PISA, (siglas en inglés del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos) que se aplica cada tres años y que en nuestro país se aplica desde el año 2000, muestran el bajo rendimiento de los estudiantes mexicanos en el aprendizaje de las Matemáticas así como también en otras materias, evaluaciones en las que México siempre ha quedado en los últimos lugares, muy por debajo de la media internacional; en el año 2015, nuestro país ocupó, en Matemáticas, el lugar número 58 de 70 países participantes. Además, en un boletín donde se dieron a conocer los resultados del examen PISA, 2015 se destaca: "en estas tres áreas, (Matemáticas, Lectura y Ciencias) menos del 1 % de los estudiantes de México logran niveles de competencia de excelencia (nivel 5 y 6)". Los jóvenes mexicanos de 15 años están muy por debajo en puntos de los estudiantes en Portugal y España, y una diferencia menor pero aún por debajo de los estudiantes de Chile y Uruguay, aunque se sitúan por encima de los estudiantes de Brasil, la República Dominicana y Perú.

Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de realizar cambios en la enseñanza de las matemáticas ya que, si los jóvenes de 15 años (que es la edad de quienes son evaluados) que están a punto de ingresar al bachillerato, no han alcanzado un nivel de dominio de las matemáticas elementales, tendrán grandes dificultades para comprender los conceptos y métodos del Cálculo, disciplina que se ubica en las denominadas matemáticas superiores.

Además de los resultados del examen PISA que hemos citado, existen muchos reportes de investigaciones realizadas en los últimos treinta años relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo en los que se señalan diversas causas de dicha problemática y, en muchos de esos reportes, se hacen recomendaciones sobre algunos de los cambios que debieran realizarse en el proceso de enseñanza de las Matemáticas en general y, específicamente en la enseñanza del Cálculo.

Entre los investigadores, que han realizado estudios sobre los diversos problemas relacionados con la comprensión de los elementos del Cálculo están (Sierpinska, 1987), (Cornu, 1991), (Monaghan, 1991), (Williams, 1991), (Cottrill, 1996), (Tall, 1996), (Kannemeyer, 2003) que son citados por (Moru, 2008) (Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática.

En los últimos años se ha optado por enseñar el Cálculo de una forma diferente a la tradicional ya que un curso de Cálculo de bachillerato no debe ser algo parecido a un curso de análisis comprimido, por eso, se le ha bajado el peso a la formalidad y con el enfoque constructivista se ha centrado en la comprensión de las ideas intuitivas y los diferentes contextos en los que puede ser visto el Cálculo, principalmente en los diferentes contextos de la Física y de la vida cotidiana (Moreno, 2010). Por lo que el estudiante por medio de la resolución de problemas contextuales le da lugar a una relación directa entre el objeto matemático y su relación con las situaciones que se le presenten y se desarrolla su competencia para utilizar las herramientas matemáticas en los diferentes contextos que se le presenten dejando así de lado el aprendizaje abstracto y su baja comprensión de su relación con los diferentes contextos o con otro tipo de representación.

se han estudiado en bastantes investigaciones, cita algunos trabajos:

A pesar de todo, el aprendizaje del cálculo en la educación media superior todavía al día de hoy, es un problema fundamental de la educación matemática.

Artigue separa en 3 ramas principales las dificultades en la comprensión del Cálculo: comprensión en la noción de límite; la complejidad que implica entender los objetos básicos del Cálculo, los conflictos semióticos, culturales, didácticos, y las vinculadas con las "rupturas" necesarias en relación a los modos de pensamiento algebraico. Es un cambio muy drástico imponer al estudiante las ideas de la noción de límite cuando los aprendizajes anteriores no tienen una relación directa, incluso durante la invención del Cálculo no se aceptaban las ideas relacionadas con diferenciales porque la idea de "límite" parecía muy complicada para los grandes científicos, parecía imposible comprender que existen magnitudes llamadas "diferenciales" que se puede operar con ellas y no se tiene su valor numérico exacto.

Desde igualdades e inecuaciones, los razonamientos, las aproximaciones, el simbolismo, el lenguaje, las demostraciones, rompen con las formas de trabajo que se presentan en los cursos anteriores a la iniciación del Cálculo escolar. Como (Artigue, 1995) afirma, generalmente se han concentrado los esfuerzos al interior del cálculo mismo, sin estudiar todo ese proceso anterior, y propone centrarse allí, para emprender una investigación que se ubique en el proceso de aprendizaje: Algebra-Cálculo, postulando que no existe un paso natural del álgebra al cálculo, que no existe un desarrollo continuo y regular del conocimiento.

(Moreno, Las trampas de rigor, 2010) concluye que en los últimos años se ha optado por enseñar el Cálculo de una forma diferente a la tradicional. Un curso de Cálculo de bachillerato no debe ser un curso de análisis resumido, en los últimos años se le ha bajado el peso a la formalidad y el enfoque constructivista se ha centrado en la comprensión de las ideas intuitivas y los diferentes contextos en los que puede ser visto el Cálculo principalmente en los diferentes contextos de la Física.

Poincaré realizó conferencias sobre las funciones, él hizo referencia a la continuidad y derivabilidad de las funciones, los aspectos engañosos de la intuición en este dominio y la concientización reciente del hecho de que el rigor en los razonamientos no es posible si no es con base en las definiciones. Sin embargo, él también aclaró que este rigor no se puede alcanzar sino a través de imponer la lógica sobre la realidad y que sería catastrófico querer establecerla de golpe al estudiante (Poincaré, 1904). Es complicado para el docente dejar de lado la formalidad ya al querer ser claro con su enseñanza el docente tradicional quiere ser muy preciso con las bases sobre los conceptos y esta formalidad, al ser abstracta, le resulta un salto difícil de aceptar para el estudiante.

> Los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo siempre han sido objeto de preocupación a nivel mundial, el alto índice de reprobados, la deserción escolar aunada a una enseñanza tradicional donde el alumno tiene un papel pasivo en el que debe ser disciplinado, acrítico y sumiso (Torres, 2006).

Estos autores hablan de los fallos en la enseñanza del Cálculo y coinciden en que la formalidad durante el proceso de enseñanza del Álgebra al Cálculo es bastante ruda para los estudiantes, coinciden en que la enseñanza falla cuando no hay un contexto que relacionar con la información abstracta recibida por lo que el estudiante no logra adquirir conocimiento.

Un nivel bajo de conocimientos en el área del Calculo Diferencial en el nivel medio superior puede desmotivar a algunos estudiantes a continuar sus estudios del nivel superior, también es posible que decidan estudiar una carrera que requiera bajos conocimientos en Cálculo. Un profesional en estas áreas necesita utilizar estos conocimientos matemáticos de forma eficaz y con bajas probabilidades de error. Estas carreras utilizan el Cálculo de muchas maneras diferentes, por ejemplo:

Desarrollar el modelo económico en una empresa o en un banco, estadísticos y de mercadotecnia, otros para idear nuevas construcciones como edificios, incluso en el desarrollo de la medicina y ciencias biológicas, en el desarrollo de sustancias químicas, en el diseño de nuevas tecnologías: computadoras, automóviles, celulares, astronomía, etc.

El desarrollo de la Ciencia y la Tecnología aún es muy bajo comparado con lo que puede llegar a hacer la creatividad humana. Por lo tanto, es indispensable preparar de forma adecuada a los futuros profesionales. Algunos de nuestros alumnos o alumnos de ellos, van a hacer logros históricos algún día. Todos estos motivos son suficientes para estudiar esta problemática y desarrollar propuestas didácticas basadas en una metodología que se enfoque en la resolución de problemas contextuales.

2.1 Artículos que se han publicado recientemente relacionados con el diseño de actividades didácticas de Cálculo Diferencial

(Ruiz Faúndez, 2015) El artículo se basa en analizar si los docentes por medio de la resolución de problemas utilizan cada una de las formas de representación (gráfica, numérica y algebraica) y corroborar que el estudiante desarrolla competencia para conjeturar, experimentar, simular y verificar la resolución de una situación dada incluso en situaciones informáticas. La importancia de utilizar cada una de las diferentes formas de representación en la resolución de problemas refuerza la idea de realizar actividades orientadas a la comprensión de éstas.

(Rincón Flores, 2014) El proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo siempre ha sido objeto de preocupación a nivel mundial, el alto índice de reprobados, la deserción escolar aunada a una enseñanza tradicional donde el alumno tiene un papel pasivo en el que debe ser disciplinado, acrítico y sumiso (Torres, 2006).

Se refuerza la idea de generar conocimientos por medio de la construcción de conocimientos donde el estudiante adquiere su propio conocimiento por medio de la exploración de sus análisis en la resolución de problemas.

Las investigaciones actuales acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática enfatizan en la búsqueda de estrategias centradas en el aprendizaje, en donde el alumno participe activamente en la adquisición de su conocimiento (Eison, 1991).

