

UNIVERSIDAD DE SONORA
División de Ciencias Exactas y Naturales
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES
Y EL CRITERIO DE FROBENIUS**

TESIS

Que para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presenta:

Misael Avendaño Camacho

Director de tesis:
Dr. Yu M. Vorobjev

Hermosillo, Sonora, México

Mayo de 2006.

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

QA641
.A94

P. 1051

Teorema Fundamental de Superficies
y el Criterio de Frobenius

Misael Avendaño Camacho



Contenido

Introducción	1
1 Nociones y Teoremas Básicos de la Teoría de EDO	7
1.1 Preliminares.	7
1.1.1 Curvas en \mathbb{R}^n	7
1.1.2 Longitud de Arco.	8
1.1.3 Cambio de Parametrización.	9
1.1.4 Campos Vectoriales.	10
1.2 Teoremas de Existencia y Unicidad para Sistemas Autónomos.	12
1.2.1 Problema de Cauchy para Sistemas Autónomos.	12
1.2.2 Retrato Fase.	14
1.2.3 Teoremas de la Función Inversa e Implícita.	14
1.2.4 Cambio de Coordenadas.	16
1.2.5 Dependencia de los Datos Iniciales y Parámetros.	16
1.3 Sistemas No Autónomos.	18
1.3.1 Sistemas Lineales.	19
2 Nociones Básicas para Superficies.	23
2.1 Teorema Fundamental de Curvas.	24
2.1.1 Ecuaciones de Frenet.	24
2.1.2 Teorema Fundamental de Curvas en el Espacio.	25
2.2 Superficies Regulares.	26
2.2.1 Superficies, Parametrizaciones y Cartas Coordenadas.	27
2.2.2 Ejemplos de Superficies en \mathbb{R}^3	28

2.2.3	Cambio de Parametrización.	30
2.2.4	Plano Tangente.	31
2.2.5	Funciones Suaves.	33
2.2.6	Campos Vectoriales.	33
2.3	Formas Fundamentales.	37
2.3.1	Primera Forma Fundamental.	37
2.3.2	Operador de Forma y Segunda Forma Fundamental.	37
2.4	Curvaturas.	40
2.4.1	Curvatura Normal.	40
2.4.2	Curvatura Gaussiana y Curvatura Media.	40
2.5	Tipos de Coordenadas.	41
2.5.1	Coordenadas Ortogonales	42
2.5.2	Coordenadas de Líneas de Curvatura.	44
2.5.3	Coordenadas de Líneas Asintóticas	45
2.6	Ejemplos.	46
2.6.1	Superficies de Curvatura Gaussiana Constante Positiva.	46
2.6.2	Superficies con $K = -1$	47
3	Criterio de Frobenius	49
3.1	Condiciones de Integrabilidad de Frobenius.	49
3.2	Criterio de Frobenius	53
3.2.1	Interpretación geométrica en el caso general.	55
3.3	Caso lineal	57
3.3.1	Criterio de Frobenius para Sistemas Lineales.	57
3.3.2	Algoritmo de Construcción de Solución para el Sistema Lineal.	62
4	Teorema fundamental de superficies en \mathbb{R}^3	67
4.1	Ecuaciones de Gauss-Codazzi.	68
4.1.1	Derivación de las condiciones de integrabilidad.	68
4.1.2	Cálculo de las matrices \mathcal{P} y \mathcal{Q}	71
4.1.3	Ecuaciones de Gauss-Codazzi en $GL(3)$	74
4.1.4	Ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi y Teorema de Gauss	78

4.2	Formulación del Teorema Fundamental.	80
4.3	Demostración del Teorema Fundamental.	82
4.3.1	Demostración de la ecuación de compatibilidad	82
4.3.2	Existencia de la superficie.	82
4.3.3	Unicidad de la superficie.	90
4.4	Ecuaciones de Gauss-Codazzi en coordenadas especiales.	93
4.4.1	Coordenadas ortogonales.	94
4.4.2	Coordenadas de líneas de curvatura.	96
4.5	Superficies con curvatura Gaussiana constante negativa	98
Apéndice		103
A.1	Operadores.	103

Introducción

Este trabajo está desarrollado en la frontera entre la teoría de ecuaciones diferenciales y la Geometría Diferencial, aquí podremos apreciar cómo dos áreas de las matemáticas se ayudan y complementan. Un resultado muy importante en la teoría de clasificación de superficies en \mathbb{R}^3 es el *Teorema Fundamental de Superficies*. Este resultado se puede dividir en dos partes con las que podemos dar respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Es posible decir que una superficie está determinada por su primera y su segunda forma fundamental?
- Dadas dos formas cuadráticas, ¿es posible construir una superficie tal que esas formas cuadráticas sean su primera y su segunda forma fundamental?

Estos problemas fueron estudiados por *Bonnet*¹ [2]; una formulación clásica de sus resultados se puede ver, desde un punto de vista moderno, en [4, 8, 14, 17]. Actualmente no es tan fácil encontrar en la literatura básica de geometría una exposición completa de estos resultados, en la mayoría de los libros se hace referencia al buen libro [14]. El propósito de este trabajo es dar un enfoque uniforme y completo sobre la solución de estos problemas que se derivan del Teorema Fundamental de Superficies en \mathbb{R}^3 y su relación con la teoría de integrabilidad de Frobenius².

La respuesta a la primera pregunta es sencilla y nos dice que la primera y la segunda forma fundamental definen de manera única una superficie,

¹Pierre Ossian Bonnet (1819-1892). Matemático Francés, hizo grandes aportaciones importantes a la teoría de superficies. Bonnet fue director de estudios en la École Polytechnique, profesor de astronomía en la facultad de ciencias en la Universidad de París.

²*George Frobenius* matemático alemán que vivió del año 1849 al 1917; fue discípulo de Weierstrass e hizo notables aportaciones en matemáticas, en particular a la teoría de representaciones de grupos.

salvo isometrías. Pero para responder satisfactoriamente la segunda pregunta necesitamos una herramienta matemática más avanzadas y que es muy posiblemente materia de estudio de cursos avanzados, esta herramienta es el *criterio de Frobenius*. Este criterio es de suma importancia para responder completa y satisfactoriamente la segunda pregunta, de la cual por el momento podemos decir que es afirmativa solo si las formas cuadráticas satisfacen ciertas condiciones llamadas *ecuaciones de compatibilidad*.

La observación principal que debemos hacer, es que la primera y la segunda forma fundamental de una superficie no son independientes, sino que están relacionadas por medio de las *ecuaciones de Peterson³-Mainardi⁴-Codazzi⁵* y la *ecuación de Gauss*. Las ecuaciones Peterson-Mainardi-Codazzi fueron originalmente probadas por Gauss usando una notación no muy digerible, y posteriormente demostradas de una forma más suave por los matemáticos a los que deben su nombre. Karl Peterson derivó estas ecuaciones en su tesis, pero esta derivación no fue conocida durante su vida. En forma casi simultánea, estas ecuaciones fueron probadas por Mainardi en 1856, pero, la formulación que dió Codazzi fue más simple porque tuvo cuidado de que sus expresiones tuvieran un significado geométrico [5, 8, 14, 15].

¿Como se puede emplear el criterio de *Frobenius* en la demostración del teorema fundamental? El criterio de Frobenius es utilizado para cubrir una parte del Teorema Fundamental que muchos textos no abordan con detalle. Recordemos la formulación del *problema de Frobenius* en su versión clásica: *si tenemos una distribución de planos en \mathbb{R}^3 , ¿Bajo que condiciones existe una familia de superficies tal que sean tangentes a cada plano de la distribución?* Este problema analíticamente es representado por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales; aquí, el criterio de Frobenius se utiliza para saber si este sistema de ecuaciones está acoplado, es decir si tiene solución común. Dicha solución representa a la familia de superficies buscada.

En forma analítica, el criterio de Frobenius es una expresión matemática llamada ecuación de compatibilidad, dicha ecuación tiene un cantidad innumerable de aplicaciones en matemáticas las cuales es posible consultar en [16]. La forma de obtener la ecuación de compatibilidad, es suponer que ex-

³Karl Mikhailovich Peterson (1828-1881) fue uno de los fundadores de la Sociedad Matemática de Moscú.

⁴Gaspere Mainardi (1800-1879) Profesor de la Universidad de Padua.

⁵Delfino Codazzi. (1824-1873). Codazzi publicó artículos sobre triángulos geodésicos, mapeos equireales y de la estabilidad de cuerpos flotantes.

iste solución común al sistema de ecuaciones, usando entonces la propiedad de igualdad de las parciales cruzadas y el sistema de ecuaciones parciales, se obtiene la ecuación de compatibilidad. El criterio de Frobenius es parte de la teoría más completa llamada *integrabilidad de Frobenius*, la cual puede ver, más a detalle en [3, 14, 17].

En el caso del Teorema Fundamental, cuando queremos construir una superficie a partir de dos formas cuadráticas, podemos plantear un sistema de ecuaciones parciales en donde están involucradas los coeficientes de estas formas cuadráticas y cuya solución geoméricamente nos da una distribución de planos que serán tangentes a la superficie que queremos construir. Al aplicar el criterio de Frobenius a estas ecuaciones, obtenemos que los coeficientes de las formas cuadráticas deben de satisfacer una ecuación de compatibilidad, que en este caso coincide precisamente con las ecuaciones de Gauss-Codazzi.

Para lograr nuestro propósito se ha dividido este trabajo en cuatro capítulos. En los primeros dos encontraremos desarrollos básicos pero importantes, tanto de la teoría de ecuaciones diferenciales como de Geometría Diferencial, en los últimos capítulos desarrollamos el criterio de Frobenius y el Teorema Fundamental de Superficies.

A continuación se dará un breve resumen de los contenidos de cada capítulo.

El Capítulo I está dedicado a la teoría básica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se inicia el capítulo con el concepto de curvas en \mathbb{R}^n y sus propiedades, las cuales aparecen a lo largo de todo el trabajo. Después aparecen conceptos y hechos básicos como el Teorema de Existencia y Unicidad, tanto para sistemas autónomos como para no autónomos. También se estudian aquí los campos vectoriales y sus flujos, y por último aparece el estudio de sistemas lineales.

El Capítulo II es de Geometría Diferencial, especialmente para el desarrollo de superficies. El capítulo comienza hablando de las ecuaciones de Frenet y el teorema fundamental de curvas en \mathbb{R}^3 . Después comenzamos con el estudio de superficies, aquí se da la definición de una superficie regular y se muestra cómo son sus parametrizaciones. Se introduce el concepto de plano tangente a la superficie, el cual nos es de utilidad para poder definir las formas fundamentales. Para la primera forma fundamental, se habla de su importancia en las cuestiones métricas sobre la superficie, y de como se expresa en términos de coordenadas locales. Con la segunda forma fundamental, introducimos el operador de forma mediante el mapeo de Gauss, el cual es un operador lineal autoadjunto, al cual le podemos asociar una forma

cuadrática, que es precisamente la segunda forma fundamental. Usando la segunda forma fundamental podemos hacer un estudio local de las superficies haciendo una clasificación local de los puntos sobre la superficie. Para esto tenemos que hablar de las curvaturas principales, que son la curvatura normal máxima y mínima que pasa por un punto; las cuales las podemos obtener con la segunda forma fundamental. Dos conceptos importante que aparecen en este punto son el de curvatura media y de curvatura gaussiana. En la parte final de este capítulo se habla de las coordenadas especiales, es decir, parametrizaciones especiales que se utilizan para representar a una superficie, en donde, como veremos en el Capítulo IV, ciertas estructuras y ecuaciones toman formas más simples. Se concluye este capítulo con ejemplo de superficies con curvatura gaussiana constante.

El Capítulo III tiene el propósito de demostrar el Teorema de Frobenius el cual nos da el criterio de Frobenius, el resultado principal que se utiliza en la demostración del Teorema Fundamental de Superficies. La primera sección de este capítulo se pretende dar un esbozo del teorema y las condiciones de integrabilidad de Frobenius, aquí se plantea un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales y se desarrollan las condiciones necesarias para que este sistema tenga solución. Después se da un tratamiento formal del Teorema de Frobenius, usando ecuaciones diferenciales parciales mediante campos vectoriales. Se enuncia y se demuestra el Teorema de Frobenius, que se utiliza para saber si el sistema está acoplado, para al final obtener la ecuación de compatibilidad o la ecuación de curvatura cero, que es la forma analítica del criterio de Frobenius. Luego se analiza el criterio de Frobenius para el caso lineal, ya que éste es el que está más cerca a lo que se hace en el Teorema Fundamental de Superficies; lo más importante de esta parte es ver la forma que tiene la ecuación de compatibilidad en estos sistemas. Por último, se presenta un algoritmo que puede ser usado numéricamente para construir una solución al sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

El Capítulo IV es la parte central de este trabajo, todo lo que aparece en los capítulos anteriores es utilizado aquí para demostrar el Teorema Fundamental de Superficies. Se inicia el capítulo derivando las ecuaciones de Gauss-Codazzi, las cuales, como habíamos mencionado anteriormente, dan una relación entre la primera y la segunda forma fundamental. La forma en que se presenta aquí estas ecuaciones es diferente a la que se puede ver comúnmente en libros de Geometría Diferencial como [4, 8, 14, 15]. Aquí están expresadas usando una notación matricial, la cual facilitará la demostración del Teorema Fundamental. Después se enuncia formalmente del Teorema Fundamental de Superficies, dándose algunos comentarios al

respecto. Para la demostración del Teorema Fundamental, primero se demuestra la unicidad de su solución, para esto se utilizan hechos y resultados de Álgebra Lineal y el teorema de Existencia y Unicidad de EDO; después se demuestra la existencia de la superficie dadas sus dos formas cuadráticas, usando como resultado fuerte el Teorema de Frobenius.

Por último, se presentan las ecuaciones de Gauss-Codazzi en coordenadas especiales, como son las coordenadas ortogonales y las coordenadas de líneas de curvatura, en las cuales estas ecuaciones se simplifican. Por último, se presenta una aplicación de el teorema fundamental sobre las superficie de curvatura gaussiana $K = -1$, en cuyo caso las ecuaciones de Gauss-Codazzi son equivalentes a una ecuación conocida con Sine-Gordon.

Agradecimientos 1 *Deseo agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología el apoyo que se me brindó para la realización de este trabajo, con el que participé como becario en el proyecto "Fenómenos de singularidad en sistemas dinámicos y ecuaciones no lineales" con número N-43208.*

Aprovecho el momento para agradecer a todos mis profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora por compartir e invertir en mi tiempo y sus conocimientos, los cuales sin duda han contribuido para que yo pudiera culminar con éxito esta carrera. Especialmente quiero agradecer al Dr. Yu. M. Vorobjev, Dr. Rubén Flores Espinoza, M.C. Guillermo Dávila, Dr. Martín Gildardo García, Dr. Fernando Verduzco González, y al profesor Marco Antonio Valencia Arvizu, por su valiosa ayuda y por el tiempo dedicado en leer y revisar este trabajo y cuyas correcciones, críticas y comentarios hicieron posible que este trabajo saliera adelante.

En lo personal, quiero dar gracias a dios por darme siempre la oportunidad de vivir y de influir un poco en mi futuro. A mi familia por su amor y su apoyo incondicional que me dieron para yo pudiera salir adelante, a mi padre el Sr. Ramón Avendaño cuyos invaluable consejos, apoyo y ejemplo de entrega al trabajo fueron un impulso muy grande para mi y a mis hermanas por compartir conmigo momentos muy importantes de mi niñez. Además, deseo reconocer y agradecer el cariño, apoyo y experiencias vividas con todos los amigos que he tenido a lo largo de mi vida, en particular a Héctor Manuel León con quien he tenido la fortuna de compartir experiencia muy agradables. Hago un agradecimiento muy especial a la Profesora Ana Domíngua Quijada y a su familia por su sincera amistad, apoyo y afecto, además deseo confesar que en cierto sentido ella es culpable de que yo decidiera estudiar esta carrera.

Por último, y no menos importante, deseo agradecer a mi Novia Paola

Viridiana Ramos García y a su familia por todo su amor; comprensión, consejos, compañía y momentos agradable que he compartido con ella; y además por que se ha convertido en el motor de mi vida. Pido disculpas a todas las personas que compartieron conmigo momentos importantes y que las he omitido por descuido, para ellos también mis sinceros agradecimientos.

Capítulo 1

Nociones y Teoremas Básicos de la Teoría de EDO

1.1 Preliminares.

1.1.1 Curvas en \mathbb{R}^n .

Una *curva parametrizada* en \mathbb{R}^n es una función $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde (a, b) es un intervalo abierto en \mathbb{R} , dada por

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

donde la variable t se conoce como parámetro. El conjunto imagen de la curva, $\mathbf{x}[(a, b)] \subset \mathbb{R}^n$, es llamado la traza de \mathbf{x} . Cabe señalar la diferencia que existe entre una curva y su traza. La curva es una función vectorial que depende de una sola variable y su traza es un subconjunto de \mathbb{R}^n que consiste de todos los puntos imágenes de la curva.

Se define la *derivada* de un curva parametrizada $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \left(\frac{d}{dt}x_1(t), \frac{d}{dt}x_2(t), \dots, \frac{d}{dt}x_n(t) \right). \quad (1.1.1)$$

Una curva parametrizada es *suave* si tiene derivadas continuas de todos los órdenes.

Como usualmente las curvas son funciones que dependen de un solo parámetro, denotaremos la derivada de una función vectorial suave por

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t),$$

siempre que no exista confusión respecto a qué variable se está derivando.

Si la curva $\mathbf{x}(t)$ es suave, entonces la función $\mathbf{x}'(t)$ es nuevamente una curva parametrizada suave, el cual es un vector tangente a la curva $\mathbf{x}(t)$ y se le conoce como el vector velocidad de la curva $\mathbf{x}(t)$; y a su magnitud se conoce como la rapidez del vector velocidad. Denotemos por

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|},$$

al vector tangente unitario a la curva en el punto.

Recuérdese que una curva suave parametrizada $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice *regular* si

$$\mathbf{x}'(t) \neq 0$$

para todo $t \in (a, b)$.

1.1.2 Longitud de Arco.

Se define la *longitud de arco* de una curva suave parametrizada $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ desde un punto fijo t_0 a un punto t por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}'(t)\| dt, \quad (1.1.2)$$

donde :

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}(t)\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}(t)\right)^2}.$$

Si dejamos variar el parámetro t a lo largo del intervalo (a, b) , tenemos que s es una función real que mide la longitud de la curva en el intervalo (t_0, t) . Además, si la curva es regular, entonces la función longitud de arco es diferenciable con respecto a la variable t , y

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{x}'(t)\| \neq 0, \quad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Dada una curva parametrizada $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos definir la curva $\mathbf{y} : (-b, -a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(-t)$. En este caso la traza de \mathbf{y} es igual a la traza de \mathbf{x} , salvo que las dos trayectorias son recorridas en distintos sentidos. Diremos entonces que estas dos curvas difieren por un cambio de orientación.

1.1.3 Cambio de Parametrización.

Sea $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva suave regular. Aquí el parámetro t de la curva $\mathbf{x}(t)$ toma valores en el intervalo (a, b) . Podemos obtener una curva con la misma traza de \mathbf{x} , sólo que ahora su parámetro tome valores en otro conjunto abierto de la recta real distinto del intervalo (a, b) . Consideremos una función suave $h : (a, b) \rightarrow (c, d)$ tal que

$$\frac{dh}{dt} \neq 0 \text{ para todo } t \in (a, b). \quad (1.1.3)$$

La condición (1.1.3) garantiza la existencia de una función $h^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ tal que $h \circ h^{-1} \equiv \text{id}$ (función identidad). Construyamos la función $\mathbf{y} : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x} \circ h^{-1}(s). \quad (1.1.4)$$

La curva $\mathbf{y}(s)$ es regular, como se puede comprobar fácilmente. Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d\mathbf{y}(s)}{ds} = \mathbf{x}'(t) \frac{dh^{-1}(s)}{ds} \neq 0.$$

Una función suave h que cumple con la condición (1.1.3) es llamada *cambio de parametrización*. Al definir una curva regular \mathbf{y} a través de otra curva \mathbf{x} dada, utilizando la fórmula 1.1.4, obtenemos dos curvas regulares $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(s)$ con la misma traza. Estas dos curvas pueden estar definidas en dos abiertos distintos, pudiendo diferir sólo en la velocidad de recorrido e incluso en la orientación de las mismas. Es importante mencionar aquí que la velocidad y orientación dependen del valor y signo que posea la derivada de la función h .

Consideremos la función longitud de arco $s(t)$ (1.1.2) de una curva regular. Como habíamos señalado anteriormente, $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{x}'(t)\| \neq 0$. Por tanto $s(t)$ es una función que puede ser utilizada como un cambio de parametrización. Siempre podemos hacer un cambio de coordenadas de una curva regular \mathbf{x} usando la función longitud de arco, obteniendo una curva con orientación positiva y de rapidez unitaria, debido a que

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{x}'(t) \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = 1.$$

Los conceptos acerca de curvas que se han estudiado hasta aquí, se pueden consultar para más precisión en [4, 8, 14, 15].

1.1.4 Campos Vectoriales.

Consideremos el espacio vectorial \mathbb{R}^n . Un campo vectorial suave es una función $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$, donde cada $v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave para $i = 1, 2, \dots, n$, es decir, las componentes $v_j(\mathbf{x})$ son funciones que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes o de clase C^∞ . En forma geométrica un campo vectorial es una función que a cada punto de \mathbb{R}^n le asocia un vector en \mathbb{R}^n . Denotemos $\chi(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todos los campos vectoriales en \mathbb{R}^n el cual es un espacio vectorial real. Como veremos más adelante los campos vectoriales nos ayudan a definir ecuaciones diferenciales. Algunos resultados importantes de ecuaciones diferenciales son formulados y/o demostrados de forma compacta utilizando operaciones definidas en el espacio $\chi(\mathbb{R}^n)$. Estas dos operaciones son conocidas como *derivada de Lie* y el *corchete de Lie*; a continuación recordaremos cómo están definidas estas operaciones.

Derivada de Lie.

Sea $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ al espacio de todas las funciones reales suaves definidas en \mathbb{R}^n . La derivada de Lie a lo largo del campo vectorial $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \chi(\mathbb{R}^n)$ es una función $L_{\mathbf{v}} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definida por

$$L_{\mathbf{v}}f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (1.1.5)$$

Por tanto, de la fórmula (1.1.5) podemos ver que $L_{\mathbf{v}}$ es operador diferencial de primer orden que cumple las siguientes condiciones:

(i) *Linealidad:* Para todo $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$L_{\mathbf{v}}(f + g) = L_{\mathbf{v}}(f) + L_{\mathbf{v}}(g);$$

(ii) *La regla de Leibniz:*

$$L_{\mathbf{v}}(fg) = fL_{\mathbf{v}}(g) + gL_{\mathbf{v}}(f);$$

(iii) $L_{\mathbf{v}+f\mathbf{w}} = L_{\mathbf{v}} + fL_{\mathbf{w}}$, para todo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \chi(\mathbb{R}^n)$.

El mapeo $\mathbf{v} \mapsto L_{\mathbf{v}}$ nos da una correspondencia *uno a uno* entre el espacio $\chi(\mathbb{R}^n)$ y el espacio de los operadores lineales en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfacen (i) y (ii).

Corchete de Lie.

El corchete de Lie es una operación bilineal en el espacio $\chi(\mathbb{R}^n)$. Sean \mathbf{v} y \mathbf{w} dos campos vectoriales suaves en \mathbb{R}^n , se define el *corchete de Lie* de \mathbf{v} y \mathbf{w} como el campo vectorial

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{v}, \mathbf{w}](\mathbf{x}),$$

cuyas componentes están dadas por:

$$u_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \left(v_j \frac{\partial}{\partial x_j} w_i - w_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right), \quad (1.1.6)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo 1.1.1 *Calculemos el corchete de Lie de los campos vectoriales en el plano*

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1), \quad \mathbf{w}(x_1, x_2) = (x_1, x_2).$$

Usando la fórmula (1.1.6), las componentes del corchete son:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0.$$

El corchete de Lie posee las siguientes propiedades.

(i) *Regla de Leibniz.* Para cada función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suave, tenemos:

$$[\mathbf{v}, f\mathbf{w}] = \mathbf{L}_{\mathbf{v}}(f\mathbf{w}) + f[\mathbf{v}, \mathbf{w}];$$

(ii) *Antisimetría.*

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}];$$

(iii) *Identidad de Jacobi.* Para cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$, campos vectoriales en \mathbb{R}^n , se cumple

$$[[\mathbf{v}, \mathbf{w}], \mathbf{u}] + [[\mathbf{w}, \mathbf{u}], \mathbf{v}] + [[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}] = 0.$$

Es inmediato de la propiedad (ii), que si dos campos \mathbf{v}, \mathbf{w} conmutan, es decir, si $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{w}, \mathbf{v}]$, entonces

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0.$$

1.2 Teoremas de Existencia y Unicidad para Sistemas Autónomos.

Comenzaremos esta parte definiendo una ecuación diferencial ordinaria (EDO) para *sistemas autónomos*. Para este tipo de ecuaciones se establece la existencia de solución, resultado que se conoce como el *Teorema de Existencia y Unicidad*. Aquí sólo enunciaremos estos resultados, sin demostración, invitando a los interesados en ellas a consultar [1, 9, 10, 12].

1.2.1 Problema de Cauchy para Sistemas Autónomos.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales en el espacio euclidiano \mathbb{R}^n :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (1.2.1)$$

donde $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$ es un campo vectorial suave bien definido en un subconjunto abierto \mathcal{D} de \mathbb{R}^n , es decir, las componente $v_j(\mathbf{x})$ son funciones que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes o de clase C^∞ . El problema de Cauchy consiste en encontrar una función vectorial suave que satisfaga la ecuación (1.2.1) y que tome un valor dado en un tiempo inicial.

Una función vectorial $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ suave, se dice ser solución al problema de Cauchy,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)), \quad t \in (-\delta, \delta),$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}. \quad (1.2.2)$$

si para un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$ dado, existe un $\delta > 0$ tal que la función $\mathbf{x} : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{D}$ esta bien definida y satisface (1.2.1) y (1.2.2)

La curva suave parametrizada $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{D}$ generada por la solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema (1.2.1),

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad -\delta < t < \delta\} \quad (1.2.3)$$

es llamada una *trayectoria* (órbita) de la ecuación (1.2.1) que pasa por el punto \mathbf{p} en el tiempo $t = 0$.

Para una función $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ podemos definir su evolución a través de la trayectoria γ (1.2.3) usando la Derivada de Lie (1.1.5) a lo largo del campo $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ por la fórmula

$$(\mathbf{L}_{\mathbf{v}}F)(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n v_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (1.2.4)$$

de las ecuaciones (1.2.1) y (1.2.4) se sigue que

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{x}(t)) = (\mathbf{L}_{\mathbf{v}}F)(\mathbf{x}(t)).$$

Una función suave F en \mathcal{D} se dice ser *integral primera* del sistema (1.2.1) si para cada $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{D}$ la función F es constante a lo largo de la trayectoria que pasa a través del punto \mathbf{p}_0 , es decir, si

$$(\mathbf{L}_{\mathbf{v}}F)(\mathbf{x}(t)) = 0.$$

El siguiente resultado es el conocido Teorema de Existencia y Unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Este teorema nos garantiza la existencia de una única solución al sistema (1.2.1). En particular lo usaremos aquí para resolver o garantizar la existencia de soluciones de los sistema de ecuaciones ordinarias que se presenten en este trabajo, además de que nos será de mucha utilidad para completar la demostración al Teorema de Frobenius y el Teorema Fundamental de Superficies.