(Campos, 2014) En este curso corto se compartió algunos elementos de historia del cálculo, empezando con los trabajos de los babilónicos hasta llegar al nacimiento del cálculo diferencial e integral con Newton y Leibniz.

Así como algunas estrategias metodológicas que podrían ser pertinentes para un curso de esta naturaleza, como son el uso de portafolios, la participación de conferencistas que son especialistas en campos específicos de las matemáticas, y las exposiciones presentadas por los propios estudiantes del curso.

Se analiza los elementos que dieron lugar al nacimiento del Cálculo y se proponen algunas estrategias metodológicas que refuerzan la idea de que el Cálculo nació al resolver situaciones problémicas que se presentaron y por tanto puede ser más sencillo el aprendizaje de esta forma.

(Espinoza, 2010) Esta investigación pone en práctica una propuesta pedagógica para apoyar la enseñanza del Cálculo mediante la resolución de problemas a nivel preuniversitario. Se fundamentó en la elaboración de una "situación problema" que provocó un conflicto intelectual en los estudiantes, mientras que el docente actuó como mediador y aprovechó los descubrimientos hechos por los estudiantes para fundamentar teóricamente los diferentes conceptos luego de la aplicación de la propuesta. Los resultados obtenidos son muy positivos y justifican la necesidad de un cambio en las estrategias metodologías utilizadas para enseñar el Cálculo. Sin embargo, es necesario un acercamiento de los docentes hacia la teoría de Resolución de problemas para aplicar con éxito este tipo de actividades.

Un documento más que refuerza las ideas metodológicas que se siguieron en este proyecto, en el artículo, se propone apoyar el constructivismo a escalas más grandes pues tras la puesta en práctica en una pequeña escala la actividad tuvo éxito, pero se sospecha que si la preparación del mediador (el profesor) no va orientada a los objetivos constructivistas de la actividad, entonces no se tiene éxito.

2.2 Un poco de historia sobre el estudio de la construcción del Cálculo.

Los orígenes del Cálculo se remontan unos 2500 años por lo menos, hasta los antiguos griegos, quienes hallaron áreas aplicando el "método agotamiento". Sabían cómo hallar el área de cualquier polígono al dividirlo en triángulos (método de triangulación), y sumar las áreas de estos triángulos.

(http://equipo1-historiadelcalculo.blogspot.mx/2011/08/resumen.html)

El Cálculo es una de las más grandes aportaciones intelectuales de la humanidad. La historia de la matemática cambió radicalmente: la geometría, el álgebra y la aritmética, la trigonometría. Después de cada descubrimiento, invento o alguna nueva teoría dan lugar a la evolución de nuevas ideas que hacen posible su nacimiento. Es importante prestar atención en el momento en que nace una nueva idea, el desarrollo de una nueva teoría y el impacto que provoca, así como las aportaciones para las demás ciencias. El cálculo cristaliza conceptos y métodos que la humanidad estuvo tratando de dominar por más de veinte siglos. Muchas personas trabajaron con los métodos "infinitesimales" pero hasta el siglo XVII se llegó a una madurez social, científica y matemática que permitió comenzar a construir el Cálculo que utilizamos en estos días. Aceptar a los "infinitesimales" fue un salto muy grande pues las ideas intuitivas chocan y el no tener un significado numérico exacto hace difícil aceptar estas magnitudes.

Isaac Newton y Gottfried Leibniz son considerados los inventores del cálculo, pero solamente representan un pequeño eslabón de una larga cadena iniciada muchos siglos antes. Ellos fueron los que dieron a los procedimientos infinitesimales de sus antecesores Barrow y Fermat, la unidad algorítmica y la precisión necesaria como método novedoso y de generalidad suficiente para su desarrollo posterior. El desarrollo de estos mismos estuvo elaborado a partir de visiones de hombres como Torricelli, Cavalieri, y Galileo; o Kepler, Valerio, y Stevin. Los logros con las operaciones iniciales con infinitesimales que estos hombres lograron, fueron también resultado directo de las contribuciones de Oresme, Arquímides y Eudoxo. Finalmente, el trabajo de estos últimos estuvo inspirado por problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por Aristóteles, Platón, Tales de Mileto, Zenón y Pitágoras. Debe reconocerse que una de las contribuciones previas decisivas fue la Geometría Analítica desarrollada independientemente por Descartes y Fermat.

Seguramente la contribución de Newton y Leibniz no existiría si no fuera por las contribuciones de los hombres mencionados y muchos otros más.

En el siglo XVII existieron cuatro problemas científicos y matemáticos los cuales fueron la disputa por la creación del Cálculo:

- Encontrar la tangente a una curva en un punto.
- Encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad.
- Encontrar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
- Dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante. Recíprocamente, dada una fórmula en la que se especifique la aceleración o la velocidad en cualquier instante, encontrar la distancia recorrida por el cuerpo en un período de tiempo conocido.

Estos problemas fueron analizados por las mentes más brillantes de este siglo, concluyendo en la obra cumbre del filósofo-matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz y el físico-matemático inglés Isaac Newton: la creación del Cálculo.

El choque contra estas situaciones problémicas y la resolución de ellos da lugar a la construcción del Cálculo.

Se sabe que los dos trabajaron en forma casi simultánea pero sus enfoques son diferentes. Los trabajos de Newton están motivados por sus propias investigaciones físicas (de allí que tratara a las variables como "cantidades que fluyen") mientras que Leibniz conserva un carácter más geométrico y, diferenciándose de su colega, trata a la derivada como un cociente incremental, y no como una velocidad. Leibniz no habla de derivada sino de incrementos infinitamente pequeños, a los que llama diferenciales. Un incremento de x infinitamente pequeño se llama diferencial de x, y se anota dx. Lo mismo ocurre para y (con notación dy). Lo que Newton llamó fluxión, para Leibniz fue un cociente de diferenciales (dy/dx). No resulta difícil imaginar que, al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y ni siquiera de función, los fundamentos de su cálculo infinitesimal son poco rigurosos.

Se puede decir que el cálculo de fluxiones de Newton se basa en algunas demostraciones algebraicas poco convincentes, y las diferenciales de Leibniz se presentan como entidades extrañas que, aunque se definen, no se comportan como incrementos.

Resulta muy interesante la larga y lamentable polémica que se desató a raíz del descubrimiento. En el siglo XVIII se convirtieron en mutuas acusaciones de plagio. La polémica se tornó cada vez mayor y finalmente se convirtió en una rivalidad entre los matemáticos británicos y los continentales.

La discusión siguió muchos años después de la muerte de los dos grandes protagonistas y, afortunadamente, hoy está claro que ambos descubrieron este cálculo en forma independiente y casi simultáneamente entre 1670 y 1677, aunque fueron publicados unos cuantos años más tarde.

En el siglo XVII se realizaron estudios sobre el movimiento, es decir, al estudiar la velocidad de los cuerpos al caer al vacío, se estudió el cambio de la velocidad de un momento a otro; la velocidad en cada instante debe calcularse teniendo en cuenta la distancia que recorre en un tiempo "infinitesimalmente pequeño". (http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Historia1.htm)

En 1666 Sir Isaac Newton (1642-1727), fue el primero en desarrollar métodos matemáticos para resolver problemas de esta índole. Inventó su propia versión del cálculo para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Newton concibió el llamado Método de las Fluxiones, considerando a la curva como la trayectoria de un punto que fluye; denomina "momentum" de la cantidad de fluente al arco mucho muy corto, recorrido en un tiempo excesivamente pequeño, llamado la "razón del momentum" al tiempo correspondiente, es decir, la velocidad.

Casi al mismo tiempo, el filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), realizó investigaciones similares e ideando símbolos matemáticos que se aplican hasta nuestros días. La concepción de Leibniz se logra al estudiar el problema de las tangentes y su inverso. Los símbolos, la palabra "derivada" y el nombre de "ecuaciones diferenciales" se deben a Leibniz. (dx, dy, dz). Para 1675, Leibniz se había quedado con la notación: $\int y\, dy = \frac{y^2}{2} + c$

(http://equipo1-historiadelcalculo.blogspot.mx/2011/08/resumen.html)

Después de Newton y Leibniz, el desarrollo del cálculo fue continuado por Jacobo Bernoulli y Johann Bernoulli. Sin embargo, cuando Berkeley publicó su Analyst en 1734 atacando la falta de rigor en el cálculo y disputando la lógica sobre la que se basaba, entonces se hicieron grandes esfuerzos para amarrar el razonamiento. Maclaurin intentó poner el cálculo sobre una base geométrica rigurosa pero sus fundamentos realmente satisfactorios tendrían que esperar al trabajo de Cauchy en el siglo XIX.

2.3 El cálculo en el siglo XIX

Un problema importante fue definir el significado de la palabra función. Euler, Lagrange y el matemático francés Fourier aportaron soluciones, pero fue el matemático alemán Dirichlet quien propuso su definición en términos actuales. En 1821, un matemático francés, Cauchy, consiguió un enfoque lógico y apropiado del cálculo y se dedicó a dar una definición precisa de "función continua". Basó su visión del cálculo sólo en cantidades finitas y el concepto de límite. Esta solución dio lugar a un nuevo problema, el de la definición lógica de número real. Aunque la definición de cálculo de Cauchy estaba basada en este concepto, no fue él sino el matemático alemán Dedekind quien encontró una definición adecuada para los números reales. Los matemáticos alemanes Cantor y Weierstrass también dieron otras definiciones casi al mismo tiempo. Después ocurrieron otros avances importantes como el de Gauss que dio una explicación adecuada del concepto de número complejo; estos números formaron un nuevo y completo campo del análisis, desarrollado por Cauchy, Weiestrass y el matemático alemán Riemann. Después se dio lugar al estudio de sumas infinitas de expresiones con funciones trigonométricas, herramientas muy útiles tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas, hecho por Fourier.

Leonhard Euler (1707-1783). La simbología se debe a él, quien además de hacer importantes contribuciones a casi todas las ramas de las matemáticas, fue uno de los primeros en aplicar el cálculo a problemas de la vida real en la Física. Sus extensos escritos publicados incluyen temas como construcción de barcos, acústica, óptica, astronomía, mecánica y magnetismo.

Todos ellos se enfrentaron a situaciones a resolver que tienen diferentes significados contextuales para los mismos elementos del Cálculo y puede ser visto de diferentes formas y al lograr resolver esas situaciones la construcción de conocimiento dio lugar a descubrimientos de relevancia para la ciencia y la humanidad.

2.4 El cálculo en el Siglo XX y nuestros días

Es importante destacar el aporte realizado por Lebesgue referido a la integración y a la teoría de la medida y las modificaciones y generalizaciones realizadas por matemáticos que lo sucedieron.

En la Conferencia Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en París en 1900, el matemático alemán David Hilbert, quien contribuyó de forma sustancial en casi todas las ramas de la matemática retomó veintitrés problemas matemáticos que él creía que podrían ser las metas de la investigación matemática del siglo que recién empezaba.

El avance originado por la invención del ordenador o computadora digital programable dio un gran impulso a ciertas ramas de la matemática, como el análisis numérico y las matemáticas finitas, y generó nuevas áreas de investigación matemática como el estudio de los algoritmos. Se convirtió en una poderosa herramienta en campos tan diversos como la teoría de números, ecuaciones diferenciales y el álgebra abstracta. Además, el ordenador permitió encontrar la solución a varios problemas matemáticos que no se habían podido resolver anteriormente. (http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Historia1.htm)

El Cálculo Diferencial se ha ido desarrollando a través de los años, consolidándose como una herramienta técnico – científica que se utiliza en el análisis de procesos que contienen magnitudes en constante cambio, por ejemplo: la velocidad de las reacciones químicas, los cambios atmosféricos, los desarrollos sociales y económicos de las naciones, en la astronomía para calcular las órbitas de los satélites y de las naves espaciales, en medicina para medir el flujo cardiaco, la estadística, y en una gran diversidad de otras áreas.

3. Objetivo del Proyecto

El objetivo de este proyecto es el diseño de una propuesta didáctica de Cálculo Diferencial en el nivel medio superior.

Se elaborará una secuencia didáctica dirigida al estudiante de quinto semestre de bachillerato que promueva el desarrollo de las competencias requeridas actualmente por el sistema educativo en el nivel medio superior.

4. Elementos que componen a las actividades didácticas:

En esta sección se presentarán los elementos que consideramos importantes para el diseño de propuestas didácticas en Cálculo Diferencial. Tales elementos derivaron del análisis de la reforma educativa, los artículos de investigación que se han mencionado relacionados con el diseño de propuestas didácticas en la enseñanza de algunos conceptos del cálculo diferencial. Los temas de búsqueda fueron: variaciones, funciones reales, optimización, continuidad de funciones y derivadas. Se examinaron artículos de investigación que desarrollaran, mediante actividades y propuestas, alguno de estos temas.

4.1 Elementos metodológicos para el diseño de propuestas didácticas:

Considerar algunos aspectos iniciales para el diseño de los problemas: Elegir el tipo de problemas que serán objeto de estudio, fueron clasificados en bloques, diseñar los problemas de cada bloque en "actividades de inicio, desarrollo y cierre" y organizarlas en "secuencias didácticas".

El diseño de la propuesta didáctica contiene 3 tipos de actividades:

• **Inicio.** En ellas se plantean las situaciones-problema de un contexto familiar para el estudiante, incluyendo cuestionamientos que ponen en evidencia las competencias que previamente el alumno ha desarrollado, pero dando curso a las que serán fortalecidas o creadas.

• **Desarrollo.** Se espera que en este espacio emerjan los nuevos conocimientos de la temática que se está tratando, así como las habilidades y actitudes necesarias para emplearlas en la resolución de las situaciones planteadas.

• **Cierre**. En este tipo de actividades se recapitula lo estudiado en la secuencia y se realiza un proceso de institucionalización del conocimiento matemático construido.

4.1.1 Consideraciones metodológicas para el diseño de las actividades

Las actividades de Inicio, desarrollo y cierre tienen ciertos tipos de consideraciones teóricas como las que siguen: Los objetos matemáticos visualizados en las actividades didácticas son de carácter contextual y prácticos, es decir, los significados de los problemas son de un contexto familiar para el estudiante para que desarrolle competencia para el análisis, interpretación y resolución de las situaciones problémicas. Además, los elementos que componen estas prácticas son: Situaciones problémicas, el lenguaje, constituido por las diferentes formas de representación (por ejemplo, en las funciones son: tabular, gráfica, analítica, verbal y otras) y el procedimiento que se utiliza, conceptos, propiedades y argumentos que se utilicen para justificar la situación y por tanto los procesos.

Finalmente, el aprendizaje será producto de la actividad de estudio que realice el estudiante, además de aprendizaje, se produce desarrollo de otras habilidades intelectuales y otras que hacen que esté en mejores condiciones de resolver situaciones problémicas cada vez más complejas.

Para la realización de las actividades se llevó a cabo un proceso metodológico que tiene las siguientes etapas:

- Elegir una situación problema que se estudiará durante la secuencia.

- Determinar los propósitos generales y específicos.

- Determinar las competencias que se pretende promover.

- Formular posibles interrogantes complementando con tareas problémicas que servirán para provocar el estudio.

4.1.2 Objetivo General de las actividades

Que el alumno, desarrolle la competencia esperada al realizar las actividades que se proponen, que sean capaces de utilizar los conceptos y los procesos matemáticos necesarios en la resolución de problemas variacionales de optimización con un contexto familiar para el estudiante.

4.1.3 Objetivos específicos de las actividades

Que el estudiante desarrolle los siguientes puntos para lograr el objetivo general:

a) Detectar las variables relevantes de una situación problémica dada en los procesos de variación que se estudia.
b) Relacionar las variables que intervienen en cada situación y su dependencia.
c) Relacionar, analizar, interpretar y comunicar el objeto matemático en las diferentes formas de representación semiótica (numérica, gráfica, analítica y verbal) en problemas de variación.

Se esperaba realizar una prueba piloto de las actividades, por cuestiones pragmáticas no fue posible, pero fueron aprobadas por un grupo de profesores profesionales con un alto grado de conocimientos.

4.1.4 Competencias Disciplinares:

1) Leer y analizar información de una tabla, gráfica o expresión analítica.
2) Representar información tabular, gráfica y analíticamente.
3) Caracterizar los tipos de variación.
4) Detectar la rapidez con la que cambia la variación.
5) Utilizar los conocimientos adquiridos para relacionarlos con otros contextos.

4.1.5 Competencias Genéricas

1) Trabajar en equipo
2) Interpretar información recibida por lenguaje natural o matemático
3) Comunicar información por lenguaje natural o matemático.

4.2 Aprendizajes esperados en las secuencias didácticas:

-Capacidad para relacionar los diferentes tipos de variación que existen, identificar patrones de cambio y ser capaces de traducir las diferentes situaciones a otros esquemas como el algebraico, aritmético o el gráfico.

-Descubrir el concepto de derivada de una función, el significado gráfico, aritmético y algebraico.

-Relacionar el concepto de derivada con situaciones de la vida cotidiana (física, economía, sociedad, etc.). Capacidad de entender el funcionamiento de un problema de optimización y relacionarlo directamente con las herramientas del cálculo y todas las importantes aplicaciones de la derivada cuando este valor es cero, cuando es positivo, cuando es negativo.

4.3 Estrategias de enseñanza:

-Presentar problemas en un contexto cotidiano, motivadores e interesantes, en forma de secuencia didáctica, al inicio de cada unidad, o de cada clase, de manera que se pueda detectar si los estudiantes tienen buenas bases respecto a los conceptos manejados en los problemas y mediante a una discusión grupal se le da solución a este problema. Es relevante comprobar si las bases matemáticas de los estudiantes son firmes pues para el profesor puede resultar natural que los estudiantes ya comprendan, por ejemplo, lo que es posición, distancia recorrida, desplazamiento, distancia, cambio de posición, rapidez, velocidad, etc. y, en la práctica, muy pocos estudiantes tienen claridad en estos conceptos.