Teorema 1.2.1 *Sea $\mathbf{v} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, un campo vectorial suave, definido en un abierto \mathcal{D} de \mathbb{R}^n . Entonces para cada $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{D}$, existe un $\delta > 0$ y una única función suave $\mathbf{x} : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{D}$, tal que \mathbf{x} es solución de el sistema (1.2.1) y (1.2.2).*

El teorema (1.2.1) dice que existe una función vectorial suave que pasa por un punto fijo \mathbf{p}_0 , la cual está bien definida y es suave en un intervalo abierto centrado en el punto $t = 0$. Dicho intervalo se conoce como *dominio de definición de la solución*; se define el *máximo intervalo de existencia*, como el máximo intervalo de definición donde la solución es continua. Vamos a decir que una trayectoria del sistema (1.2.1) es *completa* si su máximo intervalo de definición es toda la recta real; esto significa que la solución $\mathbf{x}(t)$ al problema de Cauchy (1.2.1), (1.2.2) es continua para todo $t \in (-\infty, \infty)$. Si el campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ del sistema (1.2.1), está bien definido en todo el espacio \mathbb{R}^n ; vamos a decir que $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ es completo si para cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$

la trayectoria del sistema (1.2.1) que pasa por el punto \mathbf{p} es completa. Léase [10] si se desea un desarrollo más profundo de lo anterior.

Comprenderemos mejor las ideas anteriores con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.1 Consideremos el siguiente sistema en \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2, \\ x(0) &= 1,\end{aligned}$$

cuya solución es

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

El campo $v(x) = x^2$ no es completo en \mathbb{R} , ya que la solución es discontinua para $t = 1$. Esta solución posee como intervalo máximo de existencia al intervalo $(-\infty, 1)$.

1.2.2 Retrato Fase.

Vamos a definir el *Retrato Fase* o *Espacio Fase* del sistema (1.2.1) como el conjunto de trayectorias que pasa por cada punto \mathbf{p} de \mathcal{D} y que son generadas por alguna solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema (1.2.1). En términos geométricos, el teorema (1.2.1) establece que hay una única trayectoria del espacio fase en \mathbb{R}^n que pasa a través de un punto dado \mathbf{p} .

Un punto $\mathbf{x}^* \in \mathcal{D}$ es un punto singular del campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ si $\mathbf{v}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Una solución constante $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ es llamado un punto fijo o un punto de equilibrio del sistema (1.2.1)

1.2.3 Teoremas de la Función Inversa e Implícita.

Aunque estos teoremas no son exclusivos de ecuaciones diferenciales, son muy importantes en puntos cruciales para los propósitos de este trabajo. Recordemos que una función $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ del conjunto abierto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ al conjunto abierto $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo si

- (i) \mathbf{f} es una función suave;
- (ii) Existe la función inversa $\mathbf{f}^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$, es decir, \mathbf{f} es uno a uno;
- (iii) \mathbf{f}^{-1} es suave.

En particular, la matriz jacobiana asociada a f

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right) \right]$$

es no degenerada, es decir,

$$\det \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right) \right] \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}.$$

Sea $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función bien definida, donde \mathcal{U} es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Concentremos nuestra atención en un punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{U}$ y supongamos que $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{z}_0$. Nuestro propósito es resolver la ecuación

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{z}_0, \quad (1.2.5)$$

en una vecindad de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. De forma más precisa, esperamos probar que el conjunto de puntos (\mathbf{x}, \mathbf{y}) que se encuentre en una vecindad de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ y tales que $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{z}_0$, sea la gráfica de una función $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. El conjunto de puntos (\mathbf{x}, \mathbf{y}) que se encuentran en una vecindad de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ y que cumplen la condición (1.2.5) se conoce como *conjunto de nivel de \mathbf{z}_0 para f*

Bajo varias hipótesis se puede demostrar que tal función existe, es única, y es suave. La condición principal que podemos señalar aquí es que

$$\det \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{\partial y_j} \right] \neq 0. \quad (1.2.6)$$

Entonces podemos formular el *Teorema de la Función Implícita* de la siguiente manera.

Teorema 1.2.2 *Sea $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave bien definida, donde \mathcal{U} es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Sea $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{U}$ un punto tal que $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{z}_0$ y se satisface la condición (1.2.6). Entonces en una vecindad del punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, el conjunto de nivel de \mathbf{z}_0 para f es la gráfica de una única función suave \mathbf{g} tal que $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$.*

Ahora presentaremos el *Teorema de la Función Inversa*, el cual se utiliza para saber si una función de $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo local.

Teorema 1.2.3 *Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave. Si para algún $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$, la matriz jacobiana asociada en f es no degenerada en el punto \mathbf{p} , entonces f es un difeomorfismo de una vecindad de \mathbf{p} a una vecindad de $f(\mathbf{p})$.*

Un estudio más minucioso de los Teoremas 1.2.2 y 1.2.3, que incluye sus demostraciones, puede ser consultado en [11, 13].

1.2.4 Cambio de Coordenadas.

Es posible obtener un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de un sistema dado, a través de un *cambio de coordenadas*. Consideremos la EDO (1.2.1) definida para la variable \mathbf{x} . Si tenemos una función $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ es un difeomorfismo, entonces en la nueva variable $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ el sistema (1.2.1) tiene la forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{y}),$$

donde las componentes del campo $\mathbf{w}(\mathbf{y})$ están definidas por

$$w_i(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))}{\partial x_j} v_j(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})).$$

La función \mathbf{f} es conocida como *función de cambio de coordenadas*.

Ejemplo 1.2.2 *Un oscilador armónico en coordenadas cartesianas es representado por el sistema de ecuaciones*

$$\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = x_1.$$

El cambio de coordenadas cartesianas a polares está dado por las ecuaciones

$$(x_1, x_2) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Derivando la expresión anterior con respecto a la variable t y usando las ecuaciones del oscilador armónico tenemos

$$\dot{r} = 0, \dot{\theta} = 1.$$

1.2.5 Dependencia de los Datos Iniciales y Parámetros.

Sea $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$ la única solución al sistema de ecuaciones (1.2.1) tal que $\mathbf{x}(0, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$, con $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$ fijo. Si ahora variamos el punto \mathbf{p} sobre el conjunto \mathcal{D} , tenemos que la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$ depende suavemente con respecto a la variable \mathbf{p} . Entonces es posible plantear un sistema de ecuaciones equivalente a (1.2.1),

(1.2.2) de tal forma que resulte evidente la dependencia de la solución con respecto a las condiciones iniciales. Este sistema de ecuaciones es:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t, \mathbf{p}_0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t, \mathbf{p}_0)), \quad (1.2.7)$$

$$\mathbf{x}(0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0. \quad (1.2.8)$$

Por tanto, podemos formular una versión del teorema de existencia y unicidad en el cual se establece una dependencia suave de la solución $\mathbf{x}(t)$ con respecto al punto inicial .

Teorema 1.2.4 *Para cada $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{D}$, existen $\epsilon > 0$, una vecindad \mathcal{D}_0 de \mathbf{p} en \mathcal{D} y una función suave*

$$\mathbf{x} : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.2.9)$$

tal que satisface (1.2.7),(1.2.8).

Como la función \mathbf{x} de la que se trata en el teorema 1.2.4 depende suavemente del punto inicial \mathbf{p}_0 , podemos omitir el subíndice y denotar por $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$ a la solución la sistema (1.2.7), (1.2.8). La función vectorial \mathbf{x} (1.2.9), suave con respecto a las variables $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, posee las siguientes propiedades

(i) *Invariancia bajo el cambio de la variable t* : Para cada $\tau \in \mathbb{R}$ constante,

$$\mathbf{x}(t + \tau, \mathbf{p}),$$

también es solución de (1.2.1).

(ii) *Propiedad de grupo*: para cada $t \in \mathbb{R}$ y $\tau \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}(\tau, \mathbf{p})) = \mathbf{x}(t + \tau, \mathbf{p}).$$

Muchas veces deben considerarse ecuaciones diferenciales que dependen de uno o varios parámetros. Entonces la solución de esos sistemas dependerá también de esos parámetros.

Ejemplo 1.2.3 *La ecuación*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = k\mathbf{x},$$

tiene por solución $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 e^{k(t-t_0)}$, la cual depende de t, t_0, \mathbf{p}_0 y del parámetro k .

Esta material puede encontrarse con un enfoque más amplio en [1, 12].

1.3 Sistemas No Autónomos.

Los sistemas de ecuaciones planteados por (1.2.7) y (1.2.8) se conocen como sistemas autónomos, ya que el campo vectorial \mathbf{v} depende sólo de la variable de estado \mathbf{x} , y a su vez, la variable \mathbf{x} es una función suave en la variable t . Si el campo vectorial \mathbf{v} también depende suavemente de la variable t , es decir, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, se dice que el sistema es no autónomo. Consideremos el sistema no autónomo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \quad (1.3.1)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{p}. \quad (1.3.2)$$

Donde $\mathbf{v} : (a, b) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave definido en un intervalo abierto (a, b) de \mathbb{R} y en un conjunto abierto \mathcal{D} de \mathbb{R}^n . Como en el caso autónomo, queremos encontrar un función vectorial suave $\mathbf{x}(t)$ que satisfaga la condición (1.3.2) para un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$ fijo.

Ejemplo 1.3.1 *El sistema no lineal*

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = t,$$

$$(x_1, x_2)(0) = (0, 0),$$

tiene por solución

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2} \right)$$

Como podemos ver, la solución es no diferenciable en el origen.

Como es de esperarse, existe también una versión del teorema de existencia y unicidad para sistemas no autónomos, el cual daremos sin demostración, misma que puede encontrarse en [1, 10, 12].

Teorema 1.3.1 *Sea $\mathbf{v} : (a, b) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial suave definido en un intervalo abierto (a, b) de \mathbb{R} y en un conjunto abierto \mathcal{D} de \mathbb{R}^n . Dados $t_0 \in (a, b)$ y $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$ existen un $\delta > 0$ y una única función $\mathbf{x} : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathcal{D}$ tal que \mathbf{x} es solución al sistema (1.3.1), (1.3.2).*

1.3.1 Sistemas Lineales.

Consideremos el sistema autónomo (1.2.1), (1.2.2). Supongamos que el campo vectorial \mathbf{v} es *lineal*, entonces existe una matriz $\mathbf{A} \in \text{GL}(n)$, tal que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Así obtenemos un sistema lineal de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.3.3)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{p}. \quad (1.3.4)$$

El sistema (1.3.3), (1.3.4) siempre tiene por solución $\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{p}$.

Si ahora consideramos el sistema no autónomo (1.3.1), (1.3.2) y que el campo vectorial $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ también es lineal en \mathbf{x} , entonces existe una función matricial suave $\mathbf{A}(t)$ tal que:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t),$$

con lo que obtenemos un sistema lineal no autónomo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad (1.3.5)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{p}. \quad (1.3.6)$$

Es claro que, tanto en el sistema autónomo como en el no autónomo, la función $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$, es solución cuando $\mathbf{p} = \mathbf{0}$; dicha función se conoce como la solución trivial. Por unicidad, si una solución pasa por cero para algún valor inicial, entonces dicha solución tiene que ser idénticamente cero.

Sea $\mathbf{x}(t)$ una solución al sistema (1.3.5), (1.3.6). Supongamos que deseamos encontrar una función matricial suave $\mathbf{G} : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \text{gl}(n)$ tal que

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{p}. \quad (1.3.7)$$

Si derivamos (1.3.7) con respecto a t e igualamos con (1.3.5), obtenemos una ecuación diferencial que debe ser satisfecha por la matriz \mathbf{G} ,

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t), \quad (1.3.8)$$

sujeta a

$$\mathbf{G}(t_0) = \mathbf{I} \quad (1.3.9)$$

El sistema (1.3.8), (1.3.9) es llamado sistema lineal o también se le conoce como *ecuación matricial asociada*. Existe una versión del teorema de existencia y unicidad para resolver el sistema (1.3.8), (1.3.9).

Teorema 1.3.2 Sea

$$\mathbf{A} : (a, b) \rightarrow \text{GL}(n)$$

una función matricial suave. Entonces para cada $t_0 \in (a, b)$ existe un $\delta > 0$ y una función matricial suave $\mathbf{G} \in \text{GL}(n)$ definida en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tal que satisface el sistema (1.3.8), (1.3.9).

A la función matricial \mathbf{G} que es solución de (1.3.8), (1.3.9) se le conoce como *solución fundamental* del sistema (1.3.5), (1.3.6). Esto se debe a que si se conoce explícitamente la matriz \mathbf{G} , para cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, podemos encontrar una función que sea solución al sistema de ecuaciones (1.3.5), (1.3.6) mediante la fórmula (1.3.7). De manera más precisa, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3 Supongamos que la función $\mathbf{G} : (a, b) \rightarrow \text{GL}(n)$ es solución al sistema matricial (1.3.8), (1.3.9) asociado al sistema (1.3.5). Entonces para cada $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ la función vectorial

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(t) \mathbf{p},$$

es solución del sistema de ecuaciones (1.3.5), (1.3.6).

En la Proposición (1.3.3) podemos apreciar la importancia de la *solución fundamental* \mathbf{G} . Conociendo la solución fundamental \mathbf{G} , podemos obtener cualquier solución al sistema (1.3.5), (1.3.6) usando la ecuación (1.3.7). La solución fundamental \mathbf{G} posee además las siguientes propiedades importantes.

Proposición 1.3.4 Sea la función matricial $\mathbf{G} \in \text{GL}(n)$ solución fundamental del sistema (1.3.8), (1.3.6), entonces \mathbf{G} tiene las siguientes propiedades.

- (i) $\mathbf{G}(t)$ es solución fundamental si y solo si $\det \mathbf{G}(t) \neq 0$.
- (ii) Si $\mathbf{x}(t)$ es una solución de (1.3.5), (1.3.6), entonces $\mathbf{x}(t)$ se puede expresar en términos de la solución fundamental por medio de la ecuación (1.3.7).

Caso ortogonal.

El propósito de esta parte es mostrar algunos casos especiales de sistemas de ecuaciones lineales, los cuales nos serán de utilidad en capítulos posteriores.

Una matriz \mathbf{C} de $n \times n$ es *ortogonal* si $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$. Aquí \mathbf{C}^T denota la matriz transpuesta de \mathbf{C} . La siguiente proposición es un hecho que se sigue inmediatamente de la definición del producto matricial.

Proposición 1.3.5 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una matriz $\mathbf{C} \in \text{GL}(n)$:*

- (1) \mathbf{C} es ortogonal,
- (2) los vectores columnas de \mathbf{C} son ortonormales,
- (3) los vectores renglón de \mathbf{C} son ortonormales.

Los siguientes resultados, son un caso especial de la ecuación diferencial (1.3.8), donde la matriz asociada a esta sistema es ortogonal.

Proposición 1.3.6 *Supongamos que la función matricial $\mathbf{B}(t) = [b_{ij}(t)]$ es antisimétrica para todo t , $\mathbf{B}^T(t) = -\mathbf{B}(t)$. Si $\mathbf{C} \in \text{GL}(n)$ es una matriz ortogonal y si la función matricial $\mathbf{G}(t)$ es solución de*

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt}(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{G}(t), \quad \mathbf{G}(t_0) = \mathbf{C},$$

entonces $\mathbf{G}(t)$ es una matriz ortogonal para todo t .

La conclusión de la Proposición 1.3.6 sigue siendo válida si en la ecuación diferencial que se plantea en este resultado cambiamos el orden de multiplicación de las matrices que ahí aparecen.

Corolario 1.3.7 *Bajo las mismas hipótesis de la Proposición (1.3.6), la solución fundamental $\mathbf{G}(t)$ del sistema lineal*

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt}(t) = \mathbf{G}(t) \mathbf{B}(t),$$

es ortogonal.

Por último en la siguiente proposición se presenta un resultado dual al de la proposición (1.3.4).

Proposición 1.3.8 *Sean*

$$\mathbf{e}_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{e}_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

...

$$\mathbf{e}_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

funciones suaves. Supongamos que $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)\}$ es una base ortonormal en \mathbb{R}^n para todo $t \in (a, b)$. Entonces existe una función matricial $\mathbf{B}(t) = [b_{ij}(t)]$ tal que:

$$[\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t), \dots, \mathbf{e}'_n(t)] = [\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)] \mathbf{B}(t);$$

además $\mathbf{B}(t)$ es antisimétrica cuyas componentes son $b_{ij} = \langle \mathbf{e}'_j, \mathbf{e}_i \rangle$.

En [9, 10, 12] es posible encontrar una exposición sencilla y clara de los sistemas lineales.

Capítulo 2

Nociones Básicas para Superficies.

Este capítulo está dedicado completamente a explorar conceptos básicos de Geometría Diferencial, especialmente para el estudio de superficies. El capítulo comienza hablando de las ecuaciones de Frenet y el teorema fundamental de curvas en \mathbb{R}^3 . Después iniciamos con el estudio de superficies, con la definición de una superficie regular y se muestra como podemos parametrizarla. Se estudia el concepto de plano tangente a la superficie, el cual nos es de utilidad para poder definir los siguientes conceptos: las formas fundamentales, funciones suaves sobre superficies regulares y para poder hablar de campos vectoriales. En el caso de las formas fundamentales, podemos decir en este momento, que la primera forma fundamental tiene mucha importancia en las cuestiones métricas sobre la superficie. Con la segunda forma fundamental, introducimos el operador de forma mediante el mapeo de Gauss, el cual es un operador lineal autoadjunto, al cual le podemos asociar una forma cuadrática, que es precisamente la segunda forma fundamental. Usando la segunda forma fundamental, podemos hacer un estudio local de las superficies haciendo una clasificación local de los puntos sobre la superficie. Para esto tenemos que hablar de las curvaturas principales, que son la curvatura normal máxima y mínima en un punto; las cuales podemos obtener con la segunda forma fundamental. Dos conceptos importantes que aparecen en este punto son el de la curvatura media y la curvatura gaussiana. En la parte final de este capítulo se habla de las coordenadas especiales, en el capítulo IV veremos, que ciertas estructuras y ecuaciones toman formas más simples en estos tipos de coordenadas. Se concluye este capítulo con ejemplos de superficies con curvatura gaussiana constante.

2.1 Teorema Fundamental de Curvas.

2.1.1 Ecuaciones de Frenet.

Iniciaremos este capítulo con el estudio de las propiedades de curvas en \mathbb{R}^3 , donde

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3.\}$$

es el espacio euclidiano. Denotemos el producto interior usual de dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^3 x_j y_j,$$

el cual un *operador bilineal y simétrico*.

Sea $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular (ver sección (1.1)) parametrizada por su longitud de arco s . Denotemos el vector tangente a la curva por

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s). \quad (2.1.1)$$

El vector tangente $\mathbf{t}(s)$ tiene longitud unitaria. Se puede probar que la norma $\|\mathbf{x}''(s)\|$ de la segunda derivada mide la velocidad con la que cambia el ángulo que forma el vector tangente a la curva en s . Por tanto, $\|\mathbf{x}''(s)\|$ mide que tan rápido la curva se aleja de su recta tangente en s , en una vecindad de dicho punto. Definimos la curvatura de \mathbf{x} en s como:

$$\kappa(s) \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{x}''(s)\|. \quad (2.1.2)$$

En los puntos donde $\kappa(s) \neq 0$, podemos definir un vector unitario $\mathbf{n}(s)$ en la dirección del vector $\mathbf{x}''(s)$ por la ecuación

$$\mathbf{x}''(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s).$$

El vector $\mathbf{n}(s)$ es ortogonal a $\mathbf{t}(s)$, ya que: $\langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}'(s) \rangle = 1$. Derivando con respecto a s tenemos que $\langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s) \rangle = 0$. Además por 2.1.1 y 2.1.2

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s)$$

Los vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ definen un plano llamado el plano osculador, cuyo vector normal es conocido como el vector binormal y se define como

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s),$$

donde la operación "×" denota el producto vectorial en \mathbb{R}^3 , entonces el conjunto

$$\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\} \quad (2.1.3)$$

es una base ortonormal para \mathbb{R}^3 asociado a la curva α en el punto $\alpha(s)$. Si dejamos variar el punto s en todo el intervalo (a, b) , entonces tenemos una base ortonormal móvil a lo largo de toda la curva, al conjunto $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ se le conoce como el *marco móvil de Frenet*. Una forma de analizar el comportamiento de una curva a lo largo de toda la trayectoria es analizando su marco móvil 2.1.3 a través del tiempo. Si calculamos la derivada con respecto al parametro s , de los vectores del marco de Frenet (2.1.3), podemos expresar estas derivadas, denotadas por \mathbf{t}' , \mathbf{n}' , \mathbf{b}' , como una combinación lineal de $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, ya que es una base ortonormal para \mathbb{R}^3 . Entonces tenemos:

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s), \quad (2.1.4)$$

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s) \mathbf{t}(s) + \tau(s) \mathbf{b}(s), \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s) \mathbf{n}(s), \quad (2.1.6)$$

aquí la función $\tau(s)$ se conoce como torsión y mide el cambio del plano osculador a lo largo de la curva \mathbf{x} . Las ecuaciones (2.1.4), (2.1.5) y (2.1.6) son conocidas como las *ecuaciones de Frenet-Serret*. En forma vectorial las ecuaciones de Frenet toman la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Teorema Fundamental de Curvas en el Espacio.

Recapitulando lo que hemos estudiado anteriormente, si tenemos una curva regular parametrizada por la función longitud de arco s , con curvatura $\kappa(s)$ y torsión $\tau(s)$, todo el comportamiento de la curva está plasmado en las ecuaciones de Frenet-Serret (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6). De manera recíproca, el teorema fundamental de curvas establece que si tenemos $\kappa(s)$, $\tau(s)$ funciones suaves que satisfacen la ecuaciones de Frenet, entonces existe una única (salvo isometrías) curva regular cuya curvatura y torsión son precisamente $\kappa(s)$, $\tau(s)$. El teorema es un resultado de existencia y unicidad, donde la existencia de la curva es una aplicación de la teoría de EDO y la unicidad de la curva es bajo transformaciones en el espacio llamadas *movimientos rígidos* que son transformaciones que preservan longitudes y

ángulos. Antes de continuar comentemos con más detalle lo que son los movimientos rígidos.

Denotemos por $GL(n)$ al conjunto de las *matrices reales de orden n* ; el conjunto de matrices ortogonales, denotado por $O(n)$ es un subconjunto de $GL(n)$ tal que

$$O(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{A} \in GL(n) : \det \mathbf{A} = 1 \}.$$

Una transformación lineal en \mathbb{R}^3 es una *rotación si y solo si* la matriz asociada a la transformación es ortogonal. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación definida por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (2.1.7)$$

con $\mathbf{A} \in O(n)$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. La transformación \mathbf{F} definida por 2.1.7 es un movimiento rígido.

Ahora estamos preparados para formular el Teorema Fundamental de Curvas en el espacio.

Teorema 2.1.1 *Sean $\kappa(s) > 0$ y $\tau(s)$ funciones suaves definidas en el intervalo (a, b) . Supongamos que $\kappa(s) > 0$ $\tau(s)$ satisfacen las ecuaciones de Frenet 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6. Entonces existe una curva regular $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que s es el parámetro de longitud de arco, $\kappa(s)$ es su curvatura y $\tau(s)$ es la torsión de α . Más aún, si existe otra curva regular β con curvatura $\kappa(s)$ y torsión $\tau(s)$, entonces existe un movimiento rígido \mathbf{F} tal que*

$$\alpha(s) = \mathbf{F} \circ \beta(s) \quad \text{para toda } s \in (a, b).$$

El lector interesado en profundizar en las ecuaciones de Frenet y el Teorema fundamental de superficies puede consultar [3, 4, 8, 14, 15, 17].

2.2 Superficies Regulares.

De manera intuitiva, una superficie regular en \mathbb{R}^3 se obtiene, tomando piezas de un plano y deformándolo "suavemente", de tal manera que la figura resultante no tenga vértices, aristas o autointersecciones. Podemos ver a una superficie regular como un conjunto \mathbb{R}^3 que se obtiene pegando pedazos suavemente deformados del plano. Iniciemos esta sección dando la definición formal de superficie regular, que englobe las características anteriores. Todo el material de estudio de esta sección se puede consultar en [4, 8, 13, 14].

2.2.1 Superficies, Parametrizaciones y Cartas Coordenadas.

En geometría diferencial se estudian las propiedades locales de las superficies, para lograr esto se utilizan técnicas de cálculo diferencial. La definición 2.2.1 de superficie regular requiere que cada punto de la superficie y una vecindad de él éste contenido en una carta coordenada, es decir, que cada punto que este en dicha carta puede ser caracterizado por las coordenadas locales correspondientes a la vecindad como si se tratara como un conjunto en el plano euclidiano. A pesar de esto, un punto puede estar contenido en más de una carta coordenada y por lo tanto se puede representar de mas de una forma distinta; sin embargo, algunas propiedades que son objeto de estudio en geometría no deben depender de la parametrización que se elija para representar una vecindad del punto. De este asunto nos encargaremos más adelante, ahora vamos a dar nuestra primera definición importante de este trabajo: *superficie regular*.

Definición 2.2.1 *Un subconjunto $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular, si para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ existe una vecindad V del punto \mathbf{p} en \mathbb{R}^3 y una función $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap \mathcal{M}$ de un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ tal que:*

(i) \mathbf{x} es diferenciable, es decir, para $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$, con $(u, v) \in U$, las funciones x_i son suaves, para $i = 1, 2, 3$.

(ii) \mathbf{x} es un homeomorfismo, esto significa que \mathbf{x} es continua, biyectiva, y su inversa \mathbf{x}^{-1} también es continua.

(iii) (Condición de regularidad). Para cada $\mathbf{q} \in U$, el diferencial de \mathbf{x} , $d\mathbf{x}_{\mathbf{q}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$d\mathbf{x}_{\mathbf{q}} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial v} \right] \quad (2.2.1)$$

tiene rango 2.

Más adelante, veremos que la condición (iii) garantiza la existencia de un plano tangente a la superficie.

La función $\mathbf{x}(u, v)$ es llamada una *parametrización*, o *un sistema de coordenadas locales* en una vecindad de \mathbf{p} . El subconjunto $V \cap \mathcal{M}$ que contiene al punto \mathbf{p} y está contenido en la superficie \mathcal{M} es llamada una *vecindad coordenada* o *carta coordenada*; en lo sucesivo denotaremos simplemente por V a la vecindad coordenada de un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Todas las vecindades coordenadas $V \subset \mathcal{M}$ del punto \mathbf{p} constituyen una *topología relativa* en \mathcal{M} .

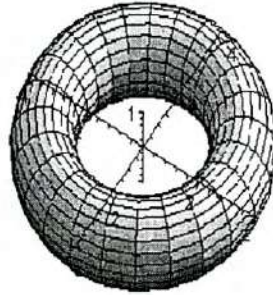


Figura 2.1: Parametrización del toro:

$$\mathbf{x}(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u).$$

2.2.2 Ejemplos de Superficies en \mathbb{R}^3

Para ilustrar la Definición 2.2.1 presentaremos algunos ejemplos de superficies. Estos ejemplos; en algunos casos particulares, pueden ser usados como criterios para decidir si un subconjunto de \mathbb{R}^3 es una superficie regular sin recurrir directamente a la Definición 2.2.1.

Superficies de revolución.

Una superficie de revolución se obtiene girando una curva plana alrededor de un eje de revolución contenido en el plano de la curva. Sea $\alpha(v) = (f(v), g(v)) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización de la curva C contenida en el plano x_1x_3 , el conjunto \mathcal{M} que se obtiene al rotar la curva C sobre el eje x_3 , es decir,

$$\mathcal{M} = \{(f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) : v \in (a, b), u \in [0, 2\pi]\}.$$

es una superficie regular, la cual puede ser completamente cubierta con dos cartas coordenadas.

Gráficas de funciones.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, la gráfica de f es un subconjunto en \mathbb{R}^3 tal:

$$\text{graf } f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = f(x_1, x_2)\}.$$

En el siguiente resultado estableceremos que las gráficas de funciones suaves son superficies regulares.

Proposición 2.2.1 *Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave definida en un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^2 , entonces $\text{graf } f$ es una superficie regular.*

Valores Regulares.

Decidir en algunos casos si un subconjunto en \mathbb{R}^3 es una superficie regular directamente de la definición puede resultar un trabajo muy tedioso. En la siguiente proposición estableceremos un criterio para comprobar cuándo un subconjunto es una superficie regular sin usar directamente la Definición (2.2.1). Antes de formular dicha proposición definamos algunos conceptos importantes.

Sea $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función suave definida en un conjunto abierto de \mathbb{R}^n ; se dice que $\mathbf{p} \in U$ es un *punto crítico* de \mathbf{F} si el diferencial $d\mathbf{F}_{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{p}} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_j}(\mathbf{p}) \right],$$

no es un *operador suprayectivo* (sobre). La imagen $\mathbf{F}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^m$ de un punto crítico es llamado *valor crítico* de \mathbf{F} . Un punto de \mathbb{R}^m que no es un valor crítico es llamado un *valor regular* de \mathbf{F} .

Recordemos además que la imagen inversa de un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ como el conjunto

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{p} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{a}\}.$$

Proposición 2.2.2 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $a \in f(U)$ un valor regular de f , entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular.*

Ejemplo 2.2.1 *La esfera unitaria como subconjunto en el espacio es*

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}. \quad (2.2.2)$$

Es una superficie regular, que tiene como una parametrización a la función

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}),$$

para la vecindad coordenada $H \cap S^2$ donde

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0.\}$$

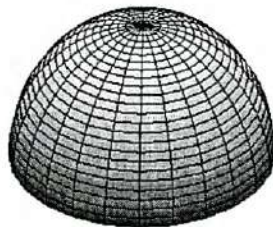


Figura 2.2: Parametrización de la esfera:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Para cubrir completamente a la esfera necesitamos 5 parametrizaciones más, similares a la mostrada en (2.2.2). También podemos ver que la esfera unitaria es superficie regular usando la Proposición (2.2.2). Para esto definamos la función $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = 1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, como el cero es un valor regular de F , entonces por la Proposición (2.2.2) se sigue que el conjunto $\mathbf{F}^{-1}(0)$ es una superficie regular, y en este caso $\mathbf{F}^{-1}(0) = S^2$.

Estos ejemplos, proposiciones y sus demostraciones pueden ser encontrados con todo detalle, por ejemplo, en el capítulo 2 de [4].

2.2.3 Cambio de Parametrización.

Si un punto está en dos cartas coordenadas, es posible pasar de una parametrización a la otra a través de una transformación diferenciable que se conoce como

función de transición. Esto nos permite decir que una propiedad es invariante bajo un *cambio de parametrización* ó que *no depende de la parametrización*, si esta propiedad no se modifica bajo un cambio de coordenadas.

Sea \mathbf{p} un punto de una superficie regular \mathcal{M} , y supongamos que $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ son dos parametrizaciones de \mathcal{M} tal que $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$. Se define la *función de transición* $\mathbf{h} : V \rightarrow U$ por

$$\mathbf{h} = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} \quad (2.2.3)$$

Proposición 2.2.3 *Dadas dos parametrizaciones $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie \mathcal{M} con $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) \neq \emptyset$ se tiene que la función de transición \mathbf{h} 2.2.3 es un difeomorfismo.*

Una demostración de este hecho se puede encontrar en [4, 8, 14]. Es fácil probar que todo difeomorfismo $\mathbf{h} : V \rightarrow U$ puede ser utilizado como una función de transición. Con lo que tenemos una correspondencia biunívoca entre los difeomorfismos en el plano y las funciones de transición (2.2.3)

2.2.4 Plano Tangente.

El propósito primordial de esta parte es mostrar que la condición (iii) de la definición 2.2.1 de una superficie regular \mathcal{M} garantiza que para cada punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ el conjunto de vectores tangentes a curvas parametrizadas, contenidas en \mathcal{M} y que pasan a través de \mathbf{p} , constituyen un plano.

Se dice que una curva regular $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ está en la superficie regular \mathcal{M} si la imagen directa del intervalo (a, b) bajo la curva α es un subconjunto de \mathcal{M} , en pocas palabras, $\alpha[(a, b)] \subset \mathcal{M}$, de aquí en adelante indicaremos en el contradominio de estas curvas que están sobre la superficie. Por un *vector tangente* a \mathcal{M} en el punto \mathbf{p} vamos a considerar el vector tangente $\alpha'(0)$ de una curva regular $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$. El conjunto de vectores tangente a \mathcal{M} en el punto \mathbf{p} ,

$$T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha'(0) : \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}, \alpha(0) = \mathbf{p} \}, \quad (2.2.4)$$

es llamado el plano tangente. En la siguiente proposición se establece que el plano tangente a una superficie es un espacio vectorial, una prueba de este hecho se encuentra en [4, 8, 14].

Proposición 2.2.4 *Sea $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$, una parametrización de una superficie regular \mathcal{M} y sea $(u_0, v_0) \in U$. El conjunto de vectores tangente a*

\mathcal{M} en el punto $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}$ constituye un espacio vectorial de dimensión 2; más aún,

$$T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} = d\mathbf{x}_{(u_0, v_0)}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3.$$

El espacio tangente $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ no depende de la parametrización que se elija para representar a una vecindad del punto \mathbf{p} , pero al tomar una parametrización \mathbf{x} se determina una base para el espacio $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, dada por

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\},$$

la cual es llamada la *base asociada a \mathbf{x}* . Para facilitar calculos posteriores es conveniente escribir

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0) = \mathbf{x}_v(u_0, v_0).$$

Los vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$, que forman una base para $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, son llamados vectores coordenados.

Calculemos las coordenadas de un vector $\mathbf{a} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ en la base asociada a la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$. Como el vector \mathbf{a} es tangente a la superficie \mathcal{M} , entonces \mathbf{a} es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva regular $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$ donde $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ esta dada por $\beta(t) = (u(t), v(t))$, con $\beta(0) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$, entonces,

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(u(t), v(t))(0) \\ &= u'(0) \mathbf{x}_u(u(0), v(0)) + v'(0) \mathbf{x}_v(u(0), v(0)) = \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Entonces, en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, el vector \mathbf{a} tiene coordenadas $(u'(0), v'(0))$.

La recta que pasa por un punto \mathbf{p} de una supercie y es perpendicular a $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ se llama *normal* a la supercie en el punto \mathbf{p} . A cualquier vector de esta recta se llama *vector normal* en \mathbf{p} . Para una vecindad coordenada $V \subset \mathcal{M}$ podemos definir un vector normal en cada punto $\mathbf{p} \in V$ a través de la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ por:

$$\mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \quad (2.2.5)$$

Si dejamos correr \mathbf{p} a través del conjunto $V \subset \mathcal{M}$ tenemos una función definida en un abiero de \mathcal{M} , la cual como veremos a continuación es una función suave y un campo normal unitario.

2.2.5 Funciones Suaves.

Entre los conceptos más importantes del Cálculo de varias variables están las funciones suaves que van de un abierto de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m . Es posible construir funciones bien definidas sobre una superficie regular \mathcal{M} , el interés principal es dar un criterio sobre cuando estas funciones son suaves. Sea $f : V \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto abierto V de una superficie regular \mathcal{M} . Entoces se dice que f es suave en $\mathbf{p} \in V$ si para alguna parametrización $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U) \subset V$, la composición $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}$ es suave en el punto $\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$. La función f es suave en V si esta función es diferenciable en todos los puntos de V . Como se puede notar, para que una función sea suave es necesario que exista una parametrización, sin embargo la diferenciableidad es propiedad de la función, y no depende de parametrización alguna.

La definición de diferenciableidad puede ser extendida fácilmente a funciones entre superficies. Una función continua $\varphi : V_1 \subset \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ de un abierto V_1 de una superficie regular \mathcal{M}_1 a una superficie regular \mathcal{M}_2 se dice ser diferenciable en el punto $\mathbf{p} \in V_1$ si dadas las parametrizaciones

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow \mathcal{M}_1, \quad \mathbf{x}_2 : U_2 \rightarrow \mathcal{M}_2,$$

con $\mathbf{p} \in \mathbf{x}_1(U_1)$ y $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$, la función

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

es diferenciable en $\mathbf{q} = \mathbf{x}_1^{-1}(\mathbf{p})$.

2.2.6 Campos Vectoriales.

En la Sección (1.1) se recordó el concepto de campos vectoriales en \mathbb{R}^n , ahora desarrollaremos el concepto de campos vectoriales en superficies regulares. Un campo vectorial en el plano es una función definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ que asigna a cada punto $\mathbf{q} = (u, v) \in U$ un vector $\mathbf{w}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2$. El campo vectorial \mathbf{w} se dice que es suave si al escribir el campo vectorial $\mathbf{w}(u, v) = (a(u, v), b(u, v))$, las funciones a y b son funciones suaves en U .

Definición 2.2.2 *Un campo vectorial \mathbf{w} suave definido en un conjunto abierto $V \subset \mathcal{M}$ de una superficie regular \mathcal{M} es una función que asigna a cada punto $\mathbf{p} \in V$ un vector $\mathbf{w}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ y cumple que para alguna parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ en \mathbf{p} , la función $a(u, v)$ y*

$b(u, v)$ dadas por:

$$\mathbf{w}(u, v) = a(u, v) \mathbf{x}_u + b(u, v) \mathbf{x}_v,$$

son suaves en el punto (u, v) .

En particular los vectores \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son campos vectoriales suaves.

Una curva regular conexa $C \subset \mathcal{M}$ contenida en una superficie regular, se dice ser una *curva integrable* del campo vectorial $\mathbf{w} : \mathcal{M} \rightarrow T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ si para cada punto $\mathbf{p} \in C$ el vector $\mathbf{w}(\mathbf{p})$ es tangente a C en \mathbf{p} .

Se puede comprobar fácilmente que la definición de diferenciabilidad para campos vectoriales en superficies no depende de la parametrización de la superficie que se elija. Con el concepto de campo vectorial sobre una superficie podemos definir ecuaciones diferenciales sobre la superficie, trayectorias, campos de direcciones, curvas integables; y también podemos extender algunos teoremas y resultados importantes.

Aquí enunciaremos un teorema que será de gran utilidad en secciones y capítulos posteriores, este resultado nos dice que es posible construir una parametrización de una superficie regular, usando dos campos vectoriales linealmente independientes. Un planteamiento más formal de este teorema y su demostración puede ser consultado en [4, 14, 17].

Teorema 2.2.5 Sean \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 dos campos vectoriales en un conjunto abierto $V \subset \mathcal{M}$, los cuales son linealmente independientes en algún punto $\mathbf{p} \in V$. Entonces es posible parametrizar una vecindad $V_0 \subset V$ de \mathbf{p} de tal manera que para cada $(u, v) \in V_0$ las líneas de coordenadas de esta parametrización que pasan a través de (u, v) son tangentes a las líneas determinadas por $\mathbf{w}_1(u, v)$ y $\mathbf{w}_2(u, v)$.

Orientabilidad.

Vamos a decir que una *superficie regular es orientable* si es posible cubrir la superficie con una familia de vecindades coordenadas de tal manera que si un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ está en dos vecindades coordenadas de esta familia, entonces el jacobiano (véase la fórmula 1.2.3 de ser necesario) de la función de transición es positivo en \mathbf{p} . La elección de tal familia es llamada una *orientación de \mathcal{M}* , y a \mathcal{M} en este caso se dice que está *orientada*. Si tal elección no es posible la superficie es *no orientable*. Como hemos comentado anteriormente, cada punto \mathbf{p} de una superficie regular \mathcal{M} admite un plano tangente $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, cuando tomamos una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ de una vecindad V del punto \mathbf{p} siempre es posible definir un campo normal unitario al espacio $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, dado por el vector \mathbf{N} de la ecuación (2.2.5). Esto induce una orientación para el espacio $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, más aún este campo normal

es suave en cada punto de la vecindad V . Cuando tenemos una superficie regular cubierta por varias cartas coordenadas, la mayor dificultad para saber si dicha superficie es orientable es cuando un punto se encuentra en la intersección de varias cartas coordenadas. Supongamos entonces que el punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ está en la intersección de dos cartas coordenadas correspondientes a las parametrizaciones $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$ y $\mathbf{y} : W \rightarrow \mathcal{M}$; vamos a determinar una orientación del plano tangente $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ correspondiente a la base asociada $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, usando el campo vectorial normal (2.2.5). Si escribimos la base $\{\mathbf{y}_w, \mathbf{y}_z\}$ asociada a la parametrización $\mathbf{y}(w, z)$ en términos de la base asociada a la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ tenemos:

$$\mathbf{y}_w = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial w} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial w},$$

$$\mathbf{y}_z = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial z} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial z},$$

donde $u = u(w, z)$ y $v = v(w, z)$ son las expresiones del cambio de coordenadas. Las bases $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ y $\{\mathbf{y}_w, \mathbf{y}_z\}$ determinan la misma orientación del $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ si y solo si el determinante de la *matriz jacobiana*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial w} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial w} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix}$$

de la función de transición es positivo.

Para comprobar si una superficie regular está orientada debemos comprobar la existencia de una familia de cartas coordenadas en donde la función de transición sea positiva en la intersección de dos cartas coordenadas. Esto es algo que en la práctica puede resultar muy difícil y tedioso de checar; es necesario entonces usar otras formas alternativas para decidir si una superficie es orientable o no. Una de ellas es a través de campos vectoriales normales a la superficie. Entendemos por un *campo suave de vectores normales unitarios* en un conjunto abierto $V \subset M$ una función $\mathbf{N} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada punto $\mathbf{p} \in V$ un vector normal unitario $\mathbf{N}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3$ a \mathcal{M} en el punto \mathbf{p} .

Proposición 2.2.6 *Una superficie regular $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si y sólo si existe una campo vectorial de vectores normales unitarios $\mathbf{N} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ en \mathcal{M} .*

El Diferencial de una Función Suave.

Supongamos que \mathcal{M} y \mathcal{N} son dos superficies regulares en \mathbb{R}^3 , y $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es una función suave. El diferencial de φ en \mathbf{p} , denotado por $d\varphi_{\mathbf{p}}$, es una transformación lineal de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ a $T_{\varphi(\mathbf{p})}\mathcal{N}$ definida por

$$d\varphi_{\mathbf{p}}(\alpha'(0)) = (\varphi \circ \alpha)'(0),$$

donde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ es una curva suave en \mathcal{M} tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$. el diferencial de φ está bien definido, ya que si α, β son dos curvas en \mathcal{M} tales que $\alpha(0) = \beta(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \beta'(0)$, entonces por la regla de la cadena $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$.

Como mencionamos líneas arriba, el diferencial de φ es una transformación lineal y como tal posee una representación matricial.

Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ una curva parametrizada con $\alpha(0) = \mathbf{p}$, definimos la curva $\beta = \varphi \circ \alpha$; esta curva está contenida en la superficie \mathcal{N} y $\beta(0) = \varphi(\mathbf{p})$. Sean $\mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{y}(w, z)$ parametrizaciones de en vecindades de \mathbf{p} y $\varphi(\mathbf{p})$, respectivamente. Supongamos que φ está expresado en coordenadas locales por $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$, y que la curva α está dada por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Entonces

$$\beta(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t))),$$

y la expresión de $\beta'(0)$ en la base $\{\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v\}$ es

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(0) \right). \quad (2.2.6)$$

La ecuación (2.2.6) muestra que $\beta'(0)$ depende sólo del mapeo φ y de las coordenadas $(u'(0), v'(0))$ del vector \mathbf{a} en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, en forma vectorial tenemos:

$$\beta'(0) = d\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}, \quad (2.2.7)$$

es decir, $d\varphi_{\mathbf{p}}$ es una transformación lineal de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ a $T_{\varphi(\mathbf{p})}\mathcal{N}$ cuya representación matricial está dada por (2.2.7).

2.3 Formas Fundamentales.

2.3.1 Primera Forma Fundamental.

Esta sección está dedicada al estudio de las estructuras geométricas que podemos encontrar en una superficie regular. El concepto más importante para poder estudiar estas cuestiones métricas es la primera forma fundamental. Sea \mathcal{M} una superficie regular, para cada punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ es posible inducir un producto interior en el plano tangente $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, el cual denotaremos por $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{p}}$. Si $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, entonces $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_{\mathbf{p}}$ es igual al producto interior usual de los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ en \mathbb{R}^3 . Como el producto interior es un operador bilineal, podemos asignar una forma cuadrática $I_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{w}\|^2 \geq 0. \quad (2.3.1)$$

La forma cuadrática $I_{\mathbf{p}}$ en $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, definido por la ecuación (2.3.1), es llamada *primera forma fundamental* de la superficie regular \mathcal{M} en el punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$.

Geoméricamente, la primera forma fundamental nos permite hacer mediciones y calculos en la superficie como longitudes de curvas, ángulos entre vectores tangentes, áreas de regiones. La primera forma fundamental en términos de la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ asociada a la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ es:

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (2.3.2)$$

donde:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle, \quad (2.3.3)$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, además $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ son funciones suaves.

2.3.2 Operador de Forma y Segunda Forma Fundamental.

Dada una superficie regular \mathcal{M} y una parametrización $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$ de una vecindad coordenada, se define el *Mapeo de Gauss* de \mathcal{M}

$$\mathbf{N} : \mathcal{M} \rightarrow S^2$$

por

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|},$$

el cual es un campo suave normal unitario. Si calculamos el diferencial de \mathbf{N} de $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ obtenemos un mapeo lineal de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ a $T_{\mathbf{N}(\mathbf{p})}S^2$ definida por

$$d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\alpha'(0)) = (\mathbf{N} \circ \alpha)'(0), \quad (2.3.4)$$

como de costumbre $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ es una curva suave con $\alpha(0) = \mathbf{p}$.

Se sigue de la definición de $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}$ que

$$d\mathbf{N}(\mathbf{x}_u) = \mathbf{N}_u, \quad d\mathbf{N}(\mathbf{x}_v) = \mathbf{N}_v.$$

Como el plano tangente a S^2 en el punto $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ es perpendicular a $\mathbf{N}(\mathbf{p})$, entonces $T_{\mathbf{N}(\mathbf{p})}S^2$ y $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ son paralelos, podemos considerar que $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}$ es una transformación lineal de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ en sí mismo.

Una característica importante del operador $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ se establece en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1 *La transformación lineal $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ definida en la ecuación (2.3.4) es autoadjunta, es decir,*

$$\langle d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\mathbf{y}) \rangle.$$

El operador autoadjunto $-d\mathbf{N}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ es llamado el *operador de forma de la superficie \mathcal{M} en \mathbf{p}* . Podemos asociar una forma bilinear simétrica al operador $-d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}$ por

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = -\langle d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle, \quad \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}. \quad (2.3.5)$$

La forma cuadrática $II_{\mathbf{p}}$ definida en $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ por 2.3.5 es llamada la *segunda forma fundamental* de \mathcal{M} en \mathbf{p} .

A fin de facilitar la comprensión de las definiciones y el resultado geométrico que presentaremos más adelante, en la siguiente proposición enunciaremos las propiedades más importantes de los operadores autoadjuntos.

Se dice que un operador lineal $\mathbf{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ definido en un espacio vectorial \mathbf{V} con producto interior, es *autoadjunto* si $\langle \mathbf{A}v, w \rangle = \langle v, \mathbf{A}w \rangle$ para todos los vectores $v, w \in \mathbf{V}$.

Proposición 2.3.2 *Sea $\mathbf{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ un operador lineal autoadjunto, entonces existe una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de \mathbf{V} tal que:*

(1) *Existen λ_1, λ_2 con $\lambda_1 \geq \lambda_2$ que satisfacen:*

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \lambda_2\mathbf{e}_2,$$

es decir, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ son los eigenvectores de \mathbf{A} .

(2) En la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la matriz de \mathbf{A} es diagonal cuyos elementos son λ_1, λ_2 .

(3) Los eigenvalores λ_1, λ_2 con $\lambda_1 \geq \lambda_2$ son el máximo y el mínimo de la forma cuadrática asociada a \mathbf{A} .

Es posible expresar la segunda forma fundamental usando coordenadas locales, consideremos una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ en un punto \mathbf{p} de una superficie regular M . Sea $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ una curva en \mathcal{M} con $\alpha(0) = \mathbf{p}$, el vector tangente a $\alpha(t)$ en \mathbf{p} es

$$\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$$

y

$$d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\alpha') = \mathbf{N}'(u(t), v(t)) = \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v'.$$

Como \mathbf{N}_u y \mathbf{N}_v pertenecen a $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, podemos escribir

$$\mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v,$$

$$\mathbf{N}_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v,$$

y por lo tanto

$$d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v;$$

en consecuencia

$$d\mathbf{N} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Otra manera de expresar la segunda forma fundamental en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ está dada por

$$II_{\mathbf{p}}(\alpha') = e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2,$$

aquí

$$e = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \quad (2.3.6)$$

$$f = -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad (2.3.7)$$

$$g = -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \quad (2.3.8)$$

2.4 Curvaturas.

En esta parte, daremos una interpretación geométrica a la segunda forma fundamental, algunas de estas propiedades geométricas se derivan del hecho de que el diferencial del mapeo de Gauss es un operador lineal autoadjunto.

2.4.1 Curvatura Normal.

Sea C una curva regular contenida en la superficie regular \mathcal{M} y que pase por un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, sea k la curvatura de C en \mathbf{p} , y $\cos \theta = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$, donde \mathbf{n} es el vector normal a C y \mathbf{N} es el vector normal a la superficie M en \mathbf{p} . Definamos la *curvatura normal* de C en \mathbf{p} por

$$k_n = k \cos \theta.$$

En otras palabras, k_n mide la longitud de la proyección del vector $k\mathbf{n}$ sobre el vector normal a la superficie. Para dar una interpretación geométrica de la segunda forma fundamental, consideremos la curva regular $C \subset M$ parametrizada por $\alpha(s)$ con $\alpha(0) = \mathbf{p}$, entonces se puede comprobar que

$$II_p(\alpha'(0)) = \langle \mathbf{N}, k\mathbf{n} \rangle(\mathbf{p}) = k_n(\mathbf{p}).$$

El valor de la segunda forma fundamental para un vector unitario en $T_p\mathcal{M}$ es igual a la curvatura normal de una curva regular que pasa por el punto \mathbf{p} .

2.4.2 Curvatura Gaussiana y Curvatura Media.

Los eigenvalores λ_1, λ_2 del operador de forma $-dN_p$ son llamadas las *curvaturas principales* de \mathcal{M} en \mathbf{p} , los eigenvectores unitarios de $-dN_p$ son llamadas las *direcciones principales*. Denotemos la *curvatura Gaussiana* por $K(\mathbf{p})$ y la *curvatura media* como $H(\mathbf{p})$ las cuales están definidas como:

$$K(\mathbf{p}) = \det(-dN_p), \quad H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-dN_p),$$

es decir,

$$K(\mathbf{p}) = \lambda_1 \lambda_2, \quad H(\mathbf{p}) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

El siguiente resultado es muy importante, ya que establece la relación entre las curvaturas media y gaussiana con las formas fundamentales. Pruebas a estos hechos se encuentran en [4, 8, 14].

Proposición 2.4.1 Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$ una parametrización de una superficie regular \mathcal{M} , consideremos los coeficientes de I,II (2.3.2), (2.3.5) asociados a la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$. Entonces

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{eE - 2fF + gG}{EG - F^2}.$$

Con el operador de forma y las curvaturas media y gaussiana podemos tener caracterizados los distintos tipos de comportamiento de una superficie en una vecindad de un punto, lo cual motiva a hacer la siguiente clasificación de puntos en \mathcal{M} van en función del comportamiento de las curvaturas media y gaussiana en un punto dado.

Un punto \mathbf{p} de una superficie regular \mathcal{M} es llamado:

- (i) *Elíptico* si $\det(d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}) > 0$.
- (ii) *Hiperbólico* si $\det(d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}) < 0$.
- (iii) *Parabólico* si $\det(d\mathbf{N}_{\mathbf{p}}) = 0$, pero $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}} \neq 0$.
- (iv) *Planar* si $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}} = 0$.
- (v) *Umbilical* si las curvatura principales λ_1, λ_2 son iguales.

De un particular interés serán para nosotros las direcciones asintóticas. Sea \mathbf{p} un punto en una superficie regular \mathcal{M} . Una dirección asintótica de \mathcal{M} en \mathbf{p} es una dirección en $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ tal que la curvatura normal es cero. Una curva asintótica de \mathcal{M} es una curva regular conexa $C \subset \mathcal{M}$ para la cual, la línea tangente en cada punto de la curva C es una dirección asintótica.

2.5 Tipos de Coordenadas.

En esta sección presentaremos algunas parametrizaciones especiales para superficies regulares que tienen características peculiares, en particular nos interesa ver qué forma tienen las formas fundamentales en esas coordenadas. Entre las más importantes están aquellas cuyos vectores coordenados son ortogonales, o que además son paralelos a las direcciones principales, además

el teorema 2.2.5 nos da condiciones bajo las cuales es posible encontrar coordenadas especiales en cada punto de una superficie.

Antes de presentar estos tipo de coordenadas, recordemos que la primera forma fundamental puede ser utilizada para resolver cuestiones métricas sobre una superficie regular. Sea \mathcal{M} una superficie, supongamos que tenemos dos curvas $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$, $\beta : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$, las cuales se intersectan en $t = t_0$ formando un ángulo θ , para el cual se cumple

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

En particular, el ángulo ϕ entre dos curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ es

$$\cos \phi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle}} = \frac{F}{EG};$$

de esto se sigue que las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ son ortogonales *si y solo si* $F(u, v) = 0$ para todo (u, v) , y tal parametrización es llamada una *parametrización ortogonal*.

Consideremos ahora solo una curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$, entonces la longitud de arco s de la curva es

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(t)\| dt,$$

en términos de la primera forma fundamental

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

En particular, si $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ está contenida en una vecindad coordenada correspondiente a la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$, la longitud de arco la podemos calcular por la expresión

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2} dt.$$

2.5.1 Coordenadas Ortogonales

Una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ definida en un vecindad V de una superficie regular \mathcal{M} se dice ser *ortogonal* si los vectores coordenados son ortogonales,

$$F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad (2.5.1)$$

para todo $(u, v) \in V$. De manera natural podemos preguntarnos; si dado un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ de una superficie regular, ¿podemos encontrar una parametrización definida en una vecindad del punto \mathbf{p} que sea ortogonal? La respuesta se sigue casi de inmediato del teorema 2.2.5.

Proposición 2.5.1 *Para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ existe una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ definida en una vecindad V de \mathbf{p} tal que los vectores coordenados $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ son ortogonales en toda la vecindad V .*

El teorema 2.2.5 dice que si tenemos dos campos vectoriales en una superficie que son linealmente independientes, entonces podemos encontrar una parametrización tal que los vectores coordenados sean paralelos en cada punto a los campos vectoriales. Entonces, para construir una parametrización ortogonal en una superficie regular \mathcal{M} , para cada punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ elijamos una parametrización arbitraria $\mathbf{y}(\mathbf{w}, z)$ en una vecindad de \mathbf{p} y apliquemos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a los vectores coordenados $\mathbf{y}_w, \mathbf{y}_z$. Con esto hemos contruido un campo suave de vectores ortonormales, entonces por el teorema 2.2.5 existe una parametrización ortogonal en definida en una vecindad del punto \mathbf{p} , como dicho punto fue arbitrario, esto se cumple para cada punto de la superficie.

Ilustremos estas ideas mostrando una parametrización ortogonal a una curva regular.

Ejemplo 2.5.1 *La parametrización para la esfera, S^2 , dada por*

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \text{sen } \phi, \cos \theta), \quad (2.5.2)$$

donde $0 < \theta < \pi$ y $0 < \phi < 2\pi$, son conocidas como coordenadas esféricas; la parametrización (2.5.2) cubre toda la circunferencia menos un semicírculo contenido en el plano xz y sus polos. Calculando las derivadas parciales de la parametrización (2.5.2) tenemos

$$\mathbf{x}_\theta(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \text{sen } \phi, -\text{sen } \theta)$$

$$\mathbf{x}_\phi(\theta, \phi) = (\text{sen } \theta \text{sen } \phi, \text{sen } \theta \cos \phi, 0),$$

la primera forma fundamental para S^2 es

$$I = r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2,$$

es decir

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \text{sen}^2 \theta,$$

esto comprueba el hecho que las curvas coordenadas asociadas a la parametrización $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ son ortogonales.