-Definir lo más claramente posible cada palabra o concepto involucrado en el cierre de cada actividad, para evitar al máximo la confusión de conceptos.

-Ofrecer asesorías de la asignatura de cálculo regularmente, discutir los temas más relevantes, proponer problemas físicos relacionados con los conceptos de razón de cambio, caída libre, disparo vertical, optimización, etc.

-Detectar los problemas Epistemológicos (psicológicos o preconcepciones) realizando observaciones pertinentes a cada estudiante, para que éste sustituya su actual concepto por el concepto correcto, que descubrirá a partir de nuevas experiencias, hasta que los conceptos erróneos sean reconocidos por el alumno y posteriormente desechados.

5. SECUENCIAS DIDÁCTICAS

Diseñadas para reflexionar y analizar los procesos de variación que surgen al tratar de resolver problemas de optimización

SECUENCIA DIDÁCTICA 1

Consideraciones que sirvieron de base para el diseño de las actividades de esta primera secuencia

Las actividades de esta secuencia han sido diseñadas con el propósito de que los estudiantes enfrenten una situación problémica (denominada problema de optimización) que puede resolverse de diferentes maneras y en la cual se plantea la necesidad de decidir cuál de esas maneras es la mejor, esto es, cuál es la decisión óptima.

Estas actividades también tienen el propósito de que los estudiantes se hagan conscientes de que, para decidir cuál es la mejor decisión, es necesario aprender a analizar las diferentes opciones y que para realizar dicho análisis es necesario aprender a utilizar las denominadas *matemáticas del cambio*, mejor conocidas como *Cálculo Diferencial e Integral*, especialmente el objeto matemático llamado *función derivada.*

Los criterios utilizados para la elección de las situaciones problémicas fueron, entre otros, que correspondieran a un contexto familiar buscando con ello, que el problema resultara interesante para los estudiantes y les ayudara a entenderlos, que los requerimientos matemáticos previos les resultaran también familiares.

Para llevar a cabo el análisis de las situaciones se diseñaron tres tipos de actividades que hemos denominado de inicio, de desarrollo y de cierre. Las primeras, con dos propósitos: uno, que los estudiantes conozcan la situación y se planteen el problema y, dos, ayudarlos a refrescar y fortalecer los conocimientos y habilidades que habrán de poner en juego al analizar y tratar de resolver el problema; las segundas, esto es, las de desarrollo, son las actividades diseñadas para aprender a utilizar los nuevos objetos matemáticos, en este caso, la derivada de una función; y las actividades de cierre, están diseñadas para institucionalizar lo que se espera que se haya aprendido. Un elemento más que se consideró al diseñar las actividades, es la necesidad de que los estudiantes conozcan y aprendan a utilizar las diferentes representaciones del objeto matemático que se quiere que emerja, es este caso, la derivada de una función. Esto significa que al diseñar las actividades se recurrió a representar las funciones, tabular, gráfica y analíticamente y a promover las conversiones de entre ellas.

ACTIVIDADES DE INICIO

En ocasiones, tanto en la vida cotidiana como en el trabajo es necesario tomar algunas decisiones difíciles, pero es realmente importante elegir la decisión más óptima de acuerdo a la ocasión y en algunas de esas situaciones un pequeño error puede provocar muchos problemas como pérdida o disminución de ganancias de una empresa, banco, pérdidas de resultados decisivos en experimentos científicos, entre muchos otros.

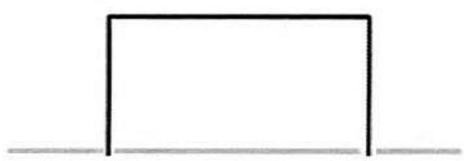
El resultado más óptimo, en muchas ocasiones está en los extremos (el máximo o el mínimo) y suele ser el mejor o el peor en los diferentes contextos.

Esta secuencia didáctica te va permitir explorar una situación en la que se requiere obtener un valor máximo,

Actividad 1

El Problema de la portería de futbol:

En la preparatoria donde estudia Daniel, Alberto y Ramiro no tienen campo de futbol pero como les gusta mucho este deporte, deciden construir 2 porterías en un terreno, pero para construir una portería de futbol sólo disponen de un tubo de 11 metros para hacer cada portería el cual pueden cortar y soldar para ello.



Se necesita construir una portería tan grande como sea posible con sólo 11 metros de tubo el cual se usará para el poste derecho, izquierdo y el superior. Una portería muy grande es aquella que tiene más espacio para anotar un gol, es decir, una mayor área.

1. Si la longitud de los postes laterales es 1 metro, determina cuál es la longitud del poste superior (Recuerda que sólo cuentas con 11 metros de tubo para toda la portería).

2. Y si la longitud de los postes laterales fuera 4 metros, ¿Cuál sería la longitud del poste superior?

3. ¿Cuánto es lo más que pueden medir los postes laterales?

4. ¿Y cuánto es lo menos que pueden medir?

5. ¿Cuánto es lo más que puede medir el poste superior?

6. ¿Y cuánto es lo menos que puede medir el área de la portería?

7. ¿Cuánto medirá el área de la portería si el poste superior mide 10 metros?

8. ¿Tiene sentido que una portería tenga estas dimensiones? Justifica tu respuesta

9. ¿Qué tan grande puede ser la portería que puede construirse con ese tubo de 11 metros? (¿Cuál es el mayor valor que puede tener su área?)

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 1

1. Organícense en equipos de no más de cuatro y comenten las respuestas que dieron a cada pregunta y la manera en que las obtuvieron. En particular comenten:
   a) ¿Cómo calcularon la longitud del poste superior cuando conocían la longitud de los postes laterales?

   b) ¿Cómo calcularon la longitud de los postes laterales cuando conocían la longitud del poste superior?

   c) ¿Cómo calcularon el área de la portería cuando conocían la longitud de los postes laterales?

2. Determinen en el equipo una expresión analítica (fórmula) que indique la manera en que puede calcularse:

   a) La longitud del poste superior de la portería cuando conoce la longitud de los postes laterales. (representen con x la longitud de los postes laterales y con L la longitud del poste superior)

b) El área de la portería cuando se conoce la longitud de los postes laterales. (representen con A el área de la portería)

c) Utilizando las expresiones analíticas que obtuvieron en los incisos anteriores, completen la siguiente tabla escribiendo, en cada caso, lo solicitado (la longitud del poste superior y el área de la portería) tal como se muestra en el ejemplo del primer renglón:

Longitud del poste lateral (Altura de la portería): x	**Longitud del poste superior** $L =$	**Área de la portería** $A =$
1 m	9 m	9 m^2
2 m		
2.5 m		
3 m		
3.5 m		
4 m		
5 m		
5.5 m		

Tabla 1

d) Observen y analicen los datos que anotaron en la Tabla 1 y determinen:

- ¿Para qué valor de la longitud del poste lateral resultó la máxima área de la portería?

- ¿Es ese el valor que debe tener la altura de la portería para que ésta tenga la mayor área? Expliquen su respuesta

- ¿Cuál es el área de la portería si el poste lateral mide 2.7?

- Determinen cómo varía la longitud del poste superior de la portería a medida que aumenta la longitud de los postes laterales.

- ¿Qué sucede con el área de la portería a medida que aumenta su altura?

Actividad 2

1. En la Tabla 2 aparecen los datos que se espera hayan calculado y anotado en la Tabla 1, pero se han agregado otras dos columnas en la cuales deberán anotar lo que se les pide:

Longitud del poste lateral (Altura de la portería): x	**Longitud del poste superior** $L =$	**Área de la portería** $A =$	**Incremento poste superior con el anterior**	**Incremento del Área con el Área anterior**
1 m	9 m	9 m^2	-	-
1.5 m	8 m	12 m^2	**1**	**3**
2 m	7 m	14 m^2	**1**	**2**
2.5 m	6 m	15 m^2		
3 m	5 m	15 m^2		
3.5 m	4 m	14 m^2		
4 m	3 m	12 m^2		
4.5 m	2 m	9 m^2		
5 m	1 m	5 m^2		
5.5 m	0	0 m^2		

Tabla 2

a) Determinen qué tanto varió la longitud del poste superior cada vez que la longitud del poste lateral aumentó $\frac{1}{2}$ y anótenlo en la casilla correspondiente de la columna correspondiente a ΔL.

b) Procedan de la misma manera con los valores del área de la portería.

c) ¿Cómo resultan ser los incrementos de la longitud del poste superior cada vez que la longitud del poste lateral aumentaba $\frac{1}{2}$?

d) ¿Y los incrementos del área de la portería como resultaron ser?