2.5.2 Coordenadas de Líneas de Curvatura.

En esta parte tenemos el propósito de mostrar que existe una parametrización de *coordenadas de líneas de curvatura*, es decir, aquellas coordenadas que son paralelas a las direcciones principales de la superficie, y después estudiar la ecuación de Gauss-Codazzi en este tipo de coordenadas. Supongamos que \mathcal{M} es una superficie regular en \mathbb{R}^3 , $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathcal{M}$ es una parametrización y $\mathbf{p}_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ es un punto *no umbilical*. Esto significa que el operador $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}_0}$ tiene 2 valores propios distintos. Como $d\mathbf{N}$ es suave, existe un conjunto abierto U_0 de U que contiene a (u_0, v_0) tal que $\mathbf{y}(u, v)$ no tiene punto umbilicales en todo el subconjunto abierto U_0 . Haciendo uso del álgebra lineal, podemos escribir las fórmulas de los dos vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ de $d\mathbf{N}$ en U_0 y ver que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son funciones suaves en U_0 . Como $d\mathbf{N}$ es autoadjunto con dos valores propios distintos, \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son perpendiculares. Por el teorema 2.2.5, podemos encontrar un cambio de coordenadas tal que los vectores coordenados \mathbf{y}_u y \mathbf{y}_v sean paralelos a \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . Esto significa que existe un parametrización $\mathbf{x} : U \rightarrow M$, tal que \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son paralelos a \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 respectivamente. Como $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$, entonces en esta nuevas coordenadas se tiene:

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Pero como \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son las direcciones principales, el operador $d\mathbf{N}$ es *diagonalizable* con respecto a la base dada por sus vectores propio. Por tanto

$$f = 0.$$

En otra palabras, las dos formas **I**, **II** son diagonalizables. Tal parametrización es llamada *coordenadas de línea de curvatura*.

Con esto hemos probado

Proposición 2.5.2 Si $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie y $\mathbf{p}_0 \in M$ es un punto no umbilical, entonces existe una parametrización de Líneas de curvatura $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ cerca de \mathbf{p}_0 , es decir,

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad f = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = 0,$$

lo que es equivalente a

$$\mathbf{I} = Edu^2 + Gdv^2, \quad \mathbf{II} = e du^2 + g dv^2.$$

Ejemplo 2.5.2 Un ejemplo interesante y simple de coordenadas de líneas de curvatura es el cilindro. Consideremos la parametrización del cilindro

mejor conocida, como coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{x}(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v), \quad \text{con } 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}.$$

Es fácil probar que necesitamos dos cartas para cubrir el cilindro. Los vectores coordenados son:

$$\mathbf{x}_u = (-r \sin u, r \cos u, 0),$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 0, 1),$$

y el vector normal

$$\mathbf{N} = (\cos u, \sin u, 0).$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental son $E = r^2$, $F = 0$ y $G = 1$, por tanto

$$I = r^2 du^2 + dv^2,$$

Si ahora calculamos los coeficientes de la segunda forma fundamental tenemos $e = -1$, $f = 0$ y $g = 0$, entonces

$$II = -du^2.$$

Resumiendo, como $F = 0$, las coordenadas cilíndricas son una parametrización ortogonal, pero, más aún, como $f = 0$ entonces es una parametrización de líneas de curvatura.

2.5.3 Coordenadas de Líneas Asintóticas

Recordemos que una dirección asintótica es aquella donde la curvatura normal se anula, y una curva asintótica es aquella en la que la tangente en cada punto de la curva es una dirección asintótica. Una aplicación más del teorema 2.2.5 es la existencia de una parametrización en la que los vectores coordenados sean paralelos a las curvas asintóticas. Una curva asintótica es solución de la ecuación

$$e(u')^2 + f(u'v') + g(v')^2 = 0 \quad (2.5.3)$$

aquí, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental. En una vecindad de un punto hiperbólico \mathbf{p} , tenemos que $eg - f^2 < 0$

Después de realizar algunas operaciones podemos descomponer la ecuación (2.5.3) en un sistema de dos ecuaciones que nos van a determinar una par de vectores linealmente independientes en una vecindad del punto hiperbólico

\mathbf{p} , entonces aplicando el teorema 2.2.5 podemos encontrar una parametrización en una vecindad del punto \mathbf{p} , de tal manera que las curvas coordenadas son las curvas integrales de la ecuación (2.5.3); esto es solo un esbozo de la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 2.5.3 *Sea \mathbf{p} un punto hiperbólico de \mathcal{M} , entonces es posible encontrar una carta coordenada de \mathbf{p} tal que las curvas coordenadas de esta parametrización son curvas asintóticas de \mathcal{M} .*

2.6 Ejemplos.

2.6.1 Superficies de Curvatura Gaussiana Constante Positiva.

La esfera, el plano y el cilindro circular recto son ejemplos conocidos de superficies de curvatura gaussiana constante, sin embargo existen muchos otros. Es fácil ver que en el plano la curvatura gaussiana se anula, lo mismo sucede en el cilindro; en esencia, si una superficie tiene curvatura gaussiana cero podemos pensar que esa superficie es como un plano, más precisamente, es *isométrica* al plano. Una isometría es un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ entre superficies regulares, si para todos los punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ y para cada par de vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ se tiene

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle d\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}_1), d\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}_2) \rangle.$$

Un isomorfismo en una función cuyo diferencial preserva el producto interior y en consecuencia se preserva la primera forma fundamental; no lo estudiaremos a detalle, pero si dos superficies son isométricas poseen la misma curvatura gaussiana en sus puntos correspondientes. Existe un resultado recíproco, es decir, si dos superficies tienen la misma curvatura gaussiana, entonces estas superficies son localmente isométricas.

Pero esto se vuelve más interesante si una superficie regular tiene curvatura gaussiana constante, como se establece en el siguiente resultado.

Proposición 2.6.1 *Si dos superficies tienen curvatura gaussiana constante y ésta coincide, entonces las superficies son isométricas.*

En el caso de la esfera, ésta tiene curvatura gaussiana constante $K = \frac{1}{r^2}$, donde r es el radio de la esfera. Como una consecuencia de la Proposición 2.6.1, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.6.2 *Toda superficie de curvatura gaussiana constante positiva K puede representarse isométricamente sobre una esfera de radio igual r tal que $K = \frac{1}{r^2}$.*

Prácticamente hablando, podemos decir que en esencia todas las superficies de curvatura gaussiana constante positiva se pueden ver localmente como esferas.

Un ejemplo más de superficies que tienen curvatura constante son las superficies en revolución con curvatura constante, dichas superficies pueden definirse mediante la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v)),$$

con curvatura gaussiana $K = \frac{1}{a^2}$, donde la constante $a > 0$ satisface

$$g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left(\operatorname{sen} \left(\frac{t}{a} \right) \right)^2} dt,$$

para alguna constante $b > 0$. Para detalles ver [8].

2.6.2 Superficies con $K = -1$.

De especial interés son las superficies con curvatura gaussiana constante negativa, en particular aquella superficie con $K = -1$. Un ejemplo clásico es la *seudoesfera* de *seudoradio* 1. Geométricamente, la *seudoesfera* es generada por una circunferencia singular central que se agudiza asintóticamente a ambos lados de esta circunferencia. También podemos generar la *seudoesfera* como una superficie en revolución, usando como generatriz a la curva plana conocida como la *Tractrix* y que rota sobre su asíntota. Ver detalles en [8, 15].

Una parametrización para la *seudoesfera* está dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \operatorname{sen} v, u - \tanh u), \quad u \geq 0, \quad v \in [0, 2\pi). \quad (2.6.1)$$

Su primera forma fundamental es:

$$I = \tanh^2 u du^2 + \operatorname{sech} u dv^2,$$

y su segunda forma fundamental,

$$II = -\operatorname{sech} u \tanh u du^2 + \operatorname{sech} u \tanh u dv^2.$$

Con curvatura media

$$H = \frac{1}{2} (\sinh u - \operatorname{csch} u),$$

y curvatura gaussiana

$$K = -1.$$

La seudoesfera, por lo tanto, tiene superficie gaussiana constante negativa, justificando su nombre de seudoesfera, es decir, contrario a la esfera que tiene curvatura gaussiana positiva. Como último comentario sobre la seudoesfera podemos decir que la parametrización (2.6.1) es una parametrización de coordenadas de líneas de curvatura. Todo el material estudiado en este capítulo forma parte del temario básico de muchos libros de Geometría Diferencial, como referencia para consulta con una visión más formal y amplia de estos hechos tenemos [4, 8, 13, 14, 15].

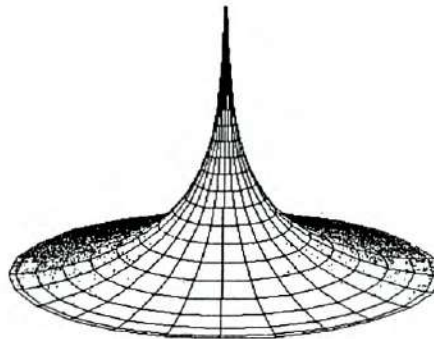


Figura 2.3: Parametrización de la seudoesfera:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, u - \tanh u).$$

Capítulo 3

Criterio de Frobenius

El Criterio de Frobenius es uno de los dos principales resultados que se encuentran en este trabajo. El papel que juega para demostrar el Teorema Fundamental de Superficies (Teorema (4.2.1)) es crucial. Es usado en el Capítulo 4 para dar solución satisfactoria a la parte de existencia del Teorema Fundamental. Esta es la parte que en muchos libros elementales de Geometría no se aborda con toda precisión y detalle, con pocas excepciones, como por ejemplo el libro de J.J. Stoker [14]. El criterio de Frobenius forma parte de una teoría más completa llamada *Integrabilidad de Frobenius*, que se utiliza por ejemplo para dar solución a un sistema de familias uniparamétricas de EDO. Este criterio tiene una amplia variedad de formulaciones, algunas de ellas usan conceptos básicos de Geometría y Ecuaciones Diferenciales tales como campos vectoriales, corchetes de Lie, funciones matriciales, etc. Otras usan conceptos más avanzados como formas diferenciales, distribuciones de planos, etc. El lector interesado en conocer las distintas formulaciones de este criterio podría comenzar con [3, 5, 7, 14, 17]. En esta sección sólo presentaremos aquellas versiones del teorema que nos son de utilidad para lograr nuestro objetivo principal.

3.1 Condiciones de Integrabilidad de Frobenius.

En esta parte daremos una introducción al Criterio de Frobenius, el cual garantiza la existencia de solución para un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Este criterio establece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dicha solución, conocidas como condiciones de integrabilidad. En esta sección utilizaremos sólo funciones y campos escalares

suaves con valores reales para formar los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = V(u, v, x(u, v)), \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = W(u, v, x(u, v)), \quad (3.1.2)$$

donde $V, W : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son mapeos suaves y \mathcal{U} es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 .

En general, no existe solución al sistema (3.1.1),(3.1.2), entonces, como el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, el objetivo lógico es encontrar qué condiciones adicionales debe de tener el sistema (3.1.1),(3.1.2) para que este sea soluble. El teorema de Frobenius nos da condiciones necesarias y suficientes para que el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (3.1.1), (3.1.2) tenga solución. Además, la demostración de este teorema nos proporciona un algoritmo para construir la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales como el sistema (3.1.1),(3.1.2). Primero debemos resolver una ecuación diferencial ordinaria en la variable u y después resolver una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias para la variable v . Las condiciones dadas en el teorema de Frobenius garantizan que este proceso nos produce una solución al sistema de ecuaciones.

Para encontrar explícitamente que condición se debe cumplir para que exista solución al sistema (3.1.1), (3.1.2), hagamos lo siguiente: Supongamos que el sistema (3.1.1), (3.1.2) admite una solución suave $x(u, v)$; entonces se tiene, por diferenciabilidad, $\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$. Desarrollando estas derivadas parciales tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial v} V(u, v, x(u, v)) \\ &= \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial x} W, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} W(u, v, x(u, v)) \\ &= \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial x} V. \end{aligned}$$

Al igualar los resultados obtenidos, los campos V, W debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial x} W = \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial x} V. \quad (3.1.3)$$

A la ecuación (3.1.3) se le conoce como *condición de compatibilidad*. La ecuación (3.1.3) es una condición necesaria para que el sistema (3.1.1), (3.1.2) se pueda resolver; más aún, esta condición también es suficiente para que exista solución al sistema (3.1.1), (3.1.2), pero este punto será tratado en la sección 3.2 con más detalle, desde un punto de vista más general.

En el siguiente resultado se presenta una interpretación geométrica del Teorema de Frobenius. Se construye una superficie regular utilizando una solución al sistema (3.1.1), (3.1.2) y cuyos vectores que generan al plano tangente a cada punto tienen entre sus componentes a los campos V, W .

Proposición 3.1.1 *Si la condición (3.1.3) se cumple, entonces existe una única solución local $x(u, v)$ del sistema (3.1.1) y (3.1.2). Además la gráfica de la función x ,*

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \text{graf}(x) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w = x(u, v)\},$$

es una superficie regular y el plano tangente a \mathcal{M} en cada punto (u, v) es generado por los vectores

$$\mathbf{X}(u, v, x) = (1, 0, V(u, v, x)), \quad \mathbf{Y}(u, v, x) = (0, 1, W(u, v, x)), \quad (3.1.4)$$

es decir,

$$T_{(u,v)}\mathcal{M} = \text{Span}\{\mathbf{X}(u, v, x(u, v)), \mathbf{Y}(u, v, x(u, v))\}.$$

La demostración de este resultado es muy simple y casi inmediata. Este material es tratado con mayor detalle en el capítulo 2 de [4] o en [8, 14, 15]. Además el recíproco de esta proposición también es cierto.

En la Proposición (3.1.1) hemos formado los campos vectoriales \mathbf{X}, \mathbf{Y} (3.1.4) utilizando los campos escalares V, W . Entonces se puede probar que la condición (3.1.3) para los campos V, W es equivalente a pedir que los campos \mathbf{X}, \mathbf{Y} conmuten; como veremos en el siguiente lema.

Lema 3.1.2 *Sean los campos vectoriales \mathbf{X} y \mathbf{Y} en \mathbb{R}^3 definidos como en (3.1.4). Supongamos que V y W satisfacen la ecuación (3.1.3). Entonces*

los campos vectoriales \mathbf{X} y \mathbf{Y} conmutan, es decir, el corchete de Lie de \mathbf{X} y \mathbf{Y} es cero,

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{0},$$

y recíprocamente.

Demostración. Recordemos que el corchete de Lie $[\mathbf{v}, \mathbf{w}](\mathbf{x})$ (ver sección 1.1) para dos campos vectoriales $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$ y $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = (w_1(\mathbf{x}), w_2(\mathbf{x}), \dots, w_n(\mathbf{x}))$ en \mathbb{R}^n , es otro campo vectorial suave en \mathbb{R}^n , cuyas componentes están dadas por:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \left(v_j \frac{\partial}{\partial x_j} w_i - w_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Calculemos el conmutador de los campos \mathbf{X} y \mathbf{Y} (3.1.4), usando la fórmula anterior:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_1 = 0,$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_2 = 0,$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_3 = \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial x} W - \frac{\partial W}{\partial u} - \frac{\partial W}{\partial x} V.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \left(0, 0, \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial x} W - \frac{\partial W}{\partial u} - \frac{\partial W}{\partial x} V \right),$$

como los campos escalares cumplen la condición (3.1.3) entonces

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{0},$$

como queríamos demostrar, y recíprocamente. ■

Este hecho nos permite plantear una versión del teorema de Frobenius en términos del conmutador de campos vectoriales $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$.

Teorema 3.1.3 Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y} : \mathcal{U} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ campos vectoriales suaves, donde $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ son dominios abiertos. Supongamos que

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{0}.$$

Entonces, para cada punto (u, v) de \mathcal{U} existe una superficie regular \mathcal{M} tal que para cada punto $m \in \mathcal{M}$ el plano tangente en cada punto de \mathcal{M} es generado por los vectores \mathbf{X} y \mathbf{Y} , es decir,

$$T_m \mathcal{M} = \text{Span} \{ \mathbf{X}, \mathbf{Y} \}.$$

Para una demostración de este teorema ver [3].

3.2 Criterio de Frobenius

En esta sección formularemos el criterio de Frobenius, con un punto de vista más formal que el que se le dió en la sección anterior. Aquí se generaliza el problema de encontrar una solución común al sistema de ecuaciones diferenciales presentado en la sección 3.1, pero ahora usando campos vectoriales en \mathbb{R}^n , para formular las ecuaciones diferenciales. El objetivo del criterio de Frobenius en esta sección sigue siendo el mismo, obtener condiciones necesarias y suficientes para que exista solución común a un sistema de ecuaciones parciales; el criterio de Frobenius como se mencionó en la sección anterior es una expresión analítica que se conoce como *ecuación de compatibilidad*. Sin más comentarios por el momento, en el siguiente teorema que de ahora en adelante conoceremos como Criterio de Frobenius, estableceremos la ecuación de compatibilidad.

Teorema 3.2.1 (Criterio de Frobenius) Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W} : \mathcal{U} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$, campos vectoriales suaves, donde $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ son abiertos. Sea $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ un punto fijo. Entonces para cada punto inicial $\mathbf{p} \in \mathcal{O}$ el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = \mathbf{V}(u, v, \mathbf{X}(u, v)), \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = \mathbf{W}(u, v, \mathbf{X}(u, v)), \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{X}(u_0, v_0) = \mathbf{p}, \quad (3.2.3)$$

tiene una única solución suave $\mathbf{X} : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ bien definida en una vecindad \mathcal{U}_0 de (u_0, v_0) en \mathcal{U} si y sólo si

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial v} + \frac{D\mathbf{V}}{D\mathbf{X}} \mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial u} + \frac{D\mathbf{W}}{D\mathbf{X}} \mathbf{V}, \quad (3.2.4)$$

Demostración. (a) *Necesidad.* Si \mathbf{X} es una solución suave de (3.2.1), (3.2.2) y (3.2.3), entonces la igualdad de las parciales cruzadas

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right),$$

implica la condición de compatibilidad (3.2.4).

(b) *Suficiencia.* Supongamos que \mathbf{V}, \mathbf{W} satisfacen la condición (3.2.4). Recuérdese que en la ecuación (3.2.4) la matrices que multiplican a los campos \mathbf{V} y \mathbf{W} respectivamente están dadas por:

$$\frac{D\mathbf{V}}{D\mathbf{X}} = \left[\frac{\partial V_i}{\partial X_j} \right] \quad \text{y} \quad \frac{D\mathbf{W}}{D\mathbf{X}} = \left[\frac{\partial W_i}{\partial X_j} \right].$$

Intentemos resolver el sistema (3.2.1), (3.2.2) y (3.2.3). Tomemos la ecuación (3.2.1) sujeta a la condición inicial (3.2.3). Si fijamos el valor $v = v_0$ en la ecuación (3.2.1), tenemos una familia de EDO para la variable u . Por Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 1.2.1), existen $\delta > 0$ y una función suave $\alpha : (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfacen

$$\frac{d\alpha}{du} = \mathbf{V}(u, v_0, \alpha(u)),$$

$$\alpha(u_0) = \mathbf{p}.$$

Para cada $u \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta)$, definamos $\beta^u(v) = \beta(u, v)$ como la única solución del problema de Cauchy

$$\frac{d\beta^u}{dv} = \mathbf{W}(u, v, \beta^u(v)),$$

$$\beta^u(v_0) = \alpha(u).$$

Sea $\mathbf{X}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \beta^u(v)$. Por construcción, \mathbf{X} satisface la ecuación (3.2.2) y $\mathbf{X}(u_0, v_0) = \mathbf{p}$. Solo resta verificar que \mathbf{X} satisface también la ecuación (3.2.1). Para esto, definamos la función $\mathbf{Z}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{X}(u, v) - \mathbf{V}(u, v, \mathbf{X})$ y calculemos su derivada parcial con respecto a v . Por conveniencia, al momento de efectuar cálculos omitiremos la dependencia de parámetros u y v .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} - \mathbf{V} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial v \partial u} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial v} - \frac{D\mathbf{V}}{D\mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u \partial v} - \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial v} + \frac{D\mathbf{V}}{D\mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{W} - \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial v} + \frac{D\mathbf{V}}{D\mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial u} + \frac{D\mathbf{W}}{D\mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} - \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial v} + \frac{D\mathbf{V}}{D\mathbf{X}} \mathbf{W} \right). \end{aligned}$$

Como los campo \mathbf{V} y \mathbf{W} cumplen con la ecuación 3.2.4, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial u} + \frac{D\mathbf{W}}{D\mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} - \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial u} + \frac{D\mathbf{W}}{D\mathbf{X}} \mathbf{V} \right) \\ &= \frac{D\mathbf{W}}{D\mathbf{X}} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} - \mathbf{V} \right) = \frac{D\mathbf{W}}{D\mathbf{X}} \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

De esto se sigue que \mathbf{Z} es solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial v}(u, v) = \frac{D\mathbf{W}}{D\mathbf{X}}(u, v, \mathbf{Z})\mathbf{Z}(u, v). \quad (3.2.5)$$

Si tomamos $v = v_0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(u, v_0) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}(u, v_0) - \mathbf{V}(u, v_0, \mathbf{X}(u, v_0)) \\ &= \frac{d}{du}\alpha(u) - \mathbf{V}(u, v_0, \alpha(u)) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Para todo $u \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta)$. Además la ecuación (3.2.5) está sujeta a la condición inicial

$$\mathbf{Z}(u_0, v_0) = \mathbf{0}. \quad (3.2.6)$$

Pero como la función constante cero también es solución de (3.2.5), (3.2.6), por el Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 1.2.1), tenemos que $\mathbf{Z}(u, v) = \mathbf{0}$. Por lo tanto la función $\mathbf{X}(u, v)$ satisface la ecuación (3.2.1), como necesitábamos demostrar. ■

Como caso particular del Teorema (3.2.1), cuando $n = 1$, obtenemos el sistema (3.1.1), (3.1.2) y la condición de compatibilidad (3.2.4) se transforma en la ecuación (3.1.3).

3.2.1 Interpretación geométrica en el caso general.

La interpretación geométrica del Criterio de Frobenius, dada en la Proposición 3.1.1, para el caso particular cuando $n = 1$ sigue siendo válida general como lo veremos a continuación. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vectoriales suaves,

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mathbf{V}(u, v, \mathbf{X}), \\ \mathbf{W} &= \mathbf{W}(u, v, \mathbf{X}),\end{aligned}$$

donde Ω es un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Usando los campos \mathbf{V}, \mathbf{W} definamos unos nuevos campos vectoriales $\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, por

$$\tilde{\mathbf{V}}(u_0, v_0, \mathbf{X}) = (1, 0, \mathbf{V}), \quad \tilde{\mathbf{W}}(u_0, v_0, \mathbf{X}) = (0, 1, \mathbf{W}). \quad (3.2.7)$$

Resulta evidente que los campos vectoriales $\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}$ (3.2.7) son linealmente independientes. Ahora como en el caso $n = 1$, estableceremos bajo que condiciones existe una superficie en \mathbb{R}^{n+2} tal que el espacio tangente en cada punto de la superficie sea generado por los vectores $\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}$.

Proposición 3.2.2 Sean $\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}$ campos vectoriales suave en \mathbb{R}^{n+2} definidos como en la ecuación (3.2.7). Si para cada $(u_0, v_0) \in \Omega$ y $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$[\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}](u_0, v_0, \mathbf{X}) \in \text{Span}\{\tilde{\mathbf{V}}(u_0, v_0, \mathbf{X}), \tilde{\mathbf{W}}(u_0, v_0, \mathbf{X})\} \quad (3.2.8)$$

Entonces existe una vecindad $N(u_0, v_0, \mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ y una superficie $\mathcal{S} \subset N(u_0, v_0, \mathbf{X})$ tal que si $(u, v, \mathbf{X}) \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$T_{(u,v,\mathbf{X})}\mathcal{S} = \text{Span}\{\tilde{\mathbf{V}}(u_0, v_0, \mathbf{X}), \tilde{\mathbf{W}}(u_0, v_0, \mathbf{X})\}. \quad (3.2.9)$$

Los campos vectoriales definidos por (3.2.7) y que cumplen con la condición (3.2.8) son conocidos como una *distribución involutiva de rango 2*. En este caso, la condición (3.2.8) es equivalente a

$$[\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}] = \mathbf{0}. \quad (3.2.10)$$

Más aún, la condición (3.2.10) se cumple si y sólo si los campos \mathbf{V}, \mathbf{W} satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial v} + \frac{D\mathbf{V}}{D\mathbf{X}}\mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial u} + \frac{D\mathbf{W}}{D\mathbf{X}}\mathbf{V},$$

la cual es la condición de compatibilidad (3.2.4) de el criterio de Frobenius (Teorema 3.2.1). La superficie cuya existencia asegura la Proposición 3.2.2 resulta estar parametrizada por

$$\tilde{\mathbf{X}} = (u, v, \mathbf{X}(u, v)), \quad (3.2.11)$$

donde la función $\mathbf{X}(u, v)$ es solución del sistema (3.2.1), (3.2.2) y (3.2.3) cuya existencia esta garantizada por el criterio de Frobenius. El lector interesado en estudiar este enfoque del criterio de Frobenius puede empezar por consultar [3].

3.3 Caso lineal

3.3.1 Criterio de Frobenius para Sistemas Lineales.

En esta sección, veremos que cuando los campos vectoriales suaves \mathbf{V} , \mathbf{W} en \mathbb{R}^n que aparecen en el sistema (3.2.1), (3.2.2) son *lineales*, es posible formular un sistema de ecuaciones expresado en términos de funciones matriciales que será equivalente al sistema (3.2.1), (3.2.2), en el sentido de que la existencia de solución de un sistema implica la existencia en el otro sistema y viceversa.

Sean $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos. Sea $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ punto fijo. Para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{O}$, consideremos el sistema de ecuaciones para la función vectorial $\mathbf{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = \mathbf{V}(u, v, \mathbf{X}(u, v)), \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = \mathbf{W}(u, v, \mathbf{X}(u, v)), \quad (3.3.2)$$

$$\mathbf{X}(u_0, v_0) = \mathbf{p}. \quad (3.3.3)$$

Donde $\mathbf{V}, \mathbf{W} : \mathcal{U} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son campos vectoriales suaves. Si suponemos que los campos vectoriales \mathbf{V}, \mathbf{W} son *lineales* con respecto a la variable \mathbf{X} , entonces existen funciones matriciales suaves $\mathbb{S}, \mathbb{T} : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$ tales que $\mathbf{V}(u, v, \mathbf{X}) = \mathbb{S}(u, v) \mathbf{X}$ y $\mathbf{W}(u, v, \mathbf{X}) = \mathbb{T}(u, v) \mathbf{X}$. Entonces el sistema de ecuaciones (3.3.1), (3.3.2) tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = \mathbb{S}(u, v) \mathbf{X}, \quad (3.3.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = \mathbb{T}(u, v) \mathbf{X}, \quad (3.3.5)$$

sujeto a la condición inicial (3.3.3). Ahora, de manera similar a lo que se hizo en la Sección 1.5, vamos a obtener una función matricial que sea la solución fundamental del sistema (3.3.4), (3.3.5). Es decir, deseamos encontrar una función matricial mediante la cual podamos obtener fácilmente todas las soluciones del sistema (3.3.4), (3.3.5) que se tienen para cada vector \mathbf{p} en \mathbb{R}^n . Analíticamente deseamos encontrar una función matricial suave $\mathbb{G} : \mathcal{U} \rightarrow \text{GL}(n)$ tal que

$$\mathbf{X}(u, v) = \mathbb{G}(u, v) \mathbf{p}. \quad (3.3.6)$$

Si calculamos las derivadas parciales de la ecuación (3.3.6), tenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u} \mathbf{p}, \quad (3.3.7)$$

$$y \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} \mathbf{p}. \quad (3.3.8)$$

En las ecuaciones (3.3.7), (3.3.8) hemos omitido los parámetros u y v ya que esta igualdad se tiene para todo $(u, v) \in \mathcal{U}$. Igualando (3.3.4) con (3.3.7) se tiene que:

$$\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u} = \mathbb{S}\mathbb{G}. \quad (3.3.9)$$

Si ahora igualamos la ecuación (3.3.5) con (3.3.8), mediante cálculos similares a los anteriores tenemos que

$$\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} = \mathbb{T}\mathbb{G}. \quad (3.3.10)$$

De la ecuación (3.3.6) tenemos que la función \mathbb{G} en el punto (u_0, v_0) satisface que

$$\mathbf{X}(u_0, v_0) = \mathbb{G}(u_0, v_0) \mathbf{p}.$$

Como la función \mathbf{X} satisface la condición inicial (3.3.3), se sigue que

$$\mathbb{G}(u_0, v_0) \mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad \text{para todo } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n,$$

y entonces se tiene que:

$$\mathbb{G}(u_0, v_0) = \mathbb{I}. \quad (3.3.11)$$

Hemos transformado el sistema de ecuaciones (3.3.1), (3.3.2) y (3.3.3) definido para una función vectorial en \mathbb{R}^n mediante campos vectoriales lineales, en un nuevo sistema formado por (3.3.9), (3.3.10) y (3.3.11).

El siguiente resultado establece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de solución al sistema de ecuaciones matriciales (3.3.9), (3.3.10) y (3.3.11).

Recordemos que para dos matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} de dimensión $n \times n$, se define el conmutador de las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} como:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}.$$

Teorema 3.3.1 Sean $\mathbb{S}, \mathbb{T} : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$ funciones matriciales suaves, donde \mathcal{U} es un abierto de \mathbb{R}^2 . Para cada punto fijo $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u} = \mathbb{S}\mathbb{G}, \quad (3.3.12)$$

$$\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} = \mathbb{T}\mathbb{G}, \quad (3.3.13)$$

$$\mathbb{G}(u_0, v_0) = \mathbb{I}, \quad (3.3.14)$$

tiene una solución matricial suave $\mathbb{G} : \mathcal{U}_0 \rightarrow \text{GL}(n)$ bien definida en una vecindad \mathcal{U}_0 de (u_0, v_0) en \mathcal{U} , si y sólo si

$$\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial v} - \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial u} + [\mathbb{S}, \mathbb{T}] = 0. \quad (3.3.15)$$

Demostración. (*Necesidad*) Este teorema es consecuencia del Teorema (3.2.1), Si tomamos un vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, y multiplicamos por la derecha ambos lados de las ecuaciones (3.3.12), (3.3.13) y (3.3.14) respectivamente, este sistema se transforma en un sistema de ecuaciones definido para una función vectorial en \mathbb{R}^n en el que se cumplen las hipótesis del Teorema (3.2.1). De aquí se sigue que este sistema tiene solución si y sólo si cumple con una condición de compatibilidad (3.2.4), la cual también puede obtenerse del cálculo de las segundas derivadas parciales de la función \mathbb{G} y utilizando la propiedad de las parciales cruzadas.

(*Suficiencia*) Por una parte tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{G}}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial (\mathbb{S}\mathbb{G})}{\partial v} = \mathbb{S} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} + \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial v} \mathbb{G} \\ &= \mathbb{S}\mathbb{T}\mathbb{G} + \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial v} \mathbb{G} = \left(\mathbb{S}\mathbb{T} + \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial v} \right) \mathbb{G}; \end{aligned}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{G}}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial (\mathbb{T}\mathbb{G})}{\partial u} = \mathbb{T} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial u} \mathbb{G} \\ &= \mathbb{T}\mathbb{S}\mathbb{G} + \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial u} \mathbb{G} = \left(\mathbb{T}\mathbb{S} + \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial u} \right) \mathbb{G}; \end{aligned}$$

por lo tanto, al igualar las expresiones anteriores, la condición de compatibilidad es

$$\mathbb{S}\mathbb{T} + \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial v} = \mathbb{T}\mathbb{S} + \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial u},$$

la cual es equivalente a la ecuación (3.3.15). ■

Vamos a decir que el sistema de ecuaciones (3.3.12), (3.3.13), (3.3.3) es *compatible* si y sólo si este sistema tiene una solución común. En este momento estableceremos un resultado muy sencillo pero importante para el desarrollo de este trabajo.

Corolario 3.3.2 *El sistema de ecuaciones (3.3.12), (3.3.13), (3.3.3) es compatible si y sólo si el sistema transpuesto a (3.3.12), (3.3.13), (3.3.3) también es compatible.*

Demostración. Si realizamos la operación transpuesta en ambos lados de cada una de las ecuaciones que forman el sistema (3.3.12), (3.3.13), (3.3.3) tenemos que la igualdad se preserva. Por lo tanto si existe una matriz que satisface el sistema (3.3.12), (3.3.13), (3.3.3), entonces la transpuesta de esta matriz será solución del sistema transpuesto y viceversa. ■

En el siguiente resultado, que se sigue como un corolario del Teorema (3.3.1), se establecen las condiciones de existencia de solución para un sistema de ecuaciones lineales similar al (3.3.12), (3.3.13) y (3.3.14). La diferencia que se tiene aquí es la manera en que se multiplican las matrices.

Corolario 3.3.3 *Sean $\mathbb{S}, \mathbb{T} : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$ funciones matriciales suaves, donde \mathcal{U} es un abierto de \mathbb{R}^2 . Tomemos un punto fijo $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$. Entonces el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u} = \mathbb{G}\mathbb{S}, \quad (3.3.16)$$

$$\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} = \mathbb{G}\mathbb{T}, \quad (3.3.17)$$

$$\mathbb{G}(u_0, v_0) = \mathbb{I}, \quad (3.3.18)$$

tiene una solución matricial suave $\mathbb{G} : \mathcal{U}_0 \rightarrow \text{GL}(n)$ bien definida en una vecindad \mathcal{U}_0 de (u_0, v_0) en \mathcal{U} , si y sólo si

$$\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial v} - \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial u} = [\mathbb{S}, \mathbb{T}]. \quad (3.3.19)$$

Demostración. Si aplicamos el Corolario al sistema (3.3.16), (3.3.17), (3.3.18), tenemos que éste es compatible si y sólo si el siguiente sistema es compatible.:

$$\frac{\partial \mathbb{G}^T}{\partial u} = \mathbb{S}^T \mathbb{G}^T,$$

$$\frac{\partial \mathbb{G}^T}{\partial v} = \mathbb{T}^T \mathbb{G}^T,$$

$$\mathbb{G}^T(u_0, v_0) = \mathbb{I}.$$

Por el Teorema (3.3.1) el sistema anterior tiene solución si y sólo si las matrices \mathbb{S}^T y \mathbb{T}^T cumplen con la ecuación:

$$\frac{\partial \mathbb{S}^T}{\partial v} - \frac{\partial \mathbb{T}^T}{\partial u} + [\mathbb{S}^T, \mathbb{T}^T] = 0. \quad (3.3.20)$$

Si tomamos transpuesta de la ecuación (3.3.20) tenemos el resultado deseado. ■

Para finalizar, queremos establecer la relación que existe entre el sistema (3.3.1), (3.3.2) y la ecuación de compatibilidad (3.3.15).

Teorema 3.3.4 *El sistema (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) admite una solución $\mathbf{X}(u, v)$ para cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si se cumple la ecuación (3.3.15).*

Demostración. (Necesidad) Supongamos que la función $\mathbf{X}(u, v)$ es solución al sistema (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3). Para cada $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ definamos la función matricial \mathbb{G} usando las fórmulas (3.3.6), (3.3.11). Esta función es solución del sistema (3.3.12), (3.3.13), (3.3.14), entonces por el Teorema (3.3.1) se cumple la ecuación (3.3.15).

(Suficiencia) Ahora supongamos que se cumple la ecuación (3.3.15). Entonces, otra vez por el Teorema (3.3.1) existe una función \mathbb{G} que es solución de (3.3.12), (3.3.13), (3.3.14). Para cada $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ definamos la función $\mathbf{X}(u, v)$ por la ecuación (3.3.6). Es decir

$$\mathbf{X}(u, v) = \mathbb{G}(u, v) \mathbf{p},$$

al calcular sus derivadas parciales tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u} \mathbf{p} = \mathbb{S} \mathbb{G} \mathbb{G}^{-1} \mathbf{X} = \mathbb{S} \mathbf{X},$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} \mathbf{p} = \mathbb{T} \mathbb{G} \mathbb{G}^{-1} \mathbf{X} = \mathbb{T} \mathbf{X},$$

$$\mathbf{X}(u_0, v_0) = \mathbb{G}(u_0, v_0) \mathbf{p} = \mathbb{I} \mathbf{p} = \mathbf{p}.$$

Por lo tanto $\mathbf{X}(u, v)$ es solución del sistema (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3). ■

El Teorema (3.3.1) y el Teorema (3.3.4) son los resultados principales en la demostración del Teorema Fundamental (Teorema 4.2.1).

3.3.2 Algoritmo de Construcción de Solución para el Sistema Lineal.

En esta parte, introduciremos nueva terminología y plantearemos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con un algoritmo que nos permita construir una solución a dicho sistema la cual fue tomada del artículo [7]. El sistema que aquí se plantea generaliza en cierto sentido al sistema lineal (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) planteado al inicio de esta sección, y el método que describiremos aquí puede ser utilizado para calcular numéricamente su solución.

Un par (Θ_1, Θ_2) de funciones matriciales acotadas de tamaño $n \times n$, que son suaves en las variables reales $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, es llamado un *par compatible* si existe una función matricial $\mathbb{G}(u, v) \in \text{GL}(n)$ suave, que satisface simultáneamente el sistema matricial lineal

$$\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u}(u, v) = \mathbb{G}(u, v) \Theta_1(u, v), \quad (3.3.21)$$

$$\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v}(u, v) = \mathbb{G}(u, v) \Theta_2(u, v), \quad (3.3.22)$$

$$\mathbb{G}(0, 0) = \mathbb{I}. \quad (3.3.23)$$

Ejemplo 3.3.1 Para cualquier par $(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ de matrices constante que conmutan es un par compatible, cuya solución común está dada por

$$\mathbb{G}(u, v) = \exp(u\mathbb{K}_1 + v\mathbb{K}_2).$$

Si (Θ_1, Θ_2) es un par compatible, la propiedad de las segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 \mathbb{G}}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \mathbb{G}}{\partial u \partial v}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} (\mathbb{G} \Theta_1) &= \frac{\partial}{\partial u} (\mathbb{G} \Theta_2) \\ \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} \Theta_1 + \mathbb{G} \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u} \Theta_2 + \mathbb{G} \frac{\partial \Theta_2}{\partial u}, \end{aligned}$$

usando las expresiones (3.3.21), (3.3.22) se obtiene

$$\mathbb{G} \Theta_2 \Theta_1 + \mathbb{G} \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} = \mathbb{G} \Theta_1 \Theta_2 + \mathbb{G} \frac{\partial \Theta_2}{\partial u},$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \frac{\partial \Theta_2}{\partial u} = [\Theta_1, \Theta_2]. \quad (3.3.24)$$

La ecuación (3.3.24) aparece en varios problemas de Física-Matemáticas y geometría diferencial [16].

Nota 3.3.1 *La ecuación (3.3.24) es llamada la ecuación de curvatura cero.*

En la siguiente proposición se establece las condiciones bajo las cuales se tiene solución al sistema (3.3.21),(3.3.22),(3.3.23). Este resultado es muy importante, ya que nos proporciona un método que podemos seguir para construir la solución.

Proposición 3.3.5 *Si el par (Θ_1, Θ_2) satisface la ecuación (3.3.24), entonces (Θ_1, Θ_2) es un par compatible.*

Demostración. Para tener un idea más clara de como se construye la solución, daremos esta prueba por pasos.

Paso 1. Sean $\mathbb{F}^1(u, v)$ y $\mathbb{F}^2(u, v)$ funciones matriciales que satisfacen

$$\frac{\partial \mathbb{F}^1}{\partial u}(u, v) = \mathbb{F}^1(u, v) \Theta_1(u, v), \quad \mathbb{F}^1(0, v) = \mathbb{I} \quad \text{para } v \in \mathbb{R}, \quad (3.3.25)$$

$$\frac{\partial \mathbb{F}^2}{\partial v}(u, v) = \mathbb{F}^2(u, v) \Theta_2(u, v), \quad \mathbb{F}^2(u, 0) = \mathbb{I} \quad \text{para } u \in \mathbb{R}. \quad (3.3.26)$$

La existencia de las funciones \mathbb{F}^1 y \mathbb{F}^2 está garantizada por el Teorema de Existencia y Unicidad para sistemas lineales (Teorema 1.3.2). Estas funciones son las soluciones fundamentales de su respectiva ecuación diferencial lineal.

Paso 2. Consideremos la función matricial suave

$$\mathbb{G}(u, v) = \mathbb{F}^2(0, v) \mathbb{F}^1(u, v),$$

entonces derivemos esta función con respecto a la variable u .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u}(u, v) &= \mathbb{F}^2(0, v) \frac{\partial \mathbb{F}^1}{\partial u}(u, v) \\ &= \mathbb{F}^2(0, v) \mathbb{F}^1(u, v) \Theta_1(u, v) \\ &= \mathbb{G}(u, v) \Theta_1(u, v). \end{aligned}$$

Con este paso tenemos que la función \mathbb{G} es solución de (3.3.21).

Paso 3. En este último paso vamos a probar que \mathbb{G} también es solución de (3.3.22). Para esto consideremos la función matricial

$$\mathbb{H} = \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} - \mathbb{G} \Theta_2,$$

y verifiquemos que \mathbb{H} también satisface el sistema lineal (3.3.21),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} - \mathbb{G} \Theta_2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u} - \left(\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial u} \Theta_2 + \mathbb{G} \frac{\partial \Theta_2}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial v} (\mathbb{G} \Theta_1) - \mathbb{G} \left(\Theta_2 \Theta_1 + \frac{\partial \Theta_2}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

usando la ecuación (3.3.24),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial v} (\mathbb{G} \Theta_1) - \mathbb{G} \left(\Theta_1 \Theta_2 + \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} \Theta_1 + \mathbb{G} \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \mathbb{G} \left(\Theta_1 \Theta_2 + \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} \Theta_1 + \mathbb{G} \left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \Theta_1 \Theta_2 - \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

usando de nueva cuenta la ecuación (3.3.24),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial u} &= \left(\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v} + \mathbb{G} \Theta_2 \right) \Theta_1 \\ \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial u} &= \mathbb{H} \Theta_1. \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(0, v) &= \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial v}(0, v) - \mathbb{G}(0, v) \Theta_2(0, v) \\ &= \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial v}(0, v) - \mathbb{F}(0, v) \Theta_2(0, v) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

por la unicidad de la solución tenemos que

$$\mathbb{H}(u, v) = \mathbf{0} \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R},$$

y entonces \mathbb{G} satisface (3.3.22). ■

Teorema 3.3.6 *Supongamos que la función $\mathbb{G}(u, v)$ es solución del sistema (3.3.21), (3.3.22), (3.3.23). Entoces esta función está dada explícitamente por la siguiente fórmula:*

$$\mathbb{G}(u, v) = \mathbb{F}^2(0, v) \mathbb{F}^1(u, v) = \mathbb{F}^1(u, 0) \mathbb{F}^2(u, v). \quad (3.3.27)$$

Demostración. En la prueba de la Proposición (3.3.5) se demostró que la función $\mathbb{G}(u, v) = \mathbb{F}^2(0, v) \mathbb{F}^1(u, v)$ es solución al sistema (3.3.21), (3.3.22), (3.3.23). Sólo tenemos que probar ahora que la función $\mathbb{F}^1(u, 0) \mathbb{F}^2(u, v)$ también es solución, ya que por unicidad de solución (ver Teorema 3.2.1) tendríamos que $\mathbb{G}(u, v) = \mathbb{F}^1(u, 0) \mathbb{F}^2(u, v)$. Para lograr nuestro objetivo, sólo tenemos que verificar que la función $\mathbb{F}^1(u, 0) \mathbb{F}^2(u, v)$ satisface las ecuaciones (3.3.21), (3.3.22), (3.3.23). Si calculamos la parcial con respecto a v tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} (\mathbb{F}^1(u, 0) \mathbb{F}^2(u, v)) &= \mathbb{F}^1(u, 0) \frac{\partial}{\partial v} (\mathbb{F}^2(u, v)) \\ &= \mathbb{F}^1(u, 0) \mathbb{F}^2(u, v) \Theta_2(u, v). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos la ecuación (3.3.22). Si definimos ahora la función

$$\mathbb{H}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} (\mathbb{F}^1(u, 0) \mathbb{F}^2(u, v)) - \mathbb{F}^1(u, 0) \mathbb{F}^2(u, v) \Theta_2(u, v),$$

mediante cálculos similares a los que se realizaron en el Paso 3 de la demostración de la Proposición (3.3.5) tenemos que $\mathbb{H}(u, v) \equiv 0$. Por lo tanto tenemos la ecuación (3.3.21). Por último, en la condición inicial tenemos que

$$\mathbb{F}^1(0, 0) \mathbb{F}^2(0, 0) = \mathbb{I},$$

por lo tanto

$$\mathbb{G}(u, v) = \mathbb{F}^1(u, 0) \mathbb{F}^2(u, v).$$

■

En la Proposición (3.3.5) se establece una condición necesaria y suficiente para que el sistema (3.3.21), (3.3.22), (3.3.23) tenga solución. La prueba de esta Proposición quedó dividida en tres pasos. En los dos primeros pasos se construye una función matricial y en el resto de la demostración se prueba que esta función es solución del sistema. Como ya tenemos la prueba completa y estamos plenamente seguros que la función que aquí se construye es solución del sistema, podemos refinar los detalles importantes de la construcción que se dan en la prueba de esta demostración. Con esto obtenemos un algoritmo que nos puede servir para construir por métodos numéricos la matriz solución del sistema. Dicho algoritmo es el siguiente.

Algoritmo 3.3.1 *El algoritmo para construir la solución de un sistema lineal se puede realizar esencialmente en tres pasos.*

- 1 Tomemos la ecuación (3.3.21). Para cada valor de la variable v fijo, tenemos una ecuación diferencial ordinaria para la variable u , sujeta a la condición inicial cuando $u = 0$. Lo que obtenemos aquí es una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias, una para cada valor de v que tomemos. Sea $\mathbb{F}^1(u, v)$ la función matricial que satisface

$$\frac{\partial \mathbb{F}^1}{\partial u}(u, v) = \mathbb{F}^1(u, v) \Theta_1(u, v), \quad \mathbb{F}^1(0, v) = \mathbb{I} \quad \text{para } v \in \mathbb{R}.$$

La función matricial $\mathbb{F}^1(u, v)$ determina un miembro de la familia de soluciones para la ecuación (3.3.21) con cada valor de la variable v . Numéricamente podemos tomar un conjunto de valores para la variable v y resolver la ecuación diferencial con cada uno de ellos. Con todas las soluciones así obtenidas, tendremos una aproximación numérica a la función $\mathbb{F}^1(u, v)$.

- 2 Ahora tomemos la ecuación (3.3.22). Para cada valor fijo de la variable u , tenemos una ecuación diferencial ordinaria sujeta a la condición inicial cuando $v = 0$. Análogamente al Paso 1, obtenemos una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias, una ecuación por cada valor de u que se tome. Sea $\mathbb{F}^2(u, v)$ la función matricial que satisface el siguiente sistema

$$\frac{\partial \mathbb{F}^2}{\partial v}(u, v) = \mathbb{F}^2(u, v) \Theta_2(u, v), \quad \mathbb{F}^2(u, 0) = \mathbb{I} \quad \text{para } u \in \mathbb{R}.$$

Como en el Paso 1, la función $\mathbb{F}^2(u, v)$ determina un miembro de la familia de soluciones para la ecuación (3.3.22). Numéricamente se procede de la misma manera que en el Paso 1 y así obtenemos una aproximación numérica a la función $\mathbb{F}^2(u, v)$.

- 3 Por último, construyamos la matriz $\mathbb{G}(u, v)$ usando cualquiera de las dos expresiones dadas en (3.3.27). Esta función $\mathbb{G}(u, v)$ es una aproximación numérica a la solución del sistema de ecuaciones (3.3.21), (3.3.22), (3.3.23). Obtendremos mejores aproximaciones a la solución de este sistema mientras tomemos cada vez más valores para las variable u y v , y mientras estos valores estén más cercanos entre sí.

Capítulo 4

Teorema fundamental de superficies en \mathbb{R}^3

En este capítulo presentaremos una demostración completa del Teorema Fundamental de Superficies en \mathbb{R}^3 (Teorema 4.2.1). Las ecuaciones de Gauss (4.1.1), (4.1.2), (4.1.4), (4.1.5) y las ecuaciones de Weingarten (4.1.3),(4.1.6) son usualmente conocidas como el sistema fundamental de ecuaciones parciales de la teoría de superficies, para más detalles se puede consulta el libro de J.J. Stoker [14]. Estas ecuaciones expresan las primeras parciales del triedro $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}$, definidas para todos los puntos de una superficie regular en términos de estos mismos vectores.

Hasta este punto podemos resaltar la analogía que existe entre estas ecuaciones y las ecuaciones de Frenet (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) para curvas en el espacio. Sin embargo existen entre ambos sistemas de ecuaciones bastantes diferencias importantes. En el caso de las ecuaciones de Frenet, sus coeficientes κ y τ son invariantes bajo cualquier cambio de coordenadas en el que se preserve orientación (ver Sección 1.1). En el caso de las ecuaciones de Gauss y de Weingarten (4.1.1)-(4.1.6) los coeficientes de esta ecuaciones diferenciales dependen de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental; los cuales no son invariantes bajo un cambio de coordenadas. En el caso de las curvas en el espacio, el Teorema Fundamental de Curvas en \mathbb{R}^3 (Teorema 2.1.1) establece que una curva regular existe como la integral de las ecuaciones de Frenet cuando la curvatura $\kappa > 0$ y la torsión τ son funciones arbitrarias parametrizadas por su longitud de arco. Además todas las curvas obtenidas de esta forma son congruentes, es decir dos curvas con la misma función de curvatura y torsión difieren en a lo más un movimiento

rígido.

En el caso de las superficies es natural, por analogía, hacernos las siguientes preguntas:

- 1 Si tenemos un conjunto de funciones suaves arbitrarias, ¿existe una superficie tal que los coeficientes de sus formas fundamentales en una parametrización dada sean precisamente estas funciones?
- 2 Si tal superficie existe, ¿es única?, ¿en qué sentido lo es?

La respuesta a la primera pregunta es no, en general. La razón principal de esto es que el sistema de ecuaciones (4.1.1)-(4.1.6) es un sistema sobredeterminado, debido a que tiene más incógnitas que ecuaciones; en efecto hay 15 ecuaciones diferenciales que deben ser cumplidas simultáneamente por 9 funciones escalares. De esta manera, no debe sorprendernos el hecho de que el sistema de ecuaciones (4.1.1)-(4.1.6) de la teoría de superficies no siempre tenga solución para coeficientes arbitrarios de sus formas fundamentales, como sí sucede en el caso de las ecuaciones de Frenet. Para que la respuesta a la primera pregunta sea afirmativa, ciertas identidades llamadas *ecuaciones de compatibilidad*, deben de tenerse para los coeficientes de las formas fundamentales.

4.1 Ecuaciones de Gauss-Codazzi.

4.1.1 Derivación de las condiciones de integrabilidad.

Para comenzar con el capítulo, vamos a derivar las *ecuaciones de Gauss-Codazzi*. Sea \mathcal{M} una superficie en \mathbb{R}^3 , orientable con un sistema de coordenadas locales $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que a cada pareja $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ le asigna el punto $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} \in \mathcal{M}$; formemos el marco móvil $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$, donde

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

es el campo vectorial normal unitario a \mathcal{M} . Recuérdese que la notación \mathbf{x}_u indica la derivada parcial $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$. Como \mathcal{M} es una superficie regular, se sigue que los vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}$ forman una base para \mathbb{R}^3 (ver Capítulo 2); más aún, dichos vectores son funciones suaves definidas en el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, por lo tanto, las derivadas parciales de estas funciones pueden ser escritas como una combinación lineal de esta base:

$$\mathbf{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 \mathbf{N}, \quad (4.1.1)$$

$$\mathbf{x}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + L_2 \mathbf{N}, \quad (4.1.2)$$

$$\mathbf{N}_u = a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \quad (4.1.3)$$

y

$$\mathbf{x}_{vu} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_3 \mathbf{N}, \quad (4.1.4)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_4 \mathbf{N}, \quad (4.1.5)$$

$$\mathbf{N}_v = a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v. \quad (4.1.6)$$

Donde los coeficientes Γ_{jk}^i son llamados *símbolos de Christoffel*¹, los coeficientes a_{ij} fueron introducidos en la sección 2.3 y los L_i están relacionados con los coeficientes de la segunda forma fundamental. Más aún, en la Proposición 4.1.3 probaremos que todos los coeficientes que aparecen en las ecuaciones (4.1.1) hasta (4.1.6) se pueden expresar en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental.

Las ecuaciones (4.1.1),(4.1.2),(4.1.4),(4.1.5) son conocidas como las ecuaciones de Gauss y las ecuaciones (4.1.3),(4.1.6) son ecuaciones derivadas por Weingarten².

El sistema de ecuaciones (4.1.1)-(4.1.6) pueden ser escritos en forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_u = \mathcal{P} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}, \quad (4.1.7)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_v = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}, \quad (4.1.8)$$

Aquí \mathcal{P} y \mathcal{Q} son funciones matriciales de 9×9 , definidas por bloques cuyas expresiones son:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \mathbb{I}_3 & \Gamma_{11}^2 \mathbb{I}_3 & L_1 \mathbb{I}_3 \\ \Gamma_{21}^1 \mathbb{I}_3 & \Gamma_{21}^2 \mathbb{I}_3 & L_2 \mathbb{I}_3 \\ a_{11} \mathbb{I}_3 & a_{21} \mathbb{I}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \mathbb{I}_3 & \Gamma_{12}^2 \mathbb{I}_3 & L_3 \mathbb{I}_3 \\ \Gamma_{22}^1 \mathbb{I}_3 & \Gamma_{22}^2 \mathbb{I}_3 & L_4 \mathbb{I}_3 \\ a_{12} \mathbb{I}_3 & a_{22} \mathbb{I}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.1.9)$$

¹Elwin Bruno Christoffel (1829-1900). Matemático Alemán, Profesor en Estrasburgo. el introdujo los símbolos de tres índices que ahora son conocido como símbolos de Christoffel y usados en la Teoría de Invariantes.