2. Seguramente habrán observado que la longitud del poste superior disminuía 1 cada vez que la del poste lateral aumentaba $\frac{1}{2}$. Con base en esa observación comenten cómo resulta ser la variación de L con respecto a x.

3. Observen y comenten cómo fueron los cambios del valor del área de la portería a medida que la altura de la misma aumentaba $\frac{1}{2}$ y describan con palabras lo que observaron.

ACTIVIDAD DE CIERRE

Es oportuno, en este momento, reflexionar sobre lo que hasta aquí han hecho y se espera hayan aprendido tratando de resolver el problema de la portería, es decir, tratando de determinar lo que debe medir la longitud del poste lateral para que su área resulte máxima, esto es, para que la portería sea la más grande que se puede construir con un tubo de once metros de longitud.

Hasta ahora se espera que hayan aprendido que:

- Con un material de cierta longitud (en nuestro caso, 11 metros de tubo) se pueden construir porterías de diferente tamaño.
- El tamaño de la portería está determinado por lo que mide su área.
- El valor del área cambia al cambiar la altura
- Sabiendo el valor del poste lateral podemos determinar la longitud del poste superior de la portería y también podemos determinar su área.

En realidad, sólo hemos señalado unas cuantas cosas que se espera hayan aprendido hasta aquí. Ahora, continuado el trabajo en equipo, van a reflexionar sobre qué otras cosas han aprendido realizando la tarea que se indica o contestando las preguntas que se formulan a continuación:

- Explica cómo calculas la longitud del poste superior de la portería a partir de la longitud del poste lateral y escribe la expresión analítica que indica el procedimiento que has explicado.

- Explica cómo calculas el área de la portería a partir de la longitud del poste lateral y escribe la expresión analítica que indica el procedimiento que has explicado.

- ¿De qué depende el valor del área de la portería?

- ¿Por qué el área tiene este comportamiento si siempre se utilizan los mismos 11 metros de tubo para construir la portería?

- ¿Pueden, con lo que hasta aquí han aprendido, determinar cuál es el valor del poste lateral que hace que el área de la portería sea el máximo? Si su respuesta es afirmativa, expliquen cómo hacerlo; pero si su respuesta es negativa, expliquen qué es lo que sí saben de dicha longitud y por qué todavía no es posible calcular su valor.

SECUENCIA DIDÁCTICA 2

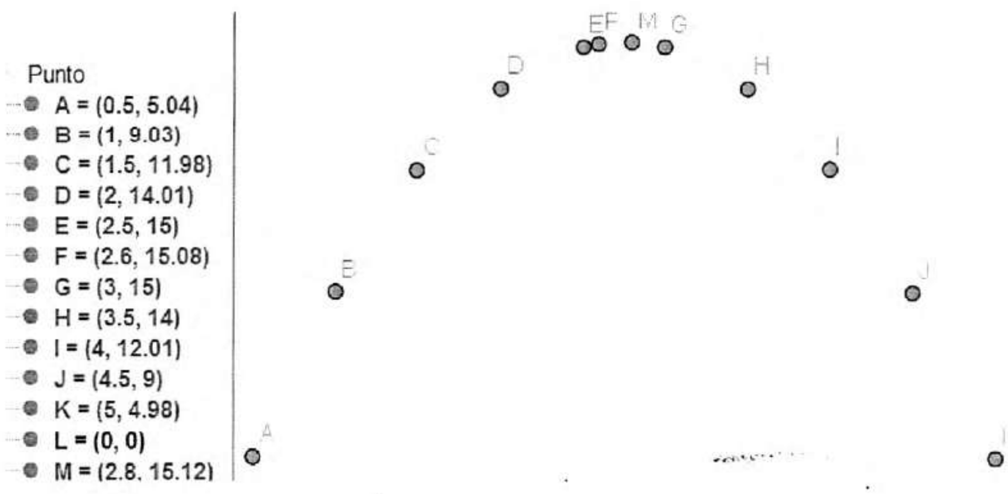
Al término de las actividades realizadas en la primera secuencia, se espera haya quedado claro que aún no logramos determinar cuál debe ser la altura de la portería que hace que su área sea máxima; pero que podemos acercarnos a su valor tanto como queramos.

En esta nueva secuencia continuaremos reflexionando sobre el problema y lo haremos resolviendo las actividades que se proponen a continuación. Así que sin más aclaraciones, comencemos:

ACTIVIDADES DE INICIO

Actividad 1

En la tabla 1 de la Secuencia 1, en la primera columna se anotaron diversos valores de x y, con base en cada uno de esos valores, se determinaron los correspondientes valores de L y de A utilizando para ello, en cada caso, la expresión analítica correspondiente que previamente se había establecido. Por lo que aprendiste en el curso de Matemáticas 3, seguramente sabes que una pareja de números puede representarse gráficamente por un punto en un plano cartesiano.

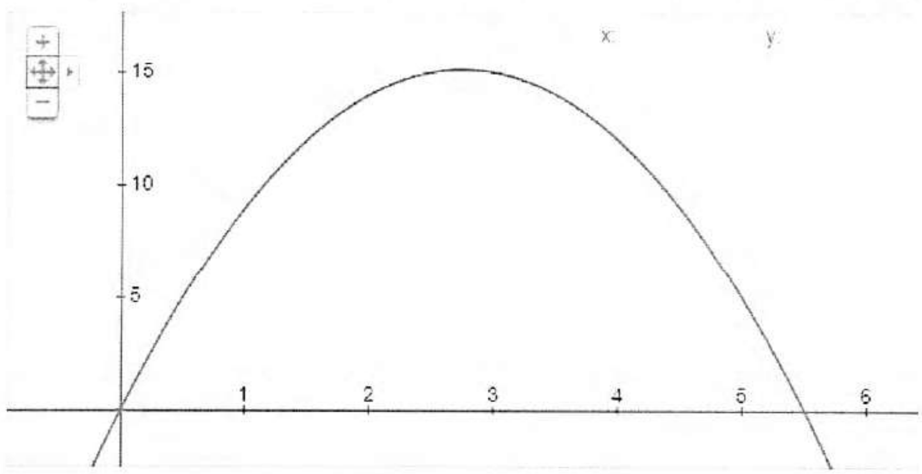


1. ¿Qué significado tienen los puntos graficados en relación al problema de la actividad anterior?

2. ¿Qué representa las coordenadas del punto más alto en la gráfica y por qué?

3. ¿Qué representa la abscisa y la ordenada de éste punto?

4. En esta gráfica, traza la recta tangente a la curva que pasa por el punto más alto.



5. ¿Qué puedes decir de ésta recta y de la pendiente que tiene ésta recta?

6. ¿Por qué la pendiente tiene ese valor? ¿Es el único punto donde tiene ese valor?

7. Observa que si tuviéramos la expresión de la pendiente de la recta tangente en cada punto de la gráfica podríamos buscar en qué punto vale cero y con ello las coordenadas del punto que maximiza la función.

Hemos analizado un problema sobre maximizar el área de una portería de futbol utilizando como variable la altura de la portería en el cuál tuviste que obtener la expresión analítica que describe el comportamiento del área de la portería, graficarla y relacionar su significado contextual con el analítico y gráfico. Después se sugirió que la expresión de la pendiente de la recta tangente a la gráfica tiene que ver con el valor máximo y que en la abscisa donde la pendiente obtiene el valor de cero se encuentran las coordenadas que buscamos. Finalmente deducimos que si tuviéramos la expresión analítica que describe el comportamiento de la recta tangente a la curva para igualarla a cero y así llegar a tales coordenadas que maximizan el área de la portería y su abscisa es el valor de la altura de la portería y la ordenada el área máxima que alcanza ésta.

Relacionamos la expresión que describe la recta tangente con maximizar el área de la portería de futbol ya que, al aumentar el tamaño del poste, el área de la portería en algún momento deja de aumentar porque llega a su punto máximo y empieza a decrecer, la rapidez con la que crece el área también va disminuyendo y al llegar a ese punto es cero (porque deja de crecer) esta rapidez es la pendiente de la recta tangente en ese punto la cual llamamos **derivada**.

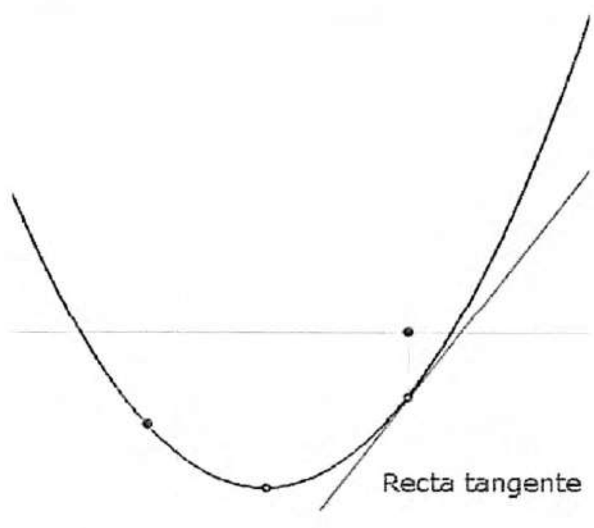
Actividad 2:

La expresión de la pendiente de la recta tangente en la representación gráfica.