²Julius Weingarten. Profesor de la Technische Universität en Berlín. Una superficie en la cual existe una relación funcional definida entre sus curvaturas principales es llamada una *Superficie de Weingarten*.

donde

$$\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las matrices \mathcal{P} y \mathcal{Q} no son independientes, están relacionadas por una ecuación de compatibilidad, como se establece en la siguiente proposición. Recordemos que para dos matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} de dimensión $n \times n$ el conmutador matricial se define por:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

Proposición 4.1.1 *Las funciones matriciales \mathcal{P} y \mathcal{Q} definidas por (4.1.9) satisfacen la condición de compatibilidad*

$$\mathcal{P}_v - \mathcal{Q}_u + [\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = 0 \quad (4.1.10)$$

Demostración. Denotemos por

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}.$$

Por la continuidad de las parciales tenemos $\mathbf{X}_{uv} = \mathbf{X}_{vu}$. Desarrollando las derivadas

$$(\mathbf{X})_{uv} = (\mathbf{X}_u)_v,$$

usando la ecuación (4.1.7) tenemos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{X})_{uv} &= (\mathcal{P} \mathbf{X})_v \\ &= \mathcal{P}_v \mathbf{X} + \mathcal{P} \mathbf{X}_v \\ &= \mathcal{P}_v \mathbf{X} + \mathcal{P} \mathcal{Q} \mathbf{X} \\ &= (\mathcal{P}_v + \mathcal{P} \mathcal{Q}) \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} (\mathbf{X})_{uv} &= (\mathbf{X}_v)_u = (\mathcal{Q} \mathbf{X})_u \\ &= \mathcal{Q}_u \mathbf{X} + \mathcal{Q} \mathbf{X}_u \\ &= \mathcal{Q}_u \mathbf{X} + \mathcal{Q} \mathcal{P} \mathbf{X} \\ &= (\mathcal{Q}_u + \mathcal{Q} \mathcal{P}) \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Por último, igualando las expresiones anteriores, tenemos:

$$(\mathcal{P}_v + \mathcal{P}\mathcal{Q})\mathbf{X} = (\mathcal{Q}_u + \mathcal{Q}\mathcal{P})\mathbf{X},$$

de esto se sigue

$$\mathcal{P}_v + \mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_u + \mathcal{Q}\mathcal{P}.$$

Al igualar a cero esta expresión tenemos la ecuación (4.1.10)

$$\mathcal{P}_v - \mathcal{Q}_u + \mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{P} = 0.$$

■

La ecuación (4.1.10) es la *Ecuación de Compatibilidad* en forma matricial, que como veremos en la sección 4.3, es una condición necesaria y suficiente para la existencia local de una superficie. En la parte final de esta sección probaremos que algunas de las componentes de la ecuación (4.1.10) son las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi, y otras componentes son las ecuaciones de Weingarten. Estas ecuaciones son llamadas en algunos textos [4, 8, 14] condiciones de integrabilidad.

4.1.2 Cálculo de las matrices \mathcal{P} y \mathcal{Q} .

Nuestro siguiente propósito es mostrar que las componentes de las matrices que aparecen en (4.1.9) se pueden expresar en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental, y las derivadas de los coeficientes de la primera forma. Recordemos que los coeficientes de las formas fundamentales están dados por las siguientes expresiones:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle,$$

para la primera forma y

$$\begin{aligned} e &= \langle -\mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle, \\ f &= \langle -\mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = \langle -\mathbf{x}_v, \mathbf{N}_u \rangle, \\ g &= \langle -\mathbf{x}_v, \mathbf{N}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{N} \rangle. \end{aligned}$$

para la segunda forma fundamental.

Lema 4.1.2 *Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y v_1, v_2, \dots, v_n una base de V . Sea $\xi \in V$ un vector cuya expresión en términos de la base*

es $\xi = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{G}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

donde $\xi_i = \langle \xi, v_i \rangle$ y $\mathbb{G} = (g_{ij}) = (\langle v_i, v_j \rangle)$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} \xi_i &= \langle \xi, v_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j v_j, v_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n x_j g_{ji}. \end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo $i=1,2,\dots,n$, entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \mathbb{G} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

■

En la siguiente proposición se presentan fórmulas explícitas para calcular las componentes de las matrices que aparecen en (4.1.9).

Proposición 4.1.3 *Las componentes de las funciones matriciales \mathcal{P} y \mathcal{Q} (4.1.9) se expresan en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental; y derivadas de la primer forma como:*

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \mathbb{I}_3 & (F_u - \frac{1}{2}E_v) \mathbb{I}_3 & e \mathbb{I}_3 \\ \frac{1}{2}E_v \mathbb{I}_3 & \frac{1}{2}G_u \mathbb{I}_3 & f \mathbb{I}_3 \\ -e \mathbb{I}_3 & -f \mathbb{I}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_3^{11} \mathbb{I}_3 & g_3^{12} \mathbb{I}_3 & 0 \\ g^{12} \mathbb{I}_3 & g^{22} \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (4.1.11)$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v \mathbb{I}_3 & \frac{1}{2}G_u \mathbb{I}_3 & f \mathbb{I}_3 \\ (F_v - \frac{1}{2}G_u) \mathbb{I}_3 & \frac{1}{2}G_v \mathbb{I}_3 & g \mathbb{I}_3 \\ -f \mathbb{I}_3 & -g \mathbb{I}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{11} \mathbb{I}_3 & g^{12} \mathbb{I}_3 & 0 \\ g^{12} \mathbb{I}_3 & g^{22} \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.1.12)$$

Demostración. Verifiquemos primero que los símbolos de Christoffel dependen únicamente de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas. Por simple cálculo de los productos interiores se derivan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle &= \frac{1}{2}E_u, & \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \frac{1}{2}G_v, \\ \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle &= \frac{1}{2}E_v, & \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \frac{1}{2}G_u, \\ \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_u - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v, \\ \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle_v - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv} \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u, \\ \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle &= e, & \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle &= g, \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle &= -f, & \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N} \rangle &= \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N} \rangle = 0\end{aligned}$$

Si recordamos que el triedro $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$, es una base para \mathbb{R}^3 , en este caso, la matriz \mathbb{G} que aparece en el Lema 4.1.2 tiene la forma

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1.13)$$

denotemos al matriz inversa de \mathbb{G} como:

$$\mathbb{G}^{-1} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & 0 \\ g^{21} & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el Lema 4.1.2 a las ecuaciones de Gauss y de Weingarten (4.1.1)-(4.1.6), las cuales expresan las derivadas parciales de los vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}$ como una combinación lineal de la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \\ L_1 \end{pmatrix} &= \mathbb{G}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \\ e \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 \\ \Gamma_{21}^2 \\ L_2 \end{pmatrix} &= \mathbb{G}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \\ f \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \\ L_4 \end{pmatrix} &= \mathbb{G}^{-1} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \\ g \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \\ L_3 \end{pmatrix} &= \mathbb{G}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \\ f \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{G}^{-1} \begin{pmatrix} -e \\ -f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{G}^{-1} \begin{pmatrix} -f \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De esto se sigue que los símbolos de Christoffel se pueden escribir solamente en términos de la primera forma fundamental y sus derivadas. Por último, sustituyendo los resultados anteriores en las fórmulas de las matrices \mathcal{P} y \mathcal{Q} que aparecen en la ecuación (4.1.9), se llega a las ecuaciones (4.1.11) y (4.1.12). ■

4.1.3 Ecuaciones de Gauss-Codazzi en $GL(3)$.

En esta parte nuestro objetivo es sustituir el sistema vectorial (4.1.7) y (4.1.8) por un sistema matricial equivalente. En consecuencia, obtendremos una expresión equivalente a la ecuación de compatibilidad (4.1.10), planteada en términos de matrices del grupo $GL(9)$, por una ecuación planteada ahora con matrices del grupo $GL(3)$. El propósito de todo esto es facilitar y simplificar la notación para las secciones posteriores, donde se dará la demostración del teorema fundamental de superficies. Para lograr lo anterior, definiremos un par de operadores lineales cuyas propiedades, planteadas en esta misma sección en forma de lemas, nos ayudarán a cambiar el sistema vectorial (4.1.7), (4.1.8) por un sistema matricial equivalente. Vamos a decir que un sistema vectorial es equivalente a un sistema matricial si y sólo si la existencia de solución en el sistema vectorial implica la existencia de solución al sistema matricial y viceversa.

Para cada matriz

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \in GL(3).$$

se define el operador lineal $l : GL(3) \rightarrow GL(9)$ por:

$$l(\mathbb{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_3 & a_{12}\mathbb{I}_3 & a_{13}\mathbb{I}_3 \\ a_{21}\mathbb{I}_3 & a_{22}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 \\ a_{31}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 & a_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \quad (4.1.14)$$

Lema 4.1.4 *El operador l (4.1.14) tiene las siguientes propiedades:*

- (i) l es inyectivo en su imagen;
- (ii) $l(\mathbb{A}\mathbb{B}) = l(\mathbb{A})l(\mathbb{B})$;

$$(iii) \quad l([\mathbb{A}, \mathbb{B}]) = [l(\mathbb{A}), l(\mathbb{B})];$$

$$(iv) \quad l(\mathbb{A}^{-1}) = l(\mathbb{A})^{-1};$$

$$(v) \quad l(\mathbb{A}^T) = l(\mathbb{A})^T;$$

(vi) Si \mathbb{A} es una función matricial suave, en las variables u y v , entonces:

$$l(\mathbb{A}_u) = l(\mathbb{A})_u \quad y \quad l(\mathbb{A}_v) = l(\mathbb{A})_v.$$

Para la demostración de este lema ver apéndice A.

Nota 4.1.1 Si denotamos por l^{-1} al operador inverso de l , es fácil probar que l^{-1} posee las mismas propiedades que el operador l ; salvo que éstas deben estar planteadas en el respectivo dominio y contradominio de l^{-1} .

Sea $\mathbf{\Pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_9)^T \in \mathbb{R}^9$, un vector columna. Se define el operador lineal $L: \mathbb{R}^9 \rightarrow \text{GL}(3)$ por

$$L(\mathbf{\Pi}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_4 & \pi_7 \\ \pi_2 & \pi_5 & \pi_8 \\ \pi_3 & \pi_6 & \pi_9 \end{bmatrix} \quad (4.1.15)$$

La importancia del operador L (4.1.15) es que sus propiedades nos permiten obtener un sistema matricial de 3×3 a partir de un sistema vectorial lineal en \mathbb{R}^9 .

Lema 4.1.5 El operador L (4.1.15) posee las siguientes propiedades:

(i) L es inyectivo en su imagen;

(ii) Si $\mathbf{X}(u, v)$ es una función vectorial suave en \mathbb{R}^9 , entonces

$$L(\mathbf{X}_u) = L(\mathbf{X})_u \quad y \quad L(\mathbf{X}_v) = L(\mathbf{X})_v;$$

(iii) Para cada $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^9$, la ecuación vectorial:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1\mathbb{I}_3 & a_4\mathbb{I}_3 & a_7\mathbb{I}_3 \\ a_2\mathbb{I}_3 & a_5\mathbb{I}_3 & a_8\mathbb{I}_3 \\ a_3\mathbb{I}_3 & a_6\mathbb{I}_3 & a_9\mathbb{I}_3 \end{bmatrix},$$

se transforma bajo el operador L en la ecuación matricial equivalente:

$$L(\mathbf{Y}) = L(\mathbf{X})\mathbf{A}.$$

Aquí

$$\mathbb{A} = [l^{-1}(\mathcal{A})]^T,$$

donde l^{-1} es la inversa del operador l (4.1.14).

La demostración de este lema puede ser consultada en el apéndice A.

Proposición 4.1.6 *El sistema vectorial (4.1.7) y (4.1.8), es equivalente al sistema de ecuaciones matriciales:*

$$[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}]_u = [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}] \mathbb{P}, \quad (4.1.16)$$

$$[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}]_v = [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}] \mathbb{Q}. \quad (4.1.17)$$

\mathbb{P} y \mathbb{Q} son matrices cuadradas de 3×3 dadas por:

$$\mathbb{P} = [l^{-1}(\mathcal{P})]^T, \quad (4.1.18)$$

$$\mathbb{Q} = [l^{-1}(\mathcal{Q})]^T. \quad (4.1.19)$$

Demostración. Apliquemos la transformación lineal L (4.1.15) a la ecuación vectorial (4.1.7). Por el inciso (iii) del Lema (4.1.5), esta ecuación se transforma

$$L \left[\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_u \right] = L \left[\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \right] \mathbb{P},$$

donde $\mathbb{P} = [l^{-1}(\mathcal{P})]^T$, con esto obtenemos la ecuación (4.1.18). Por otra parte,

$$L \left[\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \right] = [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}],$$

y por el inciso (ii) del Lema (4.1.5) se sigue que

$$L \left[\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_u \right] = [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}]_u.$$

Con esto se obtiene la ecuación matricial (4.1.16). Análogamente, aplicando el operador L (4.1.15) a la ecuación (4.1.8) y usando sus propiedades, podemos obtener las ecuaciones (4.1.17) y (4.1.19). ■

En la Proposición (4.1.3) probamos que los símbolos de Christoffel dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental, en esta misma proposición también se dan las fórmulas para calcular las componentes de las matrices \mathcal{P} y \mathcal{Q} (4.1.9). Usando el operador l (4.1.14) podemos obtener fórmulas para las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} , como se establece en el siguiente corolario.

Corolario 4.1.7 *Las componentes de las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} (4.1.16), (4.1.17) se obtienen mediante las fórmulas:*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & 0 \\ g^{12} & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & -e \\ (F_u - \frac{1}{2}E_v) & \frac{1}{2}G_u & -f \\ e & f & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.20)$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & 0 \\ g^{12} & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v & (F_v - \frac{1}{2}G_u) & -f \\ \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v & -g \\ f & g & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.21)$$

Demostración. Si se sustituyen las fórmulas para las matrices \mathcal{P} y \mathcal{Q} (4.1.11) y (4.1.12) en las ecuaciones (4.1.18) y (4.1.19), obtenemos (4.1.20) y (4.1.21). ■

Recordemos que las matrices \mathcal{P} y \mathcal{Q} del sistema vectorial planteado por (4.1.7) y (4.1.8) satisfacen la ecuación de compatibilidad (4.1.10), por lo que es de esperarse que las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} del sistema matricial (4.1.16) y (4.1.17) también estén relacionadas por su propia ecuación de compatibilidad, como se prueba en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.8 *Las funciones matriciales \mathbb{P} y \mathbb{Q} (4.1.20), (4.1.21) satisfacen la condición de compatibilidad*

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]. \quad (4.1.22)$$

Demostración. Si aplicamos l^{-1} , la inversa del operador lineal l definido por (4.1.14) a la ecuación de compatibilidad (4.1.10) que satisfacen las matrices \mathcal{P} y \mathcal{Q} , entonces por la propiedades del operador l^{-1} (ver Lema 4.1.4 y la Nota 4.1.1) tenemos:

$$\begin{aligned} l^{-1}(\mathcal{P}_v - \mathcal{Q}_u) &= l^{-1}(-[\mathcal{P}, \mathcal{Q}]), \\ l^{-1}(\mathcal{P})_v - l^{-1}(\mathcal{Q})_u &= -[l^{-1}(\mathcal{P}), l^{-1}(\mathcal{Q})], \\ (\mathbb{P}_v)^T - (\mathbb{Q}_u)^T &= -[\mathbb{P}^T, \mathbb{Q}^T], \\ \mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u &= [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]. \end{aligned}$$

■

En resumen, podemos decir que el sistema vectorial (4.1.7) y (4.1.8) y el sistema matricial (4.1.16) y (4.1.17) son equivalentes, es decir, ambos representan los mismos objetos pero en espacios distintos. Se puede pasar de un sistema a otro usando los operadores lineales que definimos en las ecuaciones (4.1.14),(4.1.15) y ambos tienen la misma solución común. Más aún, las ecuación de compatibilidad (4.1.10) que satisface el sistema vectorial (4.1.7) y (4.1.8) es equivalente a la ecuación de compatibilidad (4.1.22) que satisface el sistema matricial (4.1.16) y (4.1.17), en el sentido de que al satisfacerse una ecuación se satisface la otra y viceversa; también en este caso podemos pasar de una condición a la otra por medio de la transformación lineal l (4.1.14).

4.1.4 Ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi y Teorema de Gauss

Uno de los principales objetivos de este capítulo es derivar las ecuaciones de compatibilidad asociadas al sistema de ecuaciones (4.1.1)-(4.1.6). Cabe señalar en este punto que el enfoque dado aquí para intentar resolver el sistema de ecuaciones (4.1.1)-(4.1.6) es diferente al que se encuentre en los libros de texto clásicos de Geometría Diferencial como [4, 8, 14, 15]. En el enfoque clásico las ecuaciones de compatibilidad están dadas por la ecuación del Teorema de Gauss (4.1.24) y las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi (4.1.27),(4.1.28) las cuales son conocidas bajo el nombre de *ecuaciones de compatibilidad de la teoría de superficies*. En el enfoque que abordamos en esta última parte, obtenemos la condición de compatibilidad en forma matricial en cuyas componentes podemos encontrar las ecuaciones de compatibilidad clásica. Esta es la razón por la cual la ecuación de compatibilidad (4.1.22) también es llamada ecuación de Gauss-Codazzi.

Como primer punto, escribamos las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} (4.1.20),(4.1.21) usando los símbolos de Christoffel que aparecen en las ecuaciones (4.1.9).

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{21}^1 & \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{21}^2 & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ e & f & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \\ f & g & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.23)$$

Por simple inspección de las fórmulas (4.1.20) y (4.1.21) notamos que la segunda columna de la matriz \mathbb{P} es igual a la primera columna de \mathbb{Q} , esto implica que $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1$, $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$, es decir los símbolos de Christoffel

son simétricos con respecto a los subíndices. En la proposición (4.1.3), demostramos que los símbolos de Christoffel dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental. En el capítulo de superficies, sección (2.3), se mencionó que todas las propiedades que pueden expresarse en función de los coeficientes de la primera forma fundamental son propiedades intrínsecas de la superficie. Si calculamos las componentes (1, 1), (1, 2), (2, 1) de la ecuación (4.1.22) usando las matrices \mathbb{P}, \mathbb{Q} (4.1.23), tenemos:

$$(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u = \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - FK, \quad (4.1.24)$$

$$(\Gamma_{21}^1)_v - (\Gamma_{22}^1)_u = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 - GK, \quad (4.1.25)$$

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u = \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 + EK. \quad (4.1.26)$$

Donde K es la curvatura Gaussiana, definida en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental por:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

(ver Proposición (2.4.1)). Las ecuaciones (4.1.24), (4.1.25), (4.1.26) son conocidas como las fórmulas clásicas del Teorema de Gauss [4, 8, 14, 15], el cual establece que la curvatura gaussiana es una propiedad intrínseca de la superficie, es decir que permanece invariante bajo isometrías. La manera de comprobar esto es despejando la curvatura gaussiana en cualquiera de las ecuaciones (4.1.24), (4.1.25), (4.1.26), con lo que la curvatura gaussiana queda expresada en términos de los símbolos de Christoffel, los que a su vez dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental. Con estas ecuaciones hemos probado el *Teorema Egregio Gauss*, uno de los más importantes en la teoría de superficies.

Teorema 4.1.9 (Teorema Egregio de Gauss) *La curvatura Gaussiana de una superficie en \mathbb{R}^3 se puede calcular en término de los coeficientes de la primera forma fundamental.*

Si calculamos las componentes (3,1) y (3,2) de la ecuación de compatibilidad (4.1.22) obtenemos:

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \quad (4.1.27)$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) - g\Gamma_{21}^2. \quad (4.1.28)$$

Las fórmulas (4.1.27), (4.1.28) son las ecuaciones de Peterson-Minardi-Codazzi [4, 8; 14, 15] en su versión clásica. El resto de las componentes de la ecuación de compatibilidad (4.1.22) son identidades que involucran a las ecuaciones de Gauss o a las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi. Como punto final se hace la observación de que la ecuación de compatibilidad (4.1.22) es también llamada la *ecuación de Gauss-Codazzi* por razones que en este momento son más que obvias.

4.2 Formulación del Teorema Fundamental.

Esta sección está dedicada a la formulación del Teorema Fundamental de Superficies en \mathbb{R}^3 , esta es la parte central de este trabajo, todo el trabajo realizado en capítulos anteriores será utilizado a partir de este punto para dar una demostración completa de este teorema. El primer paso para demostrar cualquier teorema es que su formulación sea clara, de tal manera que podamos entenderlo satisfactoriamente. Para asegurarnos de esto, presentaremos una formulación formal del teorema fundamental y después haremos los comentarios necesarios sobre las partes que forman este teorema y acerca de las hipótesis que se requieren.

Teorema 4.2.1 (a) Sea \mathcal{M} una superficie regular orientable en \mathbb{R}^3 , con una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$. Supongamos que E, F, G y e, f, g son los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental con respecto a la parametrización \mathbf{x} , definamos las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental dadas por las fórmulas (4.1.20) y (4.1.21). Entonces \mathbb{P} y \mathbb{Q} satisfacen la ecuación de compatibilidad

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]. \quad (4.2.1)$$

(b) Sean E, F, G, e, f, g funciones suaves definidas en un dominio abierto $V \subset \mathbb{R}^2$, tales que $E > 0, G > 0$ y $EG - F^2 > 0$. Usando estas funciones definimos las funciones matriciales $\mathbb{G} : V \rightarrow GL(3)$ dada por (4.1.13) y $\mathbb{P}, \mathbb{Q} : V \rightarrow GL(3)$ por (4.1.20) y (4.1.21). Supongamos que \mathbb{P} y \mathbb{Q} satisfacen la ecuación de compatibilidad (4.3.4). Entonces existe un abierto $U \subset V$, y una única función suave $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U)$ es una superficie regular y los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental para la superficie \mathcal{M} están dadas por las funciones E, F, G y e, f, g respectivamente.

(c) Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos superficies regulares con parametrizaciones $\mathbf{x} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$ y $\tilde{\mathbf{x}} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{N}$, respectivamente. Si existe una vecindad

abierta $U \subset V$ tal que los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental asociados a las parametrizaciones \mathbf{x} y $\tilde{\mathbf{x}}$ coinciden en todo U , entonces existe un movimiento rígido $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathcal{N}) = \mathcal{M}, \quad \text{en todo } U.$$

A continuación, y con el fin de poner en claro la importancia de los resultados que se establecen en el Teorema (4.2.1), describiremos brevemente cada uno de los incisos que forman parte del Teorema Fundamental de Superficies; también se dará un esbozo de los pasos que se siguen para lograr la prueba. El Teorema (4.2.1) es un resultado local que da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una superficie regular, también cabe aclarar que es un resultado de existencia y unicidad.

En el inciso (a) del Teorema (4.2.1) se tiene el propósito de obtener las ecuaciones de compatibilidad que deben de cumplir los coeficientes de las formas fundamentales de una superficie regular. La idea es plantear las ecuaciones de Gauss y de Weingarten (4.1.1)-(4.1.6) y mostrar que las componentes que aparecen en estas ecuaciones son funciones que dependen de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental. Luego, usando la propiedad de las parciales cruzadas para funciones suaves, obtenemos las ecuaciones de compatibilidad que también son conocidas como las ecuaciones de Gauss-Codazzi, que además de ser condiciones necesarias son suficientes para la existencia local de una superficie regular, como se muestra en el siguiente inciso.

El inciso (b) es la parte más importante del teorema y la más difícil de probar. Aquí es donde se prueba la existencia de una superficie dados los coeficientes de sus formas fundamentales. Para poder dar una demostración completa y satisfactoria de este inciso, usaremos un resultado importante desarrollado en el Capítulo 2, el criterio de Frobenius (Teorema 3.3.1). Como queremos demostrar la existencia de una superficie que tenga como coeficiente de sus formas fundamentales a ciertas funciones dadas, entonces estas funciones, junto con una parametrización de dicha superficie debe de satisfacer las ecuaciones de Gauss y Weingarten en su forma matricial (4.1.16), (4.1.17). Esto nos da un sistema de ecuaciones en la que la incógnita es una función matricial. Por el el criterio de Frobenius, este sistema tiene solución si y sólo si los coeficientes de las formas fundamentales satisfacen las ecuaciones de Gauss-Codazzi. Ahora tomando las soluciones de este sistema se construye otro sistema de ecuaciones en el que la solución, garantizada otra vez por el teorema de Frobenius, es una parametrización de una superficie regular como se demuestra en este mismo inciso.

En el inciso (c) se demuestra de manera local la unicidad de una superficie, salvo movimientos rígidos. Se inicia la prueba de este inciso suponiendo que tenemos dos superficies en que para ciertas parametrizaciones los coeficientes de sus formas fundamentales son idénticos. Después se identifica un punto en cada una de las superficies y se construye un movimiento rígido que mapea isométricamente a un punto de una superficie y su plano tangente con su correspondiente punto en la otra superficie y a su plano. Todo esto sin que cambie la orientación de los planos. Por último se aplica el movimiento rígido a la superficie, y se demuestra, usando el Teorema de Existencia y Unicidad de EDO (Teorema 1.2.1) que en una vecindad ambas superficies son iguales.

4.3 Demostración del Teorema Fundamental.

El trabajo realizado en los capítulos y secciones anteriores nos servirá aquí para lograr nuestro propósito, la demostración del Teorema fundamental de Superficies.

4.3.1 Demostración de la ecuación de compatibilidad

El inciso (a) ya ha sido probado en la primera sección de este capítulo. Como ya se mencionó en la sección (4.1), la ecuación de compatibilidad también es conocida como ecuación de Gauss-Codazzi; a partir de este momento usaremos alguno de los dos nombres conforme resulte más conveniente.

4.3.2 Existencia de la superficie.

Debido a lo extenso que resulta probar esta parte, se presentará en 3 pasos.

Paso 1. Consideremos las funciones suaves E, F, G, e, f, g definidas en el dominio abierto $V \subset \mathbb{R}^2$, que cumplen las hipótesis del inciso (b) del Teorema (4.2.1). Como queremos demostrar la existencia de una superficie que tenga como coeficiente de sus formas fundamentales a las funciones E, F, G, e, f, g , entonces estas funciones, junto con una parametrización de dicha superficie deben de satisfacer las ecuaciones de Gauss y Weingarten en su forma matricial (4.1.16), (4.1.17). Esto nos da un sistema de ecuaciones en las que la incógnita es una función matricial. Por el Criterio de Frobenius, este sistema tiene solución si y solo si los coeficientes de las formas fundamentales satisfacen las ecuaciones de Gauss-Codazzi. Para lograr lo

anterior, formemos la matriz \mathbb{G} (4.1.13)

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3.1)$$

Después construyamos las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} (4.1.20), (4.1.21)

$$\mathbb{P} = \mathbb{G}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & -e \\ (F_u - \frac{1}{2}E_v) & \frac{1}{2}G_u & -f \\ e & f & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3.2)$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{G}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v & (F_v - \frac{1}{2}G_u) & -f \\ \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v & -g \\ f & g & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Tomemos (u_0, v_0) un punto fijo en el dominio abierto $V \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, y $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ una base para \mathbb{R}^3 , tal que $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = g_{ij}(u_0, v_0)$ y $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$ para $i = 1, 2$. Supongamos ahora que \mathbb{P} y \mathbb{Q} satisfacen la ecuación de compatibilidad

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]. \quad (4.3.4)$$

Entonces, por el criterio de Frobenius (Teorema 3.3.1), existe una vecindad $U \subset V$ del punto (u_0, v_0) y una función matricial suave $\mathbb{V} : U \rightarrow GL(3)$

$$\mathbb{V} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3], \quad (4.3.5)$$

donde cada ω_i es una función vectorial suave en \mathbb{R}^3 , para $i = 1, 2, 3$, tal que es solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbb{V}_u = \mathbb{V}\mathbb{P}, \quad (4.3.6)$$

$$\mathbb{V}_v = \mathbb{V}\mathbb{Q}. \quad (4.3.7)$$

$$\mathbb{V}|_{(u_0, v_0)} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]. \quad (4.3.8)$$

La función matricial \mathbb{V} (4.3.5) posee ciertas propiedades que serán de utilidad en el siguiente paso de la demostración. La primera de estas propiedades se presenta en el siguiente lema.

Lema 4.3.1 Para las funciones vectoriales ω_1 y ω_2 que son columnas de la matriz \mathbb{V} (4.3.5) se cumple la siguiente identidad

$$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \quad (\omega_2)_u = (\omega_1)_v. \quad (4.3.9)$$

Demostración. Notemos que $(\omega_2)_u$ es la segunda columna de la matriz \mathbb{V}_u que aparece en la ecuación (4.3.6) y $(\omega_1)_v$ es la primera columna de la matriz \mathbb{V}_v de la ecuación (4.3.7). Utilizando las ecuaciones (4.3.6), (4.3.7) y las fórmulas de las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} (4.3.2), (4.3.3) tenemos:

$$(\omega_2)_u = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{G}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \\ f \end{pmatrix} = (\omega_1)_v.$$

■

En el siguiente lema se prueba que ω_3 , la tercera columna de la matriz \mathbb{V} es ortogonal al subespacio generado por las dos columnas restantes de \mathbb{V} .

Lema 4.3.2 Para las funciones vectoriales ω_i , que son columnas de la función matricial \mathbb{V} (4.3.5), se cumple la siguiente identidad

$$\langle \omega_i, \omega_3 \rangle = 0, \text{ para } i = 1, 2; \quad (4.3.10)$$

y además se tiene

$$\mathbb{G} = \mathbb{V}^T \mathbb{V}. \quad (4.3.11)$$

Donde \mathbb{G} es la función matricial (4.3.1).

Demostración. Definamos $\mathbb{Z} = \mathbb{V}^T \mathbb{V} = (\langle \omega_i, \omega_j \rangle)$, la cual es una matriz simétrica por construcción. La idea es probar que

$$\mathbb{Z} = \mathbb{G}.$$

Si transponemos las ecuaciones (4.3.6) y (4.3.7) tenemos:

$$\mathbb{V}_u^T = \mathbb{P}^T \mathbb{V}^T, \quad (4.3.12)$$

$$\mathbb{V}_v^T = \mathbb{Q}^T \mathbb{V}^T. \quad (4.3.13)$$

Multiplicando por la izquierda las ecuaciones (4.3.6) y (4.3.7) por \mathbb{V}^T , tenemos:

$$\mathbb{V}^T \mathbb{V}_u = \mathbb{V}^T \mathbb{V} \mathbb{P}, \quad (4.3.14)$$

$$\mathbb{V}^T \mathbb{V}_v = \mathbb{V}^T \mathbb{V} \mathbb{Q}. \quad (4.3.15)$$

Análogamente, multiplicando por la derecha las ecuaciones (4.3.12) y (4.3.13) por \mathbb{V} obtenemos

$$\mathbb{V}_u^T \mathbb{V} = \mathbb{P}^T \mathbb{V}^T \mathbb{V}, \quad (4.3.16)$$

$$\mathbb{V}_v^T \mathbb{V} = \mathbb{Q}^T \mathbb{V}^T \mathbb{V}. \quad (4.3.17)$$

Si se suma la ecuación (4.3.14) con la ecuación (4.3.16) y análogamente se suma la ecuación (4.3.15) y la ecuación (4.3.17); se forma un nuevo sistema de ecuaciones en derivadas parciales, que toma la siguiente forma después de hacer la sustitución $\mathbb{Z} = \mathbb{V}^T \mathbb{V}$ y sus derivadas.

$$\mathbb{Z}_u = \mathbb{Z} \mathbb{P} + \mathbb{P}^T \mathbb{Z}, \quad (4.3.18)$$

$$\mathbb{Z}_v = \mathbb{Z} \mathbb{Q} + \mathbb{Q}^T \mathbb{Z}, \quad (4.3.19)$$

$$\mathbb{Z}(u_0, v_0) = \mathbb{G}(u_0, v_0). \quad (4.3.20)$$

Como la función matricial \mathbb{Z} es suave (por ser producto de dos funciones suaves) se tiene que $\mathbb{Z}_{uv} = \mathbb{Z}_{vu}$. Si desarrollamos estas derivadas parciales usando (4.3.18), (4.3.19), obtendremos la condición de compatibilidad, dada por el criterio de Frobenius (Teorema 3.3.1), para que dicho sistema tenga solución. Entonces se tiene por un lado que:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{uv} &= (\mathbb{Z}_u)_v = \mathbb{Z}_v \mathbb{P} + \mathbb{Z} \mathbb{P}_v + \mathbb{P}_v^T \mathbb{Z} + \mathbb{P}^T \mathbb{Z}_v, \\ &= \mathbb{Z} \mathbb{Q} \mathbb{P} + \mathbb{Q}^T \mathbb{Z} \mathbb{P} + \mathbb{Z} \mathbb{P}_v + \mathbb{P}_v^T \mathbb{Z} + \mathbb{P}^T \mathbb{Z} \mathbb{Q} + \mathbb{P}^T \mathbb{Q}^T \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

y por otro lado se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{vu} &= (\mathbb{Z}_v)_u = \mathbb{Z}_u \mathbb{Q} + \mathbb{Z} \mathbb{Q}_u + \mathbb{Q}_u^T \mathbb{Z} + \mathbb{Q}^T \mathbb{Z}_u, \\ &= \mathbb{Z} \mathbb{P} \mathbb{Q} + \mathbb{P}^T \mathbb{Z} \mathbb{Q} + \mathbb{Z} \mathbb{Q}_u + \mathbb{Q}_u^T \mathbb{Z} + \mathbb{Q}^T \mathbb{Z} \mathbb{P} + \mathbb{Q}^T \mathbb{P}^T \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Si igualamos las expresiones anteriores y agrupamos términos obtenemos que la condición de compatibilidad es:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}(\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u) + (\mathbb{P}_v^T - \mathbb{Q}_u^T) \mathbb{Z} &= \mathbb{Z}(\mathbb{P} \mathbb{Q} - \mathbb{Q} \mathbb{P}) - (\mathbb{P}^T \mathbb{Q}^T - \mathbb{Q}^T \mathbb{P}^T) \mathbb{Z}. \\ [\mathbb{Z}, \mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u] &= [\mathbb{Z}, [\mathbb{P}, \mathbb{Q}]] \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Como se puede notar, la condición de compatibilidad (4.3.21) involucra a la función incógnita \mathbb{Z} , lo cual parece a simple vista una desventaja al momento de querer saber si dicho sistema tiene solución. Pero recordemos que las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} que aparecen aquí, no son independientes entre sí, ya que estas satisfacen la ecuación de Gauss-Codazzi (4.3.4). De esto se sigue que la

ecuación (4.3.21) también se satisface y por lo tanto el sistema de ecuaciones formado por (4.3.18), (4.3.19) y (4.3.20) tiene solución local única. Por una parte, sabemos que por construcción $\mathbb{Z} = \mathbb{V}^T \mathbb{V}$ es solución del sistema de ecuaciones parciales. Si ahora tomamos $\mathbb{Z} = \mathbb{G}$ (4.3.1) en las ecuaciones (4.3.18), (4.3.19) y (4.3.20) y utilizamos las expresiones para matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} dadas por (4.3.2) y (4.3.3) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_u &= \mathbb{G} \mathbb{G}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_u & \frac{1}{2} E_v & -e \\ (F_u - \frac{1}{2} E_v) & \frac{1}{2} G_u & -f \\ e & f & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_u & (F_u - \frac{1}{2} E_v) & e \\ \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u & f \\ -e & -f & 0 \end{bmatrix} \mathbb{G}^{-1} \mathbb{G}, \\ &= \begin{bmatrix} E_u & F_u & 0 \\ F_u & G_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_v &= \mathbb{G} \mathbb{G}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_v & (F_v - \frac{1}{2} G_u) & -f \\ \frac{1}{2} G_u & \frac{1}{2} G_v & -g \\ f & g & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u & f \\ (F_v - \frac{1}{2} G_u) & \frac{1}{2} G_v & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix} \mathbb{G}^{-1} \mathbb{G}, \\ &= \begin{bmatrix} E_v & F_v & 0 \\ F_v & G_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que hemos obtenido una identidad para la función \mathbb{G} . De esto se sigue que la matriz \mathbb{G} es solución de (4.3.18), (4.3.19), en consecuencia, por la unicidad de solución $\mathbb{G} = \mathbb{V}^T \mathbb{V} = (\langle \omega_i, \omega_j \rangle)$, por lo tanto $\langle \omega_i, \omega_3 \rangle = g_{i3} = 0$, para $i = 1, 2$. ■

Para terminar este primer paso, probemos que las columnas de la matriz $\mathbb{V} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ forman una base para \mathbb{R}^3 , lo cual es equivalente a probar que la matriz \mathbb{V} es invertible.

Lema 4.3.3 *La función matricial \mathbb{V} (4.3.5) es invertible.*

Demostración. Por el Lema (4.3.2), $\mathbb{G} = \mathbb{V}^T \mathbb{V}$, por las propiedades de los determinantes $\det \mathbb{G} = (\det \mathbb{V})^2$. Por otra parte

$$\det \mathbb{G} = EG - F^2 > 0$$

y entonces $\det \mathbb{V} \neq 0$. Por tanto \mathbb{V} es invertible. ■

Notemos que todas las propiedades que se probaron aquí para el conjunto de vectores $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ lo señalan como un posible triedro móvil de una

superficie regular, es decir, en cada punto de dicha superficie su plano tangente estaría generado por los vectores ω_1, ω_2 y como vector normal al plano el vector ω_3 . En el siguiente paso probaremos que esto es cierto.

Paso 2. Probaremos ahora que existe una superficie regular tal que su triedro móvil, es decir, los vectores base de su plano tangente y el vector normal al plano son precisamente las columnas de la función matricial \mathbb{V} (4.3.5), es decir, queremos encontrar una función vectorial suave (una parametrización) $\mathbf{x} : (u, v) \in U \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que se satisfaga el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{x}_u = \omega_1, \quad (4.3.22)$$

$$\mathbf{x}_v = \omega_2, \quad (4.3.23)$$

$$\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}_0. \quad (4.3.24)$$

El siguiente resultado establece que este sistema siempre tiene solución.

Lema 4.3.4 *El sistema de ecuaciones (4.3.22), (4.3.23) y (4.3.24) tiene solución única.*

Demostración. Por el criterio de Frobenius (Teorema 3.2.1), la condición de compatibilidad para que este sistema tenga solución es: $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, lo cual es equivalente a

$$(\omega_2)_u = (\omega_1)_v.$$

Por el lema (4.3.1), tenemos que esta identidad se cumple y el sistema tiene solución única, definida en una vecindad U del punto \mathbf{p}_0 . ■

Probemos ahora que la imagen de U bajo la función \mathbf{x} es una superficie regular la cual tiene ω_1 y ω_2 como sus vectores coordenados, dicho de otro modo, que estos vectores generan al plano tangente en cada punto de la superficie.

Lema 4.3.5 *Supongamos que $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es solución del sistema de ecuaciones (4.3.22), (4.3.23) y (4.3.24). Entonces $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular.*

Demostración. Vamos a probar que $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U)$ es la gráfica de una función suave. Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ la solución al sistema (4.3.22), (4.3.23), (4.3.24). Definamos la función $\mathbf{F} : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{F}(u, v, \mathbf{p}) = \mathbf{x}(u, v) - \mathbf{p}, \quad \text{donde } \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Es claro que F es una función suave. Veamos que el valor de la función en el punto fijo $(u_0, v_0, \mathbf{p}_0) \in U \times \mathbb{R}^3$ es

$$F(u_0, v_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{x}(u_0, v_0) - \mathbf{p}_0 = \mathbf{0}.$$

Al calcular las derivadas parciales de F con respecto a u, v, \mathbf{p} tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \mathbf{x}_u, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \mathbf{x}_v$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces por el Teorema de la Función Implícita (Teorema 1.2.2) en una vecindad del punto (u_0, v_0, \mathbf{p}_0) el conjunto de puntos (u, v, \mathbf{p}) tales que $F(u, v, \mathbf{p}) = 0$ es la gráfica de una función suave. Más aún, existe una única función suave \mathbf{g} bien definida en una vecindad del punto (u_0, v_0) tal que $\mathbf{p} = \mathbf{g}(u, v)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el abierto U es el dominio de definición de la función \mathbf{g} . Por otra parte, si $F(u, v, \mathbf{p}) = 0$, $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p}$, y entonces $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{g}(u, v)$ para todo $(u, v) \in U$. Por lo tanto el conjunto $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U)$ es la gráfica de una función suave. Por la Proposición (2.2.1) se tiene que \mathcal{M} es una superficie regular. ■

Paso 3. En este último paso vamos a probar que la superficie \mathcal{M} cuya parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ es solución del sistemas de ecuaciones (4.3.22), (4.3.23) tiene como su primera y su segunda forma fundamental las formas cuadráticas:

$$I = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2,$$

$$II = edu^2 + fdudv + gdv^2,$$

donde las funciones E, F, G, e, f, g definen a las matrices \mathbb{G}, \mathbb{P} y \mathbb{Q} (4.3.1), (4.3.2) y (4.3.1).

Por otra parte, obsérvese que del Lema (4.3.4) se sigue para la superficie dada por la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$, por tanto las funciones vectoriales ω_1, ω_2 generan el plano tangente a dicha superficie y la función vectorial ω_3 es el vector normal a dicho plano, por lo que podemos calcular los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental asociadas a \mathbf{x} , a partir del triedro móvil $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Estos coeficientes satisfacen un sistema de ecuaciones parciales, como se vió en la sección (4.1):

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_u = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \tilde{\mathbb{P}}, \quad (4.3.25)$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_v = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \tilde{\mathbb{Q}}, \quad (4.3.26)$$

Además en esta misma sección 4.1 se demostró que $\tilde{\mathbb{P}}$ y $\tilde{\mathbb{Q}}$ se expresan en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental (Proposición 4.1.3). Por el inciso (a) del del teorema (4.2.1) tenemos que $\tilde{\mathbb{P}}$ y $\tilde{\mathbb{Q}}$ satisfacen la ecuación

$$\tilde{\mathbb{P}}_v - \tilde{\mathbb{Q}}_u = [\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{Q}}].$$

Otra vez por el criterio de Frobenius (3.3.1) el sistema de ecuaciones (4.3.25) y (4.3.26) tiene solución única, a saber la función matricial $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$. Pero, por otra parte esta misma función es solución del sistema de ecuaciones (4.3.6) y (4.3.7) en el mismo conjunto abierto U . Por la unicidad de soluciones, se tiene que $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}$ y $\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$. Por una parte tenemos que las matrices $\tilde{\mathbb{P}}$ y $\tilde{\mathbb{Q}}$ se expresan en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental de la superficie $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U)$. Por otra parte se tiene que las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} se contruyeron usando de las funciones E, F, G, e, f, g . Más aún, el par de matrices \mathbb{P}, \mathbb{Q} es construido usando las mismas ecuaciones que nos dan de manera explícita al par $\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{Q}}$. Por lo tanto, las funciones E, F, G y e, f, g son los coeficientes de la primer y segunda forma fundamental de la superficie $\mathbf{x}(U)$, asociados a la parametrización \mathbf{x} .

Resumen 1 *La prueba del inciso (b) del teorema (4.2.1) quedó dividida en tres pasos. En el Paso 1 se utilizaron las funciones E, F, G, e, f, g que cumplen las hipótesis del teorema. Como queremos demostrar que existe una superficie tal que los coeficientes de sus formas fundamentales sean precisamente las funciones que mencionamos arriba, estas funciones junto con una parametrización de la superficie deben de satisfacer las ecuaciones de Gauss y Weingarten (4.3.6), (4.3.7). Para formar este sistema de ecuaciones, se construyó, a partir de las funciones E, F, G, e, f, g , la función matricial \mathbb{G} (4.3.1) y las funciones matriciales \mathbb{P} y \mathbb{Q} mediante las fórmulas (4.3.2), (4.3.3). Se supuso adicionalmente que las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} cumplen la condición de compatibilidad (4.3.4). Por el criterio de Frobenius el sistema (4.3.6), (4.3.7) tiene solución local única si y sólo si las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} satisfacen la ecuación de compatibilidad (4.3.4). Entonces existe una función matricial $\mathbb{V} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$, que es solución del sistema de ecuaciones parciales (4.3.6), (4.3.7). Dicha función \mathbb{V} tiene propiedades muy importantes para poder completar la prueba de este inciso. Estas propiedades fueron probadas en este paso y son: (1) El conjunto de vectores $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ (columnas de la matriz \mathbb{V}) forman una base para \mathbb{R}^3 . (2) El vector ω_3*

es ortogonal al subespacio (plano) generado por los vectores ω_1 y ω_2 . (3) Por último se tiene la siguiente identidad $(\omega_1)_v = (\omega_2)_u$. Debido a estas propiedades el conjunto de vectores $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ es un buen candidato para ser un triedro móvil de una superficie regular, es decir, en cada punto de dicha superficie su plano tangente estaría generado por los vectores ω_1, ω_2 y como vector normal a dicho plano estaría el vector ω_3 . En el **Paso 2** se quiere demostrar que existe una función vectorial suave $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que sus derivadas parciales sean precisamente las funciones ω_1 y ω_2 . Analíticamente esto es equivalente a plantear el sistema de ecuaciones parciales (4.3.22), (4.3.23). El cual, por el criterio de Frobenius, tiene solución si y solo si los vectores ω_1 y ω_2 satisfacen la ecuación de compatibilidad que en este caso es $(\omega_1)_v = (\omega_2)_u$. Ahora debemos probar que la solución al sistema (4.3.22), (4.3.23) es una parametrización y por tanto el conjunto $\mathbf{x}(U)$ es una superficie regular. Para ello, usando el Teorema de la Función Implícita (Teorema 1.2.2), demostramos que el conjunto $\mathbf{x}(U)$ es la gráfica de una función suave con lo cual inmediatamente es una superficie regular como lo establece la Proposición (2.2.1). En el **Paso 3** se demuestra que los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de la superficie regular $\mathbf{x}(U)$ asociados a la parametrización \mathbf{x} son las funciones E, F, G y e, f, g con las que iniciamos la demostración de este inciso. Por una parte tenemos por los Pasos 1 y 2 que la parametrización \mathbf{x} satisface el sistema (4.3.6), (4.3.7). Como \mathbf{x} es una parametrización de una superficie regular tenemos que esta función satisface las ecuaciones de Gauss y Weingarten (4.1.1)-(4.1.6) en donde los coeficientes que aparecen en estas ecuaciones son funciones que dependen de los coeficientes de las formas fundamentales. En forma matricial las ecuaciones de Gauss y Weingarten tiene la misma forma que el sistema (4.3.6), (4.3.7) y por unicidad de solución tenemos el resultado buscado.

4.3.3 Unicidad de la superficie.

Para finalizar con la sección y por consecuencia con la demostración del teorema, demostremos la unicidad de la superficie. Aclaremos un poco en qué consiste esta unicidad. En el inciso (c) del teorema (4.2.1) se establece la unicidad de la superficie salvo movimientos rígidos. Esto quiere decir que en el caso de tener dos superficies regulares tales que en sus respectivas parametrizaciones, los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental de ambas superficies son idénticos, entonces podemos construir un movimiento rígido (una rotación seguida de una traslación) tal que haga coincidir isométricamente una superficie en la otra. Para ver esto con más

detalle iniciemos con la prueba de esta última parte. Si tenemos dos superficies regulares \mathcal{M} y \mathcal{N} siempre podemos encontrar dos parametrizaciones \mathbf{x} y \mathbf{y} para cada una de las superficies cuya dominio de definición sea el mismo dominio abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ (Proposición 2.2.3). Supongamos entonces que tenemos dos parametrizaciones $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$ y $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathcal{N}$ tales que los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental asociados a esa parametrizaciones son idénticos. En el siguiente Lema se muestra como se puede construir un movimiento rígido tal que para un punto fijo $(u_0, v_0) \in U$ mapea isométricamente el plano tangente a \mathcal{M} en el punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ sobre el plano tangente a \mathcal{N} en $\mathbf{y}(u_0, v_0)$.

Lema 4.3.6 Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos superficies regulares con parametrizaciones $\mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{y}(u, v)$, respectivamente, definidas sobre el mismo dominio abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que ambas superficies \mathcal{M} y \mathcal{N} tienen a las funciones suaves E, F, G , y e, f, g como los coeficientes de sus respectivas formas fundamentales en todo U . Entonces, para un punto fijo $(u_0, v_0) \in U$, existe un movimiento rígido $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{A} \in \text{SO}(3), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \quad (4.3.27)$$

tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{y}(u_0, v_0)) &= \mathbf{x}(u_0, v_0), \\ \mathcal{F}(\mathbf{y}_u(u_0, v_0)) &= \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \\ \mathcal{F}(\mathbf{y}_v(u_0, v_0)) &= \mathbf{x}_v(u_0, v_0), \\ \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{N}}(u_0, v_0)) &= \mathbf{N}(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Demostración. Consideremos las parametrizaciones $\mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{y}(u, v)$ de las superficies \mathcal{M} y \mathcal{N} . Para un punto $(u_0, v_0) \in U$ fijo, definamos el vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ por

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}(u_0, v_0) - \mathbf{y}(u_0, v_0).$$

Como los conjuntos de vectores $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ y $\{\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v, \tilde{\mathbf{N}}\}$ forman una base para \mathbb{R}^3 , Podemos definir una transformación lineal \mathbf{T} de \mathbb{R}^3 en sí mismo por medio de estas bases, de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}\mathbf{y}_u(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0),$$

$$\mathbf{T}\mathbf{y}_v(u_0, v_0) = \mathbf{x}_v(u_0, v_0),$$

y

$$\mathbf{T}\tilde{\mathbf{N}}(u_0, v_0) = \mathbf{N}(u_0, v_0).$$

Como las normas de los vectores coordenadas y el ángulo entre ellos está determinado por los coeficientes de la primer forma fundamental de cada superficie, se sigue que \mathbf{T} es una rotación, por lo tanto la podemos representar matricialmente por una matriz $\mathbf{A} \in \text{SO}(3)$. Por último, definimos $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{a},$$

la cual satisface las condiciones que estamos buscando. ■

El Lema (4.3.6) es un resultado puntual, el cual establece que para cualesquiera dos superficies que tienen los mismos coeficientes para sus formas fundamentales, podemos tomar un punto fijo en uno de ellas y construir un movimiento rígido que mapea isométricamente el plano tangente en dicho punto al plano tangente en el punto correspondiente. Lo que resta es probar que este resultado se puede extender a una vecindad de dicho punto. Sin pérdida de generalidad podemos suponer ahora que tenemos dos superficies regulares las cuales contienen un punto en común y que los coeficientes de sus respectivas formas fundamentales son iguales en una vecindad de este punto. Bajo estas condiciones demostraremos que las dos superficies coinciden en un vecindad.

Lema 4.3.7 Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos superficies regulares con parametrizaciones $\mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{y}(u, v)$ respectivamente, definidas sobre el mismo dominio abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que ambas superficies \mathcal{M} y \mathcal{N} tienen a las funciones suaves E, F, G , y e, f, g como los coeficientes de sus respectivas formas fundamentales en todo U . Supongamos que existe un punto $(u_0, v_0) \in U$ en el cual

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u_0, v_0) &= \mathbf{y}(u_0, v_0), \\ \mathbf{x}_u(u_0, v_0) &= \mathbf{y}_u(u_0, v_0), \\ \mathbf{x}_v(u_0, v_0) &= \mathbf{y}_v(u_0, v_0), \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(u, v).$$

para todo $(u, v) \in U$

Demostración. Consideremos una curva regular $C : (u(t), v(t))$ definida en el abierto U y que pase por el punto (u_0, v_0) . La imagen de la curva C en $\mathbf{x}(u, v)$ satisface las ecuaciones

$$\mathbf{x}' = u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v, \tag{4.3.28}$$

$$\mathbf{x}'_u = u' \mathbf{x}_{uu} + v' \mathbf{x}_{uv}, \quad (4.3.29)$$

$$\mathbf{x}'_v = u' \mathbf{x}_{vu} + v' \mathbf{x}_{vv}, \quad (4.3.30)$$

En esta parte la notación \mathbf{x}' indica derivación con respecto al parámetro t . Si en las ecuaciones (4.3.28) y (4.3.29) reemplazamos a las segundas derivadas de \mathbf{x} por las primeras derivadas de dicha función usando las ecuaciones (4.1.1) a la (4.1.6) que aparecen en sección 4.1, y después al vector normal \mathbf{N} lo expresamos como el producto cruz de los vectores coordenados, el resultado es un conjunto de tres ecuaciones vectoriales diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\mathbf{x}' = f_1(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, t), \quad (4.3.31)$$

$$\mathbf{x}'_u = f_2(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, t), \quad (4.3.32)$$

$$\mathbf{x}'_v = f_3(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, t), \quad (4.3.33)$$

para las tres funciones vectoriales $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}_u(t)$, $\mathbf{x}_v(t)$. La función f_1 está determinada únicamente por la curva C , mientras que las funciones f_2 y f_3 dependen de la curva C y de las funciones E, F, G , y e, f, g . Análogamente, podemos hacer lo mismo con la imagen de la curva C bajo la parametrización $\mathbf{y}(u, v)$ de la superficie \mathcal{N} . En consecuencia, obtendríamos el mismo sistema de ecuaciones diferenciales (4.3.31), (4.3.32), (4.3.33) salvo que las funciones incógnitas en este caso son los vectores $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}_u(t)$, $\mathbf{y}_v(t)$. Como estos vectores coinciden con $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}_u(t)$, $\mathbf{x}_v(t)$ en el punto (u_0, v_0) , tenemos por el Teorema de Existencia y Unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias (Teorema 1.2.1), que estos vectores son iguales para todo t . De esta manera, como las imágenes de todas las curvas regulares definidas en U coinciden en las dos superficies, entonces estas superficies debe de ser iguales en todo U y con esto tenemos el resultado deseado. ■

4.4 Ecuaciones de Gauss-Codazzi en coordenadas especiales.

En la Sección (2.5) vimos que para ciertos tipos de coordenadas como las ortogonales y de líneas de curvatura, las formas fundamentales toman expresiones más simples. Como la ecuación de Gauss-Codazzi es una ecuación para los coeficientes de las formas fundamentales, en esta Sección veremos como se ven afectadas las ecuaciones de Gauss-Codazzi en este tipo de coordenadas especiales.

4.4.1 Coordenadas ortogonales.

Sea \mathcal{M} una superficie regular y E, F y G los coeficientes de la primera forma fundamental que corresponde a una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$. Supongamos que las coordenadas locales (u, v) son *ortogonales*, es decir,

$$F = 0, \quad E > 0 \text{ y } G > 0.$$

Consideremos el triedro móvil *ortonormal* a \mathcal{M} que corresponde a la parametrización ortogonal:

$$\omega_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \quad \omega_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}, \quad \omega_3 = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Ahora plantemos el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_u = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{P},$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_v = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{Q}.$$

Como la matriz $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ es ortogonal, entonces \mathbb{P} y \mathbb{Q} son matrices anti-simétricas. Mas aún sus componente están dadas por:

$$p_{ij} = \langle (\omega_j)_u, \omega_i \rangle, \quad q_{ij} = \langle (\omega_j)_v, \omega_i \rangle.$$

Para detalles ver, en el Capítulo 1, la Proposición (1.3.8).

Ilustremos lo anterior calculando la componente p_{12} ,

$$\begin{aligned} \langle (\omega_1)_u, \omega_1 \rangle &= \left\langle \left(\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \frac{\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle}{\sqrt{EG}} \\ &= \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_u - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle}{\sqrt{EG}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}E_v}{\sqrt{EG}} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}. \end{aligned}$$

Con cálculos similares podemos encontrar las demás componentes de las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} , las cuales toman la forma:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} & -\frac{e}{\sqrt{E}} \\ -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} & 0 & -\frac{f}{\sqrt{G}} \\ \frac{e}{\sqrt{E}} & \frac{f}{\sqrt{G}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{F}} & -\frac{f}{\sqrt{E}} \\ \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{F}} & 0 & -\frac{g}{\sqrt{G}} \\ \frac{f}{\sqrt{E}} & \frac{g}{\sqrt{G}} & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que para calcular la ecuación de Gauss-Codazzi (4.3.4) de una superficie parametrizada por coordenadas ortogonales, solamente necesitamos calcular las componentes (21), (31) y (32) de la ecuación

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}].$$

Al hacer los cálculos obtenemos:

$$-\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v - \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u = \frac{eg - f^2}{\sqrt{EG}}, \quad (4.4.1)$$

$$\left(\frac{e}{\sqrt{E}}\right)_v - \left(\frac{f}{\sqrt{E}}\right)_u = \frac{f G_u}{\sqrt{EG}} + \frac{g E_v}{G}, \quad (4.4.2)$$

$$\left(\frac{f}{\sqrt{G}}\right)_v - \left(\frac{g}{\sqrt{G}}\right)_u = -\frac{e G_u}{E} - \frac{f E_v}{\sqrt{EG}}. \quad (4.4.3)$$

La ecuación (4.4.1) es la ecuación de Gauss y las ecuaciones de (4.4.2), (4.4.3) son las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi. Recordemos que la curvatura Gaussiana en este caso es igual a

$$K = \frac{eg - f^2}{EG},$$

y por tanto tenemos que

$$K = -\frac{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v - \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u}{\sqrt{EG}}.$$

Como ya había sido comentado, la ecuación de Gauss-Codazzi toma una expresión muy simple cuando trabajamos con coordenadas ortogonales. Pero, ¿es siempre posible encontrar una parametrización ortogonal para una superficie en \mathbb{R}^3 ? Esta pregunta puede ser contestada usando el Teorema (2.2.5). El teorema dice que si tenemos dos campos vectoriales linealmente independientes $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ en una superficie, entonces podemos encontrar una parametrización $\phi(w, z)$ tal que ϕ_w, ϕ_z son paralelos a $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ respectivamente.