Durante la secuencia didáctica anterior se analizó un fenómeno de optimización en el cual, para resolverse, sería suficiente conocer la expresión de la pendiente de la recta tangente de la expresión que modela al problema dado, pues analizamos que las coordenadas del punto que maximizan una función son las del punto más alto en la gráfica, y éste tiene una recta tangente horizontal cuya pendiente es cero, por ello, al tener la expresión de la pendiente de la recta tangente, podríamos utilizarla para buscar la abscisa que hace valer cero esta expresión y éste será el valor que buscamos, el cual maximiza la función. En esta actividad descubrirás gráfica y analíticamente cómo resolver este problema.

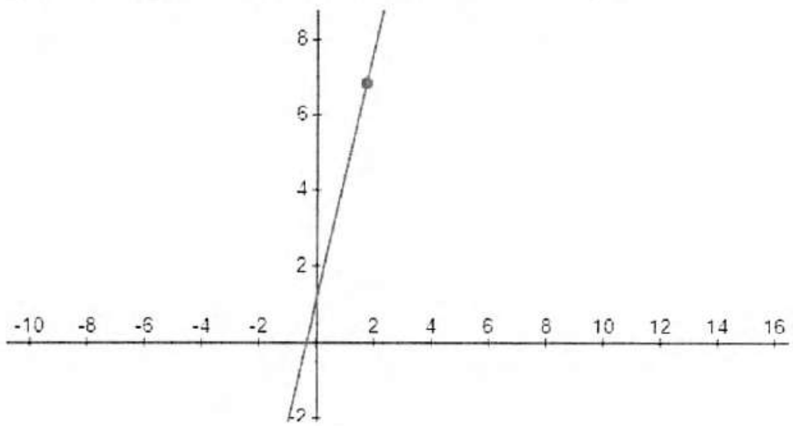
La pendiente de la recta tangente:

1. Observa la gráfica la imagen que se muestra a continuación:

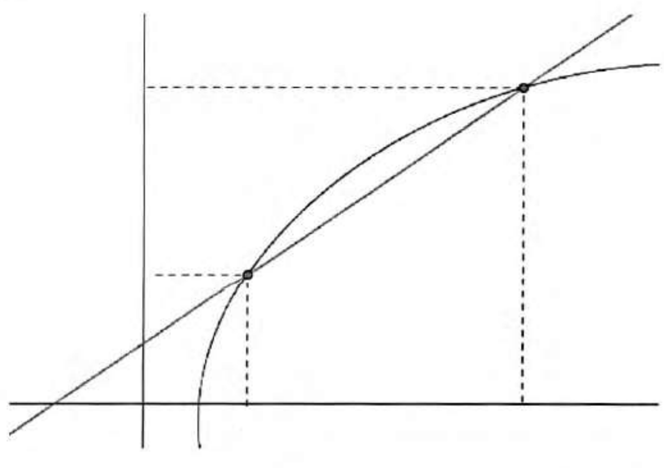


¿Qué datos necesitas tener para calcular la pendiente de una recta?

2. Si tuvieras sólo las coordenadas de un punto como se muestra en la gráfica p=(2,7), ¿Puedes calcular la pendiente de esa recta? Explica.



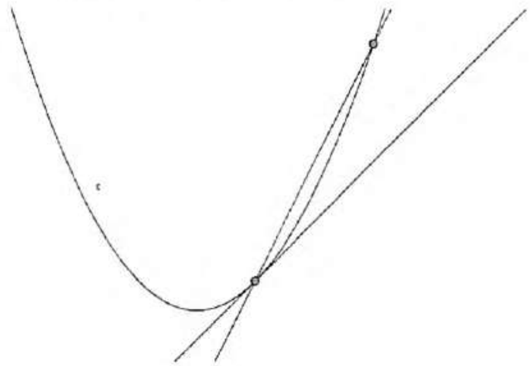
3. A diferencia de la recta tangente, la recta secante corta a la gráfica de la función en 2 puntos:



Los puntos en donde corta la recta secante a la curva son: p=(4,5) y q=(8,7). ¿Cuál es la pendiente de la recta secante?

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

1. ¿Cuál de las dos rectas que aparecen en la imagen tiene mayor pendiente, la secante o la tangente? ¿Por qué?



2. Ordena de menor a mayor las pendientes de la recta Azul, Roja y la Negra:

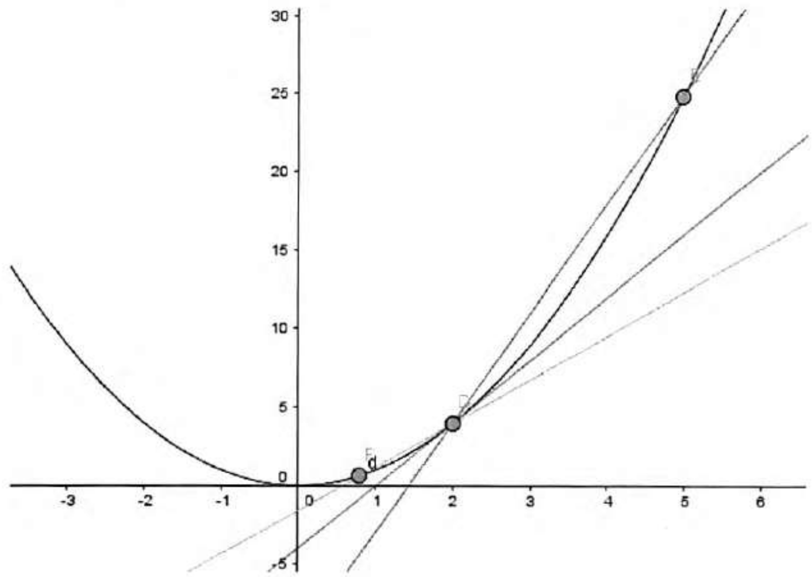
3. ¿Puede existir una recta secante que pase por el punto A y que tenga la misma pendiente que la recta tangente que pasa por el punto A? Explica.

4. Las rectas secantes que pasan por A y por otro punto P en la curva que está a la derecha de A ¿Tienen una pendiente mayor o menor que la pendiente de la tangente? Explica.

5. Las rectas secantes que pasan por A y por otro punto Q en la curva que está a la izquierda de A ¿Tienen una pendiente mayor o menor que la pendiente de la tangente? Explica.

6. Las rectas secantes que pasan por A y por otro punto en la curva que está en medio de A y P

7. Analicemos la gráfica de la expresión $y = x^2$ en el punto $x = 2$:



Calculemos la pendiente de las secantes que pasan por los siguientes puntos:

Punto 1	Punto 2	Pendiente
(0 , 0)	(2 , 4)	
(1 , 1)	(2 , 4)	
(3 , 9)	(2 , 4)	
(4 , 16)	(2 , 4)	
$(2-\Delta x, (2-h)^2)$	(2 , 4)	
$(2+\Delta x, (2+h)^2)$	(2 , 4)	

(Donde la Δx es cualquier número positivo)

8. Analicemos los últimos 2 resultados de la tabla, estos resultados sirven para calcular la pendiente de cualquier secante variando Δx, pero lo que nos interesa es calcular la pendiente de la recta tangente en x=2. Sabemos que cualquier recta secante que pase x=2 tiene una pendiente diferente a la de la tangente que pasa por x=2. Si la pendiente no es 4+ Δx y tampoco es 4- Δx y sabemos que la recta tangente debe de tener un valor para su pendiente, entonces, ¿Cuál es?

9. En general, si nos interesa calcular la pendiente de la recta tangente a $y = x^2$ en un punto $x = x_0$, primero calculamos la pendiente de la secante que pasa por $x_0 + \Delta\text{x}$ y por x_0:

$$m = \frac{(x_0 + \Delta\text{x})^2 - (x_0{}^2)}{x_0 + \Delta\text{x} - x_0}$$

$$y\,simplificamos: \quad m = \frac{x_0{}^2 + 2x_0\Delta\text{x} + \Delta\text{x}^2 - (x_0{}^2)}{\Delta\text{x}}$$

$$m = \frac{2x_0\Delta\text{x} + \Delta\text{x}^2}{\Delta\text{x}}$$

$$m = 2x_0 + \Delta\text{x}$$

Cuando h es positiva, la secante pasa por x_0 y por un punto a la derecha de x_0 y cuando es negativa, pasa por x_0 y un punto a la izquierda. Para cualquier valor de Δx diferente de cero la expresión determina el valor de una recta secante y ninguna de éstas puede ser igual al valor de la pendiente de la recta tangente.

En conclusión, ¿Cuál es el único valor que puede tomar la pendiente de la recta tangente en x_0?

ACTIVIDAD DE CIERRE

El proceso que seguiste para obtener el valor de la pendiente de la recta tangente tiene nombre y matemáticamente se le denomina derivada de una función.

Cuando obtuvimos el valor de la tangente de la recta tangente nos apoyamos de la pendiente de la secante y a medida que Δx se aproxima a cero, el valor de la pendiente de la recta secante se aproxima al valor de la pendiente de la recta tangente, para representar dicho proceso, analíticamente lo diremos de la siguiente forma:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Donde $f(x)$ es la expresión que representa a una función y expresión que determina el valor de la pendiente de la recta tangente en x_0 es $f'(x_0)$ y se le denomina derivada de la función $f(x)$. El símbolo $\lim_{\Delta x \to 0}$ Se lee como "el limite cuando delta x tiende a cero" que significa tomar incrementos del valor de x cada vez más pequeños hasta capturar el valor tendencial de la pendiente de la recta tangente.

1. Calcula el valor de la pendiente de la recta tangente de la función $y = 2x^2 + 3$ en $x = 3$.

2. Calcula el valor de la pendiente de la recta tangente de la función $y = 3x^2 + 3$ en $x = 4$.

SECUENCIA DIDÁCTICA 3

En la primera secuencia se propuso un problema de maximización el cual no se veía forma clara de resolver sin conocer la expresión que modela la pendiente de la recta tangente de la expresión del área de una portería en base a uno de sus postes. Durante la segunda secuencia didáctica nos enfocamos en encontrar la expresión analítica que modela la pendiente de la recta tangente por lo que ahora puedes utilizar esta expresión para finalmente deducir el valor del poste para que la portería tenga un área máxima.

En esta actividad se habla de un problema de optimización, particularmente un problema de minimización de una función.

ACTIVIDADES DE INICIO

Actividad 1:

El cercado de un terreno rectangular

Un campesino desea comprar un terreno rectangular que tenga un área de 5000 m^2 para trabajar sus cosechas. Pero ocupa cerrarlo por 3 de sus lados con una cerca y quiere gastar lo menos posible de material para la cerca. ¿Cuáles deberían de ser las dimensiones del terreno para que el campesino consiga su objetivo?

*Al igual que en actividades anteriores es recomendable obtener la expresión analítica que describa el problema para poder analizarlo.

1) Dibuja 2 posibles terrenos que cumplan los requisitos de tener un área de 5000 m^2 y que sea un terreno rectangular cercado por 3 de sus lados.

2) Obtén la medida del largo y del ancho de los dibujos que hiciste y escribe cómo los obtuviste.

3) Obtén el perímetro de los dibujos que realizaste y escribe cómo lo obtuviste

4) Llamemos b a los lados paralelos que se van a cercar y h al otro lado que se va a cercar. Llamemos P a la cantidad de cerca que se va utilizar. Escribe la expresión analítica que describe la cantidad de cerca que se va utilizar dependiendo de b y h".

5) Tomando en cuenta que el área debe de ser de 5000 m^2, escribe la expresión analítica que relaciona ésta cantidad con b y h.

6) Utiliza esta última expresión para reducir la expresión del inciso 4) y eliminar una de las variables.

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Posiblemente te diste cuenta que hay 2 posibles resultados para el inciso 6), ya que pudiste haber llegado a cualquiera de estas 2 expresiones:

$$P = \frac{10000}{h} + h \qquad ó \qquad P = 2b + \frac{5000}{b}$$

a) Antes de continuar es necesario analices la forma con la que cambian las variables P,b,h al modificar una de las variables: completa la siguiente tabla:

b	**h**	**P**
20		
80		
	150	
60		
	90	
55		
	95	

b) Describe lo que sucede con P y h al modificar la variable b.

c) Describe lo que sucede con P y b al modificar la variable h.

d) Aproximadamente ¿Qué valores crees que debe tener b y h para que el valor de P sea mínimo?

e) Si h valiera 5000 m, ¿Cuánto valdría b y cuánto valdría P?

f) ¿Cuál es el máximo valor que puede tener h?

g) Realiza una gráfica de P con respecto a b y trata de localizar el valor mínimo en la gráfica.

h) Tratemos de encontrar la ecuación de la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto (b_0,P_0) de la gráfica, para ello, al igual que lo hemos estado haciendo anteriormente, la obtendremos utilizando una recta secante que pasa por $b=b_0+h$. Escribe analíticamente el valor de P cuando $b= b_0+h$.

i) Calcula la expresión analítica de la pendiente de la recta secante que pasa por b_0 y b_0+h, luego redúcela lo más que puedas.

j) Si el punto b_0+h estuviera muy cercano al punto b_0, la recta secante sería muy parecida a la recta tangente, de hecho, entre más cercano a cero es el valor de h, el valor de la pendiente de la secante es más cercano al valor de la pendiente de la recta tangente. Escribe el valor de la pendiente cuando hacemos "despreciable" el valor de h.

k) Utilizando esta expresión, determina el valor de b_0 cuando la pendiente vale cero. (Esto nos servirá para encontrar el punto donde la gráfica deja de disminuir su valor y comienza a aumentar ya que es el punto donde la rapidez de cambio es nula).

l) Escribe el valor de b y h que minimizan la cantidad de cerca P que se requiere para cercar el terreno.

ACTIVIDAD DE CIERRE

Al finalizar esta secuencia de actividades didácticas se espera que hayas mejorado tu comprensión en los problemas de optimización, en particular de minimización de una función utilizando la herramienta matemática "derivada de una función" la cual tiene muchos usos y contextos donde puede ser utilizada además de optimización y calcular la rapidez con la que cambia una variable con respecto a otra.

1) Tomando en cuenta que un problema se describe por la siguiente expresión:

$$y = \frac{800}{x} + 6x$$

Encuentre el valor mínimo que puede tomar y al modificar el valor de x.

2) Encuentra el valor de x que hace que el valor de y sea el mínimo.

3) Bosqueja una gráfica de la expresión dada y el punto sobre la gráfica que minimiza la expresión.

4) Sobre la misma gráfica dibuja la recta tangente en ese punto y explica por qué su pendiente tiene ese valor.

5) Grafica la expresión $y = 200 - 3x^2$ y encuentra las coordenadas donde la y tiene su valor máximo y explica por qué la pendiente de la recta tangente en ese punto tiene ese valor.

SECUENCIA DIDÁCTICA 4

Durante esta quinta secuencia se va a estudiar el movimiento y la rapidez con la que éste cambia (la velocidad instantánea), durante esta secuencia estudiarás la rapidez de cambio de una variable con respecto a otra aplicado en otro contexto. Se espera visualizar el significado "derivada de una función" en una situación de la física (el cambio de posición de una partícula con respecto al tiempo).

ACTIVIDADES DE INICIO:

La carrera de los 400 metros planos.

En el año 2003, la mexicana Ana Gabriela Guevera impuso un récord mundial femenino en los 400 metros planos de 48.89 segundos, es decir, que recorrió 400 metros en 48.89 segundos.

1) ¿Cuál es la *Velocidad Promedio* que tuvo Ana Gabriela durante los 48.89 segundos?

2) Tomando en cuenta que Ana Gabriela partió del reposo ($V_{elocidad\ inicial} = 0$). ¿Es posible determinar si Ana Gabriela en algún momento tuvo una *velocidad instantánea* de 7m/s? ¿Por qué?

3) ¿Es posible que Ana Gabriela en algún momento tuviera una velocidad instantánea de 9m/s? Explica tu respuesta.

Pero en las olimpiadas del 2016 el sudafricano Wayde van Niekerk establece el record mundial masculino de 43.03 segundos en 400 metros planos. Convirtiéndose así en el hombre más rápido del mundo en la categoría de 400 metros planos.

$$V_{Prom} = \frac{400m}{43.03s} = 9.2958\, {}^{m}/_{s}$$

4) ¿Es posible que Wayde tuviera una velocidad máxima de $9.2958\ m/s$ durante toda la carrera? O ¿Tuvo que tener una velocidad mayor en algún momento? Explica.

5) **Si supieras el tiempo exacto que ha transcurrido de la carrera en cada posición que se encuentre el corredor.** ¿Cómo podrías calcular la velocidad promedio del corredor en los últimos 100 metros de la carrera?

6) Escribe cómo calcularías la *Velocidad Promedio* del corredor entre los $\boldsymbol{p_0}$ y $\boldsymbol{p_1}$ metros

ACTIVIDAD DE DESARROLLO

Una partícula se va moviendo y se registra su posición en los distintos intervalos de tiempo. La partícula comienza a moverse cuando se encuentra en la posición inicial $\boldsymbol{P_0}=1000\ m$

Tiempo	Posición
0 segundos	1000 metros
1 segundo	1010 metros
2 segundos	1040 metros
3 segundos	1090 metros
4 segundos	1160 metros

a) ¿Cuál es la velocidad promedio que llevaba la partícula durante el primer segundo? ¿Cómo lo calculaste?

b) ¿Cuál es la velocidad promedio que lleva la partícula en el segundo segundo?

c) ¿La velocidad cambió? ¿Por qué?