Dada una parametrización arbitraria $\mathbf{x}(u, v)$ de una superficie \mathcal{M} , podemos aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a los vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ para construir un campo vectorial ortonormal suave:

$$\omega_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \quad (4.4.4)$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{E}(\mathbf{x}_v - \frac{F}{E}\mathbf{x}_u)}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (4.4.5)$$

Por el teorema (2.2.5), existe una nueva parametrización $\tilde{\mathbf{x}}(w, z)$ tal que $\tilde{\mathbf{x}}_w, \tilde{\mathbf{x}}_z$ son paralelos a ω_1, ω_2 . En este caso la primera forma fundamental escrita en las estas coordenadas tiene la forma:

$$\tilde{E} dw^2 + \tilde{G} dz^2.$$

Aquí, \tilde{E}, \tilde{G} son los coeficientes de la primera forma fundamental asociada a la parametrización $\tilde{\mathbf{x}}$. A pesar de esto, en general no es posible encontrar una parametrización $\tilde{\mathbf{x}}(w, z)$ tal que ω_1 y ω_2 (4.4.4), (4.4.5) sean los vectores coordenados de $\tilde{\mathbf{x}}_w$ y $\tilde{\mathbf{x}}_z$, por que si esto fuera posible entonces la primera forma fundamental de la superficie sería $\mathbf{I} = dw^2 + dz^2$, lo cual implica que la curvatura Gaussiana debe de ser a cero.

4.4.2 Coordenadas de líneas de curvatura.

En esta parte tenemos el propósito de mostrar que existe una parametrización de *coordenadas de líneas de curvatura*, es decir, aquellas coordenadas que son paralelas a las direcciones principales de la superficie, y después estudiar la ecuación de Gauss-Codazzi en este tipo de coordenadas. Supongamos que \mathcal{M} es una superficie regular en \mathbb{R}^3 , $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathcal{M}$ es una parametrización y $\mathbf{p}_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ es un punto *no umbilical*. Esto significa que el operador $d\mathbf{N}_{\mathbf{p}_0}$ tiene 2 valores propios distintos. Como $d\mathbf{N}$ es suave, existe un conjunto abierto U_0 de U que contiene a (u_0, v_0) tal que $\mathbf{y}(u, v)$ no tiene puntos umbilicales en todo el subconjunto abierto U_0 . Haciendo uso del álgebra lineal podemos escribir las fórmulas de los dos vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ de $d\mathbf{N}$ en U_0 y ver que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son funciones suaves en U_0 . Como $d\mathbf{N}$ es autoadjunto con dos valores propios distintos, \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son perpendiculares. Por el teorema (2.2.5), podemos encontrar un cambio de coordenadas tal que los vectores coordenados \mathbf{y}_u y \mathbf{y}_v sean paralelos a \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . Esto significa que existe un parametrización $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$, tal que \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son paralelos a \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 respectivamente. Como $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$, entonces en esta nuevas coordenadas se tiene que $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$. Pero como \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son las direcciones

principales, el operador $d\mathbf{N}$ es *diagonizable* con respecto a la base dada por sus vectores propio. Por tanto $f = 0$. En otra palabras, las dos formas **I, II** son diagonizables. Tal parametrización es llamada *coordenadas de líneas de curvatura*. Con esto hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 4.4.1 *Si $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie y $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{M}$ es un punto no umbilical, entonces existe una parametrización de líneas de curvatura $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathcal{M}$ cerca de \mathbf{p}_0 , es decir,*

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad f = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = 0,$$

lo que es equivalente a

$$\mathbf{I} = Edu^2 + Gdv^2, \quad \mathbf{II} = e du^2 + g dv^2.$$

El siguiente resultado establece la forma que tiene la ecuación de Gauss-Codazzi (4.3.4) para un sistema de coordenadas de líneas de curvatura.

Teorema 4.4.2 *Supóngase que $\mathbf{x}(u, v)$ es una parametrización de coordenadas de líneas de curvatura de una superficie regular $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ con sus forma fundamentales **I, II** dadas por la ecuación (4.4.16) del teorema (4.4.2). Entonces las componentes de la ecuación de Gauss-Codazzi (4.2.1) son:*

$$\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u = -\frac{eg}{\sqrt{EG}}, \quad (4.4.6)$$

$$\left(\frac{e}{\sqrt{E}} \right)_v = \frac{gE_v}{G}, \quad (4.4.7)$$

$$\left(\frac{g}{\sqrt{G}} \right)_v = \frac{eG_v}{E}. \quad (4.4.8)$$

Demostración. Formemos la base ortonormal

$$\omega_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \quad \omega_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}, \quad \omega_3 = \omega_1 \times \omega_2,$$

definamos las matrices $(p_{ij}) = (\langle (\omega_i)_u, \omega_j \rangle)$ y $(q_{ij}) = (\langle (\omega_i)_v, \omega_j \rangle)$ y formemos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_u = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \begin{bmatrix} 0 & \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} & -\frac{e}{\sqrt{E}} \\ -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} & 0 & 0 \\ \frac{e}{\sqrt{E}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4.9)$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_v = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} & 0 \\ \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} & 0 & -\frac{g}{\sqrt{G}} \\ 0 & \frac{g}{\sqrt{G}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4.10)$$

Al aplicar la ecuación de Gauss-Codazzi a las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} (4.3.4),

$$\mathbb{P}_v - \mathbb{Q}_u = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}],$$

y como la matrices son antisimétricas sólo tenemos que calcular las componentes (21), (31) y (32) de la ecuación y se tiene el resultado del teorema. ■

Aquí, la ecuación (4.4.6) es la ecuación del teorema de Gauss y las ecuaciones de Peterson-Mainardi-Codazzi son precisamente (4.4.7) y (4.4.8)

4.5 Superficies con curvatura Gaussiana constante negativa

En esta última parte, vamos a probar que para una superficie \mathcal{M} en \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana constante y negativa se puede encontrar una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$, que sea de líneas de curvatura y que el ángulo θ entre líneas asintóticas satisfaga la *ecuación de sine-Gordon (ESG)*:

$$\theta_{uu} - \theta_{vv} = \text{sen } \theta. \quad (4.5.1)$$

La ecuación sine-Gordon tiene diversas aplicaciones en un amplio rango de la Física y la Matemática, las soluciones de esta ecuación (4.5.1) son llamadas *solitones*. Para ver varias de estas aplicaciones de la ecuación de sine-Gordon se puede consultar [16]. Más aún, la ecuación de Gauss-Codazzi (4.2.1) asociada a esta parametrización se reduce a sólo una ecuación, en este caso, sine-Gordon. En efecto, se prueba que existe una correspondencia *uno a uno entre las soluciones locales θ (ESG) con $\text{Im}(\theta) \subset (0, \pi)$ y las superficies regulares en \mathbb{R}^3 con $K = -1$, salvo movimientos rígidos.*

Sea \mathcal{M} una superficie en \mathbb{R}^3 con $K = -1$. Sean λ_1 y λ_2 las dos curvaturas principales. Como $K = \lambda_1 \lambda_2 = -1$, entonces $\lambda_1 \neq \lambda_2$, es decir, no tiene puntos umbilicales. Por lo tanto, podemos encontrar una parametrización de líneas de curvatura $\mathbf{x}(u, v)$ en \mathcal{M} . Supongamos que las formas fundamentales son $\mathbf{I} = Edu^2 + Gdv^2$, $\mathbf{II} = e du^2 + f dv^2$. Entonces las curvaturas principales son $\lambda_1 = \frac{e}{E}$, $\lambda_2 = \frac{f}{G}$. Pero como $\lambda_1 \lambda_2 = -1$, entonces podemos suponer que

existe una función suave φ tal que

$$\lambda_1 = \frac{e}{E} = \tan \varphi, \quad \lambda_2 = \frac{g}{G} = -\cot \varphi,$$

es decir,

$$\frac{e}{\sqrt{E}} = \sqrt{E} \tan \varphi, \quad \frac{g}{\sqrt{G}} = -\sqrt{G} \cot \varphi. \quad (4.5.2)$$

Como E, G, e, g satisfacen las ecuaciones de Gauss-Codazzi, al sustituir (4.5.1) en (4.4.7) y (4.4.8) obtenemos:

$$(\sqrt{E} \tan \varphi)_v = -\cot \varphi (\sqrt{E})_v, \quad (4.5.3)$$

$$(-\sqrt{G} \cot \varphi)_u = \tan \varphi (\sqrt{G})_u. \quad (4.5.4)$$

Desarrollando las parciales en la ecuación (4.5.3) obtenemos

$$(\sqrt{E})_v \tan \varphi + \sqrt{E} (\sec^2 \varphi) \varphi_v = -\cot \varphi (\sqrt{E})_v,$$

lo cual implica que

$$(\tan \varphi + \cot \varphi) (\sqrt{E})_v = -\sqrt{E} (\sec^2 \varphi) \varphi_v.$$

De donde se obtiene

$$\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{E}} = -\frac{\sen \varphi}{\cos \varphi} \varphi_v.$$

Haciendo cálculos similares con la ecuación (4.5.4) tenemos:

$$\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}} = \frac{\cos \varphi}{\sen \varphi} \varphi_u.$$

En otras palabras, tenemos

$$(\log \sqrt{E})_v = (\log \cos \varphi)_v, \quad (\log \sqrt{G})_u = (\log \sen \varphi)_u.$$

Por lo tanto existen funciones suaves $c_1(u)$ y $c_2(v)$ tal que

$$\log \sqrt{E} = \log \cos \varphi + c_1(u), \quad \log \sqrt{G} = \log \sen \varphi + c_2(v),$$

es decir,

$$\sqrt{E} = e^{c_1(u)} \cos \varphi, \quad \sqrt{G} = e^{c_2(v)} \sen \varphi$$

Como I es definido positivo, \sqrt{E}, \sqrt{G} nunca se anulan. Entonces podemos asumir que tanto $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$ son positivos, y en consecuencia $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Ahora tomándoo un cambio de coordenadas $(w(u), z(v))$ tal que

$$\frac{dw}{du} = e^{c_1(u)}, \quad \frac{dz}{dv} = e^{c_2(v)}.$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} = \mathbf{x}_u e^{-c_1(u)},$$

entonces $\|\mathbf{x}_w\| = \cos \varphi$. Mediante un cálculo similar podemos obtener $\|\mathbf{x}_z\| = \sin \varphi$. Como w es una función que sólo depende de u y a su vez z es una función sólo de v , entonces \mathbf{x}_w es paralelo a \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_z es paralelo a \mathbf{x}_v . Entonces la parametrización $\mathbf{x}(w, z)$ es también una sistema de coordenadas de líneas de curvatura y los coeficientes de la segunda forma fundamental II en (w, z) son

$$e = \tan \varphi \cos^2 \varphi = \sin \varphi \cos \varphi, \quad g = -\cot \varphi \sin^2 \varphi = -\sin \varphi \cos \varphi.$$

Hasta este punto hemos probado una parte de la siguiente proposición.

Proposición 4.5.1 *Sea M una superficie regular en \mathbb{R}^3 con $K = -1$. Entonces existe una parametrización local de coordenadas de líneas de curvatura (w, z) tal que las formas fundamentales en estas coordenadas son:*

$$I = \cos^2 \varphi dw^2 + \sin^2 \varphi dz^2, \quad II = \sin \varphi \cos \varphi (dw^2 - f dz^2), \quad (4.5.5)$$

donde 2φ es el ángulo entre dos direcciones asintóticas. Más aún, la ecuación de Gauss-Codazzi es equivalente a la ecuación sine-Gordon

$$\varphi_{ww} - \varphi_{zz} = \sin \varphi \cos \varphi. \quad (4.5.6)$$

Demostración. Anteriormente se probó que se cumple la ecuación (4.5.5). Para terminar la parte que falta, calculemos la ecuación de Gauss-Codazzi (4.4.7), (4.4.8) que debe satisfacer la parametrización de líneas de curvatura. Para esto formemos una base ortonormal a partir de la parametrización $\mathbf{x}(w, z)$.

$$\omega_1 = \frac{\mathbf{x}_w}{\cos \varphi}, \quad \omega_2 = \frac{\mathbf{x}_z}{\sin \varphi}, \quad \omega_3 = \frac{\mathbf{x}_w \times \mathbf{x}_z}{\|\mathbf{x}_w \times \mathbf{x}_z\|}.$$

Como ya es sabido, estos vectores satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_w = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{P},$$

T. 1051

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_z = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{Q}.$$

Aquí las matrices \mathbb{P} y \mathbb{Q} están dadas por las fórmulas (4.4.9) y (4.4.10) que se usan cuando (w, z) son coordenadas de líneas de curvatura. Como $\sqrt{E} = \cos \varphi$, $\sqrt{G} = \sin \varphi$, y $e = -g = \sin \varphi \cos \varphi$, tenemos:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & -\sin \varphi \\ \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_w & 0 \\ \varphi_w & 0 & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.7)$$

Por el inciso (a) del Teorema (4.2.1) \mathbb{P} y \mathbb{Q} satisfacen la ecuación de Gauss-Codazzi

$$\mathbb{P}_z - \mathbb{Q}_w = [\mathbb{P}, \mathbb{Q}].$$

De esta última ecuación sólo debemos calcular las componentes (13) y (12). Notemos que al calcular las componente de (13),(23) de Gauss-Codazzi obtenemos una identidad. Por último, al calcular la ecuación del Teorema de Gauss (dada por la componente (12)) obtenemos

$$\varphi_{ww} - \varphi_{zz} = \sin \varphi \cos \varphi.$$

Como $\mathbf{II} = \sin \varphi \cos \varphi (dw^2 - dz^2)$, $\mathbf{x}_w \pm \mathbf{x}_z$ son direcciones asintóticas. Usando I vemos que $\mathbf{x}_w \pm \mathbf{x}_z$ son vectores unitarios. Al calcular el siguiente producto interior tenemos

$$\langle \mathbf{x}_w + \mathbf{x}_z, \mathbf{x}_w - \mathbf{x}_z \rangle = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi,$$

de esto se sigue que el ángulo entre las direcciones asintóticas $\mathbf{x}_w + \mathbf{x}_z$ y $\mathbf{x}_w - \mathbf{x}_z$ es 2φ . ■

Una consecuencia de la demostración de la Proposición (4.5.1) es el siguiente corolario.

Corolario 4.5.2 Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} funciones matriciales definidas como en (4.5.7). Entonces el sistema

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_w = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{P},$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_z = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{Q}.$$

tiene solución si y solo si el ángulo φ entre dos curvas asintóticas satisface la ESG (4.5.1).

Como consecuencia del Teorema Fundamental de Superficies (4.2.1) y el corolario (4.5.2) tenemos que el inverso de la Proposición (4.5.1) es cierto.

Proposición 4.5.3 Sean $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ una solución de la ESG (4.5.6), $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$, $(u_0, v_0) \in U$, y $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ una base ortonormal. Sean $\mathbb{P}, \mathbb{Q} : U \rightarrow \text{SO}(3)$ funciones matriciales suaves definidas como en (4.5.7). Entonces existe un subconjunto abierto U_0 de (u_0, v_0) en U y una única función matricial

$$[\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2, \omega_3] : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times O(3)$$

que es solución para el siguiente sistema de ecuaciones

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_u = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{P},$$

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]_v = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \mathbb{Q}.$$

$$\mathbf{x}_u = \cos \varphi \omega_1,$$

$$\mathbf{x}_v = \sin \varphi \omega_2,$$

$$\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}_0, \quad \omega_1(u_0, v_0) = \mathbf{e}_1, \quad \omega_2(u_0, v_0) = \mathbf{e}_2.$$

Más aún, si $\sin \varphi \cos \varphi > 0$ en U_0 , entonces $\mathbf{x}(U_0)$ es una superficie regular con $K = -1$ cuyas formas fundamentales asociadas a dicha superficie son de la forma (4.5.5).

En la última parte de la Proposición (4.5.3) se establece una correspondencia *uno a uno* entre las soluciones φ de la ESG (4.5.1) y una superficie regular de \mathbb{R}^3 con $K = -1$, salvo movimientos rígidos.

Resumiendo, si tenemos una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ de líneas de curvatura dada como en la Proposición (4.5.1), para una superficie regular con $K = -1$, y φ la correspondiente solución de la ESG (4.5.1). Las coordenadas (u, v) son el espacio-tiempo. Se ha probado ya que $\mathbf{x}_u \pm \mathbf{x}_v$ son direcciones asintóticas. Si hacemos el cambio de coordenadas $u = s + t, v = s - t$, entonces $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t = \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v$; y las formas fundamentales escritas en las coordenadas (s, t) son :

$$\mathbf{I} = ds^2 + 2 \cos 2\varphi ds dt + dt^2,$$

$$\mathbf{II} = \sin 2\varphi ds dt,$$

y la ESG (4.5.6) es

$$2\varphi_{uv} = \sin 2\varphi.$$

Un sistema de coordenadas locales $\mathbf{x}(u, v)$ para una superficie en \mathbb{R}^3 es llamado un *sistema de coordenadas asintóticas* si $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ son paralelos a las direcciones asintóticas, es decir, $e = g = 0$. Nótese que las coordenadas (s, t) construidas sobre una superficie en \mathbb{R}^3 con $K = -1$ es un sistema de coordenadas asintóticas y s, t son parámetros de longitud de arco. Este sistema de coordenadas es llamado el *sistema de coordenadas Tchebyshef para superficie en \mathbb{R}^3 con $K = -1$* .

Apéndice

En este apéndice estudiaremos con detalle las propiedades de los operadores lineales que aparecen en la sección 4.1. Cabe aclarar que aquí tomaremos como un hecho que estos operadores son lineales por ser algo que resulta casi inmediato de su definición .

A.1 Operadores.

Consideremos los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$, con " $\langle \rangle$ " el producto interior usual y $GL(n)$ el conjunto de las matrices no singulares de $n \times n$.

Para cada matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in GL(3),$$

se define el operador lineal $l : GL(3) \rightarrow GL(9)$ por:

$$l(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_3 & a_{12}\mathbb{I}_3 & a_{13}\mathbb{I}_3 \\ a_{21}\mathbb{I}_3 & a_{22}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 \\ a_{31}\mathbb{I}_3 & a_{32}\mathbb{I}_3 & a_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1.1})$$

Aquí \mathbb{I}_3 denota la matriz identidad de 3×3 .

Proposición A.1.1 *El operador l (A.1.1) posee las siguientes propiedades:*

- (i) l es inyectivo en su imagen.
- (ii) $l(\mathbf{AB}) = l(\mathbf{A})l(\mathbf{B})$.
- (iii) $l([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) = [l(\mathbf{A}), l(\mathbf{B})]$
- (iv) $l(\mathbf{A}^{-1}) = l(\mathbf{A})^{-1}$.

$$(v) \quad l(\mathbf{A}^T) = l(\mathbf{A})^T$$

(vi) . Si \mathbf{A} es una función matricial suave, en las variables u y v , entonces:

$$l(\mathbf{A}_u) = l(\mathbf{A})_u \quad \text{y} \quad l(\mathbf{A}_v) = l(\mathbf{A})_v.$$

Demostración. (i) Es suficiente probar que el núcleo de l es la matriz $\mathbf{0}$ de 3×3 . Supongamos que la matriz \mathbf{A} está en el núcleo de l . Entonces

$$l(\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \text{ en } GL(9),$$

por otra parte,

$$l(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_3 & a_{12}\mathbb{I}_3 & a_{13}\mathbb{I}_3 \\ a_{21}\mathbb{I}_3 & a_{22}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 \\ a_{31}\mathbb{I}_3 & a_{32}\mathbb{I}_3 & a_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Lo cual implica que $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, y por tanto el operador l es inyectivo en su imagen.

(ii) Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] \in GL(3).$$

Aquí, por conveniencia, los \mathbf{a}_i son vectores renglón y los \mathbf{b}_j son vectores columna en \mathbb{R}^3 . De esta forma podemos escribir el producto como $\mathbf{AB} = [\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \rangle]$. Así

$$\begin{aligned} l(\mathbf{AB}) &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbb{I}_3 \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbb{I}_3 \\ \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbb{I}_3 & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \\ &= l(\mathbf{A})l(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

(iii) Recordemos que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$, entonces

$$\begin{aligned} l([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) &= l(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) \\ l([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) &= l(\mathbf{AB}) - l(\mathbf{BA}), \end{aligned}$$

por (ii) se tiene

$$\begin{aligned} l([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) &= l(\mathbf{A})l(\mathbf{B}) - l(\mathbf{B})l(\mathbf{A}) \\ &= [l(\mathbf{A}), l(\mathbf{B})]. \end{aligned}$$

(iv) Como $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, si aplicamos el operador l a esta igualdad, tenemos:

$$l(\mathbf{A})l(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbb{I}.$$

Si multiplicamos por $l(\mathbf{A})^{-1}$ en ambos lados:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{A})^{-1}l(\mathbf{A})l(\mathbf{A}^{-1}) &= l(\mathbf{A})^{-1}\mathbb{I} \\ l(\mathbf{A}^{-1}) &= l(\mathbf{A})^{-1}. \end{aligned}$$

(v) Probemos que $l(\mathbf{A}) = l(\mathbf{A}^T)^T$.

$$l(\mathbf{A}^T) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_3 & a_{21}\mathbb{I}_3 & a_{31}\mathbb{I}_3 \\ a_{12}\mathbb{I}_3 & a_{22}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 \\ a_{13}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 & a_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$l(\mathbf{A}^T)^T = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_3 & a_{12}\mathbb{I}_3 & a_{13}\mathbb{I}_3 \\ a_{21}\mathbb{I}_3 & a_{22}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 \\ a_{31}\mathbb{I}_3 & a_{23}\mathbb{I}_3 & a_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix} = l(\mathbf{A}).$$

(vi) Sin pérdida de generalidad, es suficiente probar que se cumple esta propiedad para una función matricial suave $\mathbf{B} : \mathbb{R} \rightarrow GL(3)$, dada por $\mathbf{B}(t) = [b_{ij}(t)]$. Recuérdese que $\mathbf{B}_t = \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}b_{ij}(t) \right]$. Primero notemos que $l(\mathbf{B}(t))$ es una función matricial suave en $GL(9)$. Mediante unos simples cálculos se tiene

$$\begin{aligned} l(\mathbf{B}_t) &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}b_{11}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{12}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{13}\mathbb{I}_3 \\ \frac{d}{dt}b_{21}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{22}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{23}\mathbb{I}_3 \\ \frac{d}{dt}b_{31}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{23}\mathbb{I}_3 & \frac{d}{dt}b_{33}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \\ &= l(\mathbf{B})_t. \end{aligned}$$

■

El siguiente operador tiene una propiedad muy interesante, la cual nos permite pasar de un sistema vectorial a un sistema matricial. Esta es la propiedad más importante para la demostración del teorema fundamental (4.2.1). Sea $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_9)^T \in \mathbb{R}^9$, un vector columna. Se define el operador lineal $L : \mathbb{R}^9 \rightarrow GL(3)$ por

$$L(\mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

Proposición A.1.2 *El operador L (A.1.2) posee las siguientes propiedades:*

- (i) L es inyectivo en su imagen.
(ii) Si $\mathbf{X}(u,v)$ es una función vectorial suave en \mathbb{R}^9 , entonces

$$L(\mathbf{X}_u) = L(\mathbf{X})_u \quad \text{y} \quad L(\mathbf{X}_v) = L(\mathbf{X})_v.$$

- (iii) Para cada $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^9$, que satisfacen la ecuación vectorial:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \mathbb{I}_3 & a_2 \mathbb{I}_3 & a_3 \mathbb{I}_3 \\ a_4 \mathbb{I}_3 & a_5 \mathbb{I}_3 & a_6 \mathbb{I}_3 \\ a_7 \mathbb{I}_3 & a_8 \mathbb{I}_3 & a_9 \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación se transforma bajo el operador L en la ecuación matricial:

$$L(\mathbf{Y}) = L(\mathbf{X})\mathbf{A},$$

aquí

$$\mathbf{A} = [l^{-1}(\mathbf{A})]^T,$$

donde l^{-1} es la inversa del operador l (A.1.1).

Demostración. (i) Supongamos que el vector \mathbf{X} está en el núcleo de L , es decir $L(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ en $GL(9)$. Por otra parte

$$L(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix},$$

esto implica que $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^9 y por lo tanto L es inyectivo en su imagen.

(ii) Es suficiente probar $L(\mathbf{X}_u) = L(\mathbf{X})_u$, la otra parte se prueba de manera similar. Otra vez aquí $\mathbf{X}_u = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{X}$, entonces

$$L(\mathbf{X}_u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} x_1 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} x_4 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} x_7 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} x_2 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} x_5 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} x_8 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} x_3 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} x_6 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} x_9 \end{bmatrix} L(\mathbf{X})_u.$$

- (iii) Supongamos que $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^9$, y satisfacen la ecuación vectorial

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

con

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1 \mathbb{I}_3 & a_4 \mathbb{I}_3 & a_7 \mathbb{I}_3 \\ a_2 \mathbb{I}_3 & a_5 \mathbb{I}_3 & a_8 \mathbb{I}_3 \\ a_3 \mathbb{I}_3 & a_6 \mathbb{I}_3 & a_9 \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Definamos los vectores renglón $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_4, x_7)$, $\mathbf{x}_2 = (x_2, x_5, x_8)$, $\mathbf{x}_3 = (x_3, x_6, x_9)$, $\mathbf{a}_1 = (a_1, a_4, a_7)$, $\mathbf{a}_2 = (a_2, a_5, a_8)$, $\mathbf{a}_3 = (a_3, a_6, a_9)$. Entonces

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_3 \rangle \end{pmatrix},$$

Entonces

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Y}) &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_3 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_3 \rangle & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{x}_3 \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix}^T \\ &= L(\mathbf{X})\mathbb{A}. \end{aligned}$$

Aquí

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix}^T \\ &= [l^{-1}(\mathcal{A})]^T. \end{aligned}$$

■

Bibliografía

- [1] V. I. Arnol'd. *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer.
- [2] P.O. Boonet, *Mémoire sur la théorie des surfaces*, J. Ec. Polytechnique, Paris, 1848.
- [3] W. M. Boothby, *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1986.
- [4] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [5] M. P. do Carmo, *Differential forms and applications*, Springer, New York, 1994.
- [6] R. Flores E., Yu. Vorobjev, *Liner Hamiltonian Systems and symplectic Geometry*, Talleres Gráficos de la Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, 1998.
- [7] R. Flores E., *Reducibility of zero curvature equations*.
- [8] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*, secon edition, CRC Press, 1999.
- [9] C. Imaz, Zoenek Vorel, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Editorial Limusa, Mèxico D.F. 1975.
- [10] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems* Second edition Springer, 1996.
- [11] C. C. Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer, New York, 2002.
- [12] E. O. Roxin, *Ecuaciones diferenciales ordinarias y teoría de control*, Editorial universitaria de Buenos aires, Argentina, 1968.

-
- [13] M. Spivak, *Cálculo en Variedades*, Editorial Reverté, Barcelona, 1987.
 - [14] J. J. Stokér, *Differential Geometry*, Wiley, New York,
 - [15] D. J. Struik, *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar, Madrid.
 - [16] C. R., W.K, *Schief. Bäcklund and Darboux Transformations*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2002
 - [17] C. L. Terng, *Lecture Notes on Curves and Surfaces in \mathbb{R}^3* , Differential Geometry Computer Projects for NCTS Workshop, 2003