1. Observa la siguiente tabla de la posición del objeto con respecto al tiempo:

Tiempo	Posición
0 segundos	1000 metros
0.5 segundos	1002.5 metros
1 segundo	1010 metros
1.5 segundos	1022.5 metros
2 segundos	1040 metros
2.5 segundos	1062.5 metros
3 segundos	1090 metros
4 segundos	1160 metros

a) Calcula la velocidad promedio desde 0.5 segundos hasta 1 segundo, ¿Es mayor o menor que la velocidad promedio del primer segundo? ¿Por qué?

b) ¿Es mayor o menor que la velocidad promedio del segundo segundo? ¿Por qué?

c) Grafica los datos que aparecen en la tabla y explica lo que puedas decir acerca del movimiento

2. La expresión analítica que describe el movimiento de la partícula esté dada por: $P(t) = 1000 + 10t^2$, donde t es el tiempo y P la posición de la partícula, con ella podemos calcular fácilmente la posición de la partícula en cualquier momento, pero, ¿Podríamos conocer la velocidad que lleva la partícula en cualquier momento? ¿Por qué?

a) Y, ¿Podríamos calcular la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo?

Tratemos de analizar lo que sabemos sobre la velocidad instantánea en $t = 1$ comparándola con algunas velocidades, para ello, primero analicemos lo que sucede con las velocidades promedio en relación a la velocidad instantánea:

- ¿La velocidad en $t = 1$ es mayor o menor que la *velocidad promedio* desde el instante $t = 0$ a $t = 1$? ____________

- ¿La velocidad en t=1 es mayor o menor que la *velocidad promedio* desde el instante $t = 0.5$ a $t = 1$? ____________

- ¿La velocidad en t=1 es mayor o menor que la *velocidad promedio* desde el instante $t = 1$ a $t = 2$? ____________

- Para $x > 0$. Calculemos la velocidad promedio desde $t = 1\ hasta\ t = 1 + x$.

____

- Y la velocidad promedio desde $t = 1 - x\ hasta\ t = 1$.

____

- ¿La velocidad en $t = 1$ es mayor o menor que la *velocidad promedio* desde el instante $t = 1 - x\ a\ t = 1$? ___________

- ¿La velocidad en $t = 1$ es mayor o menor que la *velocidad promedio* desde el instante $t = 1\ a\ t = 1 + x$? ___________

- ¿Es posible que la velocidad instantánea en $t = 1\ sea$ 20.03? ¿Por qué?

- Calcula la velocidad promedio desde $t = 1\ hasta\ t = 1 + x\ (con\ x = 0.001)$.

- Calcula la velocidad promedio desde $t = 1 - x\ hasta\ t = 1$.

$$(con\ x = 0.00002).$$

- ¿Es posible que la velocidad instantánea en $t = 1$ sea 20.01? o ¿20.0001? ¿Puede valer 19.99? argumenta tu respuesta.

-Con base en estas preguntas puedes deducir que la velocidad instantánea en $t = 1$ es 20 ya que no puede valer más ni menos.

3. Ahora calcularemos la velocidad instantánea para cualquier momento x_0 de la partícula que se mueve de forma: $P(t) = 1000 + 10t^2$:

-Para calcular la velocidad promedio de la partícula que se mueve desde el tiempo t al tiempo $t + \Delta t$ (Δt es el tiempo que dura el movimiento) primero calculamos la diferencia de las posiciones y lo dividimos entre en tiempo transcurrido:

$$V_{Prom} = \frac{1000 + 10(\mathrm{t} + \Delta \mathrm{t})^2 - (1000 + 10t^2)}{\Delta \mathrm{t}}$$

$$V_{Prom} = \frac{1000 + 10t^2 + 20t\Delta \mathrm{t} + 10\Delta \mathrm{t}^2 - 1000 - 10t^2}{\Delta \mathrm{t}}$$

$$V_{Prom} = \frac{20t\Delta \mathrm{t} + 10\Delta \mathrm{t}^2}{\Delta \mathrm{t}} = 20\mathrm{t} + 10\Delta \mathrm{t}$$

Por lo que hemos encontrado una expresión que calcula la velocidad promedio para cualquier intervalo de tiempo en términos de t y Δt. Si la Δt es tan pequeña que la hacemos "despreciable" la velocidad promedio de este intervalo tan pequeño será la velocidad instantánea: $V_{Instantánea} = 20t$ Es la expresión que modela la velocidad en cualquier instante de tiempo.

ACTIVIDAD DE CIERRE

Para calcular qué tan rápido va cambiando la posición de un objeto en un intervalo de tiempo calculamos la velocidad, pero si queremos obtener la velocidad exacta en un instante específico es más complicado, pero es cada vez más exacta si calculamos la velocidad promedio en un intervalo de tiempo más pequeño.

La ecuación $\boldsymbol{P = 5t^2}$ representa la posición que tiene un objeto al transcurrir un tiempo t. Para obtener la **velocidad instantánea** exacta que lleva el objeto en $t = 2$ es necesario encontrar la velocidad promedio en un intervalo de tiempo muy pequeño cerca de $t = 2$.

1) Encuentra la velocidad promedio de $t = 2$ a $t = 2 + \Delta t$.

2) Encuentra la velocidad instantánea en $t = 2$.

3) Encuentra la velocidad promedio en $t = x$ a $t = x + \Delta t$.

4) Encuentra la velocidad instantánea en $t = x$.

Conclusiones del Proyecto:

- Durante mi transcurso por la licenciatura pensé haber adquirido muchos conocimientos matemáticos y dominarlos a la perfección, pero tras elaborar este proyecto pienso que el método de enseñanza tradicional ha dejado huecos en mi aprendizaje y realmente puedo hacer muy poco con mis conocimientos pero puedo reforzarlos intentando resolver problemas contextuales. Tras realizar estas actividades he comprendido mejor qué es saber Cálculo y enseñar Cálculo a diferencia de lo que creía anteriormente.
- Además, hacer una aportación con estas actividades para las escuelas o para proyectos futuros me hace sentir orgulloso por ser parte de una posible mejora en la educación matemática.

Referencias

Riego. (2013). Factores Académicos que Explican la Reprobación en Cálculo Diferencial Investigación

Campos, E. D. (2014). Elementos de historia del cálculo diferencial e integral.

Seoane, Milevicich. (2015). Resolviendo Problemas de Cálculo Diferencial e Integral. Estrategias y Herramientas.

Torres. (2006).

Espinoza, Z. (2010). Introducción al Cálculo mediante resolución de problemas.

Moreno, Í. y. (2010). Las Trampas de Rigor.

Tall. (1996).

Rincón Flores, C. G. (2014). El aprendizaje activo como estrategia didáctica para la enseñanza del cálculo.

Artigue. (1995).

Campos, E. D. (2014). Elementos de historia del cálculo diferencial e integral.

http://equipo1-historiadelcalculo.blogspot.mx/2011/08/resumen.html. (s.f.). Obtenido de http://equipo1-historiadelcalculo.blogspot.mx/2011/08/resumen.html

OCDE. (2015). Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.

Rincón Flores, C. G. (2014). El aprendizaje activo como estrategia didáctica para la enseñanza del cálculo.

Ruiz Faúndez, S. L. (2015). Resolviendo problemas de cálculo diferencial e integral. Estrategias y Herramientas.

Agradecimientos:

Culminar de esta manera el proyecto que dio lugar a la obtención del grado de Licenciado en Matemáticas ha sido una experiencia deslumbrante y favorecedora para mis propósitos profesionales.

Por ello, deseo agradecer rotundamente a mis padres Ana Cecila Borchardt, David Arvizu, a mis hermanas Valeria, Janeth y a mi director de tesis el Doctor Ramiro Ávila Godoy por que confiaron plenamente en mí durante la realización del proyecto y durante el transcurso por la carrera. Agradezco a mis padres por darme la vida, el sustento y una plena educación, por apoyarme para alcanzar mis sueños y cada uno de mis logros, por amarme y cuidar de mi durante mi niñez y cada vez que padecí un resfriado, por esforzarse laboralmente para mantener la economía del hogar y ayudarme a salir adelante. Agradezco a mi director de tesis Dr. Ramiro Ávila por ser no sólo mi director sino además un gran amigo en el que puedo confiar, le agradezco por creer en mí, en mis capacidades y en dedicar su tiempo en apoyarme en pulir mis habilidades para convertirme en un profesional.

También deseo expresar mi gratitud a todos mis profesores por su deseo de apoyarme en mi formación durante el transcurso que recorrí en la Licenciatura, por todos los conocimientos que implantaron en mí para mi competencia profesional. Finalmente, deseo agradecer a todos mis compañeros de la Licenciatura en Matemáticas y a todos mis amigos quienes compartieron gratas experiencias conmigo, compartimos emociones, risas, buenos y malos momentos, pero siempre en compañía, agradezco su solidaridad cuando me extendieron la mano cada vez que necesité de su apoyo.